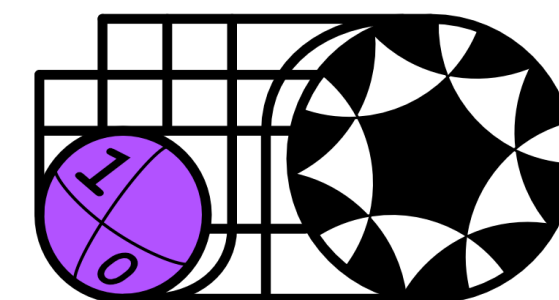


ハミルトニアン形式のゲージ場の理論の 第一原理計算について

伊藤 悦子(京大基研, 理研iTHEMS)



場の理論と弦理論2024@基礎物理学研究所, 2024/08/08

目次

- なぜ今、ハミルトニアン形式のゲージ場の理論か？
- ラグランジアン形式からスピンハミルトニアンへ
1+1次元 $U(1)$ ゲージ理論の場合
- ハミルトニアン形式での物理量の測定
- "ハドロ"ン"スペクトルの測定法 -
[El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11\(2023\)231](#)
[El-Matsumoto-Tanizaki, arXiv: 2407.11391](#)
- 高次元・非可換ゲージ理論の場合の課題と展望
- まとめ

なぜ今、ハミルトニアン形式の
ゲージ場の理論か？

ラグランジアン形式 or ハミルトニアン形式？

- K.Wilsonによるゲージ理論の格子正則化（1974）



Lattice 2024

July 28, 2024 to August 3, 2024
Europe/London timezone

Enter your search term

[Overview](#)
[Logistical information](#)
[Code of Conduct](#)
[Travel information](#)
[Venue](#)
[Timetable](#)
[Poster session | reception](#)
[Banquet | Excursions](#)
[Participant List](#)
[Book of Abstracts](#)
[Registration](#)
[Accommodation](#)

50 years of lattice QCD

 Aug 1, 2024, 3:45 PM
 45m

[Talk](#) [Plenary](#)

Speakers

 Jan Smit (University of Amsterdam)
 John Kogut (USDOE and University of Maryland)

Description

John Kogut: How was Lattice Gauge Theory born? What was it like in the "early days" of ~1975? How did High Energy Physics and Condensed Matter Theory get together? What were the BIG physics problems and technical challenges of the day? This short talk looks at these topics from one person's recollections and perspective.

Jan Smit: Recalling early years of Lattice Gauge Theory

ラグランジアン形式 or ハミルトニアン形式？

- K.Wilsonによるゲージ理論の格子正則化 (1974)

M.Creutzによるモンテカルロ法による数値計算(1979)

Monte Carlo, SU(2) gauge, 10^4 lattice
M.Creutz, PRD21 (1980) 2308

string tension

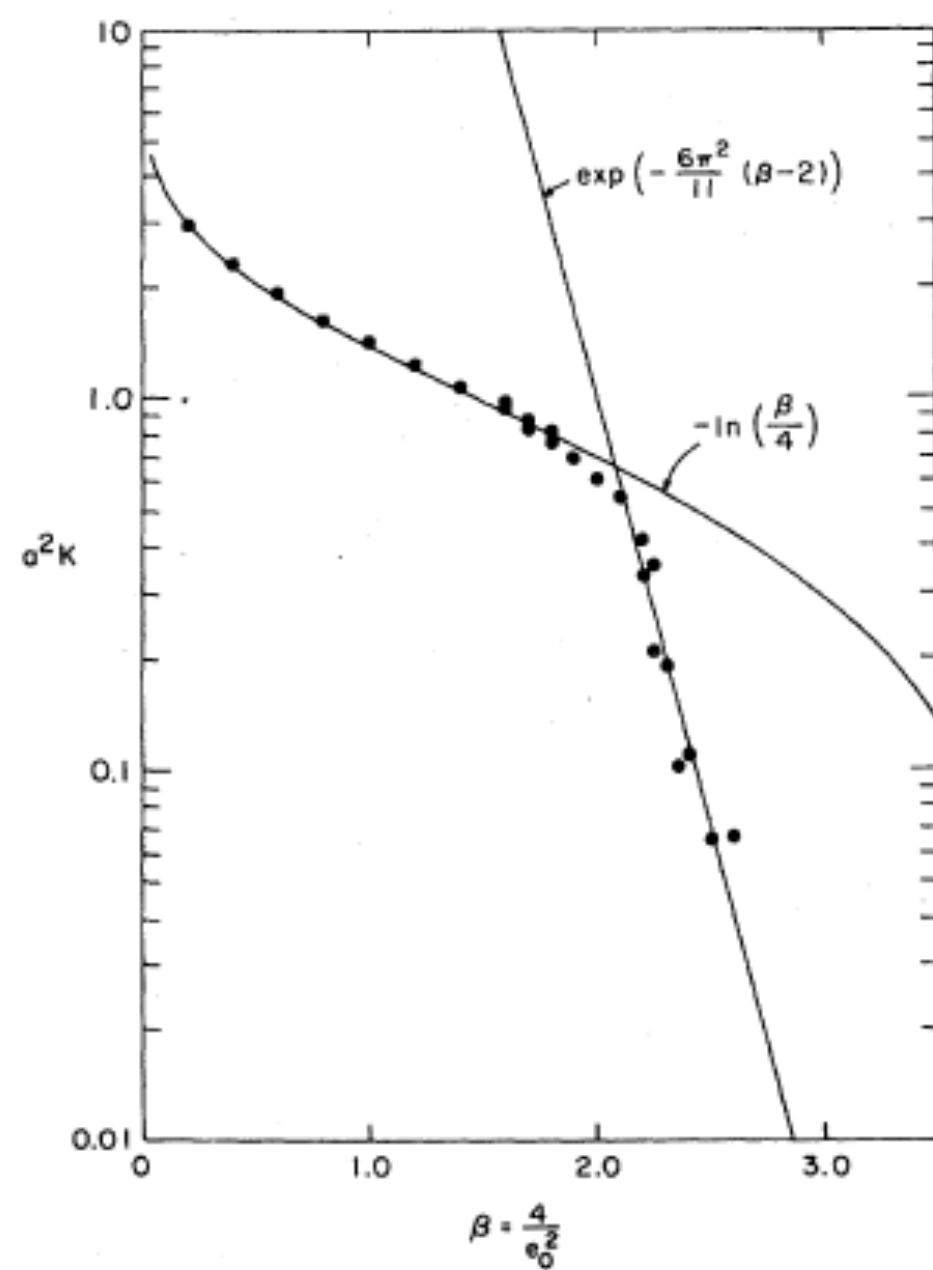
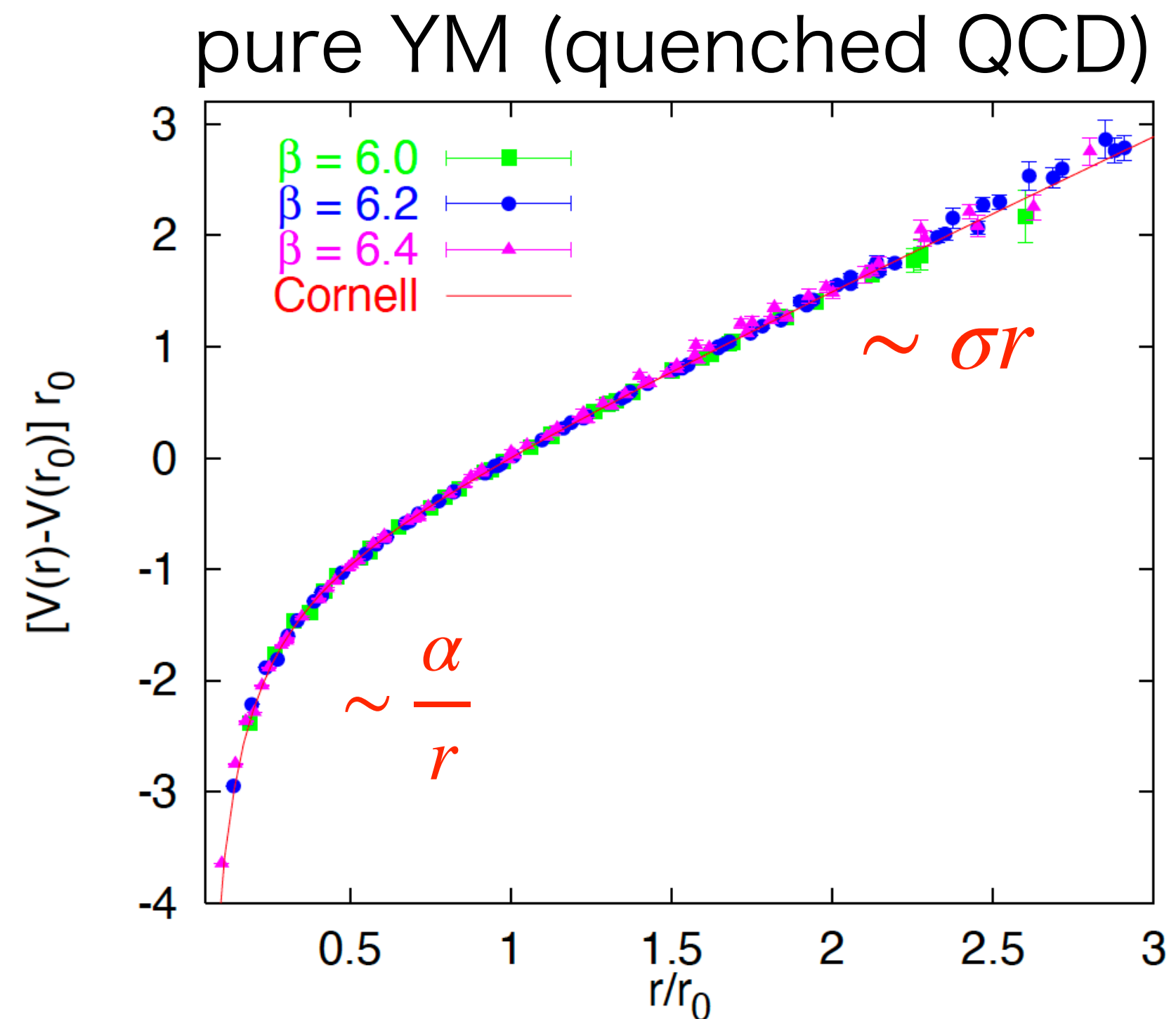


FIG. 6. The cutoff squared times the string tension as a function of β . The solid lines are the strong- and weak-coupling limits.

G.Bali, Phys.Rept.343:1 (2000)



数値計算結果が強結合から弱結合まで滑らかに繋がり、それぞれの極限での解析解と一致

格子ゲージ理論による正則化

- 格子ゲージ理論…ゲージ対称性を保った唯一の非摂動的正則化
時空を離散的にする

サイトにクォークの自由度、リンクにグルオンの自由度を載せる: リンク変数の導入: $U_\mu = e^{iagA_\mu^a T^a}$; T^a SU(N)の表現行列

- ゲージ変換: $\Omega(x) \in \text{SU}(N)$ 局所ゲージ変換

$$\psi'(x) = \Omega(x)\psi(x), \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}\Omega(x)^\dagger, \quad A_\mu(x)' = \frac{1}{ig}\Omega(x)\partial_\mu\Omega(x)^\dagger + \Omega(x)A_\mu(x)\Omega(x)^\dagger$$

- $\bar{\psi}(x)\psi(x)$: ゲージ不変性 ○

$\bar{\psi}(x)\psi(y), x \neq y$: ゲージ不変性 ✕

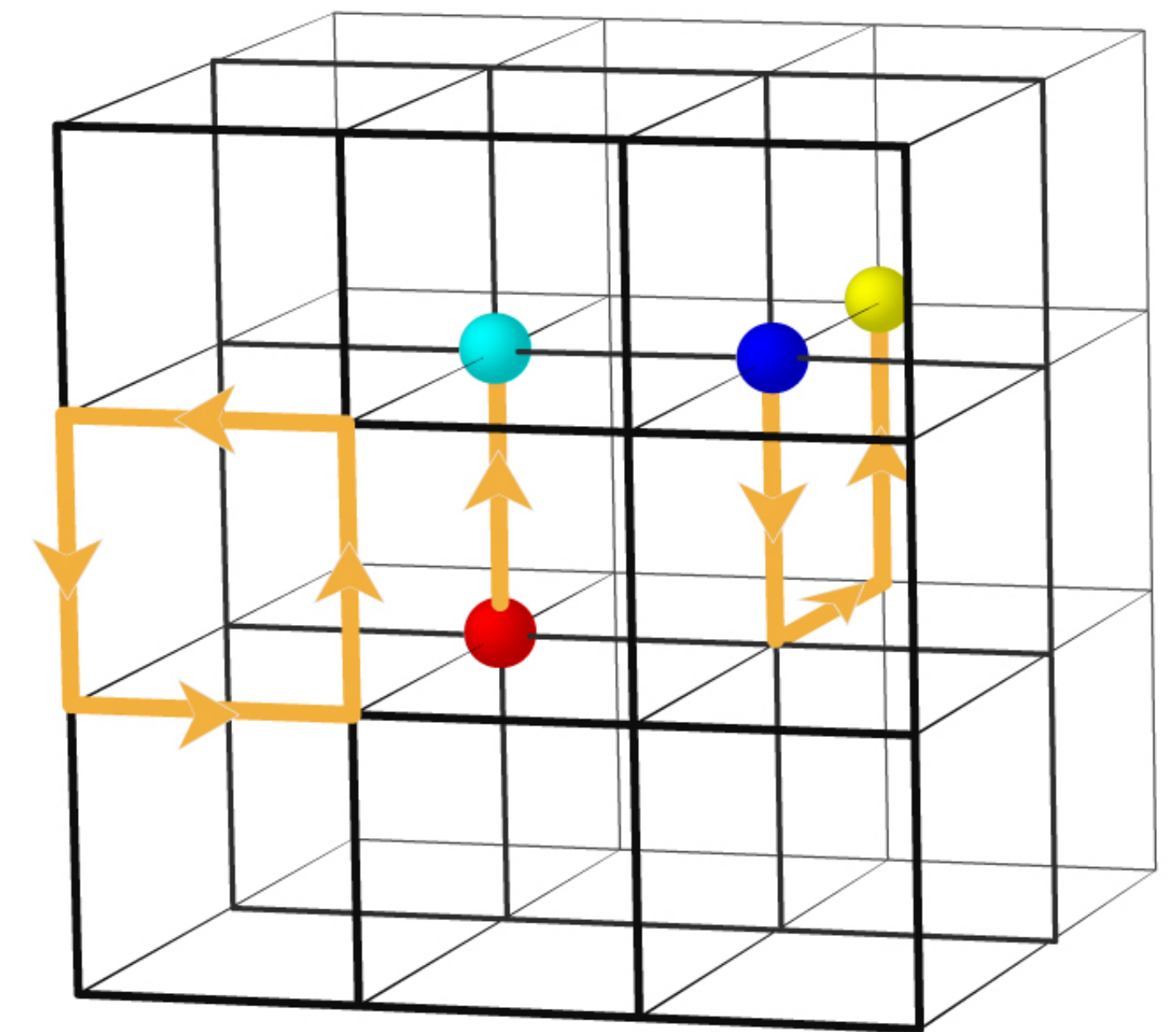
$\bar{\psi}(x) e^{i\int_x^y A_\mu dx_\mu} \psi(y)$: ゲージ不変性 ○

- リンク変数のゲージ変換: $U'_\mu(x) = \Omega(x)U_\mu(x)\Omega(x + \hat{\mu})^\dagger$

閉じた経路は全てゲージ不変: (例) プラケット $\text{tr}[U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu(x + \hat{\nu})^\dagger U_\nu(x)^\dagger]$...作用はこのゲージ不変な形で書ける

さらに、無限大の自由度を持つグルオンをコンパクトな表現にした

(数値的に非常に重要: $-\infty \leq A_\mu^a \leq \infty$ の自由度をそのまま載せたら精度を保てない)



©KEK

モンテカルロ法による多重積分

- 計算したいもの: $\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi \mathcal{O} e^{-S[\phi]}$

古典計算機で(多重)積分を高速にするにはモンテカルロ

- 半径1の円の1/4の扇形の面積: $S = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

(1) [0:1]の区間に一様乱数を2回振る

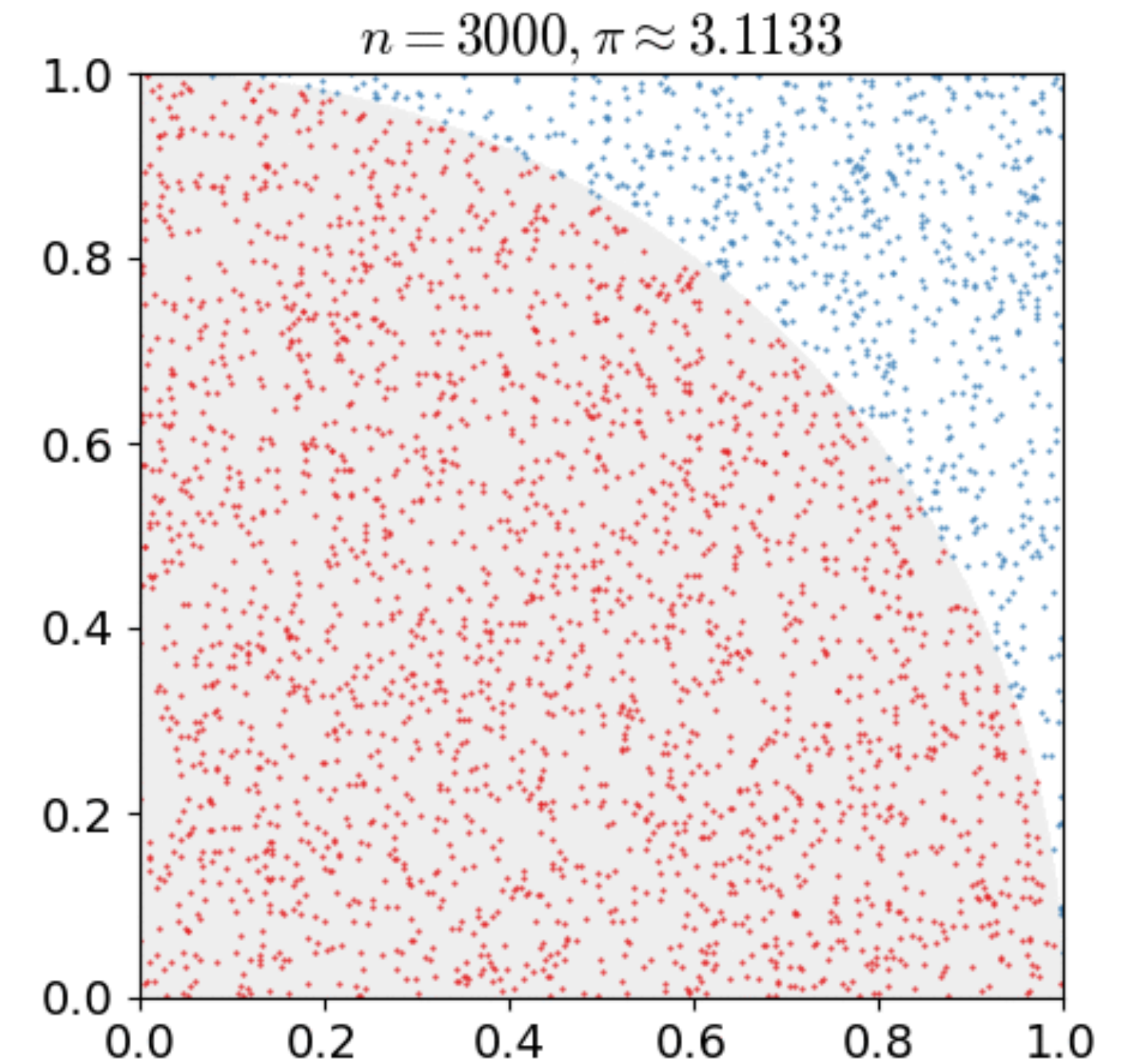
(2) それを(x,y)の組にして座標とし中に入った

点の数 $s(N)$ を数える: $S = \lim_{N \rightarrow \infty} s(N)/N$

- 物理系では一様乱数では効率が悪いので

$e^{-S[\phi]}$ の重み(Boltzmann weight)で変数 ϕ を生成

重点サンプリング法



モンテカルロ法の手順

手順(1) 乱数 X_i を生成

手順(2) 各乱数で $f(X_i)$ の値を計算

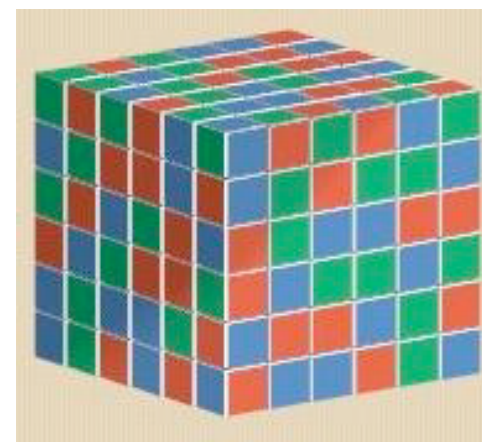
手順(3) 平均値 $\frac{1}{N} \sum_i f(X_i)$ を取ると

期待値がわかる! $\langle f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i f(X_i)$

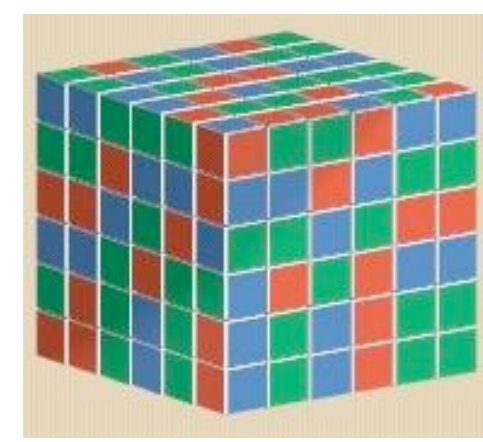
格子QCDの計算と残された問題

- 計算したいもの: $\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi \mathcal{O} e^{-S[\phi]}$ (自由度= 6×10^9 @ スパコン富岳)

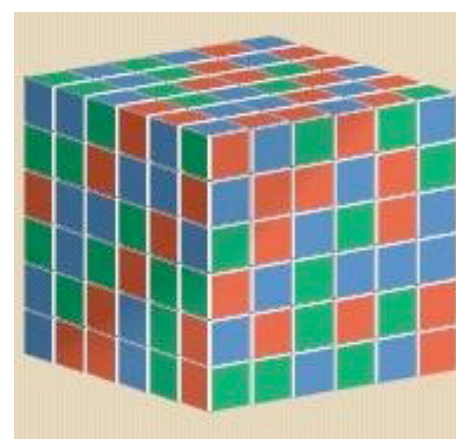
- 計算手順1: 配位を作る
計算手順2: 物理量を測定する



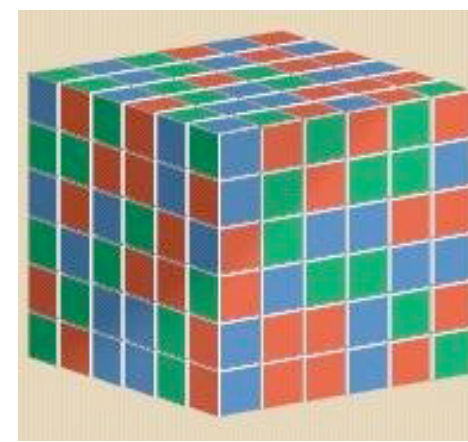
$\mathcal{O}_1$



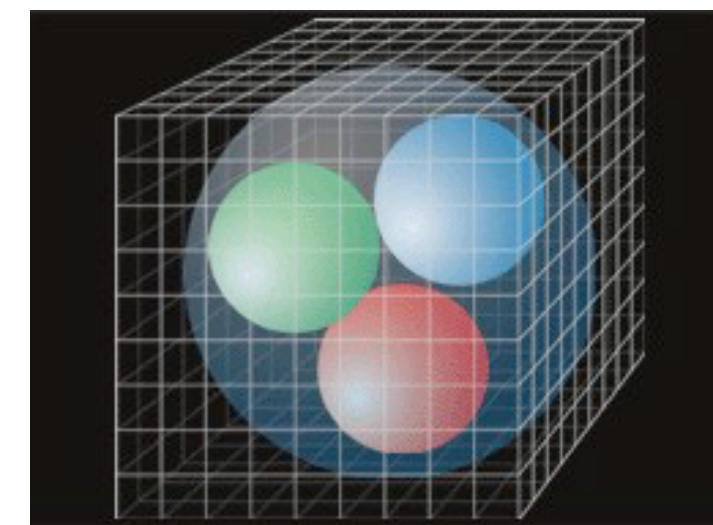
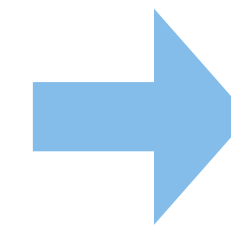
$\mathcal{O}_2$



$\mathcal{O}_3$



$\mathcal{O}_N$



$$\langle O \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i^N O_i$$

- 重点サンプリング法は $e^{-S[\phi]}$ を配位 ϕ の確率として使う
複素数になると「符号問題」
- 符号問題はNP困難だと証明される
(Troyer and Wiese: Phys. Rev. Lett. 94, 170201, 2005年)

ラグランジアン形式 or ハミルトニアン形式？

- K.Wilsonによるゲージ理論の格子正則化 (1974)
M.Creutzによるモンテカルロ法による数値計算(1979)
- J.Kogut and L.Susskindによるハミルトニアン形式 (1975)

PHYSICAL REVIEW D

VOLUME 11, NUMBER 2

15 JANUARY 1975

Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories

John Kogut*

Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York 14853

Leonard Susskind†

Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, New York

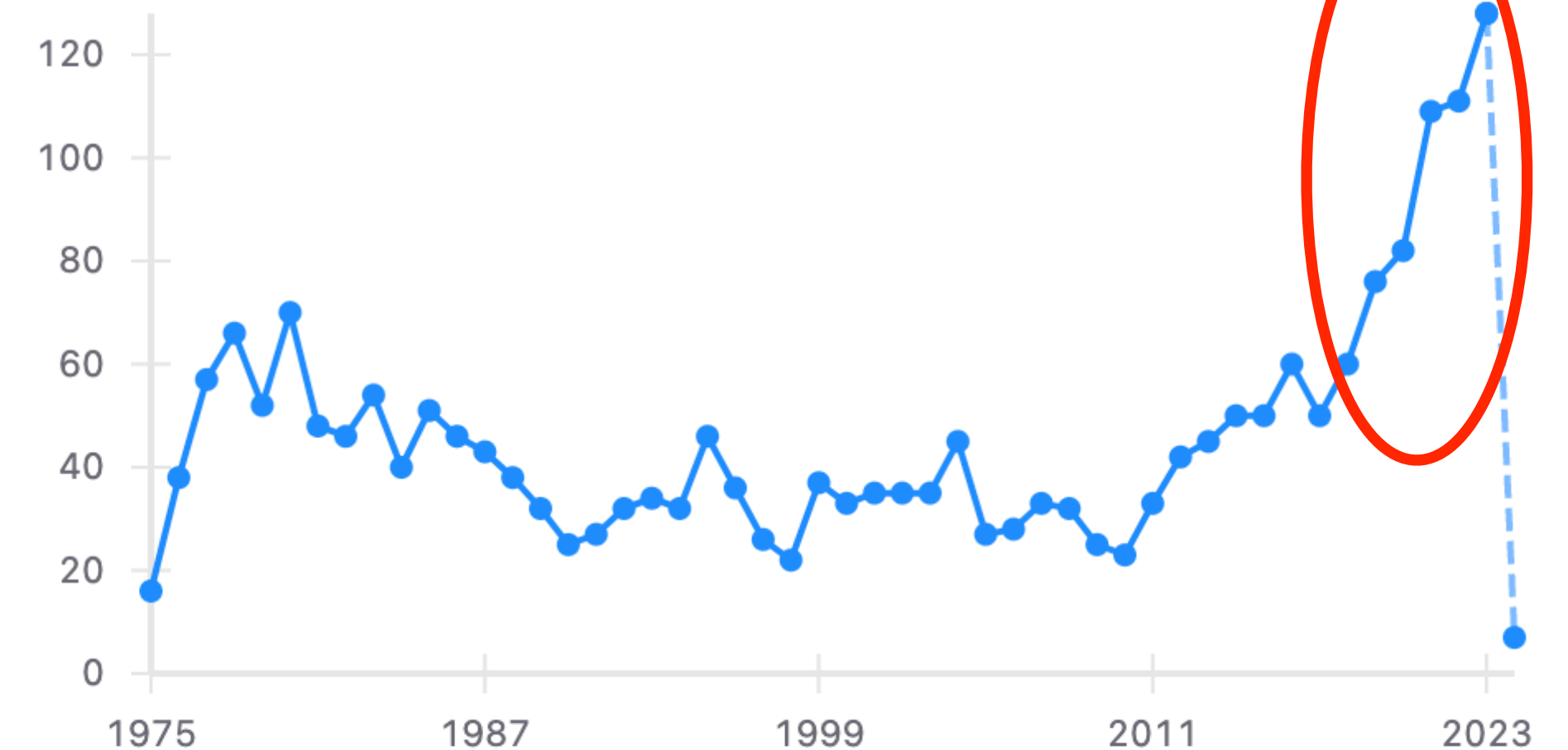
and Tel Aviv University, Ramat Aviv, Israel

and Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York

(Received 9 July 1974)

Wilson's lattice gauge model is presented as a canonical Hamiltonian theory. The structure of the model is reduced to the interactions of an infinite collection of coupled rigid rotators. The gauge-invariant configuration space consists of a collection of strings with quarks at their ends. The strings are lines of non-Abelian electric flux. In the strong-coupling limit the dynamics is best described in terms of these strings. Quark confinement is a result of the inability to break a string without producing a pair.

