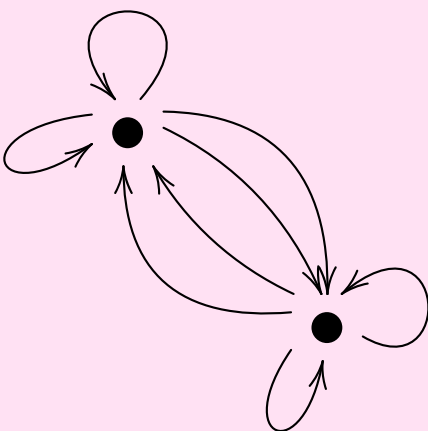
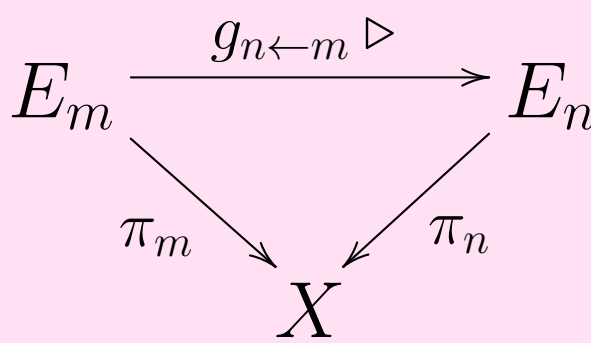
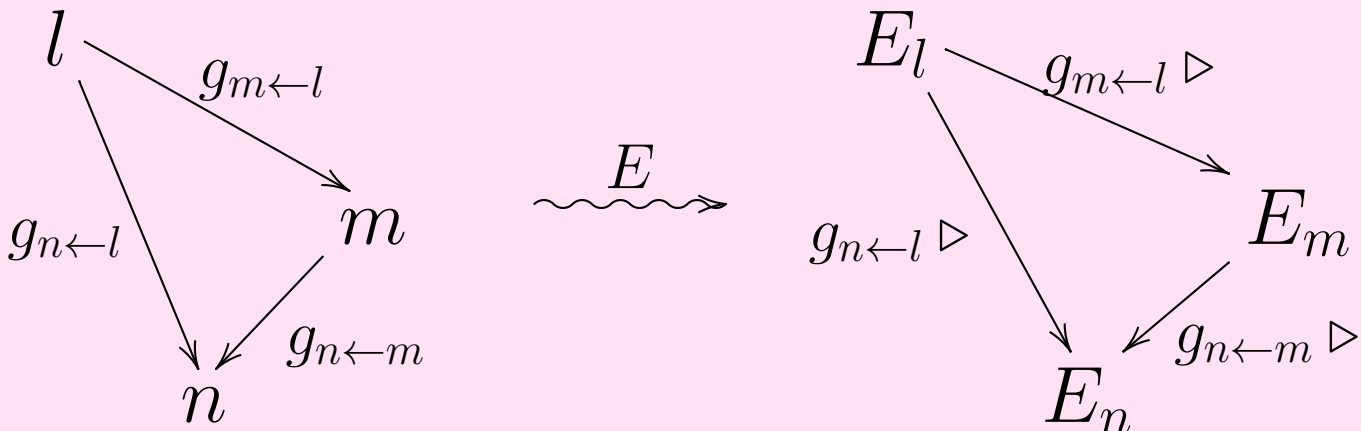


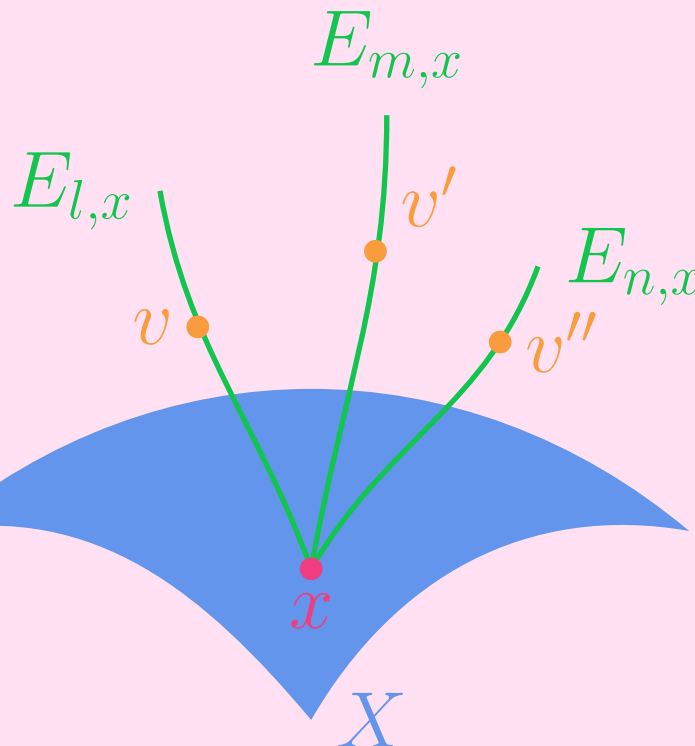
やりたいこと
一般化対称性における群の作用を亜群へと拡張する．その一例として，非可換な Lie 群から亜群を構成し，非可換性を保った symmetry defect operator を定義する．

Lie 亜群
あらゆる射が同型な小圏 $\mathbf{C}$ で，対象の集合 $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ と射の集合 $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ が共に可微分多様体の構造を持つものを Lie 亜群 という．

