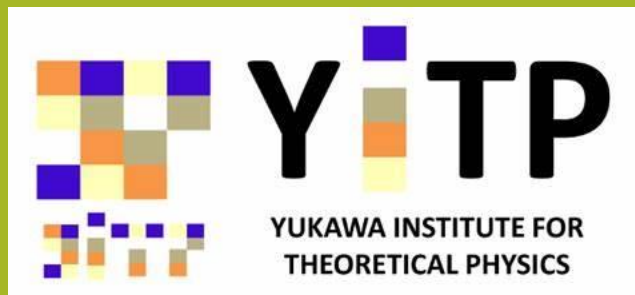


FINITE SIZE SCALING OF EIGENSTATE THERMALIZATION HYPOTHESIS FROM BLACKHOLE HORIZON



Proof(?) of ETH in Bottom up AdS/CFT

川本 大志
基礎物理学研究所
博士2年



Talks@
Strings&Fields2024
August 5th

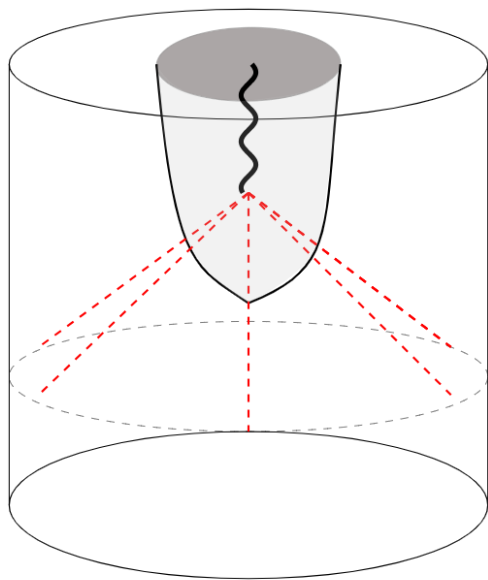
Based on arXiv: 2411.09746

Eigenstate Thermalization Hypothesis in AdS/CFT

AdS/CFT : 重力崩壊 = 熱平衡化

$(d + 1)$ 次元AdS空間上の
重力理論

質量 E のAdS ブラックホール
への重力崩壊

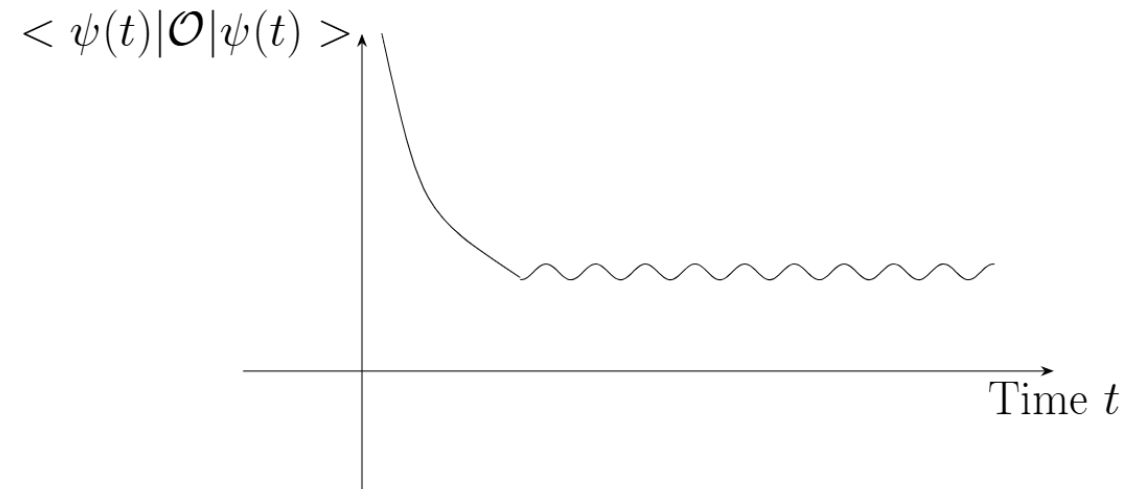


Gravitational Collapse

=

d 次元のある場の理論

エネルギー E の熱平衡状態
への緩和



Equilibration and Thermalization

熱平衡化の十分条件

- ✓重力崩壊 $\Leftrightarrow$ 重い物体がブラックホールになる
 - $\Rightarrow$ 境界の場の理論では任意の高エネルギー初期状態は熱平衡化する?
 - $\Rightarrow$ ホログラフィックな理論はmaximally chaotic だしあるenergy windowでは正しそう!?
- ✓しかしながら量子多体系において熱平衡化は非自明
 - $\Rightarrow$ 例) 量子scar 状態 = カオス的な系でも熱平衡化しない初期状態
- ✓熱平衡化の十分条件 $\Rightarrow$ (Strong) Eigenstate Thermalization Hypothesis, ETH

