



Charge convexity and hairy black holes in AdS

石井 貴昭 (立教大学)

中山優さんとの共同研究

arXiv:2402.04552 [hep-th]

目次

1. イントロダクション：convexity (凸性)
2. セットアップ：AdS荷電スカラーモデル
3. 結果

目次

1. イントロダクション：convexity (凸性)
2. セットアップ：AdS荷電スカラーモデル
3. 結果

ブラックホールと熱力学

ブラックホールには熱力学的性質がある

Reissner-Nordstrom(-AdS)ブラックホール

- E: エネルギー (質量)
- T: 温度
- S: エントロピー ($\propto$ 面積 $A/4\pi G_N$)
- μ : U(1)化学ポテンシャル
- Q: U(1)電荷

$$dE = TdS + \mu dQ$$

熱力学の凸性

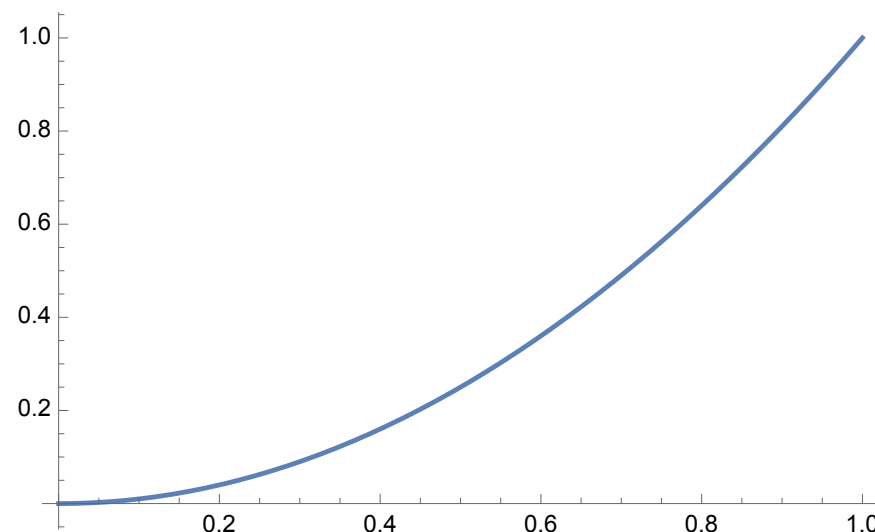
安定な熱力学ポテンシャルは示量変数(S,Qなど)について下に凸(convex)である。

(示強変数は上に凸)

下に凸： $E''(Q) \geq 0$

≡ 優加法的(superadditive) $E(Q_1 + Q_2) \geq E(Q_1) + E(Q_2)$

適当な条件で



例: $y = x^2$

$$(x_1 + x_2)^2 \geq x_1^2 + x_2^2$$

for $x_1, x_2 \geq 0$

Charge convexity conjecture

主張 Global U(1) を持つ CFT の共形次元 $\Delta(Q)$ は Q について下に凸

[Aharony-Palti]

$$\Delta(Q_1 + Q_2) \geq \Delta(Q_1) + \Delta(Q_2)$$

AdS/CFTが動機： $E_{\text{AdS}} \leftrightarrow \Delta_{\text{CFT}}$

$$E(Q_1 + Q_2) \geq E(Q_1) + E(Q_2)$$

RNAdSは解析的に凸性が成り立つ。

荷電スカラー場があるときは？

目次

1. イントロダクション：convexity (凸性)
2. セットアップ：AdS荷電スカラーモデル
3. 結果

セッティングアップ

漸近 Global AdS 時空の荷電スカラー系を考える

ホログラフィック超伝導模型($\Lambda < 0$)

$$S = \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |D_\mu \phi|^2 - m_\phi^2 |\phi|^2 \right)$$

静的球対称ansatz

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2$$

$$A_\mu dx^\mu = A_t(r)dt, \quad \phi = \phi(r)$$

U(1)荷電AdS解

AdS_{d+1} の荷電解について、 $T=0$ で電荷 Q が小さいときに $E(Q)$ を比較する。解析的に考える。

	スカラー $\phi=0$	$\phi \neq 0$
ホライズンなし	[$Q \neq 0$ の解は無い]	荷電ソリトン (ボソン星)
ブラックホール	極限 RNAdS	荷電 hairy BH

- $T=0 \rightarrow F=E-TS=E \rightarrow E(Q)$ を比較
- 3+1, 4+1 dimで小さい Q の解は既知 [Basu et. al.]