Citations per year



ラグランジアン形式 or ハミルトニアン形式？

- K.Wilsonによるゲージ理論の格子正則化 (1974)
M.Creutzによるモンテカルロ法による数値計算(1979)
- J.Kogut and L.Susskindによるハミルトニアン形式 (1975)

ちなみに、Wilsonの論文の引用履歴は…

PHYSICAL REVIEW D

VOLUME 10, NUMBER 8

15 OCTOBER 1974

Confinement of quarks*

Kenneth G. Wilson

Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York 14850

(Received 12 June 1974)

A mechanism for total confinement of quarks, similar to that of Schwinger, is defined which requires the existence of Abelian or non-Abelian gauge fields. It is shown how to quantize a gauge field theory on a discrete lattice in Euclidean space-time, preserving exact gauge invariance and treating the gauge fields as angular variables (which makes a gauge-fixing term unnecessary). The lattice gauge theory has a computable strong-coupling limit; in this limit the binding mechanism applies and there are no free quarks. There is unfortunately no Lorentz (or Euclidean) invariance in the strong-coupling limit. The strong-coupling expansion involves sums over all quark paths and sums over all surfaces (on the lattice) joining quark paths. This structure is reminiscent of relativistic string models of hadrons.

Citations per year



なぜ今、ハミルトニアン形式の場の理論か？

- 量子計算機の計算はハミルトニアン形式の場の理論の方が向いている
特にスピン変数で書かれるハミルトニアンと相性が良い
- ハミルトニアン形式の場の理論の第一原理計算における問題
ゲージ場(スカラー場)は無限次元のヒルベルト空間を持つ
古典計算機ではあっという間にメモリーが足りなくなる
- 量子計算機のbit = qubit は2次元ヒルベルト空間を記述
古典計算機のN-bit系のメモリー: $\mathcal{O}(N)$
量子計算機のN-qubit系のメモリー: 2^N

スパコン「富岳」のトータルメモリー
4.85 PiByte $\sim 2^{50}$ Byte

ハミルトニアン形式での場の理論の長所・短所

😊 従来の格子QCD(重点サンプリング法)での符号問題なし

実時間発展

有限密度QCD (中性子星内部の物理)

トポロジカル θ 項 (CPの破れ)

(cf.) 「有限密度格子QCDと符号問題研究の現状と課題」

永田桂太郎, 素粒子論研究Vol.31 No.1

😊 励起状態を直接扱える

😞 ゲージ場(ボソン)のヒルベルト空間が無限大

(例外) 1+1次元 U(1)ゲージ理論(Schwinger model)の場合は

開境界条件を課しガウス則を解くとゲージ場の自由度を完全に取り除ける

ラグランジアンから
スピンハミルトニアンへ
— $U(1)$ ゲージ理論の場合 —

1+1次元 U(1)ゲージ理論：Schwinger model

- ラグランジアン (θ term)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{g\theta_0}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

従来のモンテカルロ法では符号問題

- masslessの時はボゾン化して厳密に解ける
- QCDの良いトイモデル
(離散的) カイラル対称性
スクリーニング/ 閉じ込め(分数電荷)ポテンシャル
 $m>0$ で電荷の閉じ込めがあり, 低エネルギーでは複合状態が現れる

Schwinger model + θ term ($N_f=1$)

- ラグランジアン

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \boxed{\frac{g\theta_0}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

Kogut and Susskind (1975)

Shaw et al. Quantum 4, 306 (2020)

- スピンハミルトニアン

$$H = J \sum_{n=0}^{N-2} \left[\sum_{i=0}^n \frac{Z_i + (-1)^i}{2} + \boxed{\frac{\theta_0}{2\pi}} \right]^2 + \frac{w}{2} \sum_{n=0}^{N-2} [X_n X_{n+1} + Y_n Y_{n+1}] + \frac{m_{\text{lat.}}}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n Z_n$$

電場の運動項

(電場もスピン変数で書ける!)

電子の運動項・質量項

Gauge fixing

Gauss' law

Open BC

Jourdan-Wigner trans.

- θ_0 は定数背景電場

$$J = g^2 a/2, w = 1/2a, m_{\text{lat}} = m - \frac{g^2 a}{8}$$

Dempsey, Klebanov, Pufu, Zan:arXiv:2206.05308

- Zのall-to-all 相互作用

$N_f=1$ の時はmassless理論でもgapped system, $N_f=2$ ではmassiveの時gapped ($\mu = g\sqrt{N_f/\pi}$)

ハミルトニアン形式による様々な研究

Nf=1 Schwinger model

- 実時間発展

Schwinger effect, C.Muschik et al. NJ of Physics 19 103020

Martinez et al., Nature 534, 516–519 (2016)

L.Nagano et al., arXiv:2302.10933

ブロックエンコーディングによる計算複雑性： K.Sakamoto, H.Morisaki, J.Haruna, EI, K.Fujii, K.Mitarai
arXiv: 2407.11391

- 有限密度(初期状態でN粒子状態を手で与え、粒子数保存条件の下で基底状態を生成)

Variational algorithm, A. Yamamoto Phys. Rev. D 104, 014506 (2021), Tomiya arXiv:2205.08860

Entanglement entropy, K.Ikeda et al. arXiv:2305.00996

- トポロジカル θ 項

カイラル凝縮

Phase structure (DMRG): M.C.Banuls et al, PRD 93,094512 (2016)

L.Funcke et al. PRD 101, 054507 (2020)

電荷間ポテンシャル

Adiabatic state preparation: B.Chakraborty et al., PRD 105, 094503 (2022)

電荷-q Schwinger model ('t Hooft アノマリー)

M.Honda, EI, et al. PRD105, 014504 (2022)

M.Honda, EI, Y.Kikuchi, Y.Tanizaki, PTEP (2022)

M.Honda, EI, Y.Tanizaki, JHEP (2022)

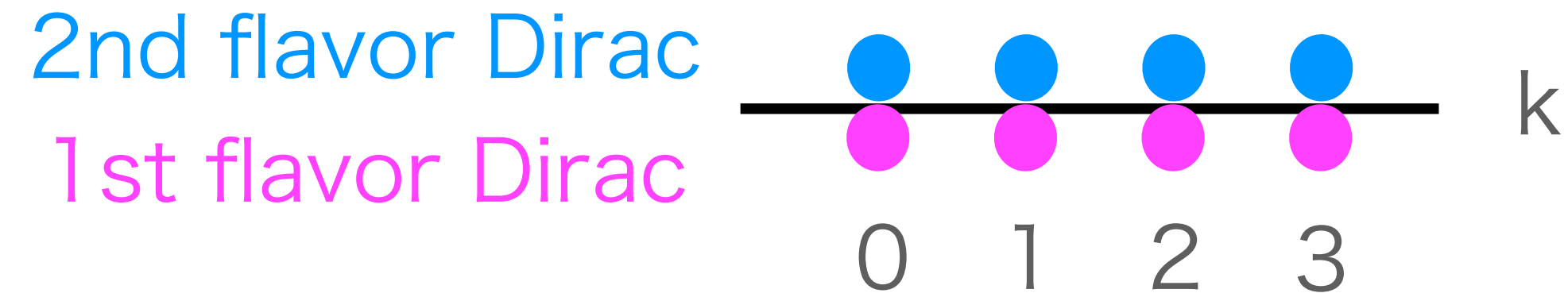
質量スペクトル

M.C.Banuls et al., JHEP 11 (2013)158

...

多フレーバー Schwinger model: 2つの並べ方問題

- Diracフェルミオン $\rightarrow$ 格子フェルミオン (staggered fermion)



M.C. Banuls et al, PRL 118, 071601 (2017)

R.Dempsey et al., arXiv:2305.00437

El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231

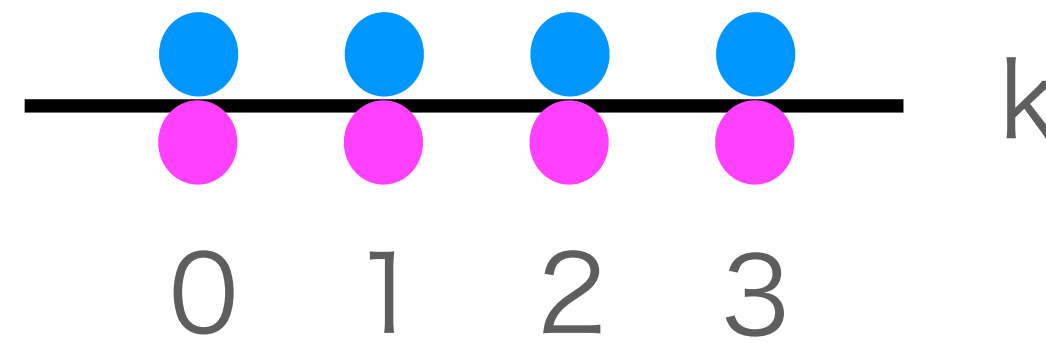
M.Rigobello et al., arXiv:2308.04488

- 格子フェルミオン $\rightarrow$ スピン変数 (Jordan-Wigner 変換)

多フレーバー Schwinger model: 2つの並べ方問題

- Diracフェルミオン $\rightarrow$ 格子フェルミオン (staggered fermion)

2nd flavor Dirac
1st flavor Dirac



M.C. Banuls et al, PRL 118, 071601 (2017)

R.Dempsey et al., arXiv:2305.00437

El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231

M.Rigobello et al., arXiv:2308.04488

Flavor ordering ($n=k+N(f-1)$)



Staggered ordering ($n=2k+(f-1)$)

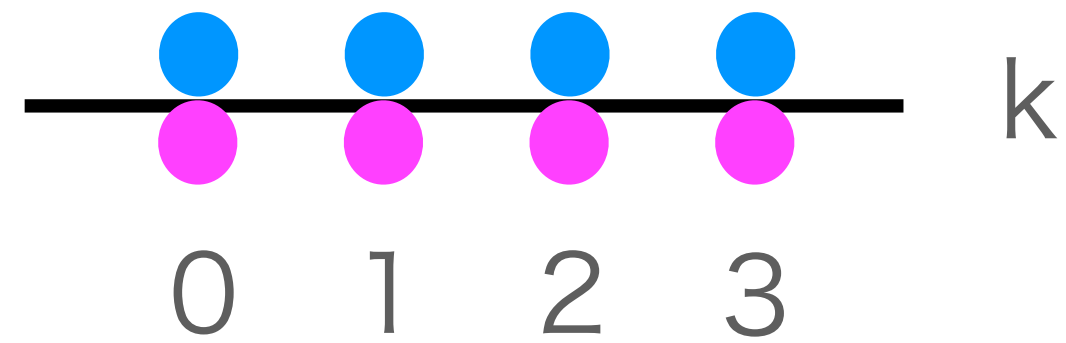


- 格子フェルミオン $\rightarrow$ スピン変数 (Jordan-Wigner 変換)

多フレーバー Schwinger model: 2つの並べ方問題

- Diracフェルミオン $\rightarrow$ 格子フェルミオン (staggered fermion)

2nd flavor Dirac
1st flavor Dirac

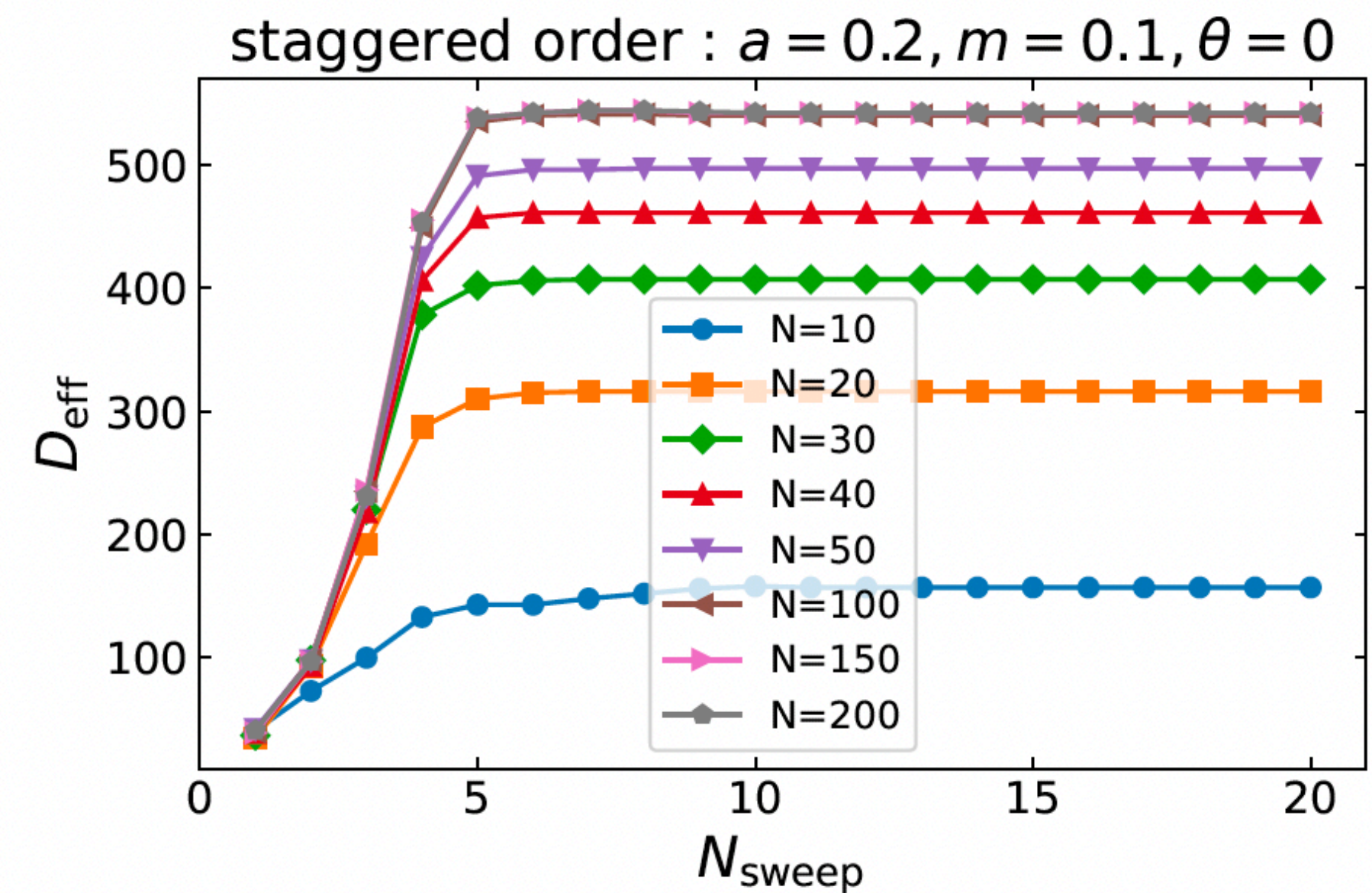
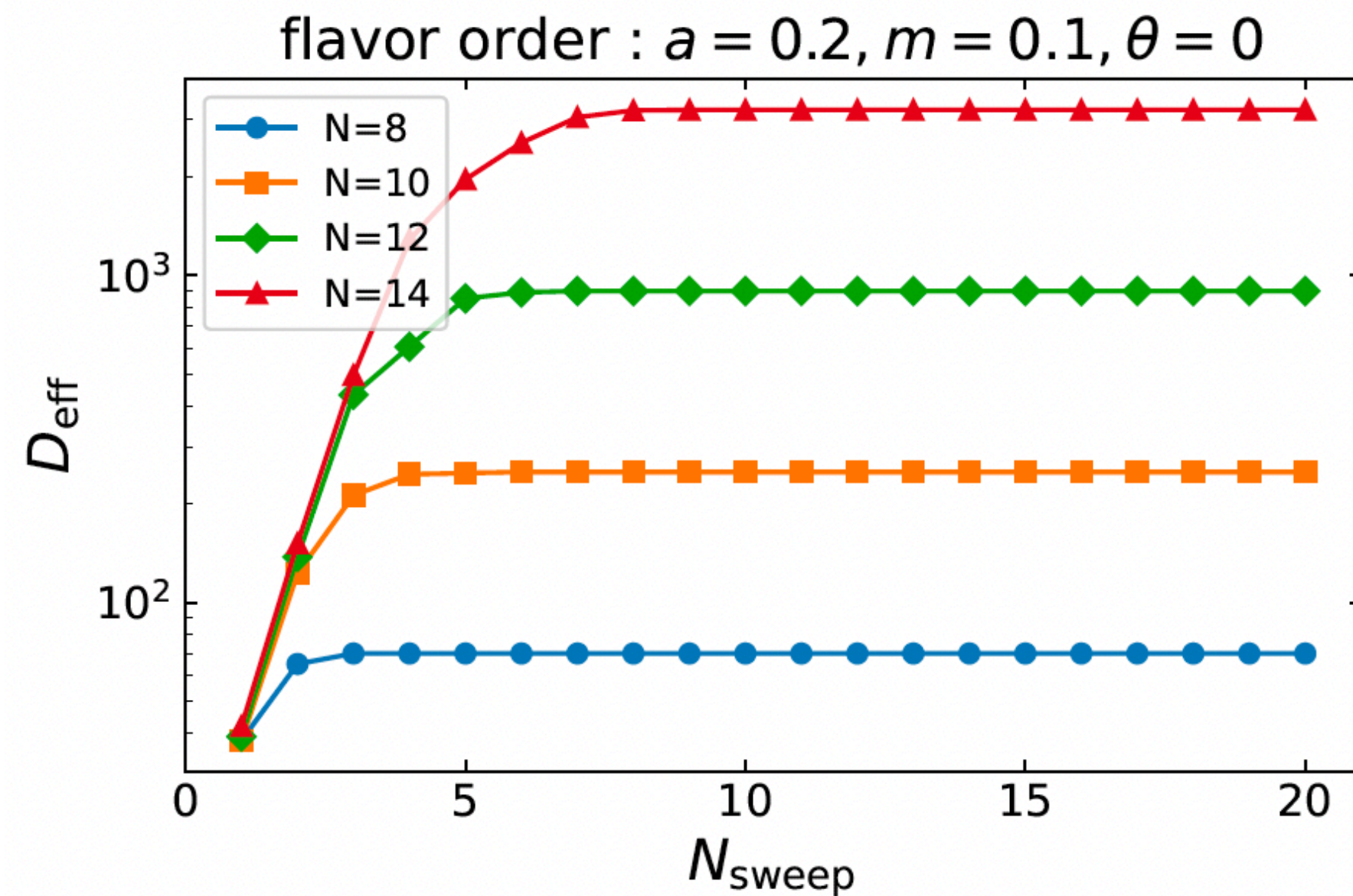


M.C. Banuls et al, PRL 118, 071601 (2017)
R.Dempsey et al., arXiv:2305.00437
El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231
M.Rigobello et al., arXiv:2308.04488

Flavor ordering ($n=k+N(f-1)$)



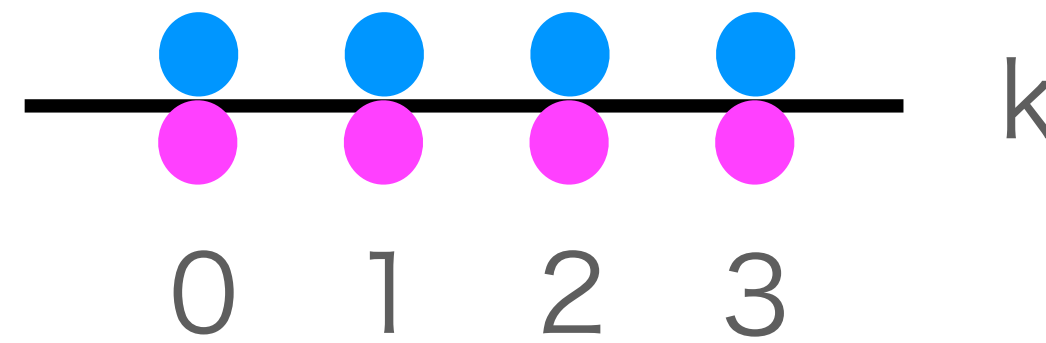
Staggered ordering ($n=2k+(f-1)$)



多フレーバー Schwinger model: 2つの並べ方問題

- Diracフェルミオン → 格子フェルミオン (staggered fermion)

2nd flavor Dirac
1st flavor Dirac



M.C. Banuls et al, PRL 118, 071601 (2017)
R.Dempsey et al., arXiv:2305.00437
El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11(2023)231
M.Rigobello et al., arXiv:2308.04488

Flavor ordering ($n=k+N(f-1)$)



Staggered ordering ($n=2k+(f-1)$)



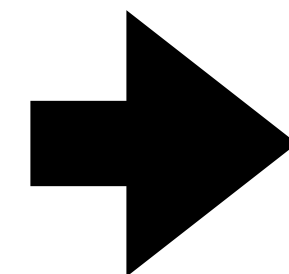
- 格子フェルミオン → スピン変数 (Jordan-Wigner 変換)

Nf - 格子フェルミオンが
満たす条件

我々の取り方
(El-Matsumoto-Tanizaki, 2023)

$$\{\chi_{f,n}^\dagger, \chi_{\tilde{f},m}\} = \delta_{f,\tilde{f}} \delta_{n,m}$$

$$\{\chi_{f,n}, \chi_{\tilde{f},m}\} = \{\chi_{f,n}^\dagger, \chi_{\tilde{f},m}^\dagger\} = 0$$



$$\chi_{1,n} = \frac{\sigma_{1,n}^x - \sigma_{1,n}^y}{2} \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j}^z)$$

$$\chi_{2,n} = \frac{\sigma_{2,n}^x - \sigma_{2,n}^y}{2} (-i\sigma_{1,n}^z) \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j}^z)$$

測定したい物理量が
少ないパウリ行列積でかけるため

ハミルトニアン形式での 物理量の測定

- "ハドロン"スペクトルの測定法 -

現在のハミルトニアン形式の第一原理計算

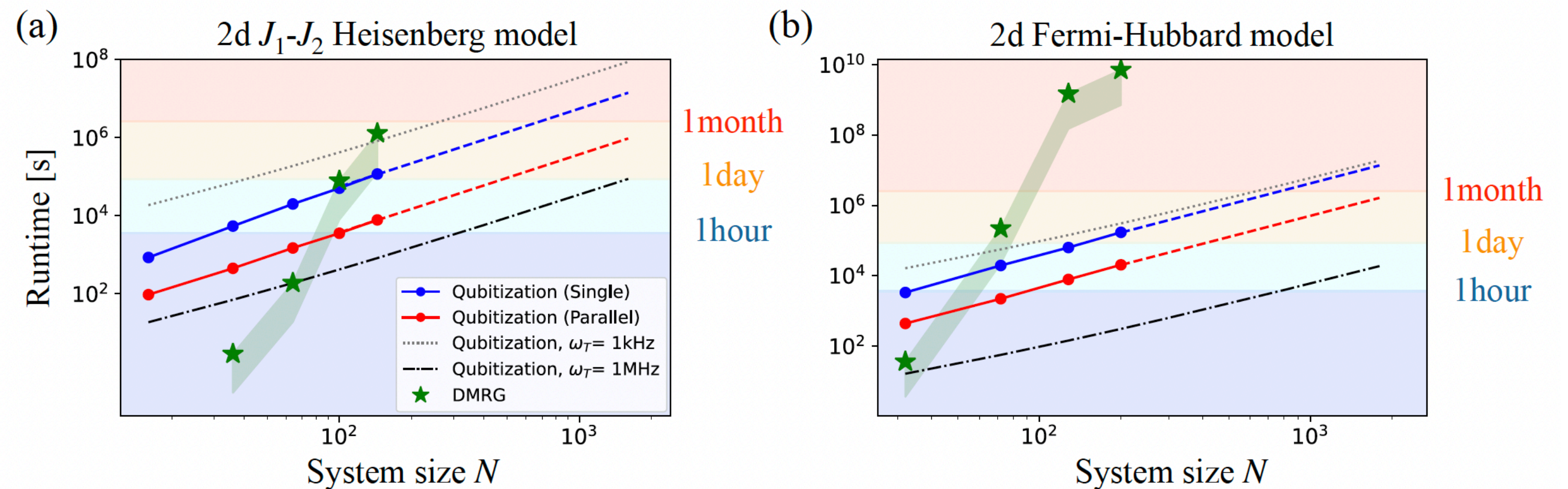
- 量子計算機の実機は量子エラーが深刻
-> シミュレータ(小さいシステムを量子アルゴリズムで古典計算)
テンソルネットワーク
- テンソルネットワーク(TN)と量子計算(QC)が切磋琢磨している状況