Notation

エネルギーシェル

$$\mathcal{H}_{E,\Delta E} = \bigoplus_{E < E_n < E + \Delta E} \mathbb{C} |E_n\rangle \subset \mathcal{H}$$

$$D_{E,\Delta E} = \dim \mathcal{H}_{E,\Delta E}. \quad S_{\text{mc}}(E) := \log D_{E,\Delta E}$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mc}}^{E,\Delta E} = \text{Tr} \left[\mathcal{O} \rho_{\text{mc}}^{(E,\Delta E)} \right]$$

時間発展

$$|\psi_0\rangle = \sum_{|E_n\rangle \in \mathcal{H}_{E,\Delta E}} c_n |E_n\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi_0\rangle$$

$$\overline{A(t)}^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt A(t).$$

What is ETH ?

$\mathcal{A}$ = “熱力学極限” で測る演算子の組

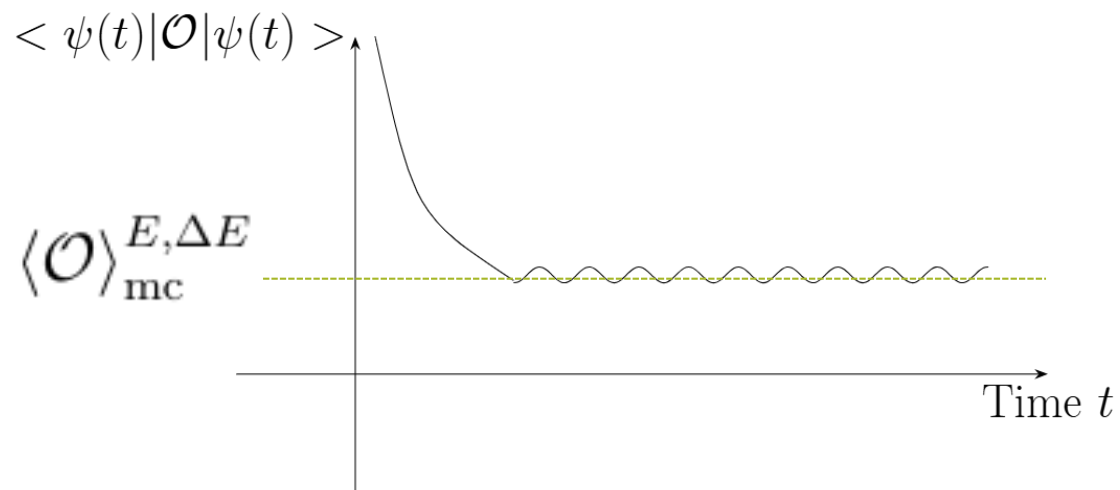
ETH [Srednicki, Deutsch] : for any operators $\mathcal{O} \in \mathcal{A}$

Off-diagonal: $|\langle E_n | \mathcal{O} | E_l \rangle| = e^{-O(S(E))}$

Diagonal: $|\langle E_n | \mathcal{O} | E_n \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mc}}^{E, \Delta E}| = e^{-O(S(E))}$

$\Rightarrow$ Equilibration = 定常状態に緩和

$\Rightarrow$ Thermalization = 定常状態が熱平衡



Equilibration and Thermalization

本研究：
ホログラフィックな
場の理論が
ETHを満たすか？？？

Prove ETH ?

✓ETHの証明

- ✓非可積分なSpin chain などでの数値計算
- ✓ランダムハミルトニアンにおいてtypical Hamiltonianについて成立
- ✓与えられたハミルトニアンについて直接証明は容易でない
 - ✓すべてのスペクトラムを計算して行列要素を計算??
- ✓ここでは与えられたハミルトニアンのスペクトラム

$$\mathcal{E}_{E,\Delta E} := \{|E_n\rangle \in \mathcal{H}_{E,\Delta E}\}$$

に関しての統計性を調べる。

Thermalizationに関する不等式

- ✓ 任意の正の数 $\epsilon > 0$
- ✓ 任意の有界な作用素 $\mathcal{O}$
- ✓ 任意の縮退のないハミルトニアン
- ✓ 任意のエネルギー固有状態 $|E_n\rangle \in \mathcal{H}_{E,\Delta E}$