間話：Weak gravity conjecture

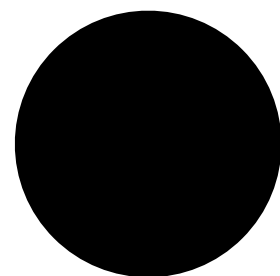
極限ブラックホールが蒸発できるように軽い場が**少なくとも一つ**あったほうがよいと主張されている。

[Arkani-Hamed, Motl-Nicolis-Vafa]

$$\frac{q}{m} > \frac{Q_{\text{RN(ext)}}}{E_{\text{RN(ext)}}}$$

WGC がないとき

やばそう

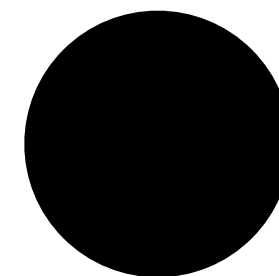


m, q

$$\frac{Q_{\text{RN(ext)}} - q}{E_{\text{RN(ext)}} - m} > \frac{Q_{\text{RN(ext)}}}{E_{\text{RN(ext)}}}$$

WGC があるとき

よい



m, q

$$\frac{Q_{\text{RN(ext)}} - q}{E_{\text{RN(ext)}} - m} < \frac{Q_{\text{RN(ext)}}}{E_{\text{RN(ext)}}}$$

AdS weak gravity conjecture

AdS版のWGC : $Q \rightarrow 0$ 極限でRNAdSよりも E/Q が小さい (軽い) 非BHの状態がある。

[c.f. Nakayama-Nomura]

この話では荷電ソリトンがその役割になる。

- AdS WGC が満たされている $\frac{E_{\text{soliton}}}{Q_{\text{soliton}}} < \frac{E_{\text{RN(ext)}}}{Q_{\text{RN(ext)}}}$

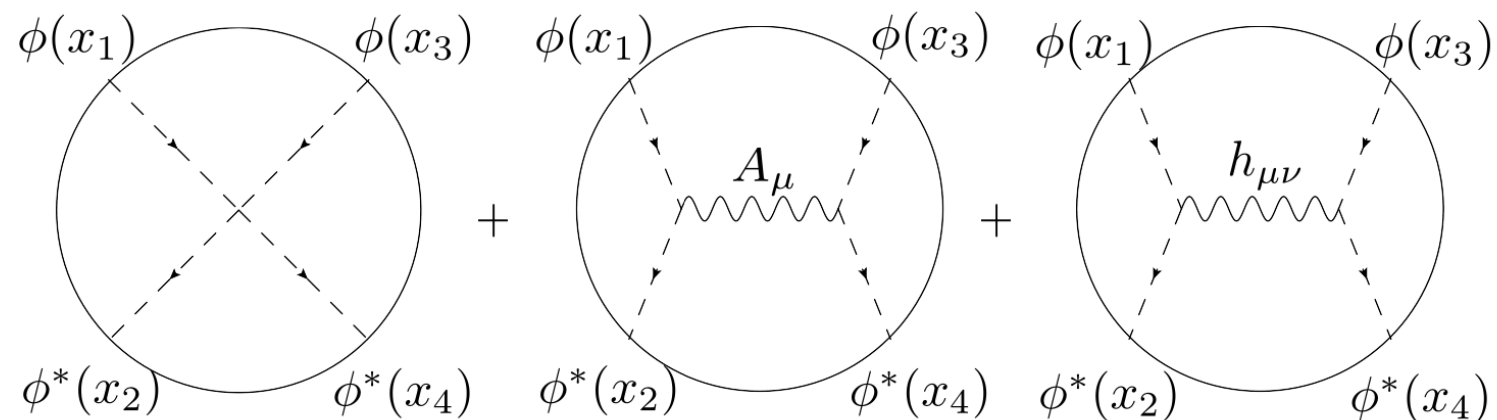
- 満たされていない $\frac{E_{\text{soliton}}}{Q_{\text{soliton}}} > \frac{E_{\text{RN(ext)}}}{Q_{\text{RN(ext)}}}$