Googleの量子超越性(2019)

「スパコンで1万年かかる問題をQCで200秒」

Y. Liu, et al. (2021)

「スパコン使ったTNで5分」

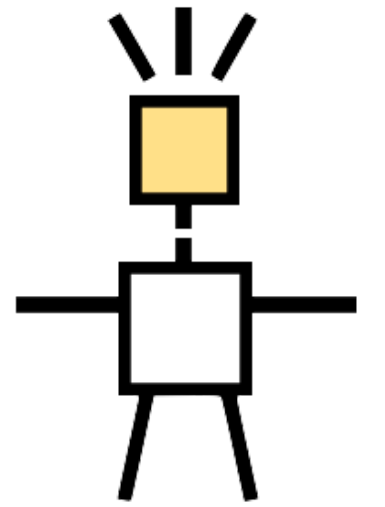


[Yoshioka et al. \(2022\)](#)

- ハミルトニアン形式でのテンソルネットワーク法(DMRG, PEPS)
cf.) ラグランジアン形式でのテンソルネットワーク法(TRG, 菅野くん)

DMRGの計算戦略

- Density Matrix Renormalization Group(DMRG), [White\(1992\)](#)
ハミルトニアンの固有状態を行列積(Matrix Product State, MPS)で表現
ライブラリーが充実：ITensor written in C++, Julia, [Fishman et al. 2022](#)



- 基底状態を見つけるのに変分アルゴリズム

コスト関数： ${}_{try}\langle\Psi|H|\Psi\rangle_{try}$

波動関数のMPS表現： $|\Psi\rangle = \sum_{\{s_i\}} \text{Tr} [A_0(s_0) A_1(s_1) \cdots] |s_0 s_1 \cdots\rangle$, $A_i(s_i)$ が $D_{i-1} \times D_i$ サイズの行列

- 行列を特異値分解

特異値にcutoff (ϵ)を導入し、小さいものは捨てて行列サイズを小さくする

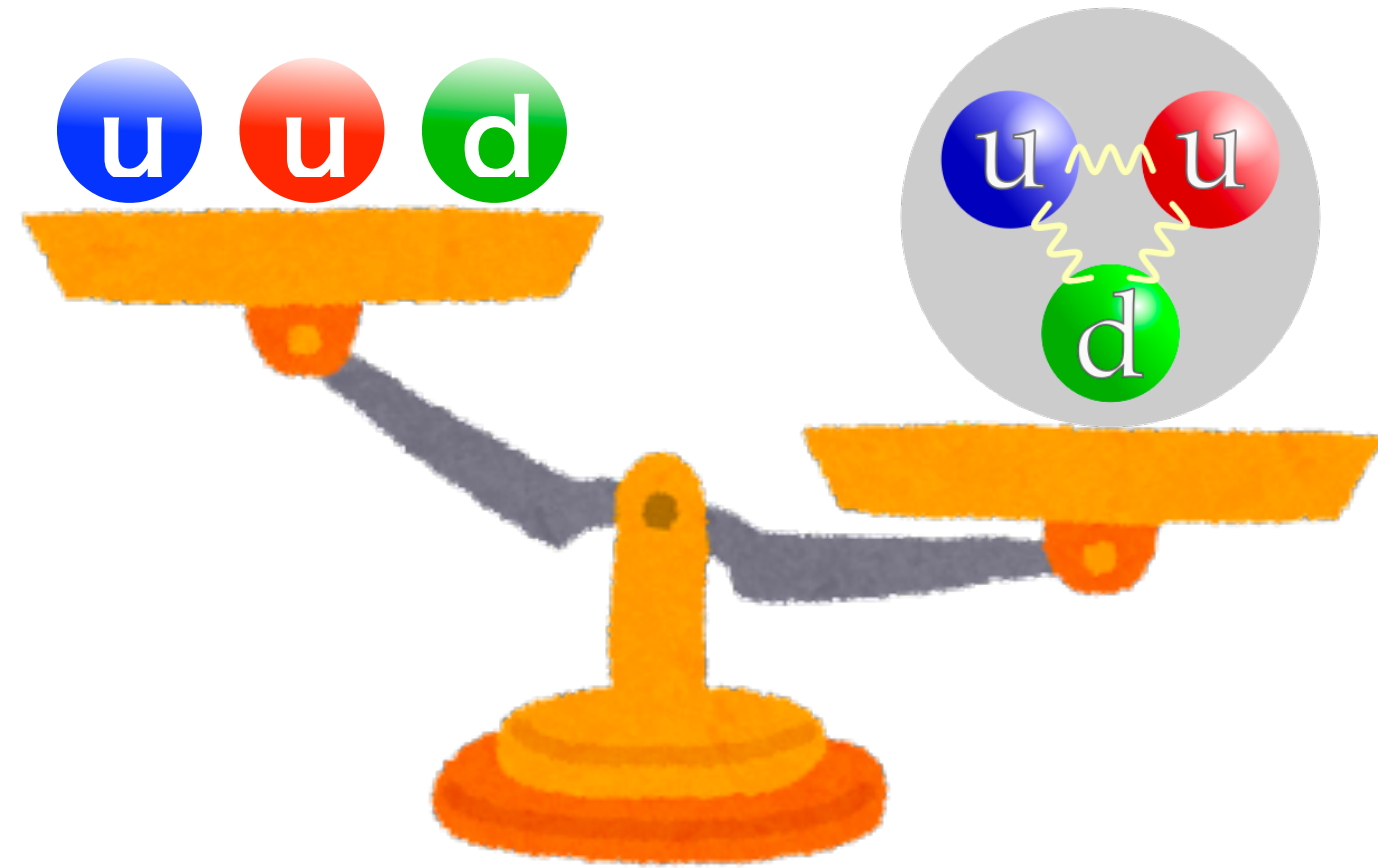
必要な行列サイズ：ボンド次元(D_{eff})

- 基底状態のMPSを構成したら、測りたい物理量を行列積演算子(MPO)で表現して期待値を計算する

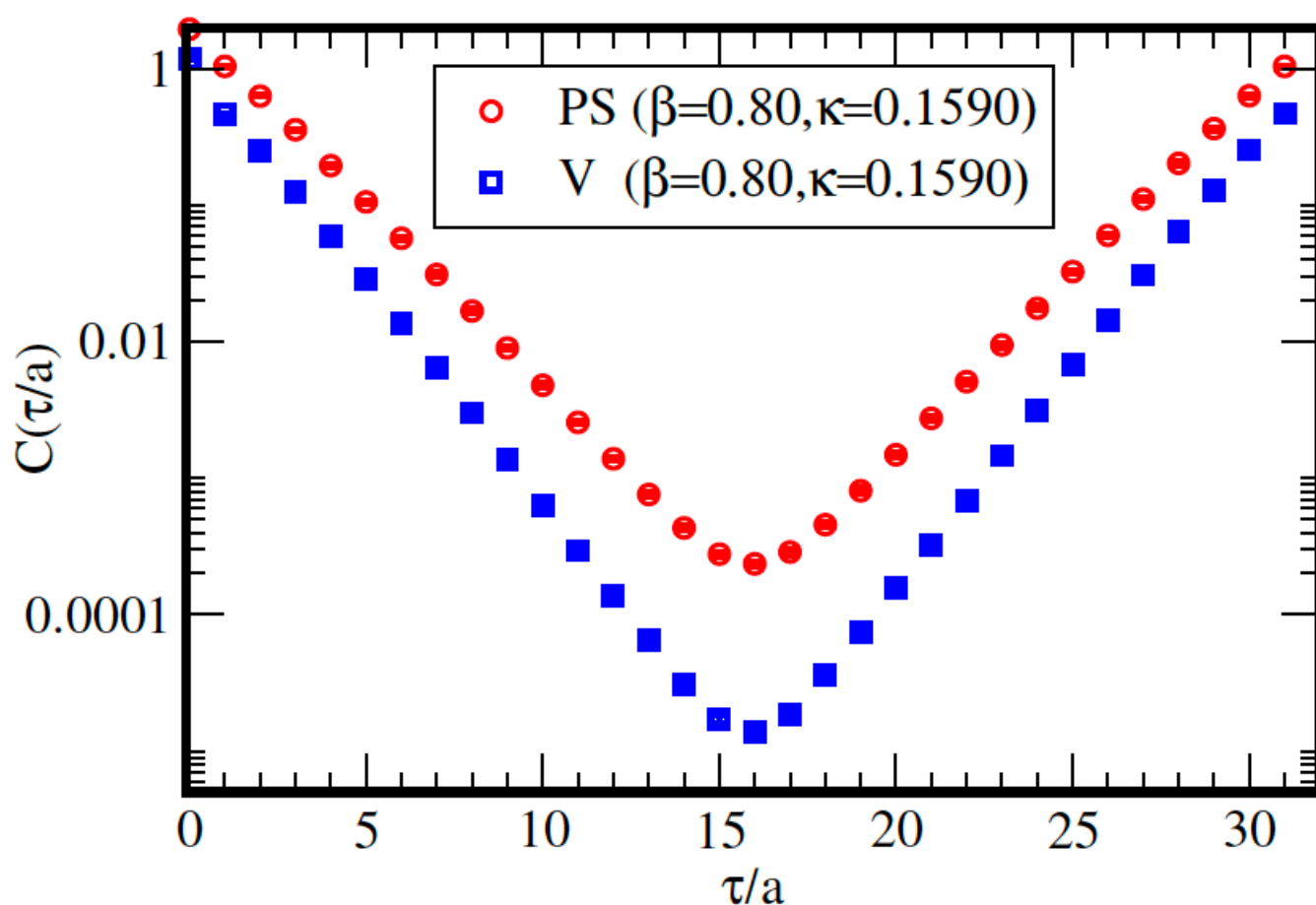
Nf=2の場合：質量スペクトルの計算法

u,d quark mass ~ 2-5MeV

proton mass ~ 938MeV



格子QCDの計算法



$$C(\tau) = \langle O(\tau)O(0) \rangle \cdot$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau) \sim e^{-m\tau}$$

pion: $O = \bar{\psi}\gamma_5\psi$

rho meson: $O = \bar{\psi}\gamma_1\psi$

- ハミルトニアン形式で複合状態のスペクトル計算法

El-Matsumoto-Tanizaki, [JHEP11\(2023\)231](#)

(1) 2点関数スキーム

(2) 1点関数スキーム

OBCでのSPT相の性質を利用

(3) 分散関係スキーム

Nf=1 Schwinger model

M.C.Banuls, K. Cichy, J.I. Cirac, K. Jansen

[JHEP 11 \(2013\)158](#)

Nf=2 Schwinger modelの複合状態

パイオン: $\pi = -i(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 - \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2)$, $J^{PG} = 1^{-+}$

σ メソン: $\sigma = \bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2$, $J^{PG} = 0^{++}$

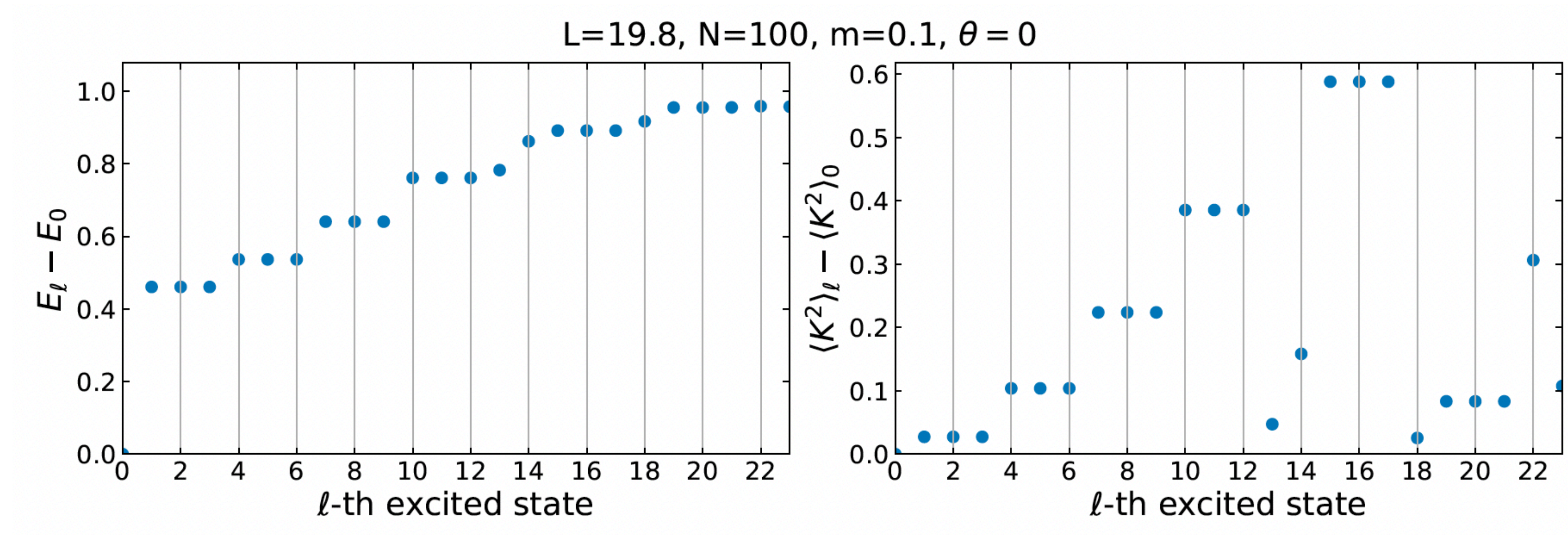
η メソン: $\eta = -i(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 + \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2)$, $J^{PG} = 0^{--}$

分散関係スキームの計算法

El-Matsumoto-Tanizaki, [JHEP11\(2023\)231](#)

20以上の励起状態のMPSを下から生成： $H_{eff} = H + \lambda \sum_{k=0}^{\ell-1} |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$

それぞれのエネルギーと運動量演算子の期待値を測定



アイソスピン、G-パリティ、パリティなどの量子数を測定して
そのメソンに対応するかを判定

運動量演算子, アイソスピン演算子のスピン変数表現

- 運動量演算子 (flavor依存, $[\hat{k}_f, H] \neq 0$)

$$\text{1st flavor} \quad \hat{k}_{1,n} = \frac{i}{4a} (S_{1,n-1}^- Z_{2,n-1} Z_{1,n} Z_{2,n} S_{1,n+1}^+ - S_{1,n-1}^+ Z_{2,n-1} Z_{1,n} Z_{2,n} S_{1,n+1}^-),$$

$$\text{2nd flavor} \quad \hat{k}_{2,n} = \frac{i}{4a} (S_{2,n-1}^- Z_{1,n} Z_{2,n} Z_{1,n+1} S_{2,n+1}^+ - S_{2,n-1}^+ Z_{1,n} Z_{2,n} Z_{1,n+1} S_{2,n+1}^-).$$

Note: $[K, H] \neq 0$ in OBC (even in cont.lim.), $[K, H] = O(a)$ in PBC

- アイソスピン演算子(flavor SU(2) sym.), $\mathbf{J}^2, J_z$

$$[H, J_z] = 0$$

$$J_z = \sum_{n=0}^{N-1} j_z(n) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (\chi_{1,n}^\dagger \chi_{1,n} - \chi_{2,n}^\dagger \chi_{2,n}) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} (Z_{1,n} - Z_{2,n})$$

$$[H, \mathbf{J}^2] = \left[H, \left(\frac{1}{2} J_+ J_- + \frac{1}{2} J_- J_+ + J_z^2 \right) \right] = 0$$

その他量子数のスピン変数表現

- 荷電共役 (OBCと有限格子間隔による破れ)

$$C := \prod_{f=1}^{N_f} \left(\prod_{n=0}^{N-1} \sigma_{f,n}^x \right) \left(\prod_{n=0}^{N-2} (\text{SWAP})_{f;N-2-n,N-1-n} \right)$$

- パリティ (OBCによる破れ)

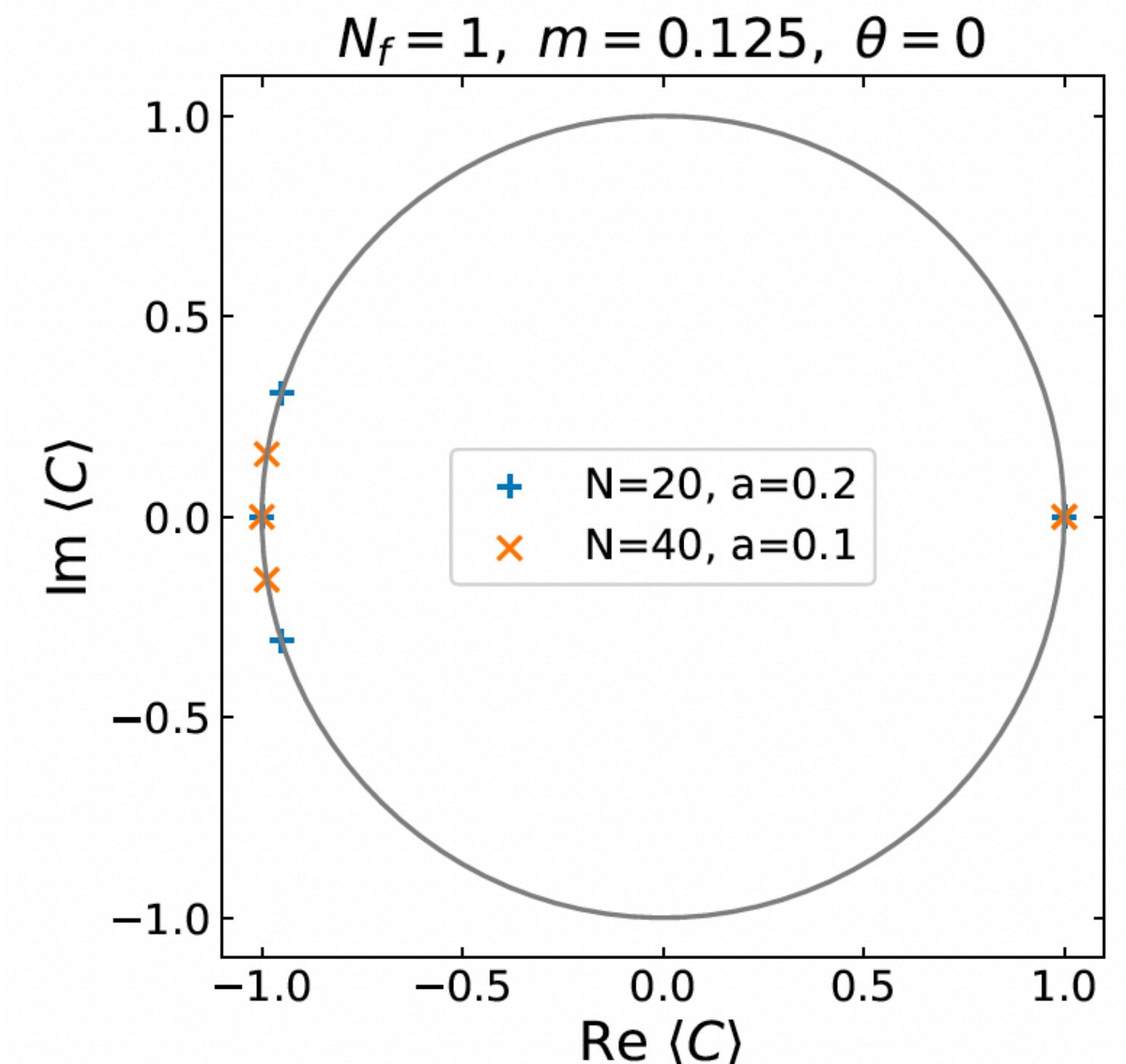
$$P := \prod_{f=1}^{N_f} \left(\prod_{j=0}^{N/2-1} \sigma_{f,2j+1}^z \right) \times \left(\prod_{n=0}^{N-2} (\text{SWAP})_{f;N-2-n,N-1-n} \right) \left(\prod_{n=0}^{N/2-1} (\text{SWAP})_{f;n,N-1-n} \right)$$

粒子-反粒子の入れ替え $X \Leftrightarrow L-X$

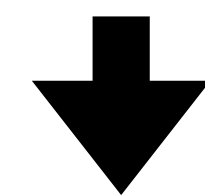
- G-パリティ (iso-spin基底での荷電共役)

$$G := C e^{i\pi J_y},$$

PBCの自由場の理論の時の $\langle C \rangle$

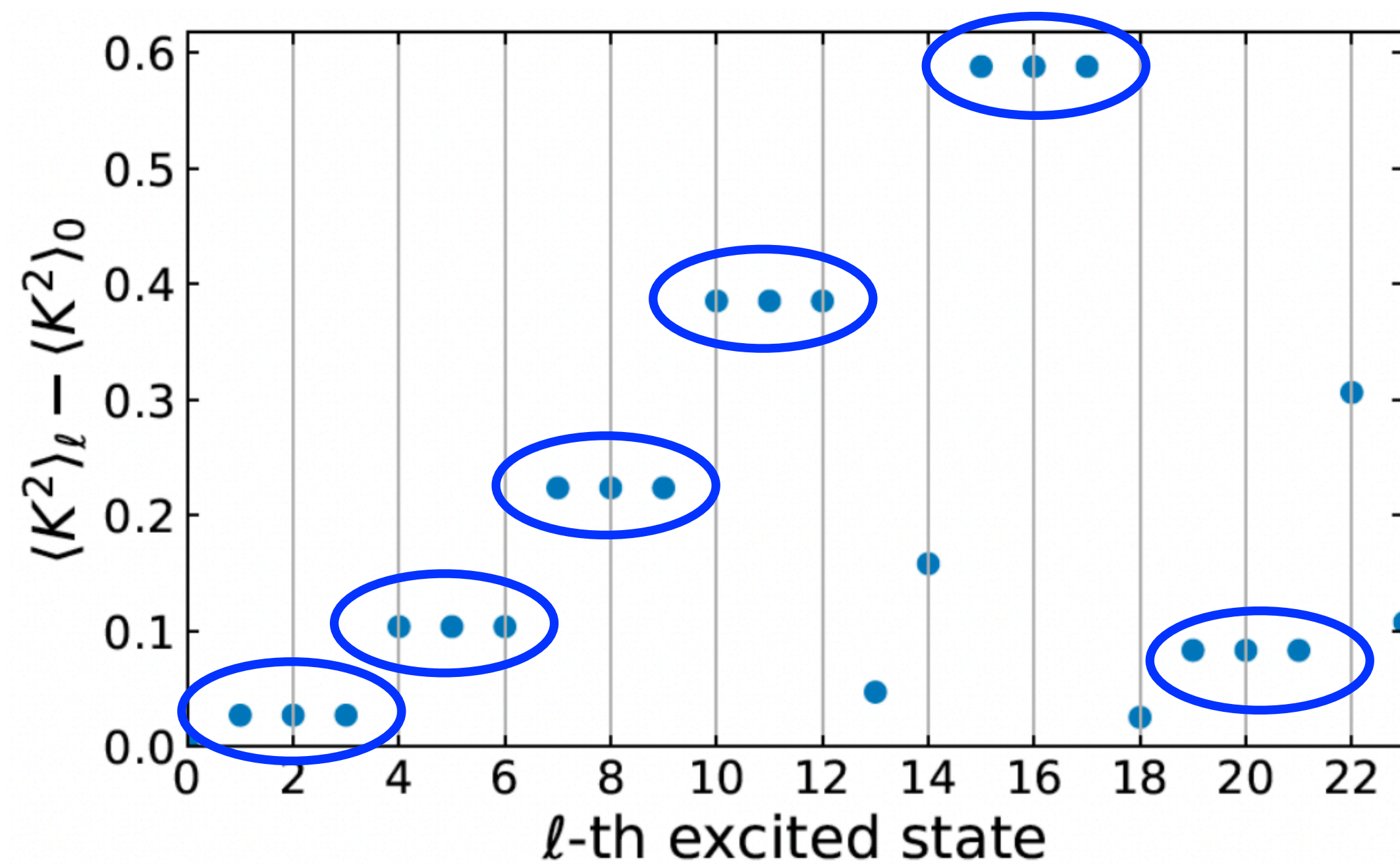


連続極限で $\langle C \rangle = \pm 1$



Re $\langle C \rangle$ の符号は厳密なCを反映

Iso-triplet 状態 (pionの候補)



ℓ	J^2	J_z	G	P
1	2.00000004	0.99999997	0.27872443	-6.819×10^{-8}
2	2.00000012	-0.00000000	0.27872416	-6.819×10^{-8}
3	2.00000004	-0.99999996	0.27872443	-6.819×10^{-8}
4	2.00000007	0.99999999	0.27736066	7.850×10^{-8}
5	2.00000006	0.00000000	0.27736104	7.850×10^{-8}
6	2.00000009	-0.99999998	0.27736066	7.850×10^{-8}
7	2.00000010	1.00000000	0.27536687	-8.838×10^{-8}
8	2.00000002	0.00000000	0.27536702	-8.837×10^{-8}
9	2.00000007	-0.99999998	0.27536687	-8.838×10^{-8}
10	2.00000007	0.99999998	0.27356274	9.856×10^{-8}
11	2.00000005	0.00000001	0.27356277	9.856×10^{-8}
12	2.00000007	-0.99999999	0.27356274	9.856×10^{-8}
15	1.99999942	0.99999966	0.27173470	-1.077×10^{-7}
16	2.00000052	0.00000000	0.27173482	-1.077×10^{-7}
17	2.00000015	-1.00000003	0.27173470	-1.077×10^{-7}
19	2.00009067	1.00004377	0.27717104	-3.022×10^{-8}
20	2.00002578	-0.00000004	0.27717020	-3.023×10^{-8}
21	2.00003465	-1.00001622	0.27717104	-3.023×10^{-8}