$$\left| \langle E_n | \mathcal{O} | E_n \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mc}}^{E,\Delta E} \right| < \|\mathcal{O}\|_{\text{op}} \left(\epsilon + \sqrt{D_{E,\Delta E} \Delta_{\text{diag,ETH}}^\epsilon[\mathcal{O}]} \right)$$

$$\Delta_{\text{diag,ETH}}^\epsilon[\mathcal{O}] := \text{Prob}_{\mathcal{E}_{E,\Delta E}} \left[\left| \langle E_n | \mathcal{O} | E_n \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mc}}^{E,\Delta E} \right| > \epsilon \right]$$

$$\mathcal{E}_{E,\Delta E} := \{ |E_n\rangle \in \mathcal{H}_{E,\Delta E} \}$$

Thermalizationの十分条件

$$\left| \langle E_n | \mathcal{O} | E_n \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mc}}^{E, \Delta E} \right| < \|\mathcal{O}\|_{\text{op}} \left(\epsilon + \sqrt{D_{E, \Delta E} \Delta_{\text{diag, ETH}}^\epsilon[\mathcal{O}]} \right)$$

✓もし理論が

$$D_{E, \Delta E} \sup_{\mathcal{O} \in \mathcal{A}} \Delta_{\text{diag, ETH}}^\epsilon[\mathcal{O}] \leq e^{-O(S_{\text{mc}}(E))}$$

を満たすならDiagonal ETHが成立！

Conjecture : 非可積分系の熱力学極限でwell-definedな $\mathcal{O} \in \mathcal{A}$ に対して
[Yoshizawa, Iyoda, Sagawa, 2017]

$$\Delta_{\text{diag, ETH}}^\epsilon[\mathcal{O}] \approx e^{-\# e^{O(S_{\text{mc}}(E))}}, \exists \# > 0$$

Double exponential

Thermalizationの十分条件 in AdS/CFT

- ✓BHを双対に持つホログラフィックな理論はカオス的なセクターがある
(e.g.) Scrambling [Shenker, Stanford, 2013], Lyapnov Bound [Maldacena, Shenker, Stanford, 2015] etc.
- ✓特定の演算子の組に対してDouble exponential scalingが見れてもよさそう
- ✓ここでは
熱力学極限=large N 極限 (体積は有限)
 $\mathcal{A} = \{\mathcal{O}: \text{single trace op. or a few multi trace light opearator}\}$
- ✓Bulkとしては Einstein gravity + QFT on AdS blackhole を考える。

Double Exponential Scaling in AdS/CFT

Double Exponential scalingの十分条件

- ✓二つの非自明な仮定からDouble Exponential Scalingを導くことができる！
- ✓Thermal Canonical Wightman Functions

$$G_{\text{can},\beta}^{(2p)}(t_1, t_2, \dots, t_{2p}) := \text{Tr} \left[\left(\rho_{\text{can}}^{(\beta)} \right)^{\frac{1}{2p}} \mathbb{O}(t_1) \left(\rho_{\text{can}}^{(\beta)} \right)^{\frac{1}{2p}} \mathbb{O}(t_2) \cdots \left(\rho_{\text{can}}^{(\beta)} \right)^{\frac{1}{2p}} \mathbb{O}(t_{2p}) \right]$$
$$\mathbb{O} := \mathcal{O} - \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{can}}^{\beta}$$

① Mixing Property

$$\overline{G_{\text{can},\beta}^{(2)}}^T(t_1, t_2) = e^{-O(S_{\text{mc}}(E))}$$

② Clustering Property

$$\overline{G_{\text{can},\beta}^{(2p)}}^T \leq C' \cdot p! \left(a' \cdot \overline{G_{\text{can},\beta}^{(2)}}^T \right)^p.$$

①,②⇒ Double Exponential

✓期待値

$$\mathbb{E}_{\mathcal{E}_{E,\Delta E}}[\langle E_n | \mathcal{O} | E_n \rangle] := \frac{1}{D_{E,\Delta E}} \sum_{|E_n\rangle \in \mathcal{H}_{E,\Delta E}} \langle E_n | \mathcal{O} | E_n \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mc}}^{E,\Delta E}.$$

✓モーメント

+アンサンブル等価性

$$\mathbb{E}_{\mathcal{E}_{E,\Delta E}}[\langle E_n | \mathcal{O} | E_n \rangle^{2p}] = \overline{G_{\text{mc},E}^{(2p)}}^T \leq \frac{e^{\beta(E+\Delta E)} Z(\beta)}{D_{E,\Delta E}} \overline{G_{\text{can},\beta}^{(2p)}}^T$$