Positive binding conjecture

（自己重力崩壊しないために）荷電スカラーの自己束縛エネルギーは **斥力 > 引力** という主張。

[Aharony-Palti]

束縛エネルギー $\gamma_{\text{grav}} + \gamma_{\text{photon}} + \gamma_{\text{scalar}} > 0$



[Fitzpatrick-Shih, Andriolo-Michel-Palti]

$$\frac{q}{m} > [\text{下限の値}] (\neq \text{WGC bound})$$

目次

1. イントロダクション：convexity (凸性)
2. セットアップ：AdS荷電スカラーモデル
3. 結果

荷電ソリトン vs RNAdS

E(Q)を比較する

RNAdS 厳密解を小さいテイラー展開

$$E = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{d-1}{d-2}} Q \left(1 + \frac{1}{2} \tilde{Q}^{\frac{2}{d-2}} - \frac{d^2}{8(d-2)^2} \tilde{Q}^{\frac{4}{d-2}} + \dots \right)$$

荷電ソリトン 一般の(d,Δ) の摂動形を作った

$$E = Q \left[\frac{\Delta}{e} + \frac{\Gamma(\Delta)^2 \Gamma(2\Delta + 1 - d/2)}{2 \Gamma(d/2) \Gamma(2\Delta) \Gamma(\Delta + 1 - d/2)^2} \times \left(1 - \frac{(d-2)\Delta^2(\Delta - d/2)}{(d-1)(\Delta - d/4)} \frac{\kappa^2}{e^2} \right) q + \dots \right]$$

$$\Delta(\Delta - d) = m_\phi^2 \quad \tilde{Q} \equiv \frac{\kappa Q}{\omega_{d-1} \sqrt{(d-1)(d-2)}} = \kappa q \sqrt{\frac{d-2}{d-1}}$$

1. AdS weak gravity conjecture

展開の0次: AdS WGC

Q→0極限でEを比較→AdS WGC

$$E_{RN} \simeq \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{d-1}{d-2}} Q, \quad E_{sol} \simeq \frac{\Delta}{e} Q$$