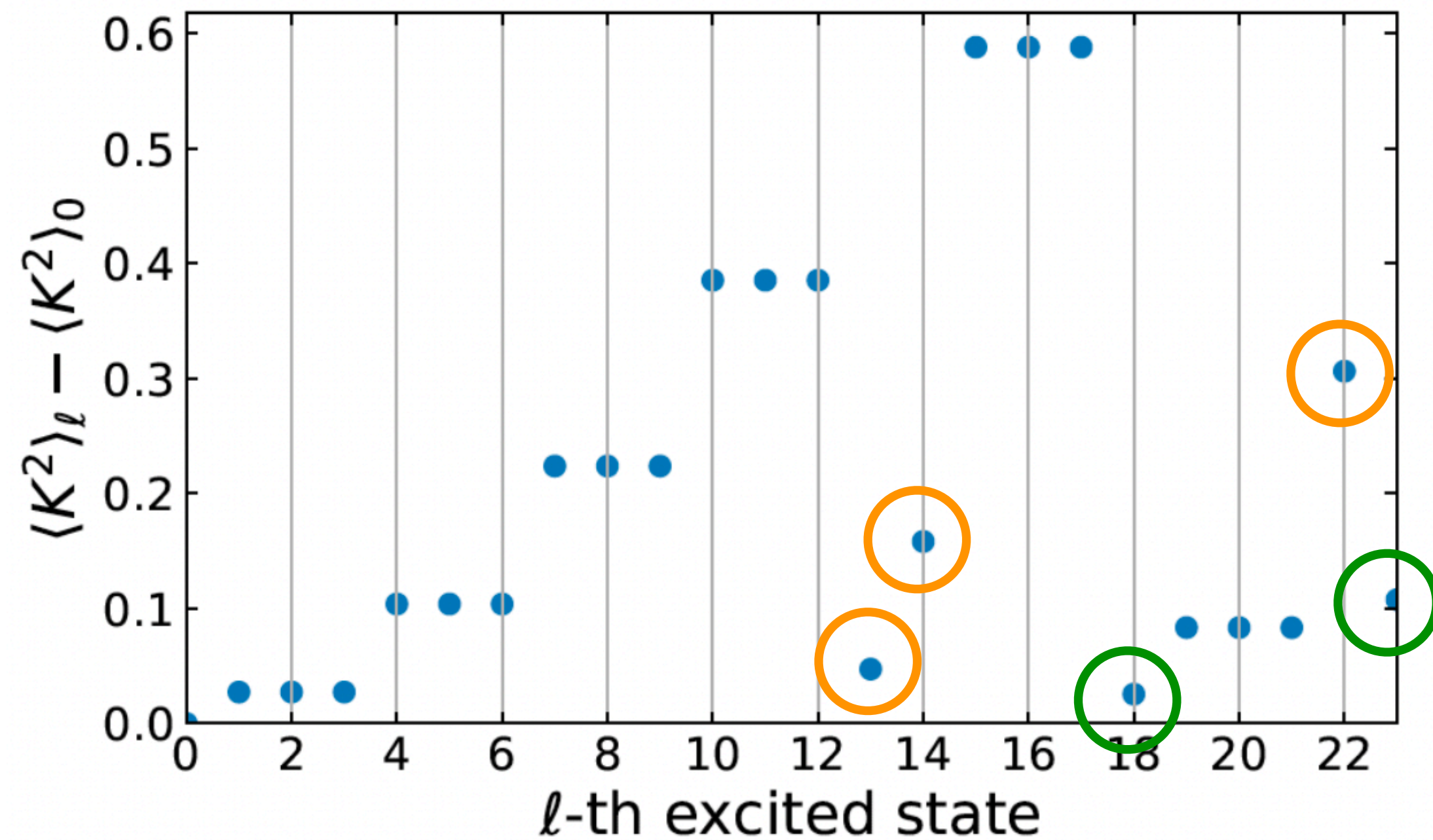
zero-mode

$$P < 0$$

$$J=1 \quad J_z = \pm 1 \quad G > 0 \quad P < 0$$

$$\text{pion} : J^{PG} = 1^{-+}$$

Iso-singlet 状態 (eta,sigmaの候補)



ℓ	J^2	J_z	G	P
0	0.000000003	-0.000000000	0.27984227	3.896×10^{-7}
13	0.000000003	0.000000000	0.27865844	1.273×10^{-7}
14	0.000000003	0.000000000	0.27508176	-2.765×10^{-8}
18	0.000000028	0.000000006	-0.27390909	-6.372×10^{-7}
22	0.00001537	0.00000115	0.26678987	7.990×10^{-8}
23	0.00003607	-0.00000482	-0.27664779	5.715×10^{-7}

zero-mode

$P > 0$

zero-mode

$P < 0$

$J=0 \quad J_z=0 \quad G>0 \quad P>0$

sigma meson : $J^{PG} = 0^{++}$

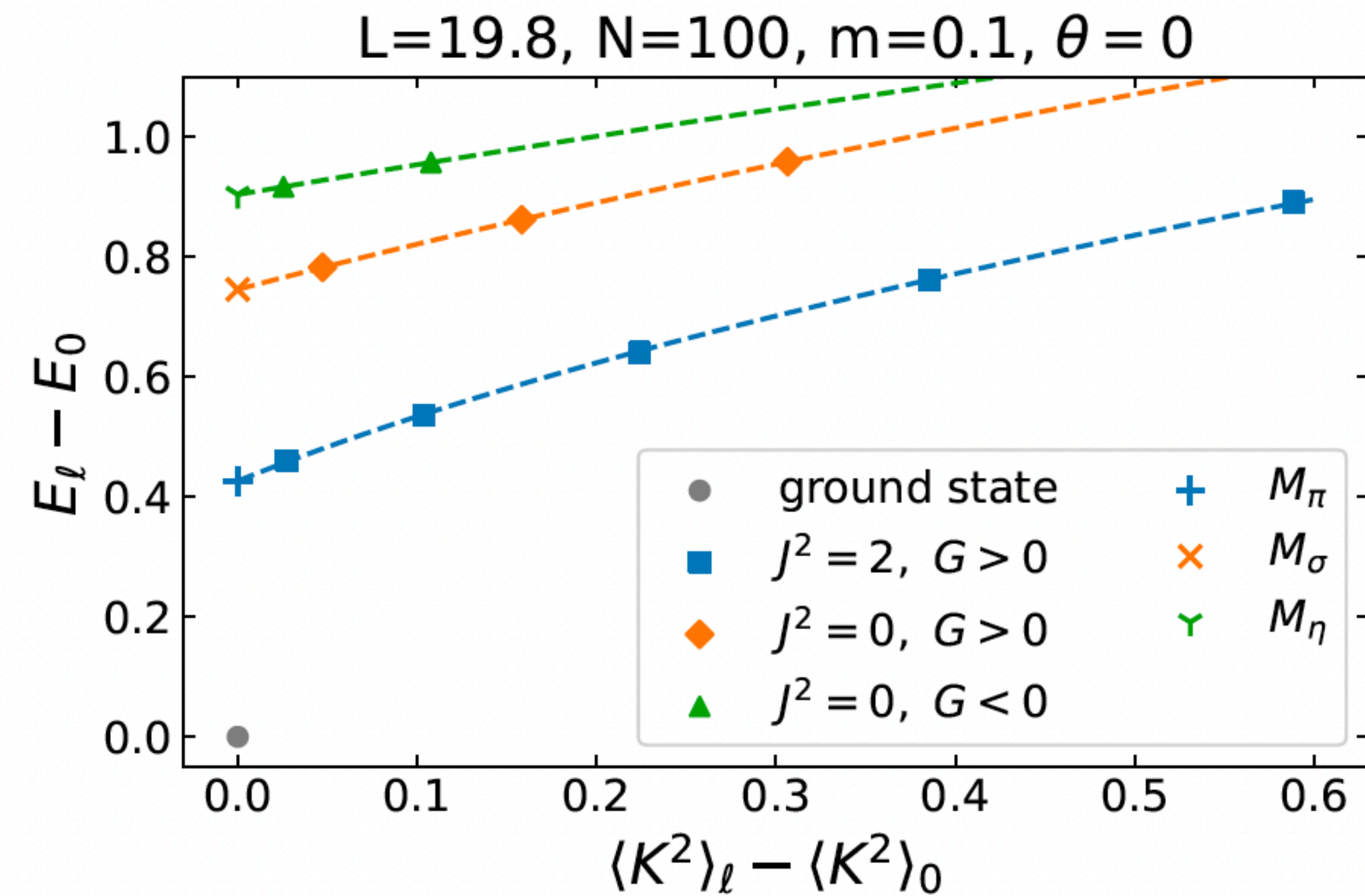
$J=0 \quad J_z=0 \quad G<0 \quad P<0$

eta meson : $J^{PG} = 0^{--}$

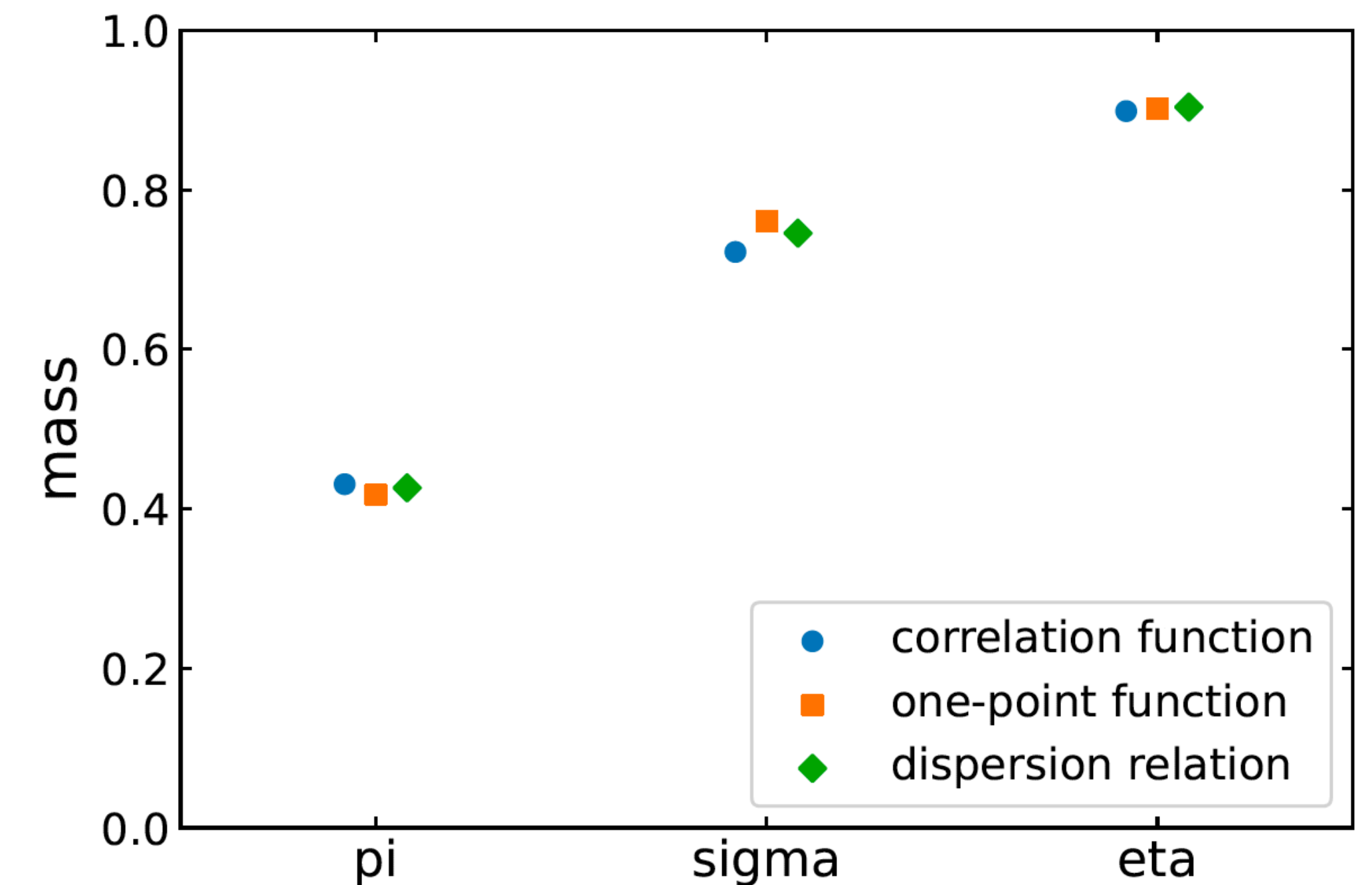
量子数で分類したデータの分散関係式

El-Matsumoto-Tanizaki, [JHEP11\(2023\)231](#)

ΔE_ℓ と ΔK_ℓ^2 を分散関係式 $\Delta E = \sqrt{M^2 + b^2 \Delta K^2}$ でフィット



3つの計算手法の比較 ($\theta = 0$)



理論的予言 Coleman(1976), Dashen et al. (1975)

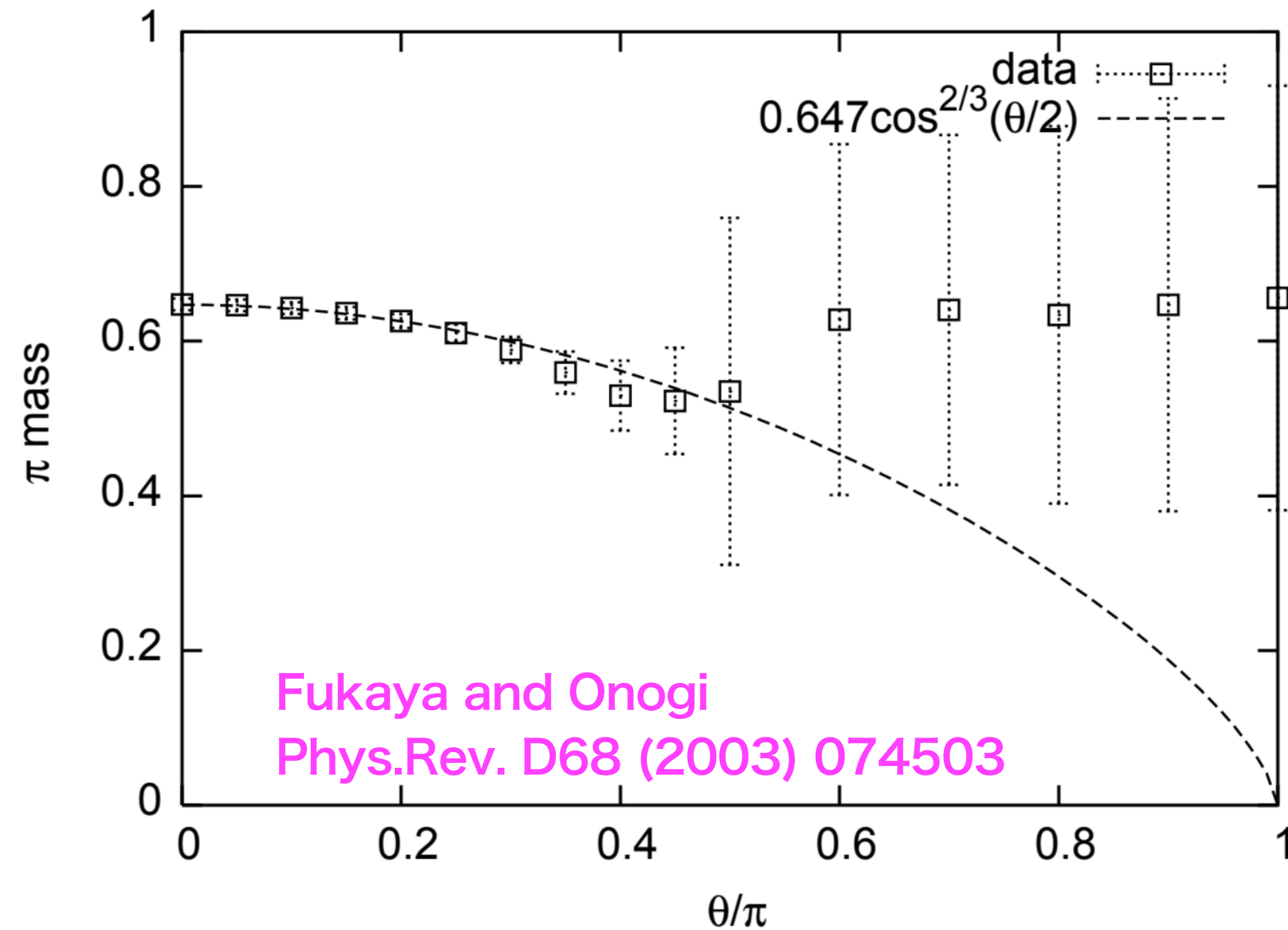
✓ $M_\pi < M_\sigma < M_\eta$: U(1) problem

✓ $M_\eta = \mu + O(m)$ ($\mu = g\sqrt{N_f/\pi} \sim 0.8$, $m = 0.1$)

✓ $M_\sigma/M_\pi = \sqrt{3}$ (within 5% deviation)

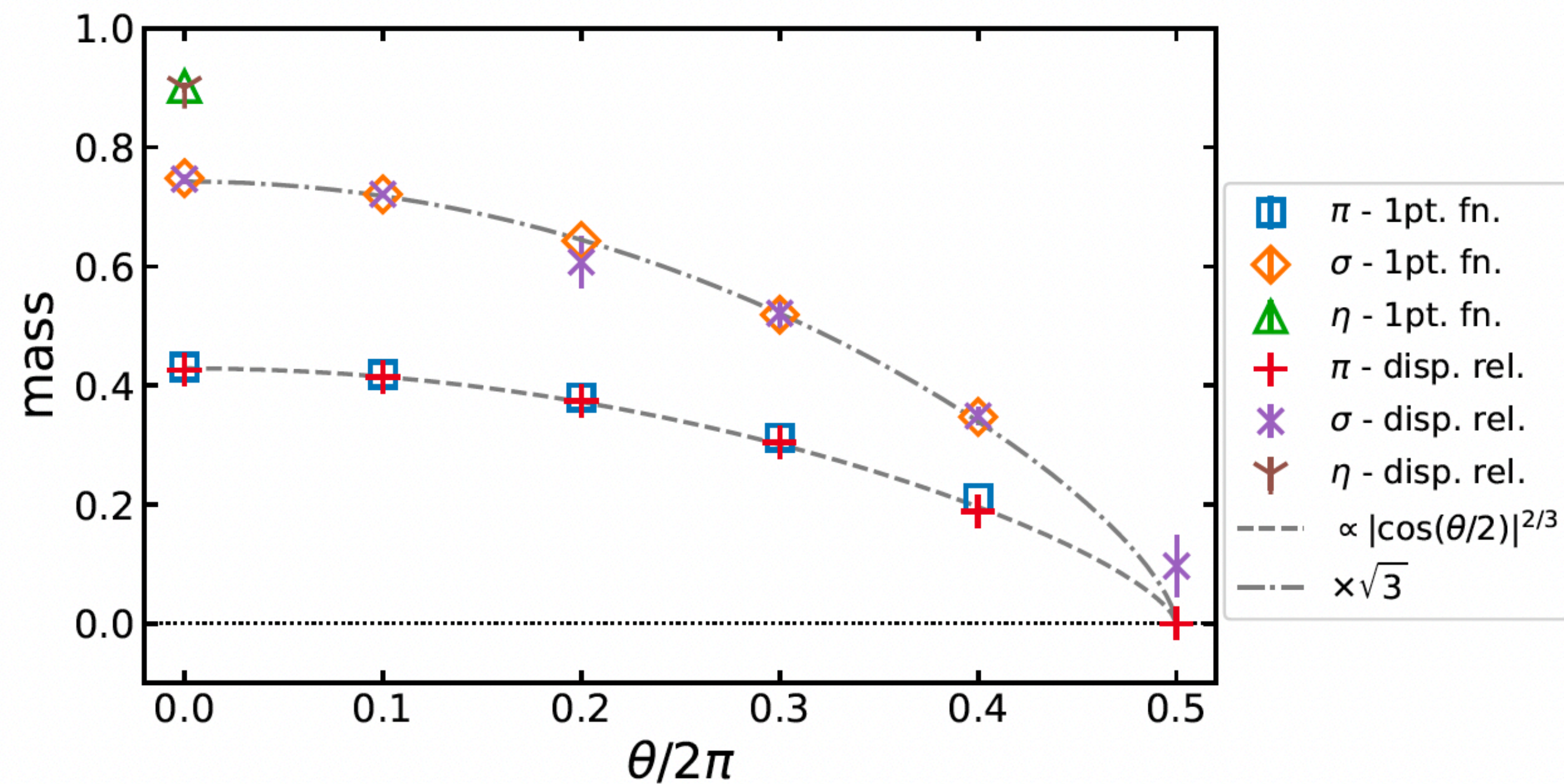
$\theta \neq 0$ 領域: 分散関係式法はそのまま拡張可能

従来のモンテカルロ法



- θ の大きいところでは符号問題のためノイズが増大
- $\theta = 0$ でも重い η メソンは測定が難しかった
(σ メソンは測定していない)

El-Matsumoto-Tanizaki, arXiv: 2407.11391



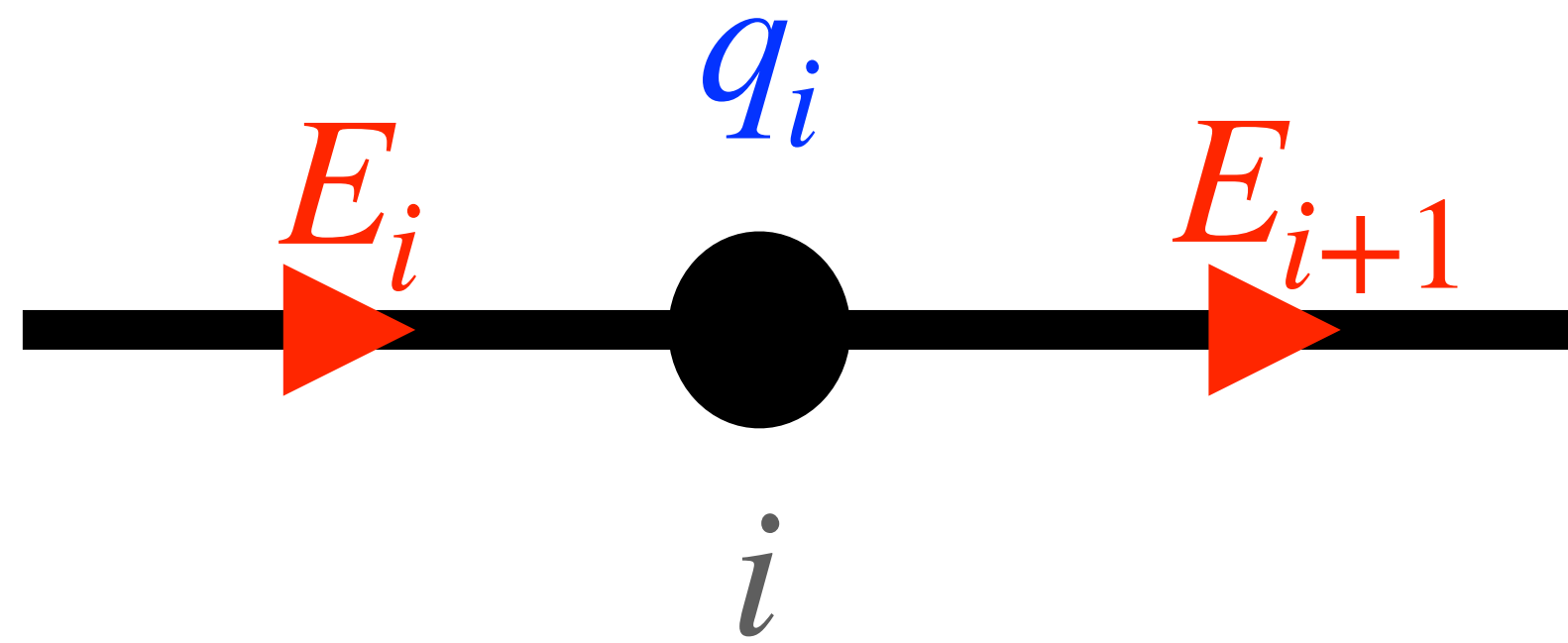
- $\theta = \pi$ まで適応可能 (near CFT)
- σ メソンは自動的に出てくる
- 様々な理論的予言とも一致

非可換ゲージ理論の場合 課題と展望

無限自由度を持つゲージ場をどう取り扱うか？

ゲージ場の自由度はどう消えた？

1+1次元 U(1)ゲージ理論



q_i : electron (+1)
positron (-1)
何もいない (0)

- Gauss law at each vertex

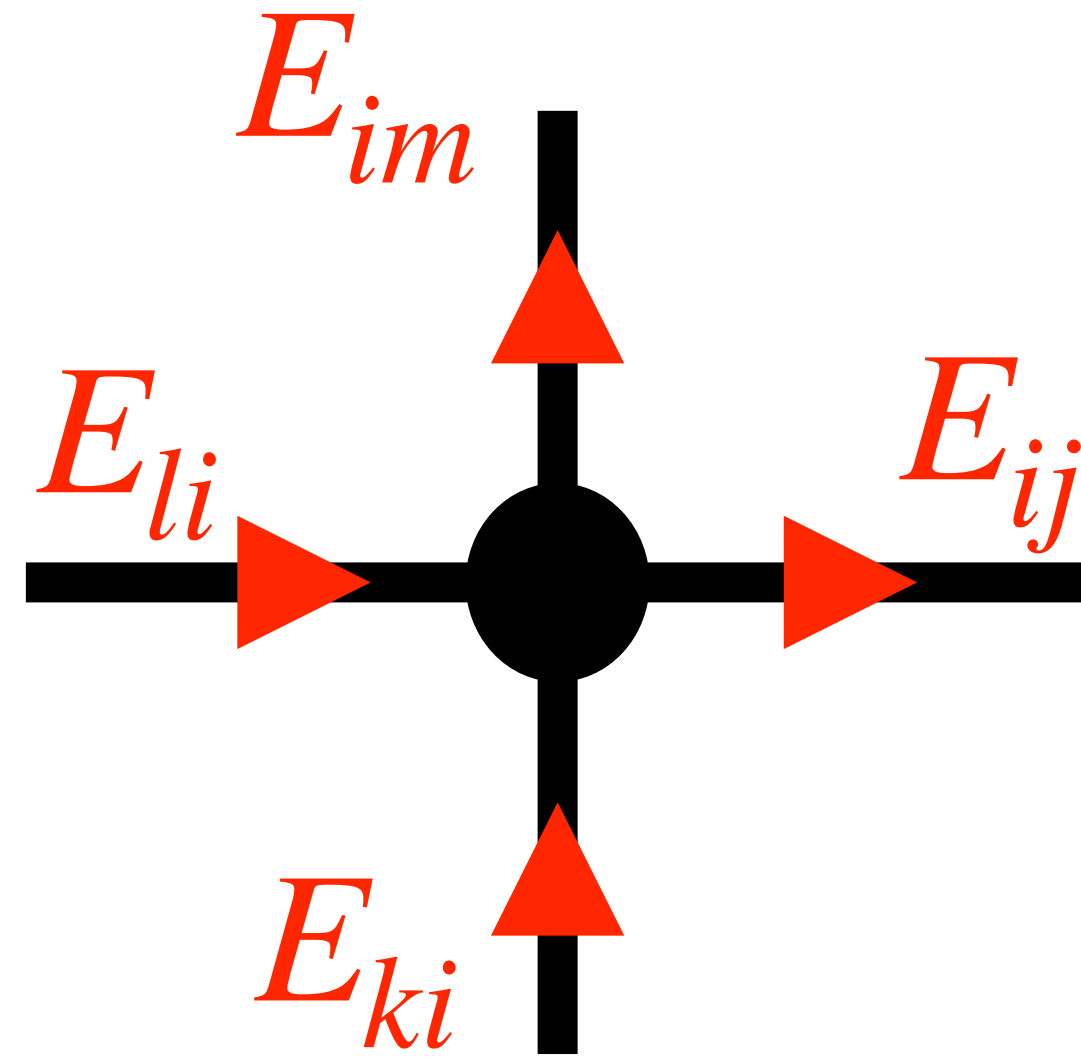
$$\hat{G}_i = \hat{E}_i - \hat{E}_{i+1} - \hat{q}_i, \quad \hat{G}_i |\Psi_{\text{phys}}\rangle = \epsilon_i |\Psi_{\text{phys}}\rangle$$