✓Clustering Property

$$\overline{G_{\text{can},\beta}^{(2p)}}^T \leq C' \cdot p! \left(a' \cdot \overline{G_{\text{can},\beta}^{(2)}}^T \right)^p \cdot O(S_{\text{mc}}(E))$$



Large Deviation

✓Sub gaussianity

$$\Delta_{\text{diag,ETH}}^{\epsilon}[\mathcal{O}] \leq 2e^{-\# \frac{1}{\overline{G_{\text{can},\beta}^{(2)}}(t_1,t_2)}^T}$$

✓Mixing Property

$$\overline{G_{\text{can},\beta}^{(2)}}^T(t_1, t_2) = e^{-O(S_{\text{mc}}(E))}$$

Double Exponential !

$$\Delta_{\text{diag,ETH}}^{\epsilon}[\mathcal{O}] \approx e^{-\# e^{O(S_{\text{mc}}(E))}},$$

Quantum Mixing from Blackhole (1)

✓ In AdS/CFT correspondence, beyond the Hawking Page transition [Maldacena2001],

$$G_{\text{can},\beta}^{(2)}(t) = G_{\text{BTZ BH}}^{(2)}(t) + G_{\text{Thermal AdS}}^{(2)}(t) \times e^{-I_{\text{AdSBH}} + I_{\text{ThermalAdS}}} + (\text{contributions from another saddle}).$$

$e^{-O(S_{\text{mc}}(E))}$

$$G_{\text{BTZ BH}}^{(2)}(t) = \text{const.} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh\left(\frac{2\pi t}{\beta}\right) + \cosh\left(\frac{2\pi(\phi - 2\pi m)}{\beta}\right)} \right)^{\Delta}$$

$$G_{\text{Thermal AdS}}^{(2)}(t) = \text{const.} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{t + in\beta}{L_{\text{AdS}}}\right) + \cos\phi} \right)^{\Delta}$$

(※)マイクロカノニカル分布の場合はthermal AdSの寄与は含まれず、late timeのsub-leading timeは主にwormhole的な寄与より来る。

Quantum Mixing from Blackhole (2)

$$G_{\text{BTZ BH}}^{(2)}(t) = \text{const.} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\cosh\left(\frac{2\pi t}{\beta}\right) + \cosh\left(\frac{2\pi(\phi-2\pi m)}{\beta}\right)} \right)^{\Delta} \Rightarrow G_{\text{BTZ BH}}^{(2)}(t) \approx e^{-\frac{\Delta}{\beta}t},$$

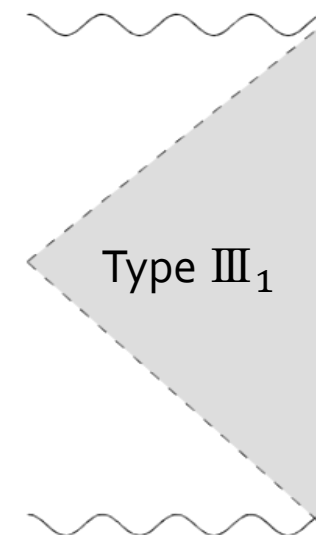
Late time

- ✓ Mixing PropertiesはBHのホライズンからきている
- ∴ BHホライズンはウェッジ上QFTにUV発散をもたらし、さらにwedge上の場の理論の**スペクトラムは連続的**

⇔ Type III₁ von Neumann algebra from large N limit [Liu, Leutheusser, 2021]

⇔ Poincare recurrenceがなく初期状態を忘れる [Barbon, Rabinovici, 2003]

⇒ AdS/CFT 対応における**情報喪失問題** [Maldacena, 2001]



②Clustering Property in GFF, Toy Model

✓Generalized Free approximation $\Leftrightarrow 1/N$ のsub-leading を無視する

$$\begin{aligned}\overline{G_{\text{can},\beta}^{(2p)}(t_1, t_2, \dots, t_{2p})}^T &= \prod_{(i,j) \in \text{Pairs}} \overline{\text{Tr} \left[\left(\rho_{\text{can}}^{(\beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{O}(t_i) \left(\rho_{\text{can}}^{(\beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbb{O}(t_j) \right]}^T \\ &= (2p-1)!! \times \left(\overline{G_{\text{can},\beta}^{(2)}(t_1, t_2)}^T \right)^p \\ &\leq p! \left(2 \overline{G_{\text{can},\beta}^{(2)}(t_1, t_2)}^T \right)^p.\end{aligned}$$