$E_{RN}=E_{sol}$ となる結合定数

$$e_c = \Delta \kappa \sqrt{\frac{d-2}{d-1}}$$

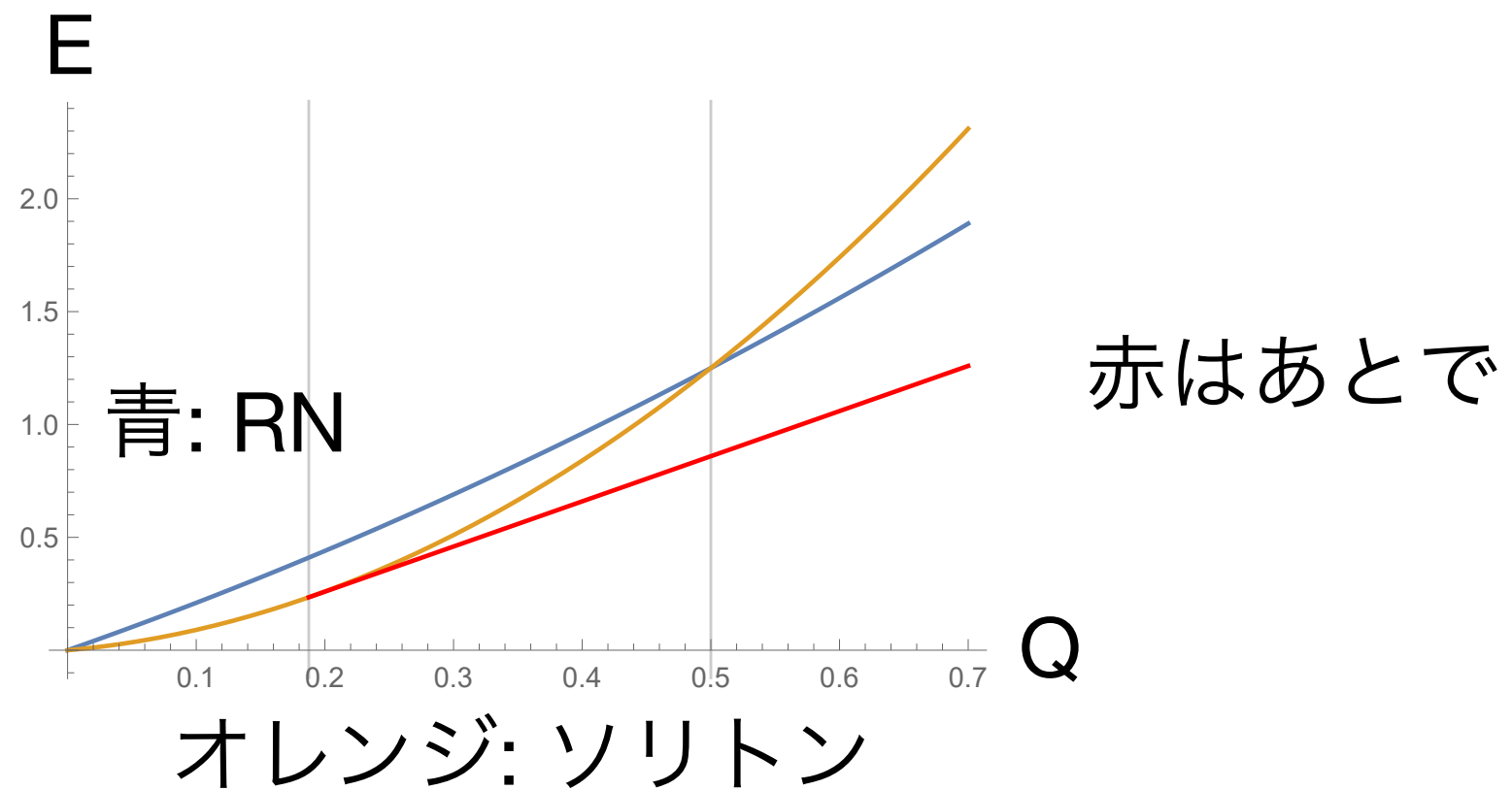
結果1

- $e > e_c$: $E_{sol} < E_{RN} \rightarrow$ AdS WGC を満たす
- $e < e_c$: $E_{sol} > E_{RN} \rightarrow$ 満たさない