$(\epsilon_i = 0)$

- 開境界条件
端点の電場の値 $E_{-1} = 0$ とおいた
- 周期的境界条件を取ると定数ゼロモードが残る
→ 無限大の自由度

高次元の場合

2+1次元 U(1)ゲージ理論



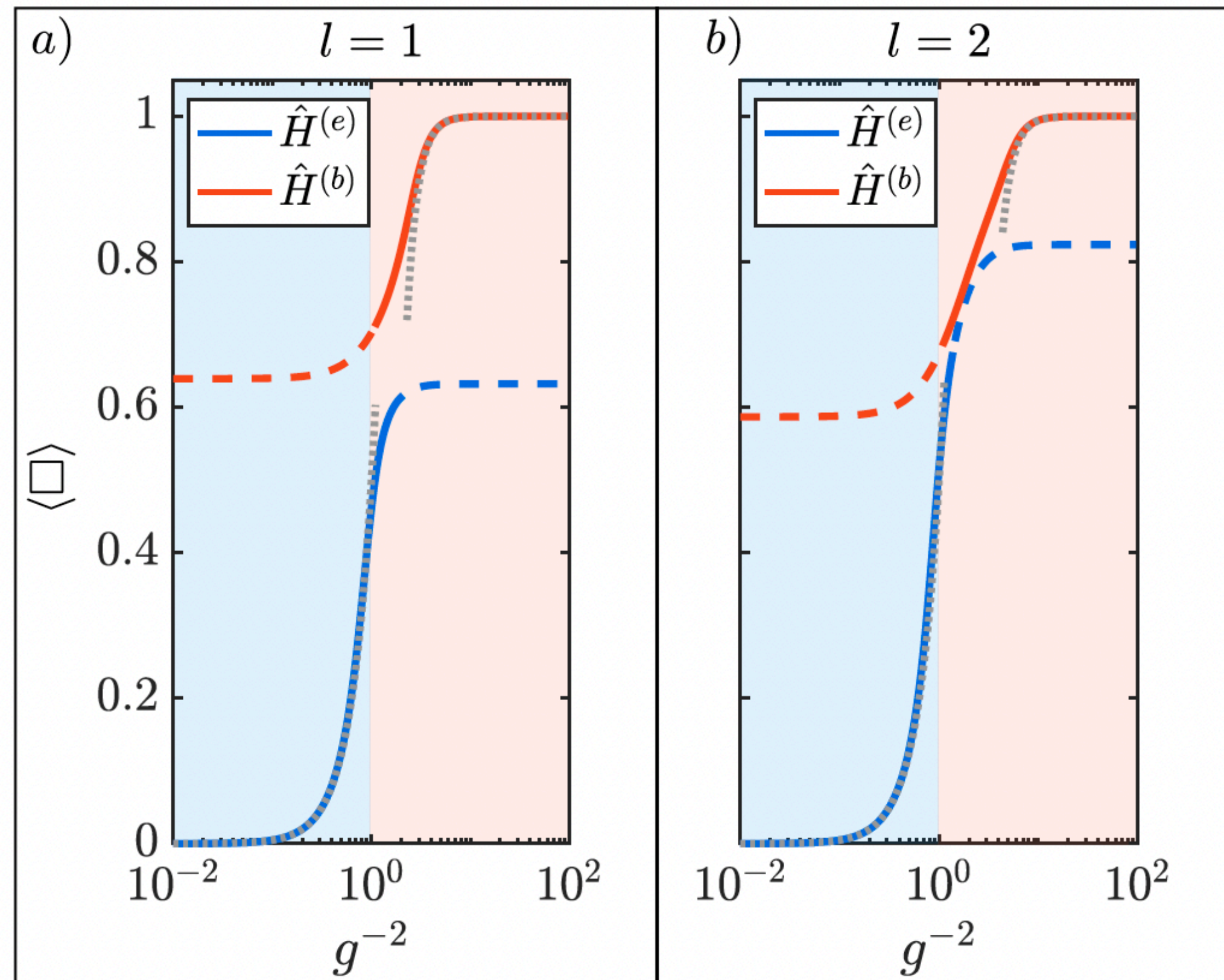
- Gauss law at each vertex

$$\hat{G}_i = \hat{E}_{li} - \hat{E}_{ij} + \hat{E}_{ki} - \hat{E}_{im} - \hat{q}_i$$

- 開境界条件の下でガウス則を課しても
1つのゲージ自由度が残る

2+1次元U(1)ゲージ理論

プラケット(エネルギー密度)



[Paulson et al. \(2020\)](#)

(計算自体はVQEを使った)

- 高次元ゲージ理論のハミルトニアン

$$H = g^2 H_E - \frac{1}{g^2} H_B$$

$$H_E = \sum_n \hat{E}_{n,\hat{x}}^2 + \hat{E}_{n,\hat{y}}^2, \quad H_B = \sum_n (\hat{P}_n + \hat{P}_n^\dagger)$$

- U(1)を $\mathbb{Z}_{2L+1}$ ゲージ理論に近似して
Hのそれぞれの項の固有状態のヒルベルト空間を
truncate ($l < L$)
計算結果で $L \rightarrow \infty$ を先にとって
truncated U(1)ゲージ理論を考えた
- 強結合から弱結合(連続極限)へ滑らかに繋がる結果を得るのは難しい

高次元 / $SU(N)$ ゲージ理論への取り組み

無限自由度を持つゲージ場をどう扱うか？

(1) ヒルベルト空間にカットオフを導入

(1-1) q -変形による修正, Zache et al., Hayata and Hidaka

量子群に変形 $SU(N) \rightarrow SU(N)_k$, truncationを"滑らかに" $[l] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{k+3}l\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{k+3}\right)}$

(1-2) loop-string-hadron approach Raychowdhury et al.

(2) 対称性を少し変える($[H_E, H_B] = 0$)

(2-1) plaquette chain modelに近似

(2-2) $\mathbb{Z}_N, D_N$ ゲージ理論 Cirac, Zohar et al.

(2-3) Orbifold lattice gauge theory Hanada et al.

(3) Quantum link model (D-theory) Wiese et al. Montangelo et al.

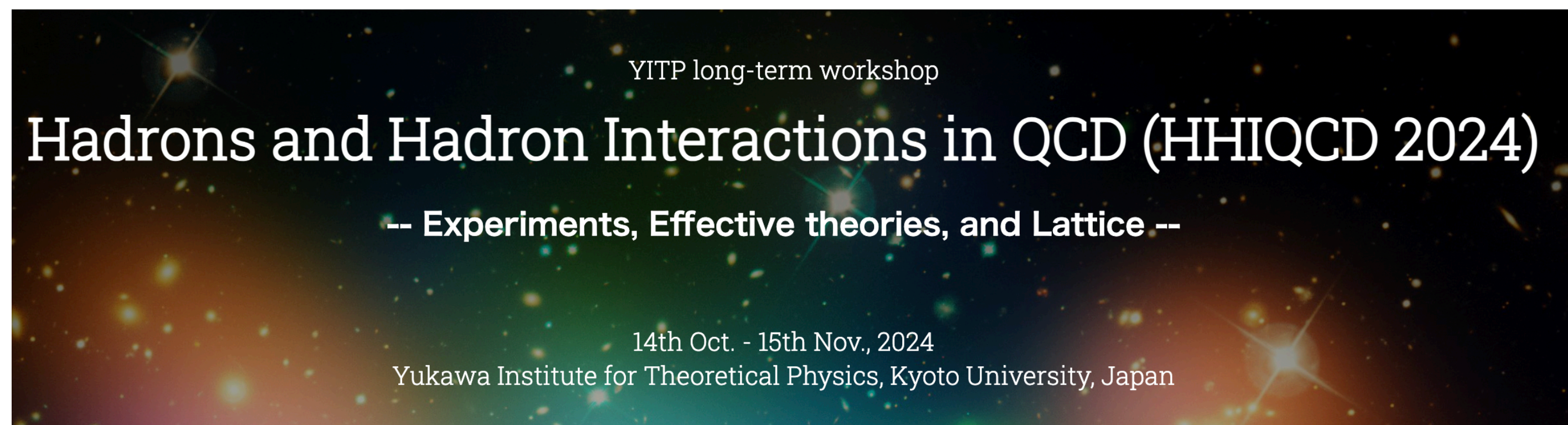
(ある極限を取るとゲージ理論と同じユニバーサリティクラスに属すスピン系)

宣伝

2024年10月14日 - 11月15日

京大基礎物理学研究所

滞在型研究会：HHIQCD2024



1st and 2nd weeks: Hadron interactions, scattering

3rd week : symposium for all subjects

4th week : hot and dense QCD

5th week : Formal aspect and quantum computations

Invited speakers for 3rd and 5th weeks

- Zohreh Davoudi (Maryland U.)
- Patrick Emonts (Leiden U.)
- Muhammad Asaduzzaman (U. of Iowa)
- Yahui Chai (DESY)
- Tomoya Hayata (Keio U.)
- Marc Illa (U. Washington)
- David B. Kaplan (Washington U.)
- Scott Lawrence (Los Alamos Natl. Lab.)
- Akira Matsumoto (YITP, Kyoto U.)
- Indrakshi Raychowdhury (BITS, Pilani)
- Pietro Silvi (Università di Padova)
- Judah Unmuth-Yockey (Fermilab)
- Uwe-Jens Wiese (Bern U.)
- Arata Yamamoto (U. Tokyo)
- Xiaojun Yao (U. Washington)
- Torsten V. Zache (Innsbruck U.)

... and more

まとめ

まとめと展望

- 従来の格子QCDにおける符号問題が難しすぎた
符号問題が最初から生じないハミルトニアン形式のゲージ場の理論が注目
(実時間発展、有限密度QCD、トポロジカル θ に関しては難しくない)
- 主な計算手法：量子計算アルゴリズム、テンソルネットワーク法など
- 計算機に乗せるにはゲージ場の自由度をどう扱うか？(理論, 実装)
- ハミルトニアン形式ならではの物理量の新しい測定法・新しい物理量の測定を考えるのも面白い
- 今日は話さなかったがゲージ場の理論・重力理論と量子誤り訂正理論

backup slides

量子コンピュータ版 "ムーアの法則"

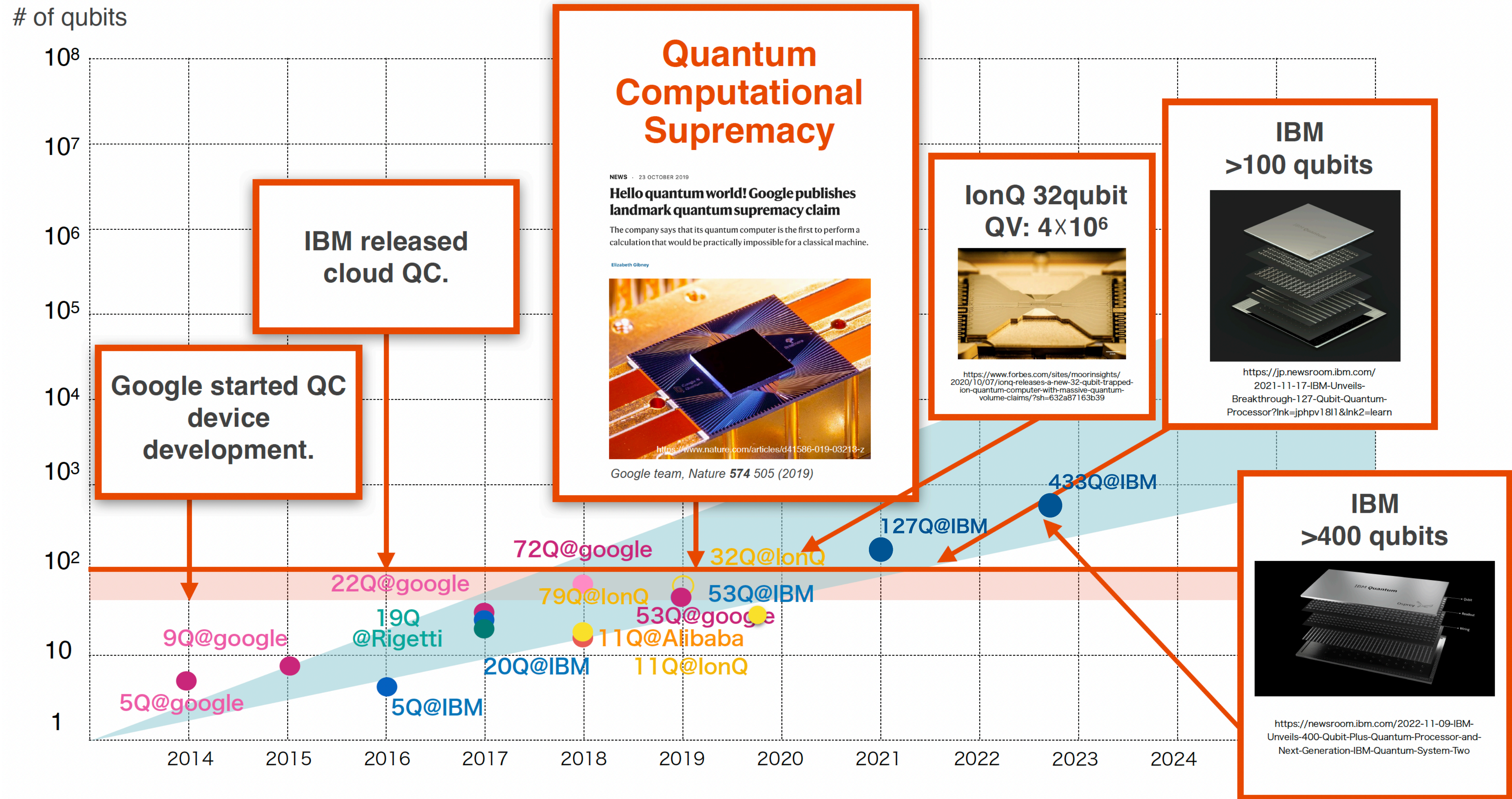


Figure given by Keisuke Fujii @QIQB, Osaka U.

量子コンピュータ版 "ムーアの法則"

of qubits

10^8

10^7

10^6

10^5

IBM released
cloud QC.

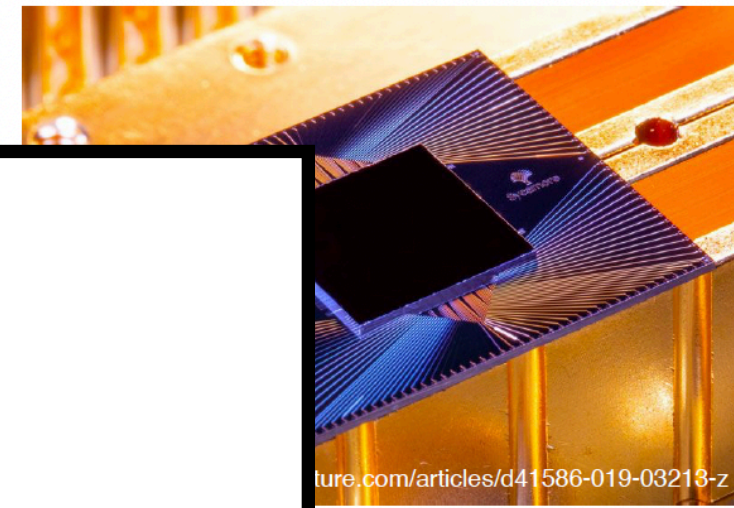
Quantum Computational Supremacy

NEWS · 23 OCTOBER 2019

Hello quantum world! Google publishes landmark quantum supremacy claim

The company says that its quantum computer is the first to perform a calculation that would be practically impossible for a classical machine.

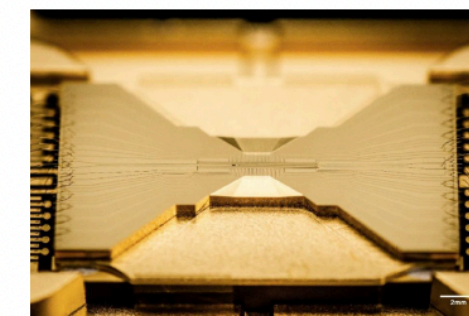
Elizabeth Gibney



ture.com/articles/d41586-019-03213-z

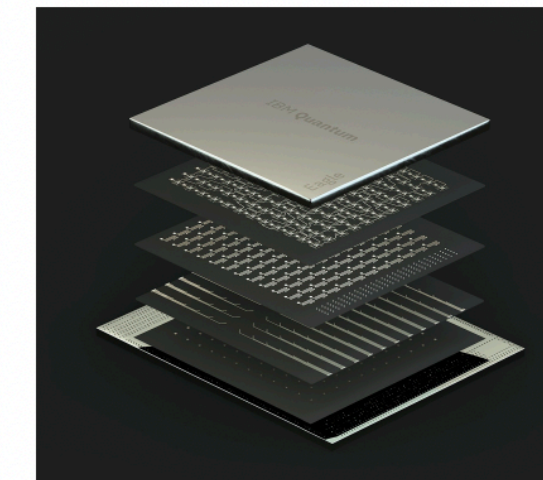
re 574 505 (2019)

IonQ 32qubit
QV: 4×10^6



<https://www.forbes.com/sites/moorinsights/2020/10/07/ionq-releases-a-new-32-qubit-trapped-ion-quantum-computer-with-massive-quantum-volume-claims/?sh=632a87163b39>

IBM
>100 qubits

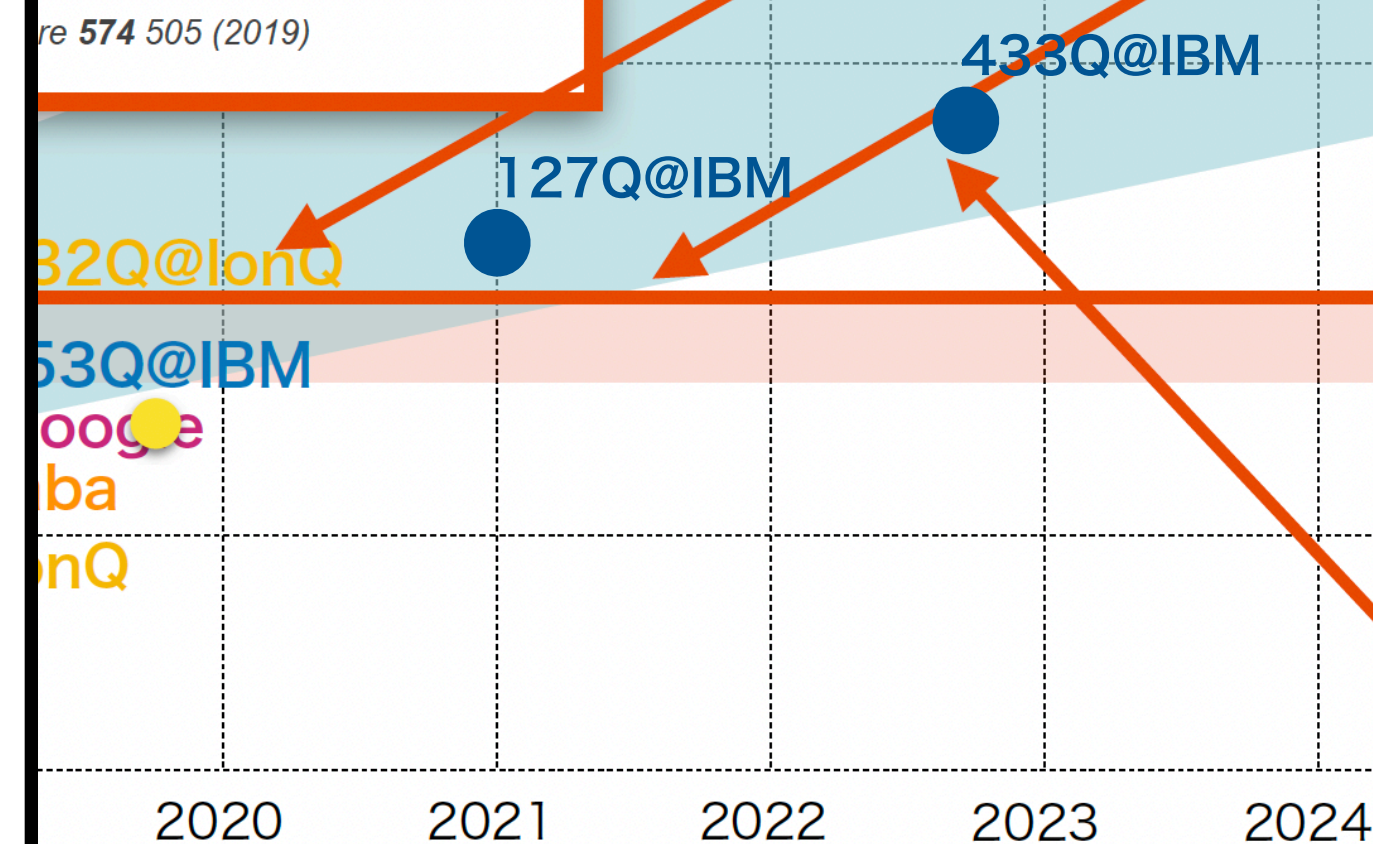


<https://jp.newsroom.ibm.com/2021-11-17-IBM-Unveils-Breakthrough-127-Qubit-Quantum-Processor?lnk=jphpv1811&lnk2=learn>

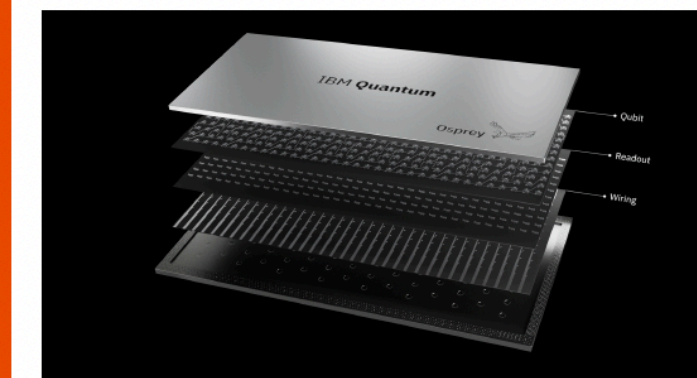
N qubits = 2^N Hilbert space

Fugaku supercomputer
(No.1 in world ranking)

Total memory:
4.85PiByte
 $\sim 2^{50}$ Byte



IBM
>400 qubits



<https://newsroom.ibm.com/2022-11-09-IBM-Unveils-400-Qubit-Plus-Quantum-Processor-and-Next-Generation-IBM-Quantum-System-Two>

Figure given by Keisuke Fujii @QIQB, Osaka U.

日本にある量子コンピュータ：実機

- IBM Quantum Eagle (127量子ビット)
かわさき新産業創造センター (KBIC)
- 叡（えい）理研(和光): 国産初号機, 2号機 (理研と富士通)
- 阪大QIQB: 国産3号機

～ 予定 ～

- IBM Quantum Heron (133量子ビット): 理研 (神戸) スパコン富岳と連結
- Quantinuum H-Series (20量子ビット): 理研(和光) イオントラップ型

- Lagrangian in continuum

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{g\theta_0}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

- Hamiltonian in continuum

$$H_{\text{con}} = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\Pi - \frac{g\theta_0}{2\pi} \right)^2 - i\bar{\psi}\gamma^1(\partial_1 + igA_1)\psi + m\bar{\psi}\psi \right]$$

- Hamiltonian on lattice (staggered fermion, link variable)

$$H = J \sum_{n=0}^{N-2} \left(L_n + \frac{\vartheta_n}{2\pi} \right)^2 - iw \sum_{n=0}^{N-2} (\chi_n^\dagger U_n \chi_{n+1} - \chi_{n+1}^\dagger U_n^\dagger \chi_n) + m \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \chi_n^\dagger \chi_n$$

- Remove gauge d.o.f. (OBC and Gauss law constraint)

$$H = J \sum_{n=0}^{N-2} \left(\epsilon_{-1} + \sum_{i=0}^n \left(\chi_i^\dagger \chi_i - \frac{1 - (-1)^i}{2} \right) + \frac{\vartheta_n}{2\pi} \right)^2 - iw \sum_{n=0}^{N-2} (\chi_n^\dagger \chi_{n+1} - \chi_{n+1}^\dagger \chi_n) + m \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \chi_n^\dagger \chi_n$$

- Spin Hamiltonian using Pauli matrices(Jordan-Wigner trans.)

$$H = J \sum_{n=0}^{N-2} \left[\sum_{i=0}^n \frac{Z_i + (-1)^i}{2} + \frac{\vartheta_n}{2\pi} \right]^2 + \frac{w}{2} \sum_{n=0}^{N-2} [X_n X_{n+1} + Y_n Y_{n+1}] + \frac{m}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n Z_n$$

Canonical momentum: $\Pi = \partial_0 A^1 + \frac{g\theta}{2\pi}$

Link variable: $L_n \leftrightarrow -\Pi(x)/g, \quad U_n \leftrightarrow e^{-iagA^1(x)},$

Staggered fermion: $\frac{\chi_n}{\sqrt{a}} \leftrightarrow \begin{cases} \psi_u(x) & n : \text{even} \\ \psi_d(x) & n : \text{odd} \end{cases}$

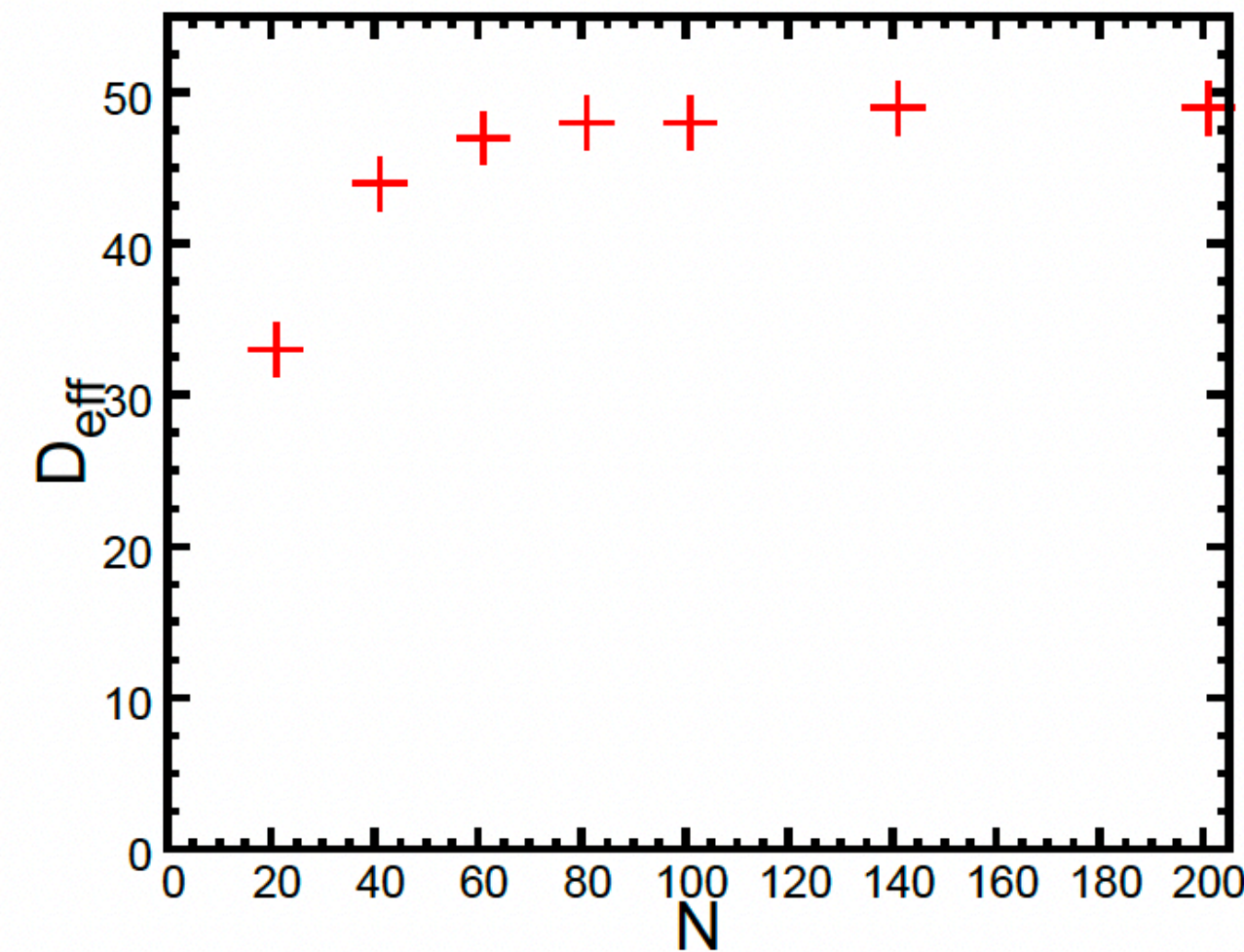
Gauss law:

$$0 = \partial_1 \Pi + g\psi^\dagger \psi \rightarrow L_n - L_{n-1} = \chi_n^\dagger \chi_n - \frac{1 - (-1)^n}{2}$$