✓Mixing と合わせるとGFF on AdS と双対な理論はstrong ETH を満たす！

②Adding $1/N$ correction

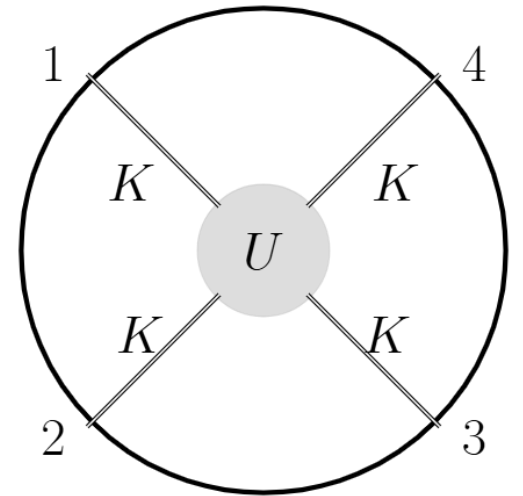
✓ $1/N$ correction を考える。 $p = 2$

$$G_{\text{can},\beta}^{(4,\text{conn.})}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \int d^{d+1}X_1 d^{d+1}X_2 d^{d+1}X_3 d^{d+1}X_4 \\ \times K_{\text{Bb}}(x_1, X_1)K_{\text{Bb}}(x_2, X_2)K_{\text{Bb}}(x_3, X_3)K_{\text{Bb}}(x_4, X_4)U(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

✓Mixing for bulk-to-boundary propagator

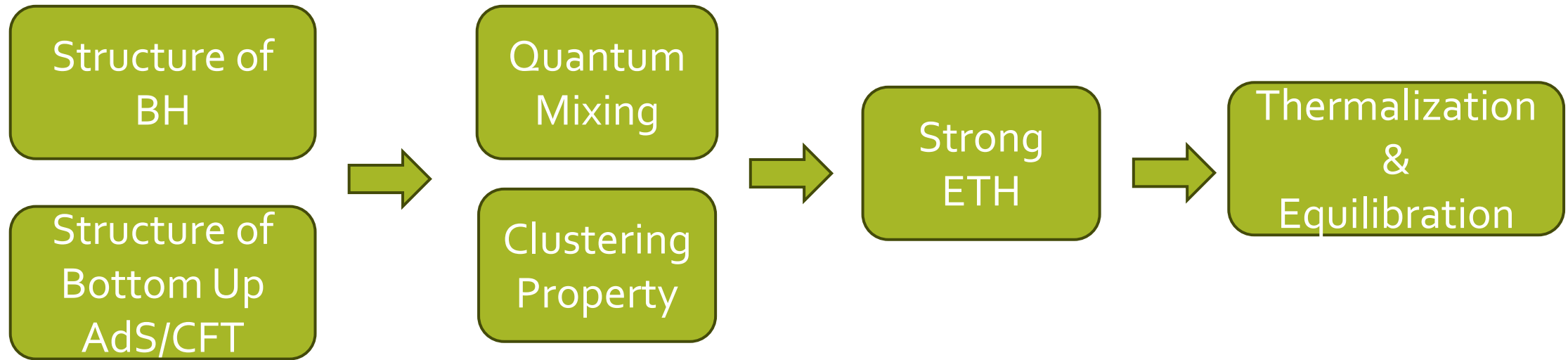
$$K_{\text{Bb}}(t_E = it + 0^+, \vec{x}, X) \approx e^{-\Delta \frac{t}{\beta}} + e^{-O(S_{\text{mc}}(E))} \quad \Rightarrow \quad \overline{G_{\text{can},\beta}^{(4,\text{conn.})}}^T = O\left(\left(\overline{G_{\text{can},\beta}^{(2)}}^T\right)^4\right)$$

WITTEN DIAGRAM



⇒ Careful analysis of order of Feynman diagrams are needed! (Now working!)

Summary & Discussion



- ✓ AdS blackhole 背景上の GFF と “双対な理論”? が Strong ETH を満たすことが分かった
- ✓ Off-diagonal ETH も似た手続きで証明できる。
- ✓ $p = O(S_{mc}(E))$ のとき? (Working Now!)
- ✓ (Q) More realistic Holographic QFTs? $\Rightarrow$ e.g.) D-branes, SUSY, ...
- ✓ Also for some implication for “thermalization” in integrable systems.

ご清聴ありがとうございました