$$e > e_c$$

$e > e_c$ では $Q \rightarrow 0$ で荷電ソリトンが最も軽い

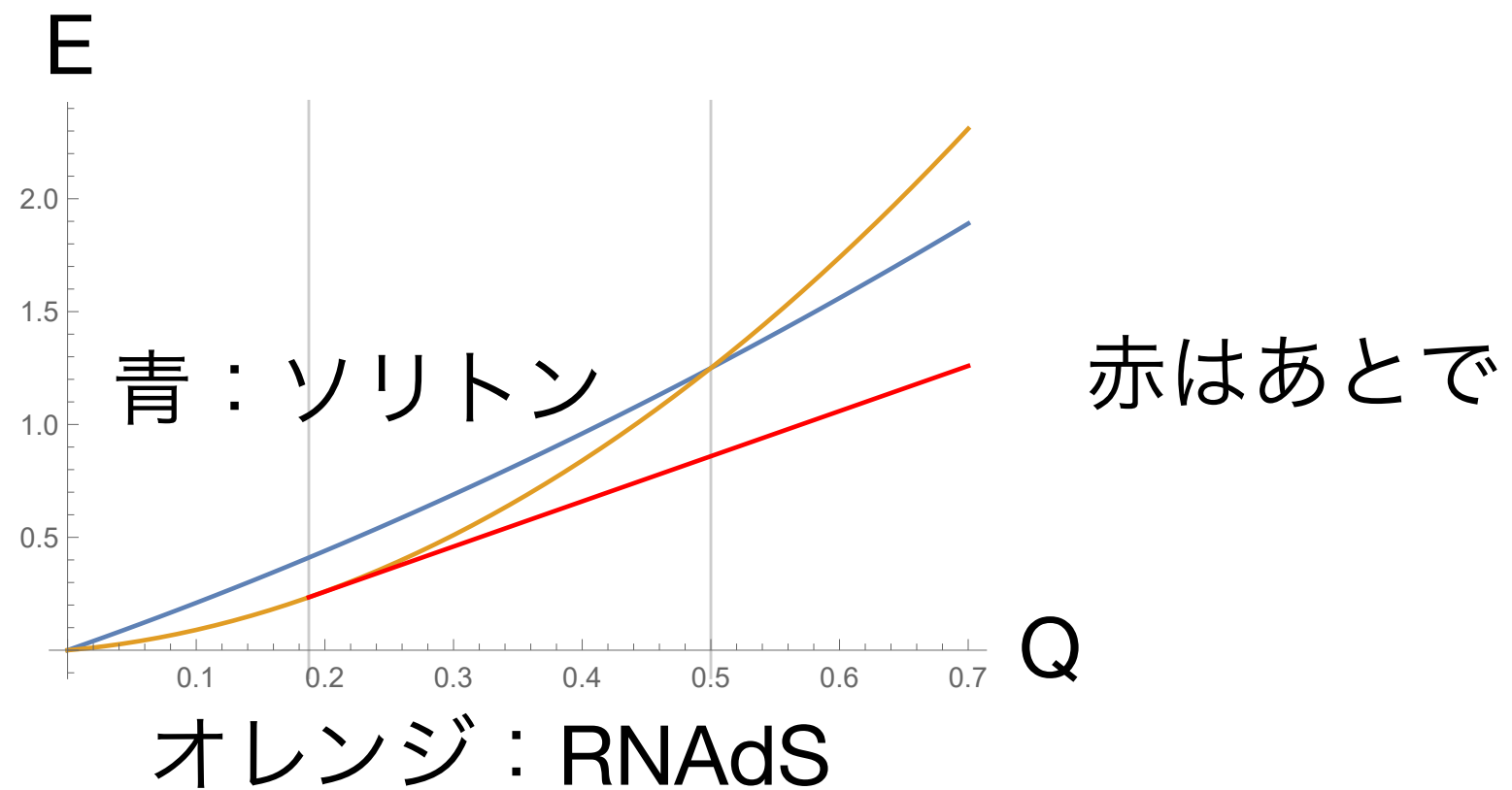
$e > e_c$ のポンチ絵



$$e < e_c$$

$e < e_c$ では $Q \rightarrow 0$ で RNAdS が最も軽い

$e < e_c$ のポンチ絵



2. 凸性

展開の1次：ソリトンの凸性

荷電ソリトンの凸性

$$\frac{d^2 E}{dQ^2} \propto 1 - \frac{(d-2)\Delta^2(\Delta - d/2)}{(d-1)(\Delta - d/4)} \frac{\kappa^2}{e^2} > 0$$

これは positive binding conjecture と同じ

$$\gamma_{\text{grav}} + \gamma_{\text{photon}} > 0$$

変形すると $e > [O(1) \text{の数} (\neq \text{WGC bound})] e_c$

$$e^2 > \frac{(d-2)\Delta^2(\Delta - d/2)}{(d-1)(\Delta - d/4)} \kappa^2 = \frac{\Delta - d/2}{\Delta - d/4} e_c^2$$

凸性 vs AdS WGC

凸性が成り立つための条件を考察する

$$e^2 > \frac{(d-2)\Delta^2(\Delta-d/2)}{(d-1)(\Delta-d/4)}\kappa^2 = \frac{\Delta-d/2}{\Delta-d/4}e_c^2$$