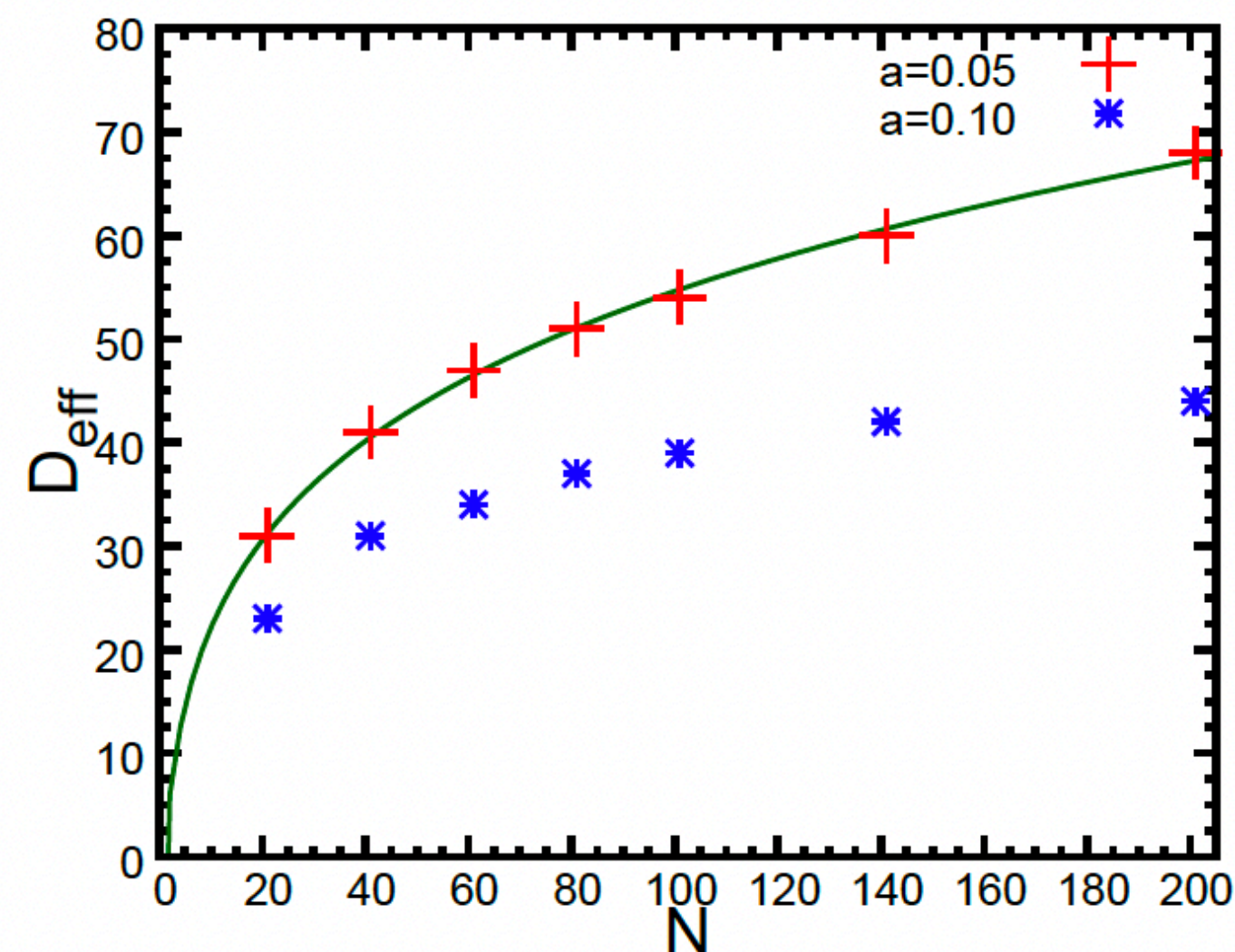
Jordan-Wigner trans.: $\chi_n = \frac{X_n - Y_n}{2} \prod_{i=0}^{n-1} (-iZ_i)$

ボンド次元とエンタングルメント

gapped理論のボンド次元



critical理論のボンド次元



[Honda, El, Tanizaki\(2022\)](#)

- gapped理論では系のサイズ $N \rightarrow \infty$ で有限な値に収束

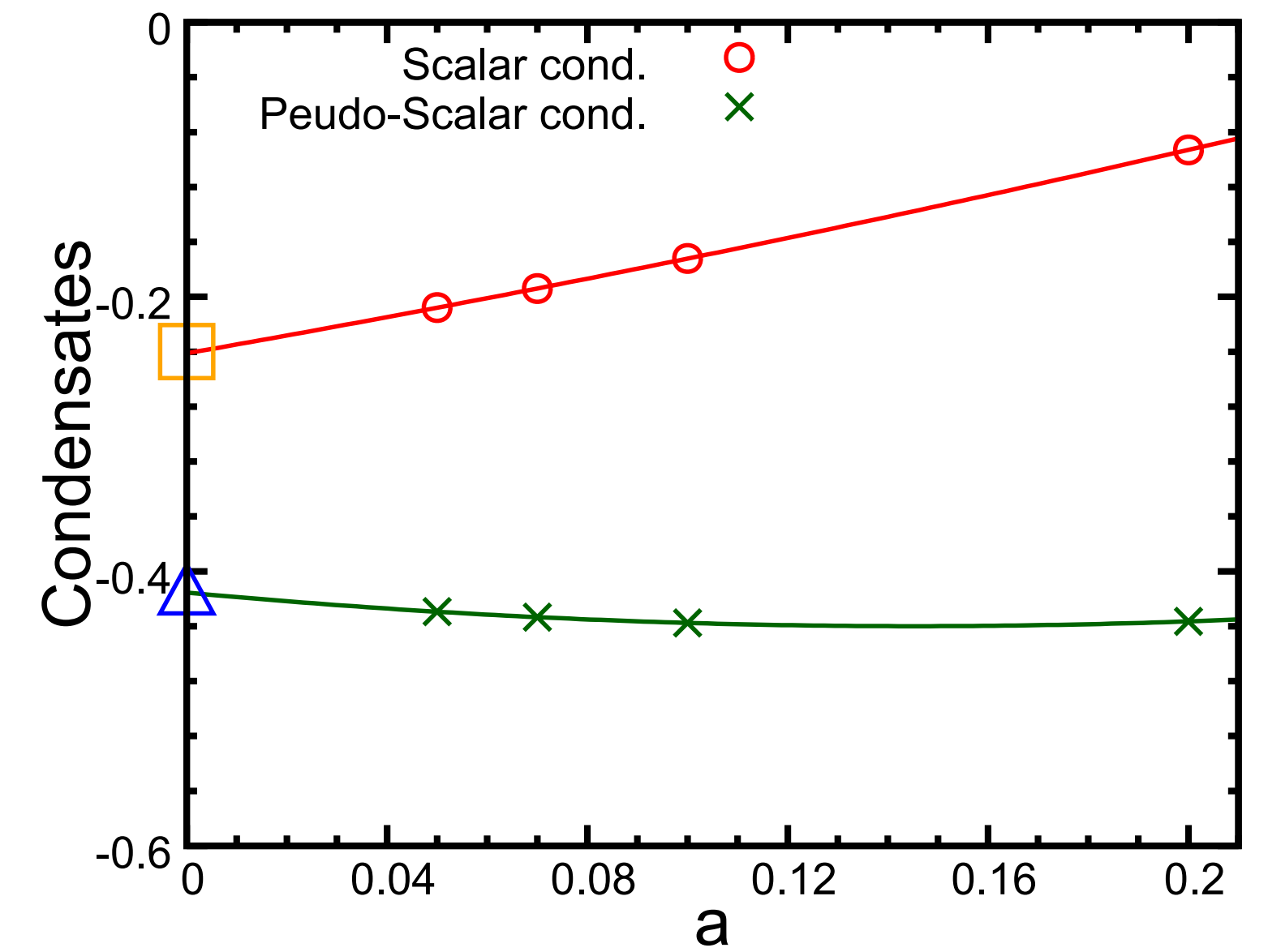
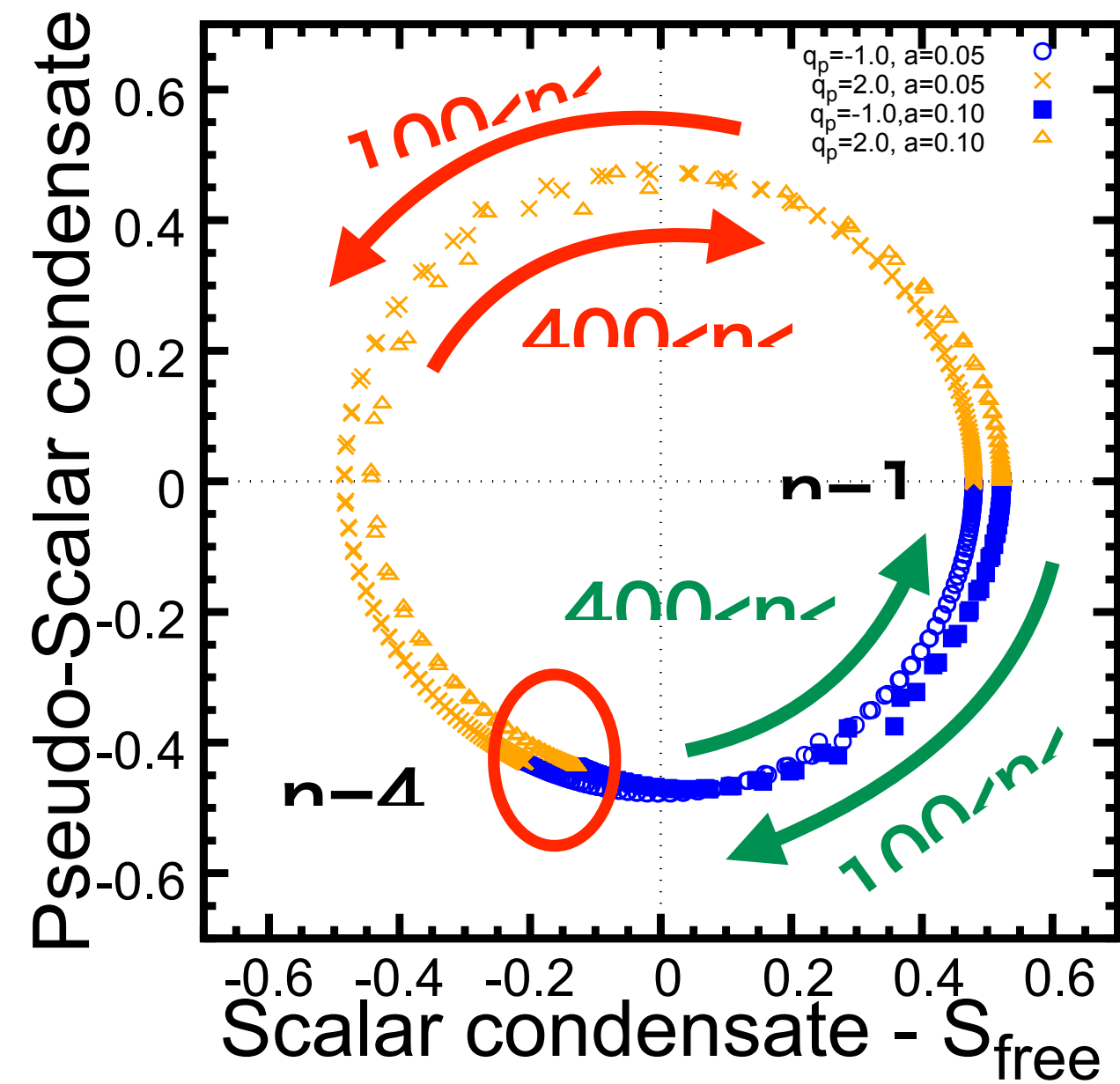
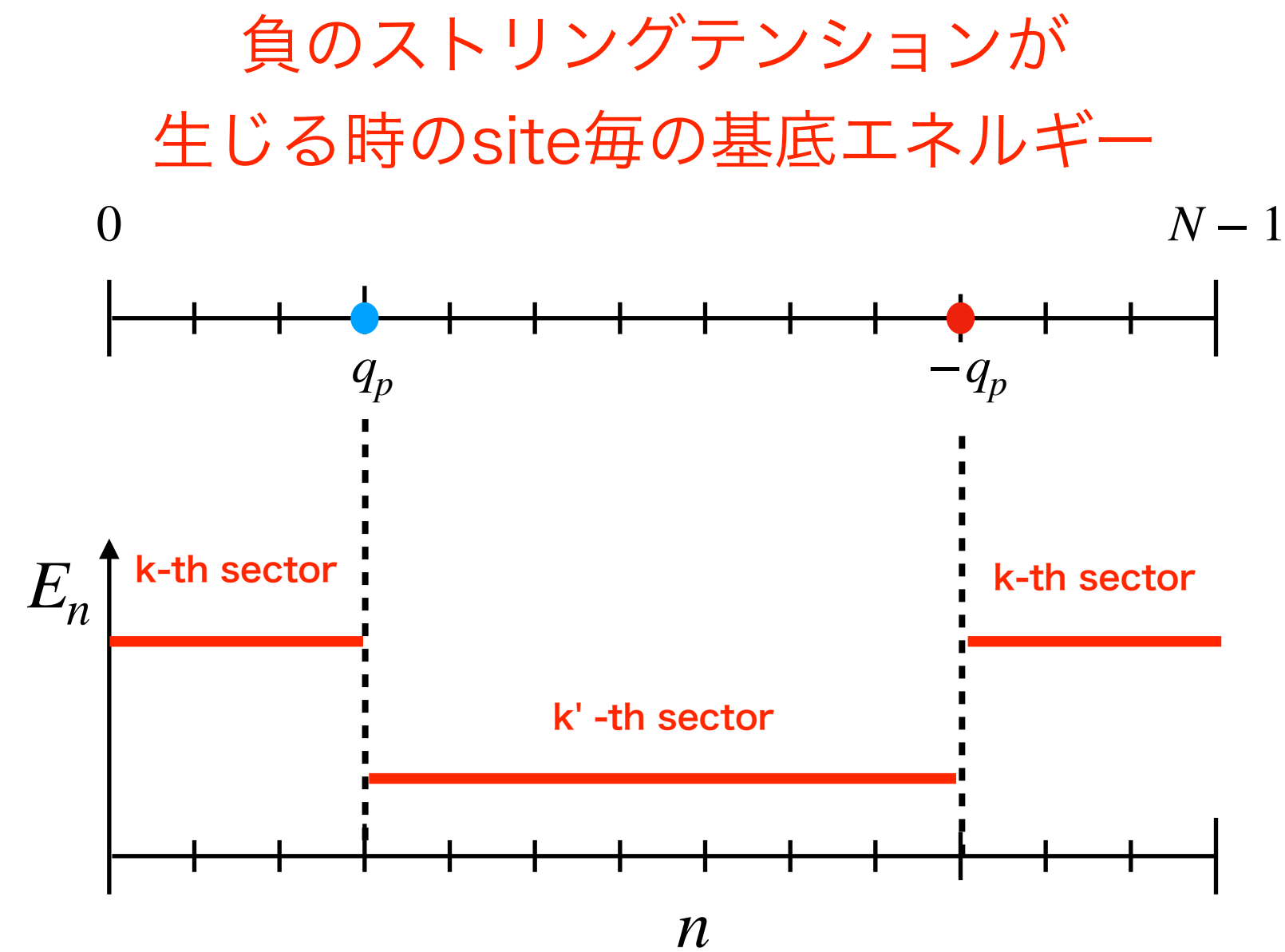
- criticalな理論ではエンタングルメント・エントロピー

$$S_{EE} \sim \frac{c}{3} \ln N \text{ に対して } D_{\text{eff}} \geq O(N^{c/3})$$

- 左図: 電荷-q Schwinger の $\theta/(2\pi q) = 0.5$
連続極限で $c=1/2$ の CFT

フィット関数 $c_1 N^{1/6} + c_2$

charge- q Schwinger model ('t Hooft anomaly matching)



Order parameter: $S(x) + iP(x) = \bar{\psi}\psi(x) \pm \bar{\psi}\gamma_E\psi(x)$ 連続極限をとると複素平面で $2\pi q_p/q \pmod{q}$ 回転している

Wilson loopの内側と外側で
離散カイラルの異なるセクター

横切る時 $e^{i\frac{2\pi q_p}{q}}$ の位相を稼ぐ

charge-q Schwinger model ('t Hooft anomaly matching)

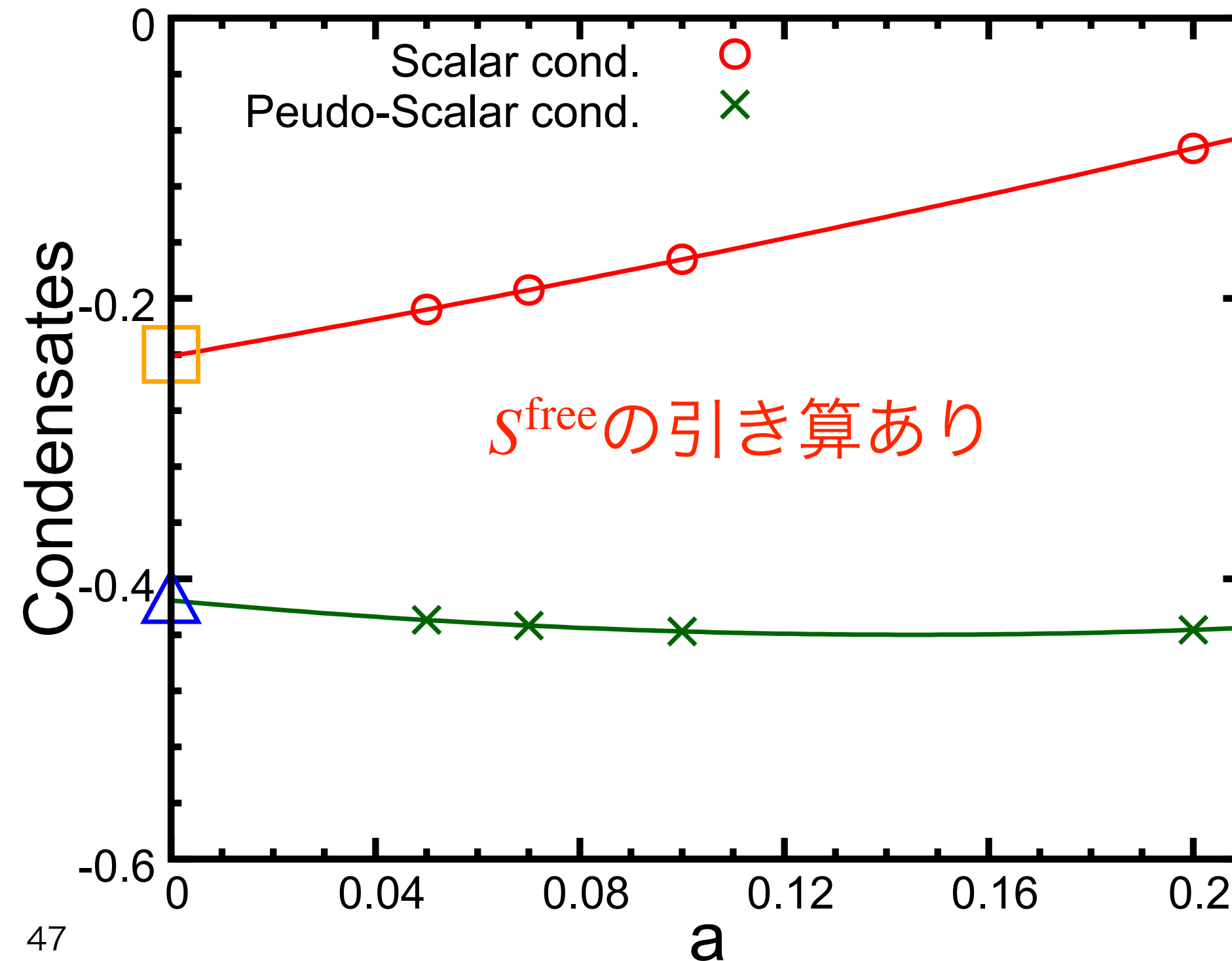
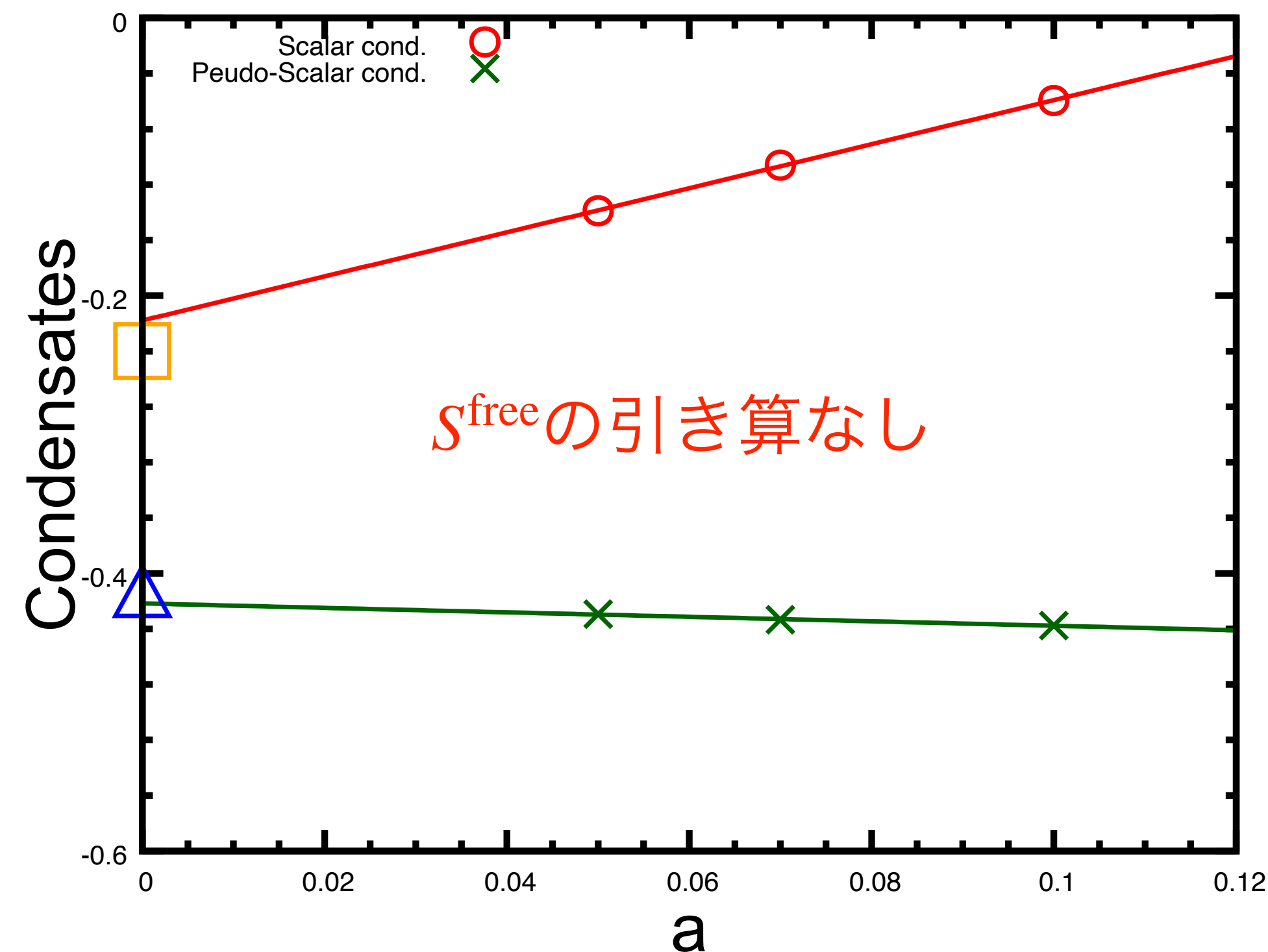
Staggered fermionのmass補正

masslessの時もlog発散はゼロではない？ $S^{\text{free}} = -\frac{m}{\pi\sqrt{1+(\mu a)}} K\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\mu a)^2}}\right)$

ハミルトニアン形式におけるstaggered fermionの連続理論との対応に $O(a)$ の補正が生じる

$$m_{\text{lat}} = m - \frac{q^2 g^2 a}{8}$$

Dempsey, Klebanov, Pufu, Zan:arXiv:2206.05308

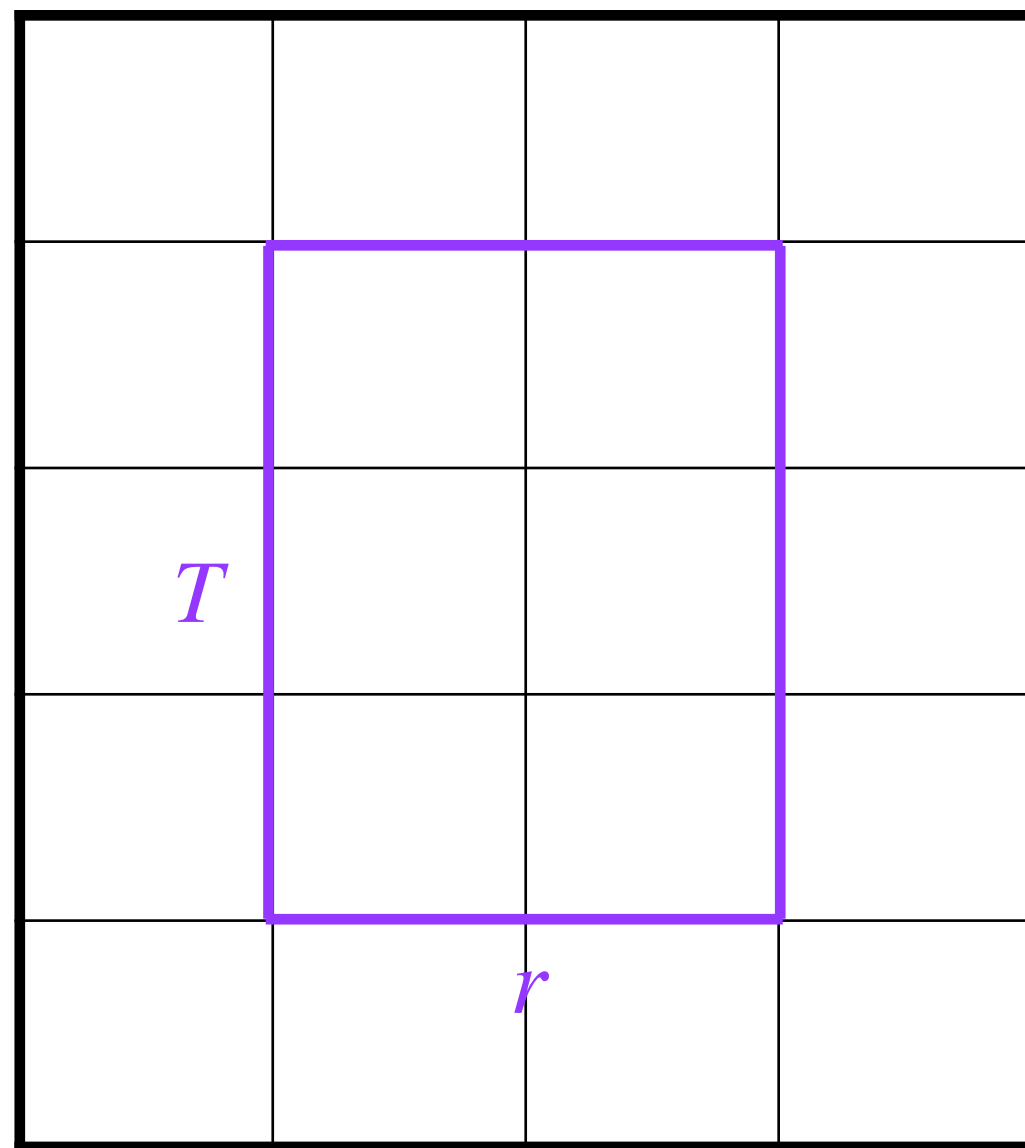


q-qbar potential

- ハミルトニアン形式では従来法(Lattice QCD)と異なる計算法ができる

ラグランジアン形式: Wilson loop

$$\langle W(C) \rangle \approx e^{-TV(r)} = \text{tr} \left[\prod_{i \in C} U_i \right]$$



測定量：リンク変数の積
rを変えて指数部分を読み取る

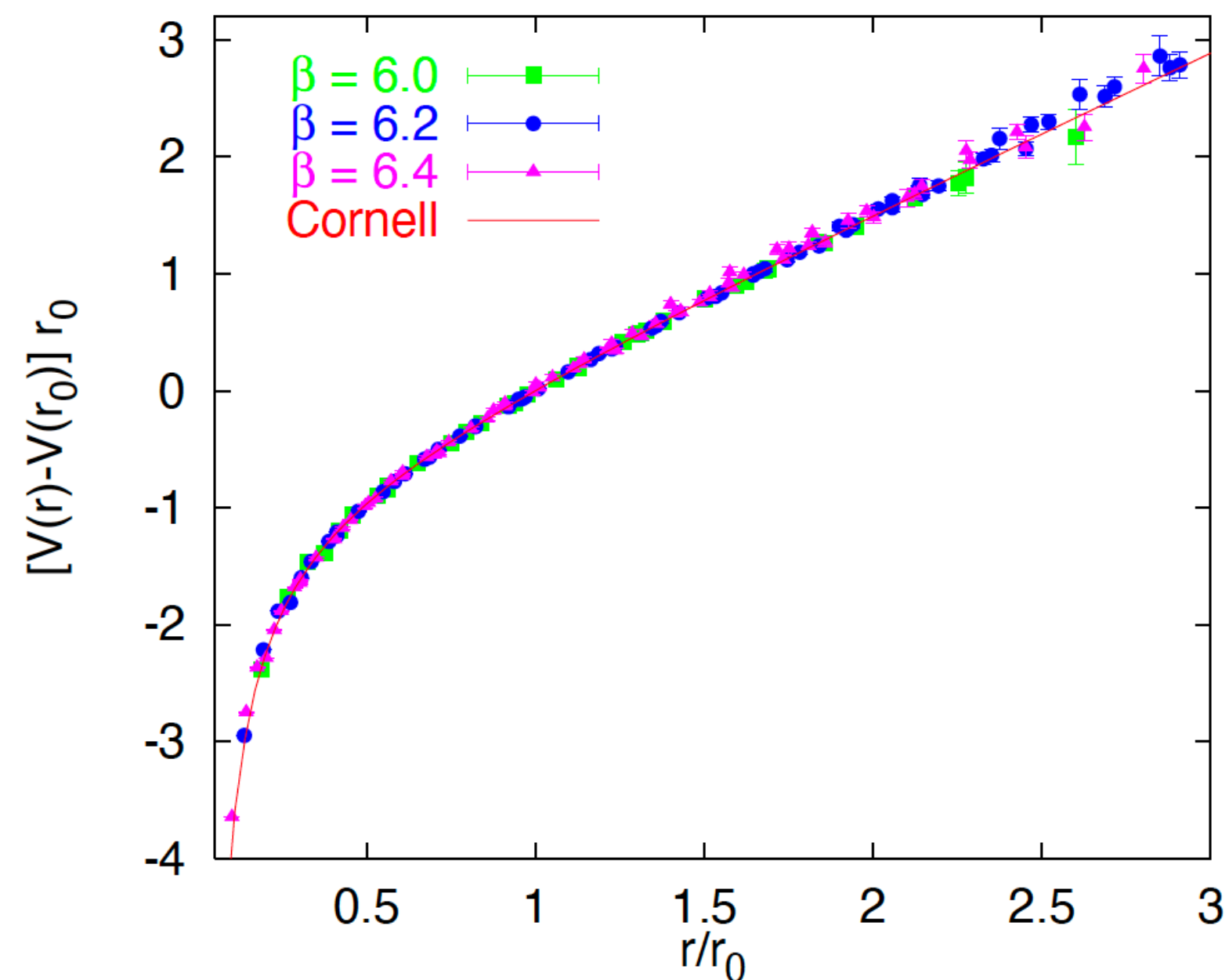
q-qbar potential

- ハミルトニアン形式では従来法(Lattice QCD)と異なる計算法ができる

ラグランジアン形式: Wilson loop

$$\langle W(C) \rangle \underset{T \rightarrow \infty}{\approx} e^{-TV(r)} = \text{tr} \left[\prod_{i \in C} U_i \right]$$

G.Bali, Phys.Rept.343:1 (2000)



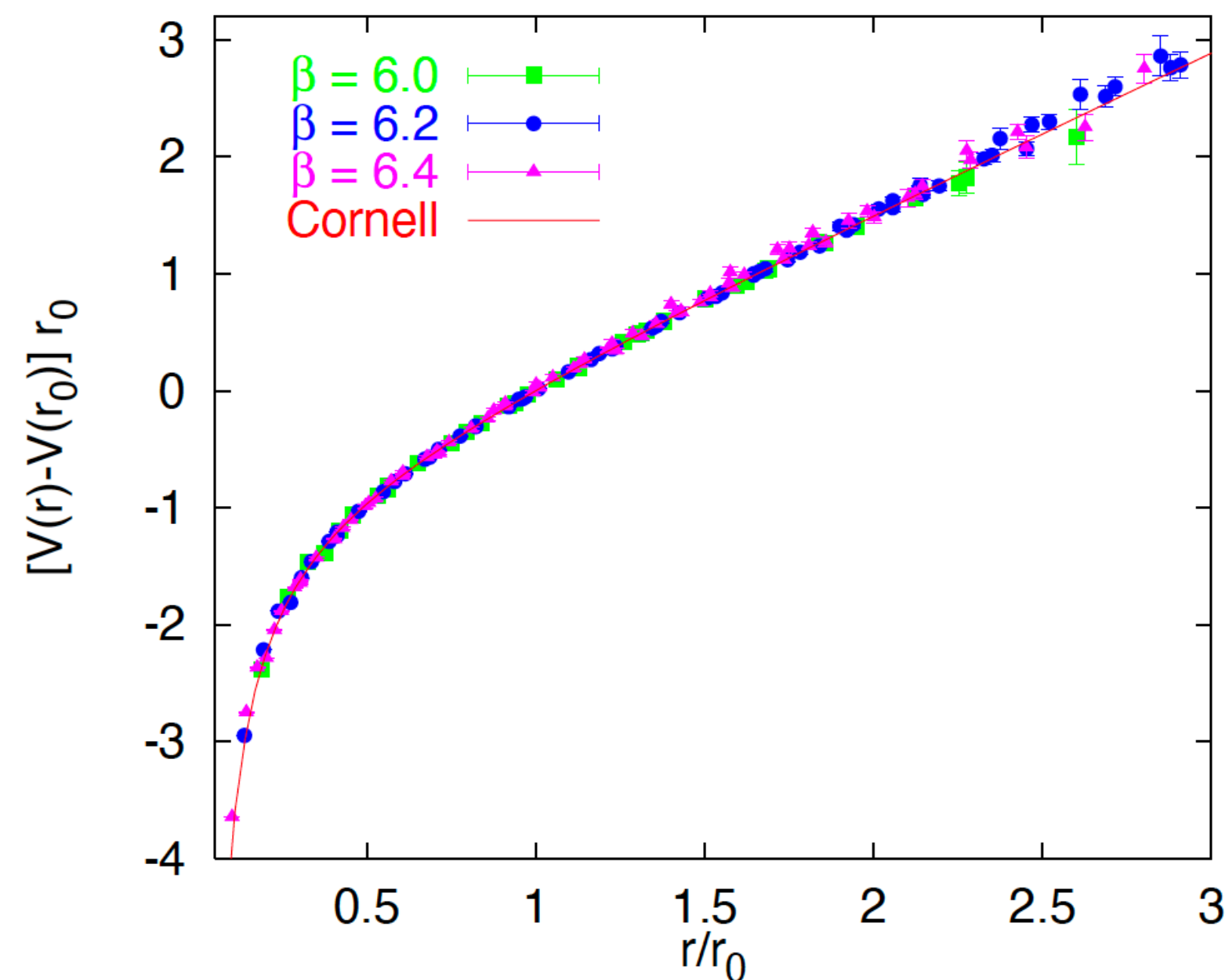
q-qbar potential

- ハミルトニアン形式では従来法(Lattice QCD)と異なる計算法ができる

ラグランジアン形式: Wilson loop

$$\langle W(C) \rangle \approx e^{-TV(r)} = \text{tr} \left[\prod_{i \in C} U_i \right]$$

G.Bali, Phys.Rept.343:1 (2000)

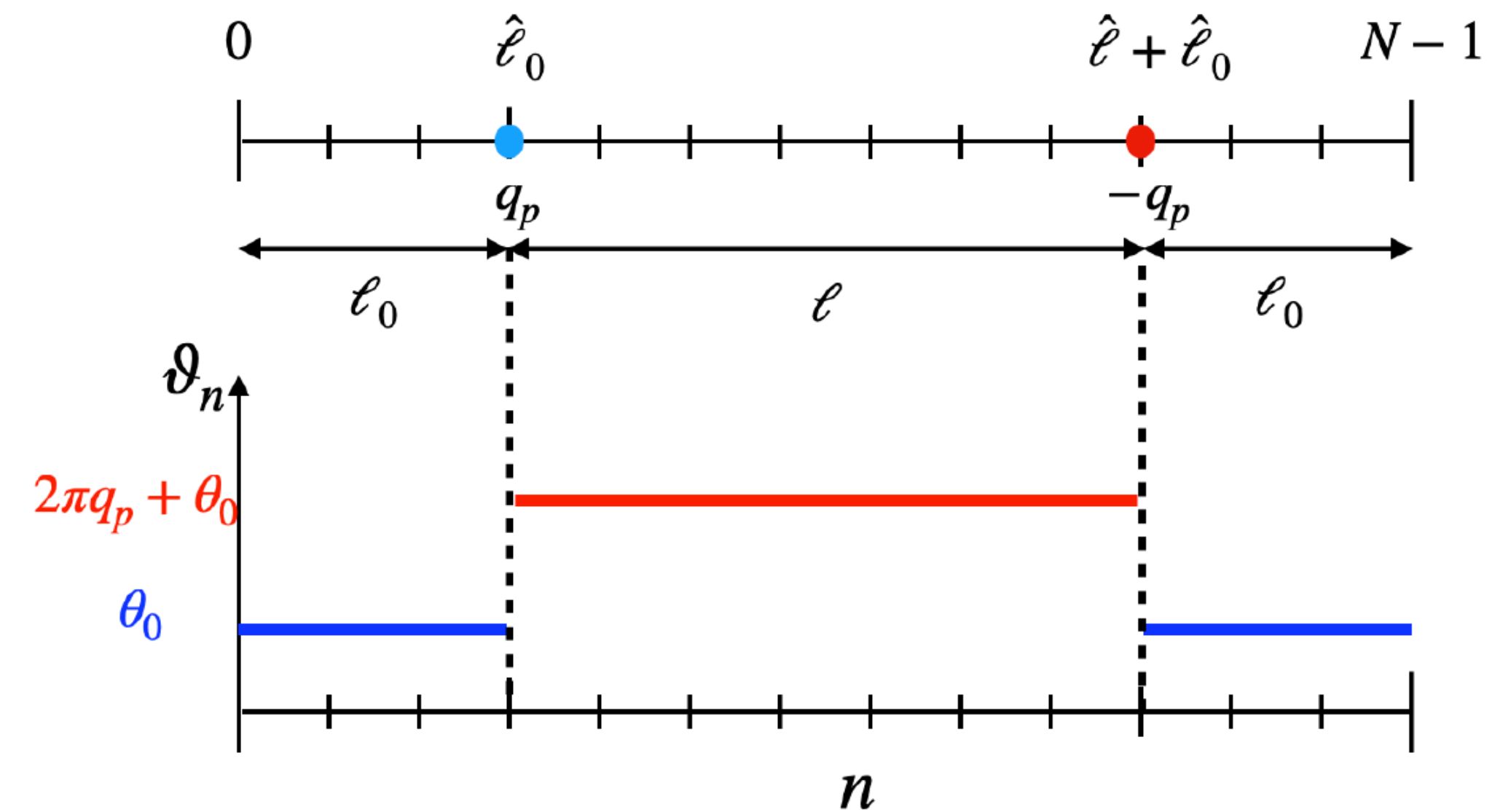


ハミルトニアン形式 (Schwinger model)

電荷がある時のHの期待値から直接測定

各 ℓ における $E(\ell) = \langle \Omega | H(\ell) | \Omega \rangle$ を測定

ポテンシャル: $V(\ell) = E(\ell) - E(0)$



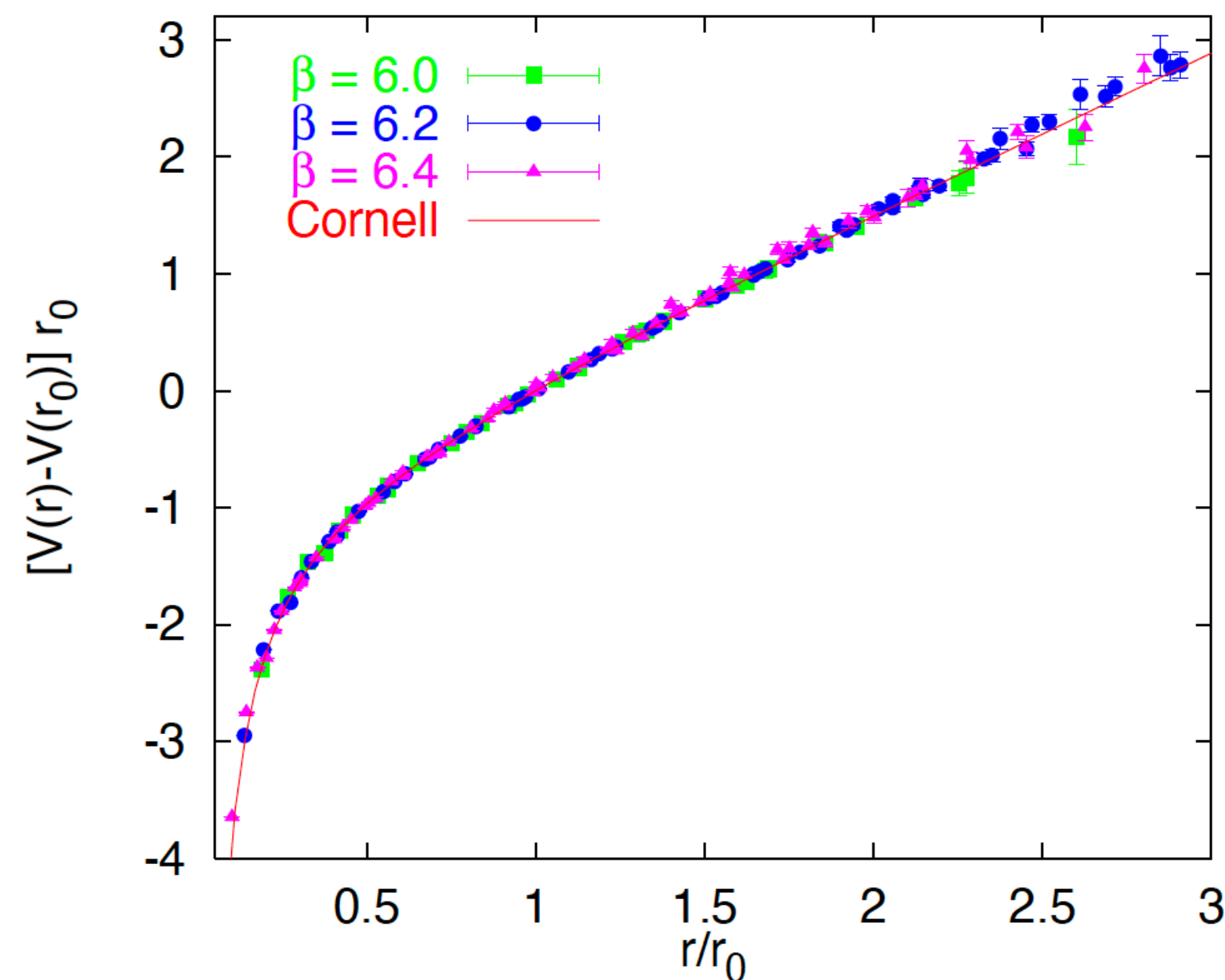
q-qbar potential

- ハミルトニアン形式では従来法(Lattice QCD)と異なる計算法ができる

ラグランジアン形式: Wilson loop

$$\langle W(C) \rangle \approx e^{-TV(r)} = \text{tr} \left[\prod_{i \in C} U_i \right]$$

G.Bali, Phys.Rept.343:1 (2000)



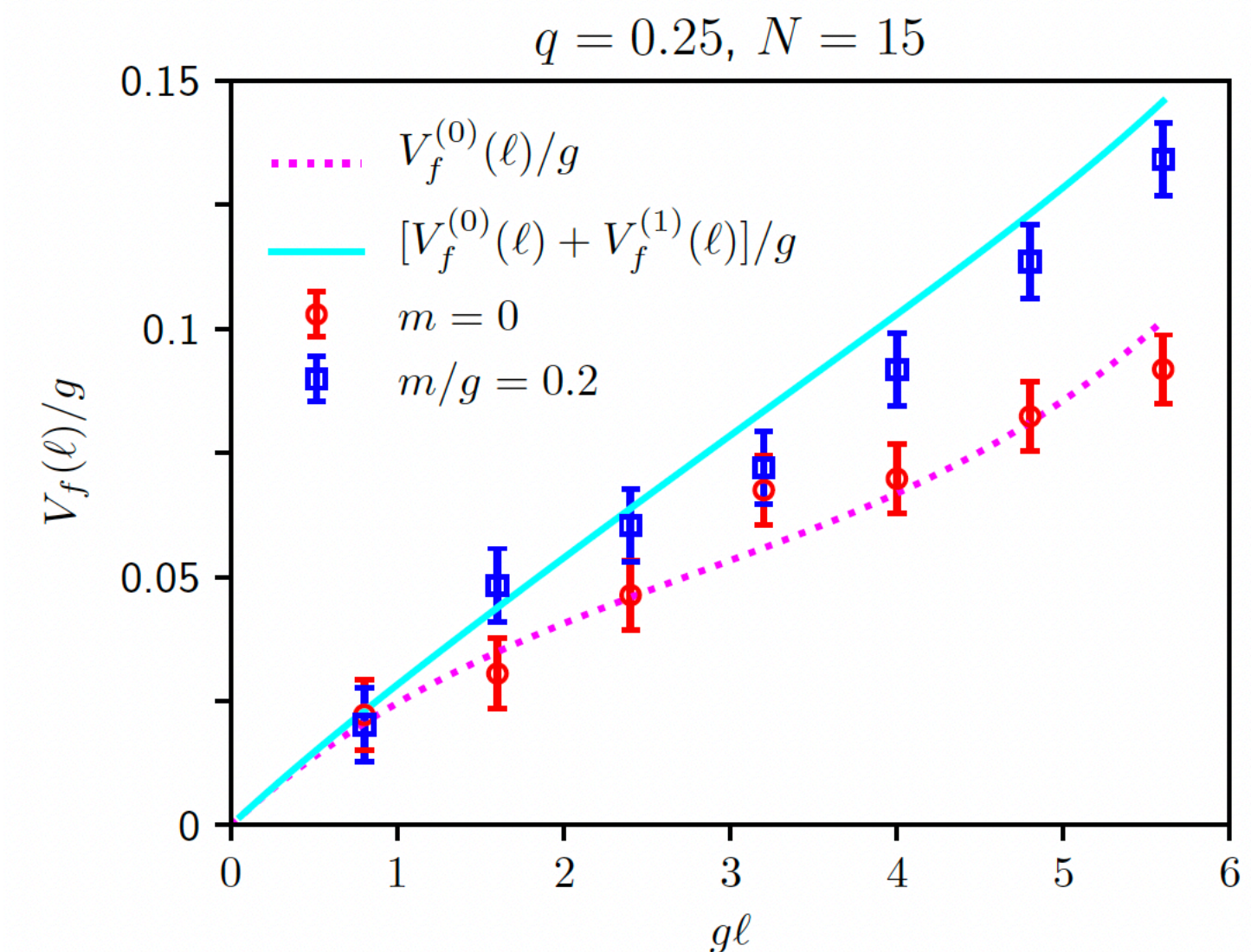
ハミルトニアン形式 (Schwinger model)

電荷がある時のHの期待値から直接測定

各 ℓ における $E(\ell) = \langle \Omega | H(\ell) | \Omega \rangle$ を測定

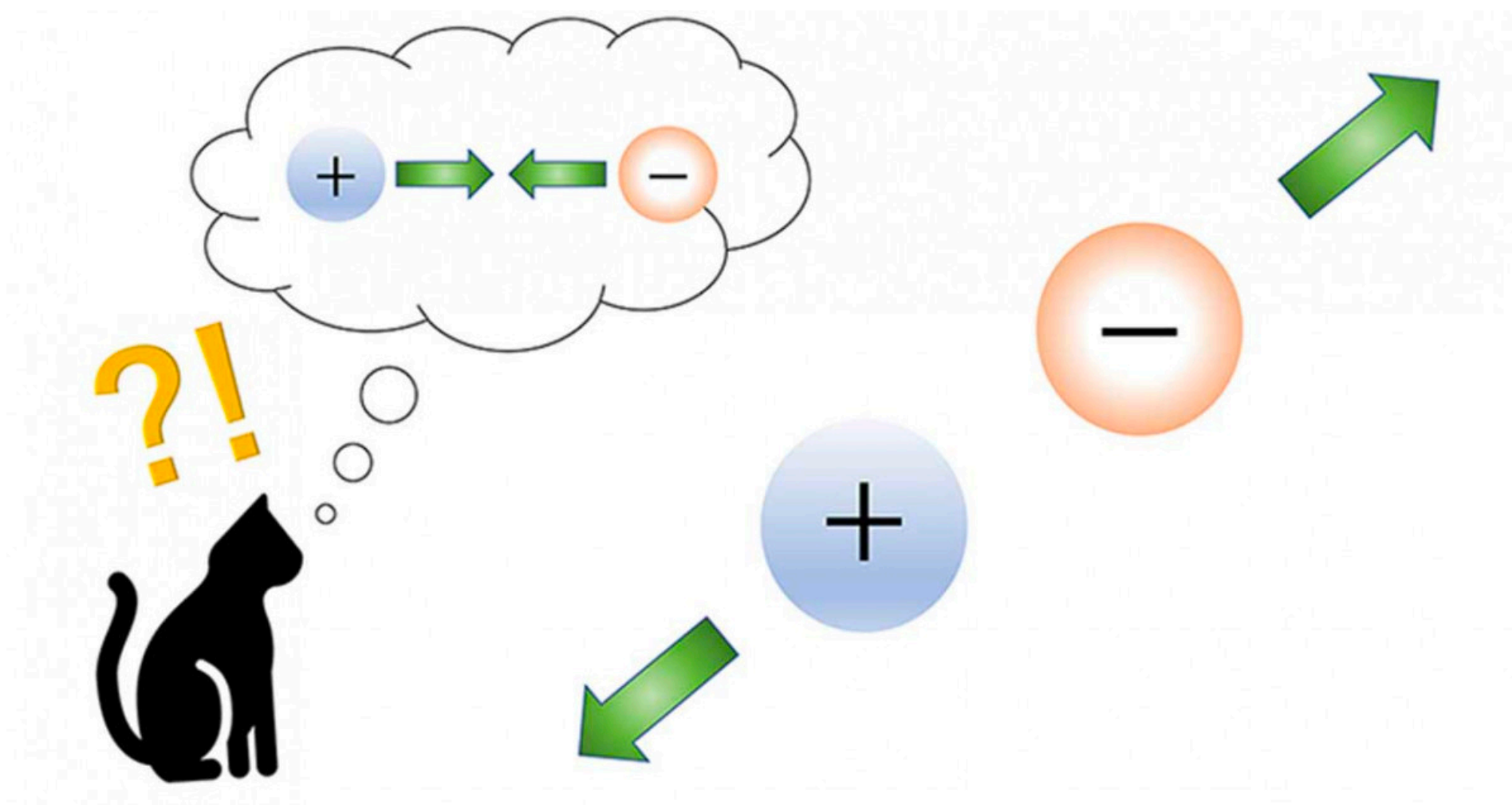
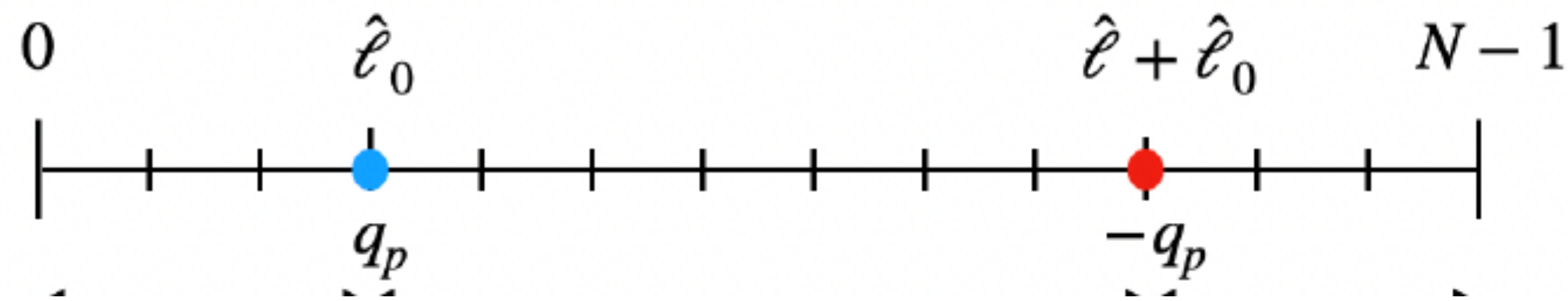
ポテンシャル: $V(\ell) = E(\ell) - E(0)$