$\Delta > d/2$ では $0 < \frac{\Delta-d/2}{\Delta-d/4} < 1$ なので $e > e_c$ は凸性がある

結果2

ソリトンの凸性は $e < e_c$ で破れることができる

$$e^2 < \frac{\Delta-d/2}{\Delta-d/4}e_c^2 < e_c^2$$

しかしそのときソリトンは RNAdS より重い $\rightarrow$ 問題ない

3. hairy black hole

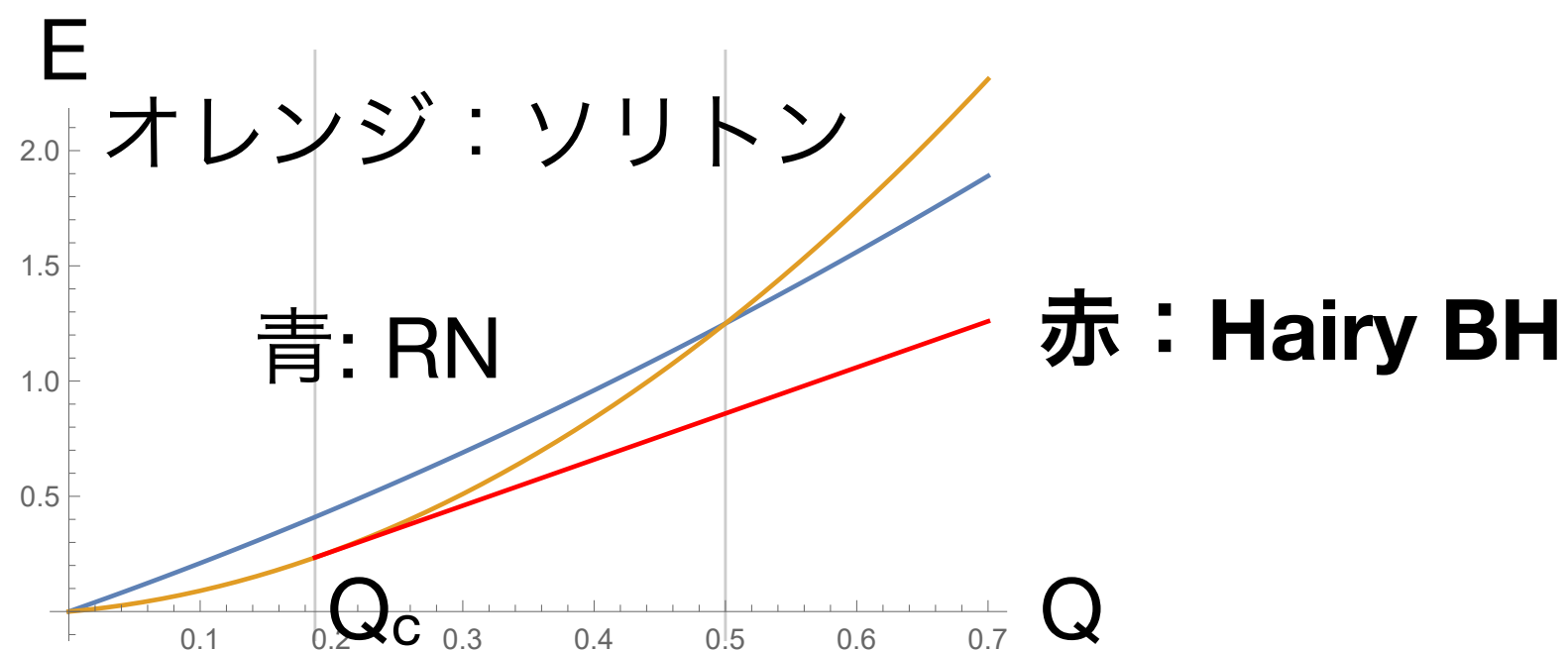
スカラー≠0 のブラックホール

荷電ソリトンとRNAdSの $E(Q)$ が入れ替わる前にhairy BH
がなめらかに生えて凸性を保つ

結果3

$e=e_c+\varepsilon > e_c$ で $d=3,4$ の場合

$$E_{hairy} = E_{sol} - [\text{positive}](Q - Q_c)^2 + \dots$$



おわり

まとめ

荷電スカラー場があるAdS時空の解を比較して、熱力学的凸性を考察した。基底状態の凸性は大丈夫そう。

議論

- ϕ^4 のようなスカラーの自己相互作用
- Q が小さくないとき
- 極限hairy AdSを深掘り
- Scar状態？