M.Honda, E.I., Y.Kikuchi, L.Nagano, T.Okuda,
Phys.Rev.D 105 (2022) 1, 01450



電荷-q Schwinger model

M.Honda, EI, Y.Kikuchi, Y.Tanizaki, PTEP (2022)



Editors' choice

プレスリリース (京大・理研)

日刊工業新聞 (2022年3月3日 朝刊)

JPS hot topics

物理学会誌「PTEPの最近の注目論文から」

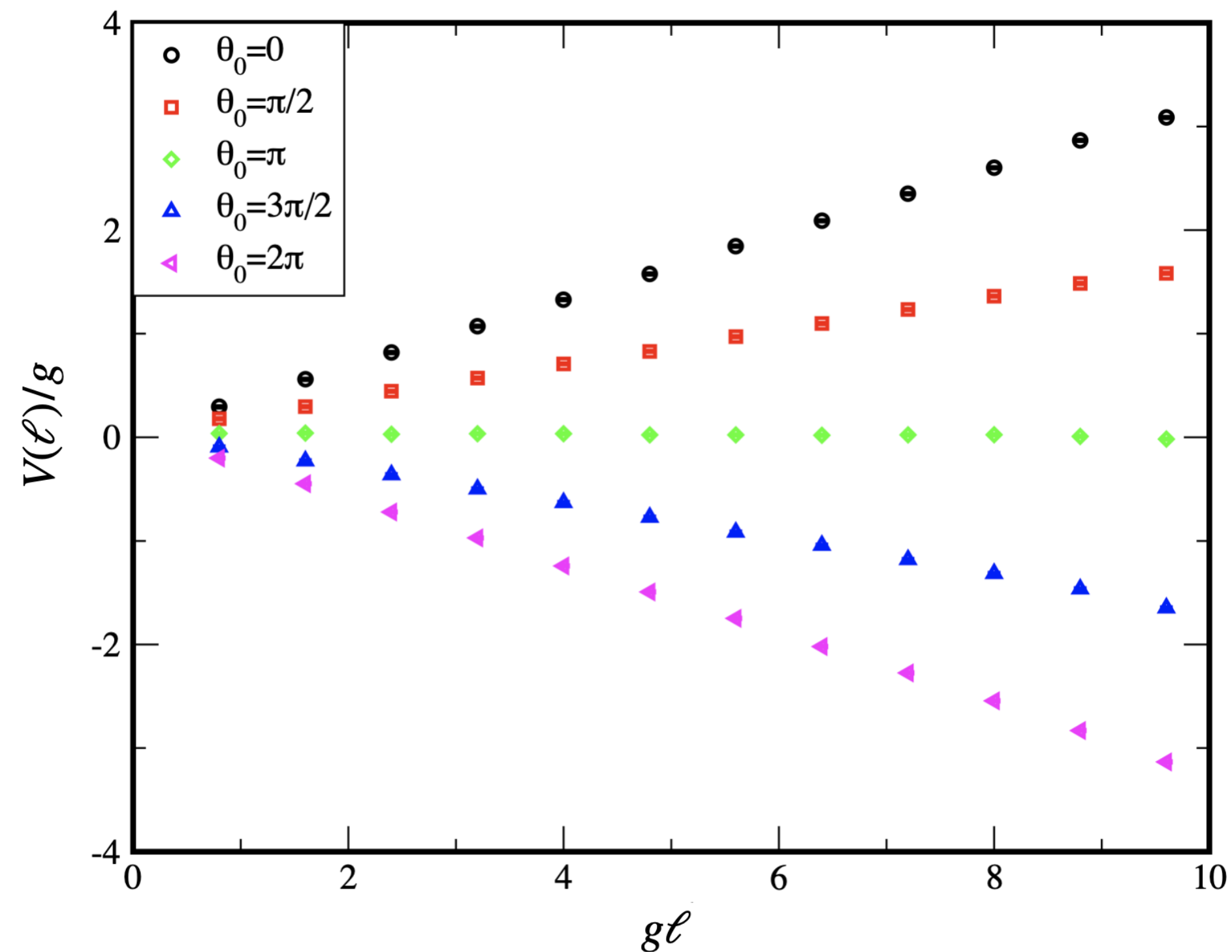
- topological θ termが入ると普通のモンテカルロ法では符号問題が生じる
- Massive 電荷-q ($q>1$) Schwinger modelは線形ポテンシャル
topological θ termやprobe chargeの取り方で傾きの符号が変化する
T.Misumi, Y.Tanizaki, M.Unsal, JHEP 07 (2019)018
- 負のストリングテンションが生じる場合でも真空(universe)が不安定にならない
背後に $\mathbb{Z}_q$ 対称性がある

電荷-q Schwinger model

M.Honda, EI, Y.Kikuchi, Y.Tanizaki, PTEP (2022)

Qiskit simulator results

Lattice size N=25



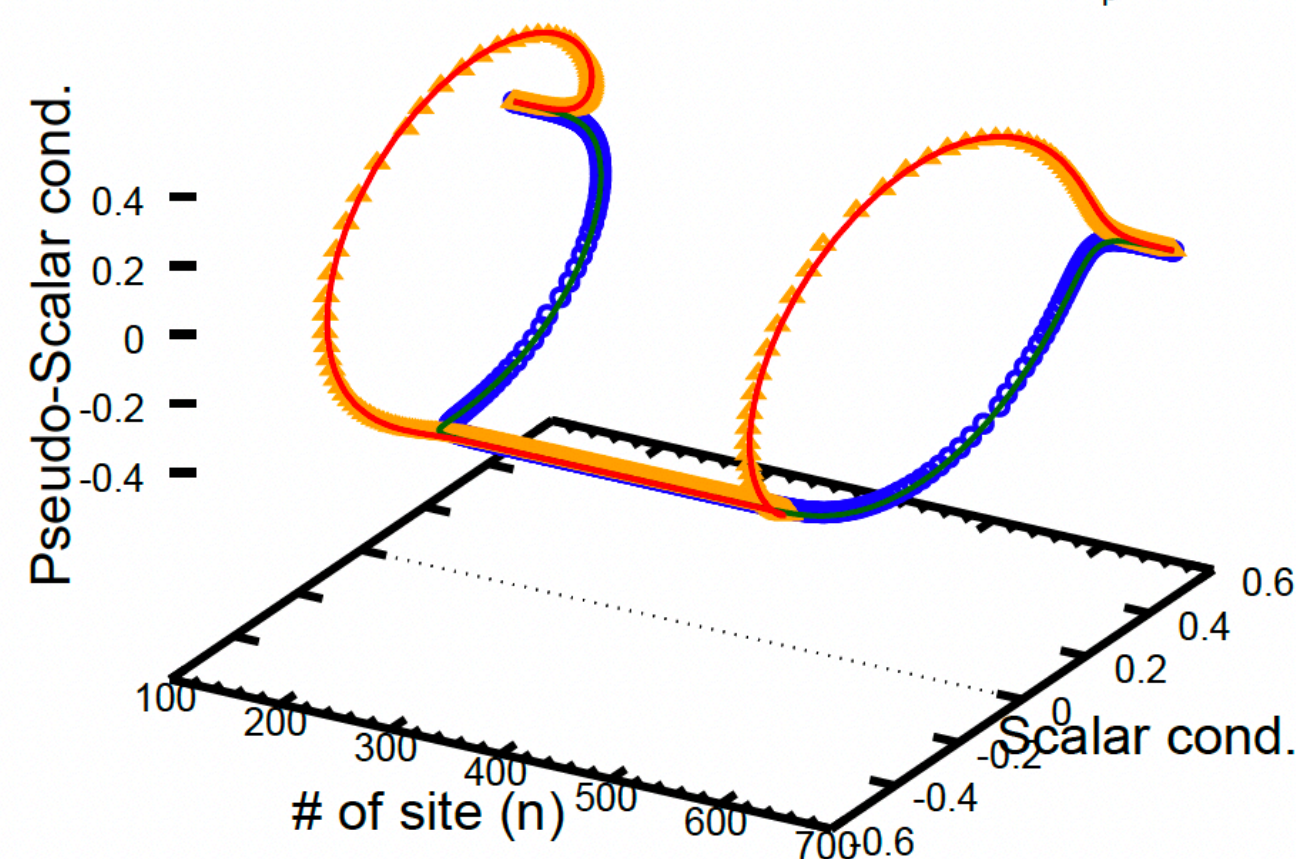
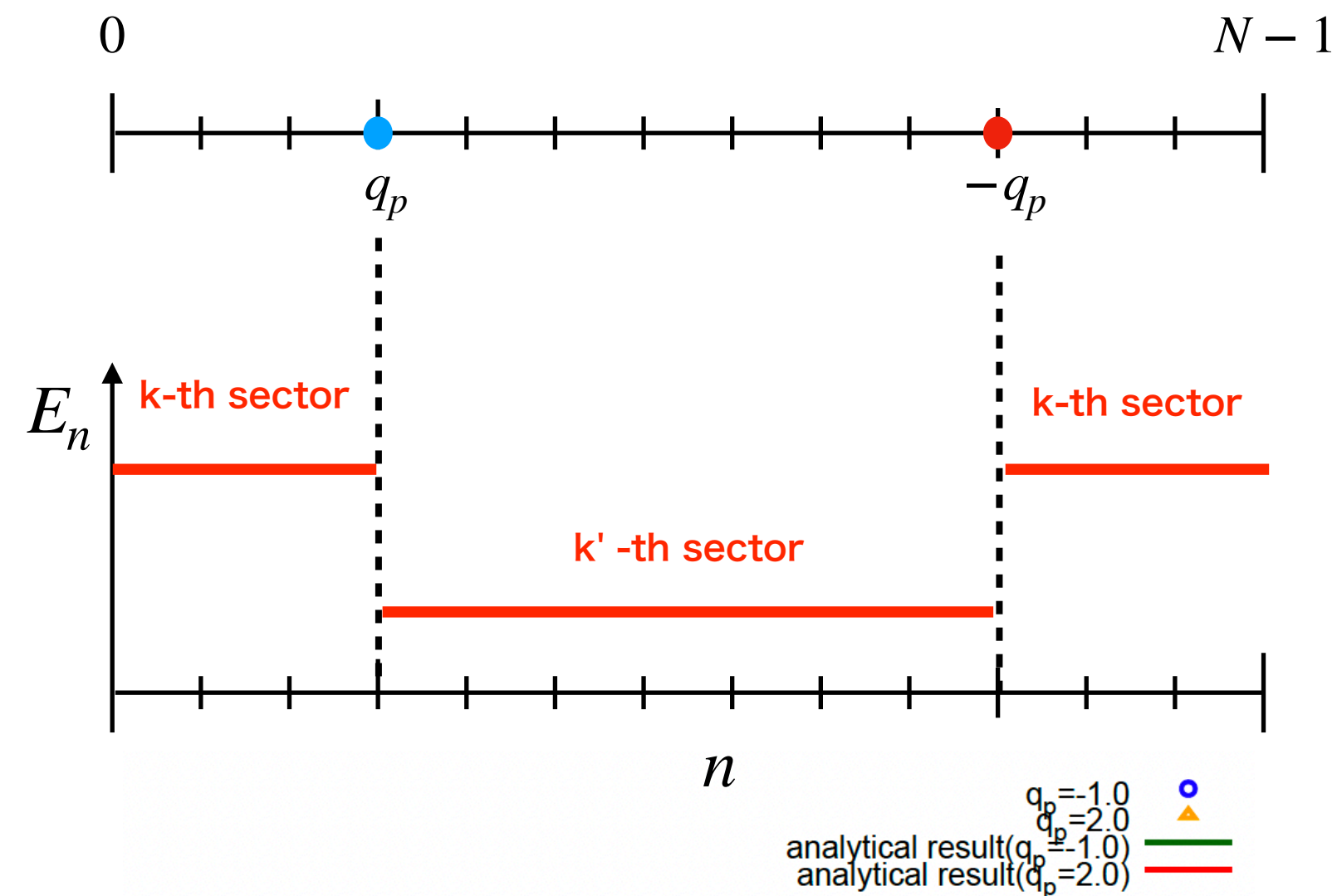
大きい θ の領域で負のストリング
テンションが生じる

- topological θ termが入ると普通のモンテカルロ法では符号問題が生じる
- Massive 電荷-q ($q>1$) Schwinger modelは線形ポテンシャル
topological θ termやprobe chargeの取り方で傾きの符号が変化する
T.Misumi, Y.Tanizaki, M.Unsal, JHEP 07 (2019)018
- 負のストリングテンションが生じる場合でも真空(universe)が不安定にならない
背後に $\mathbb{Z}_q$ 対称性がある

't Hooftアノマリーの検証

T.Misumi, Y.Tanizaki, M.Unsal,
JHEP 07 (2019)018

負のストリングテンションが
生じる時のsite毎の基底エネルギー



N~800のDMRG計算で確認

M.Honda, EI, Y.Tanizaki, JHEP (2022)

- 電荷-q Schwinger modelのラグランジアン

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{g\theta_0}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + i\textcolor{red}{q}gA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

- $q > 1$ の時: ヒルベルト空間がq個に分離

$$E_k(\theta_0) = -m\frac{e^\gamma qg}{2\pi^{3/2}}\cos\left(\frac{\theta_0 - 2\pi k}{q}\right),$$

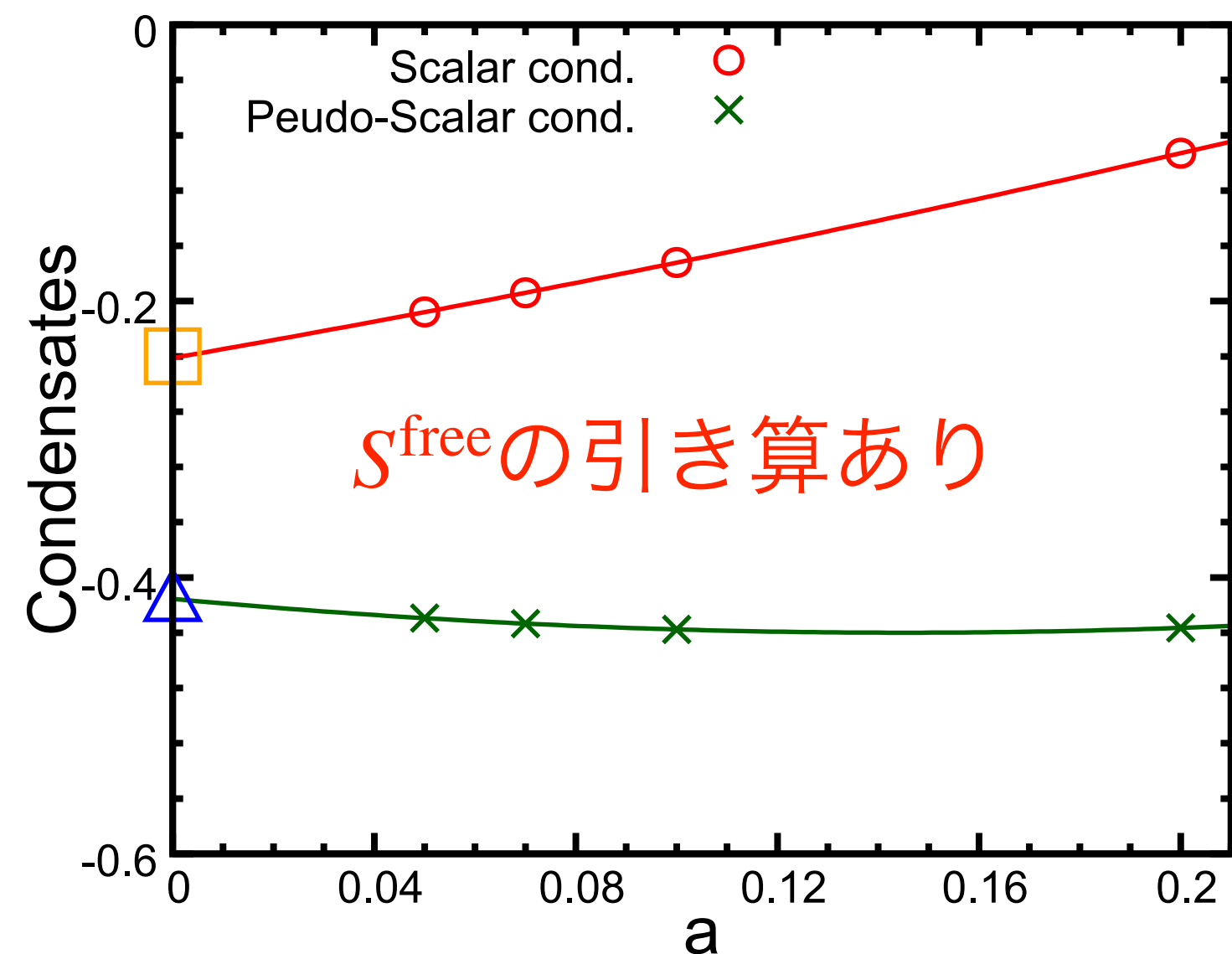
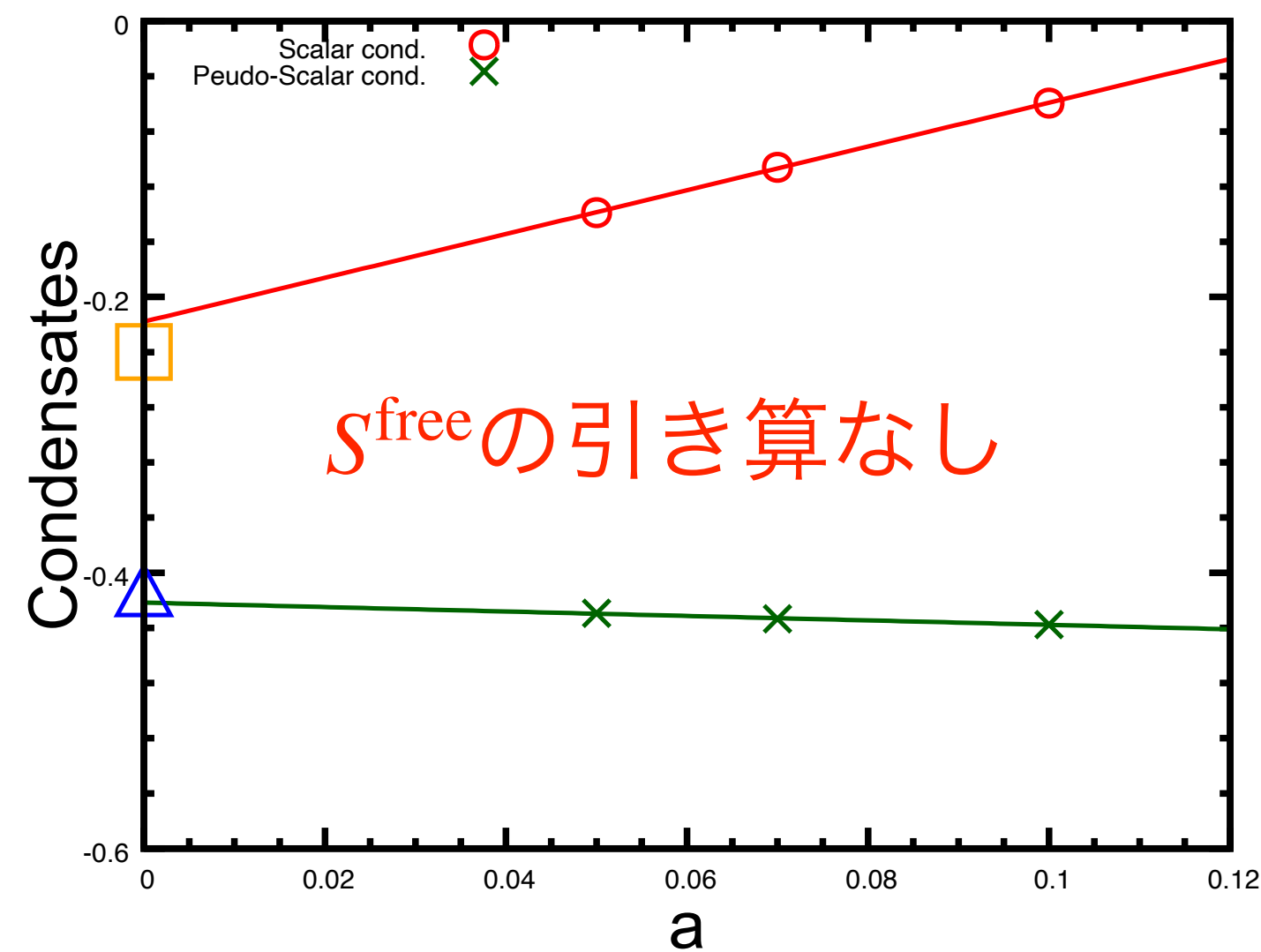
$$(k = 0, \dots, q - 1)$$

- U(1) 1form symmetry (pure Maxwell)
→ $\mathbb{Z}_q$ 1form symmetry が背後にある

秩序変数 $S(x) + iP(x) = \bar{\psi}\psi(x) \pm \bar{\psi}\bar{\gamma}_E\psi(x)$ が

プローブ電荷を横切る時に $e^{i\frac{2\pi q_p}{q}}$ の位相を稼ぐ

精密な一致



- ハミルトニアン形式における staggered fermionの連続理論との対応に $O(a)$ の補正が生じる

$$m_{\text{lat}} = m - \frac{q^2 g^2 a}{8}$$

Dempsey, Klebanov, Pufu, Zan:arXiv:2206.05308

- masslessの時もScalar condensateの log発散が必要

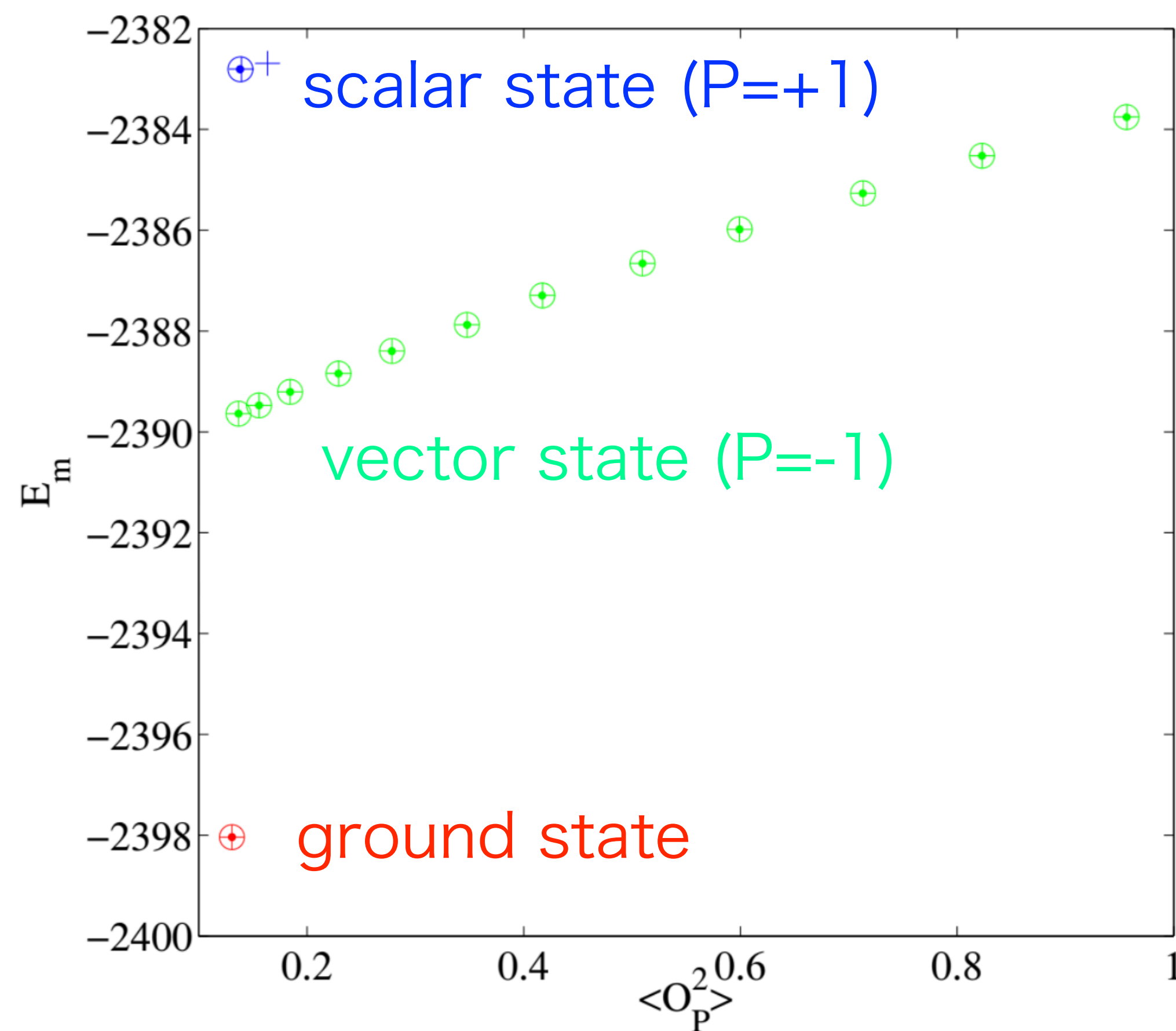
$$S^{\text{free}} = - \frac{m}{\pi \sqrt{1 + (\mu a)}} K\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\mu a)^2}}\right)$$

Nf=2の場合：質量スペクトルの計算法

Nf=1 Schwinger model

M.C.Banuls, K. Cichy, J.I. Cirac, K. Jansen

JHEP 11 (2013)158



- ハミルトニアン形式で複合状態のスペクトル計算法 [El-Matsumoto-Tanizaki, JHEP11\(2023\)231](#)

(1) 2点関数スキーム

(2) 1点関数スキーム

OBCでのSPT相の性質を利用

(3) 分散関係スキーム

- Nf=2 Schwinger modelの複合状態

パイオン: $\pi = -i(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 - \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2)$, $J^{PG} = 1^{-+}$

σ メソン: $\sigma = \bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2$, $J^{PG} = 0^{++}$

η メソン: $\eta = -i(\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_1 + \bar{\psi}_2\gamma^5\psi_2)$, $J^{PG} = 0^{--}$