域を与える写像 $s: \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ をソース写像といい，余域を与える写像 $t: \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ をターゲット写像という．
群の場合と異なり，亜群では任意の元に対して積が定まるわけではない．射の合成が可能な場合に限り，その合成をもって積が定まる．

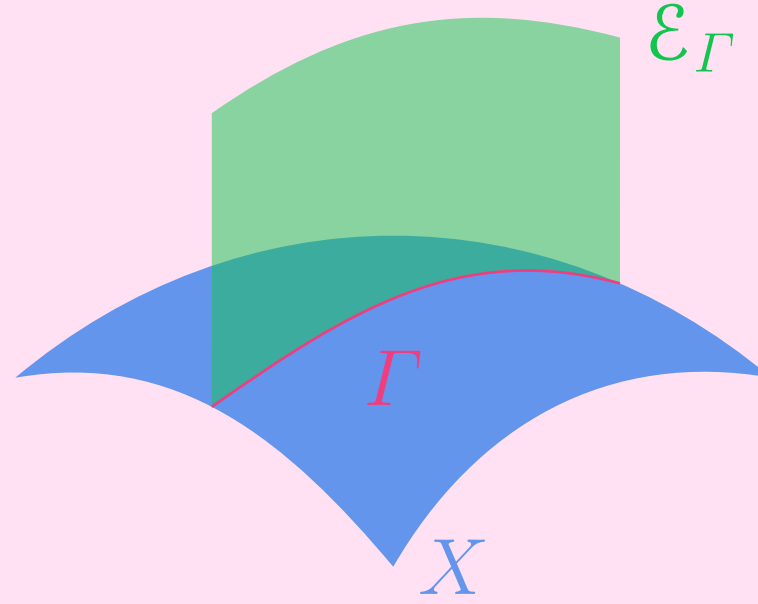
Lie 亜代数
可微分多様体 M 上のベクトル束 $\pi: A \rightarrow M$ で，切断の全体 $\Gamma(A)$ が Lie 括弧 $[\cdot, \cdot]$ を持つ Lie 代数であり，アンカー写像と呼ばれる束写像 $a: A \rightarrow TM$ で任意の $\sigma, \tau \in \Gamma(A)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して
$[\sigma, f\tau] = f[\sigma, \tau] + (a(\sigma)f)\tau$
を満たすものが存在するとき， $(A, [\cdot, \cdot], a)$ を Lie 亜代数 という．
Lie 亜群には付随する Lie 亜代数が存在する．

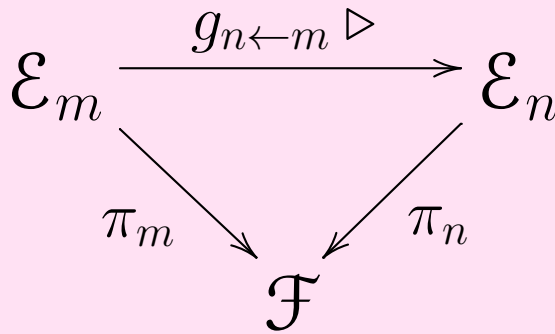
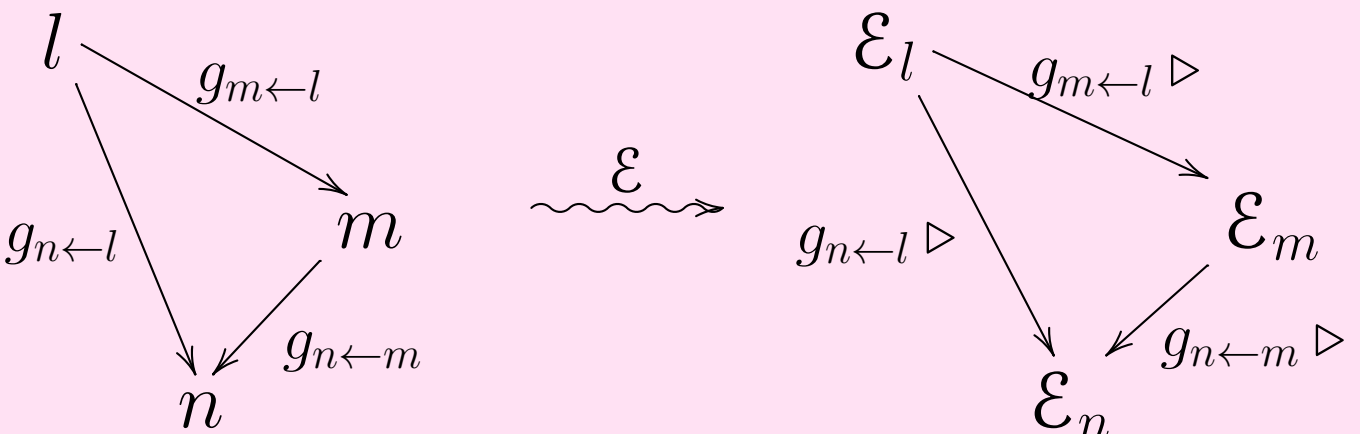
Lie 亜群による場の変換
Lie 亜群 $G \rightrightarrows M$ の表現空間に相当する， M を添字集合とするベクトル束の族 $\{E_m \xrightarrow{\pi_m} X \mid m \in M\}$ を用意し，各ベクトル束の間の束写像による物理量の変換を考える．


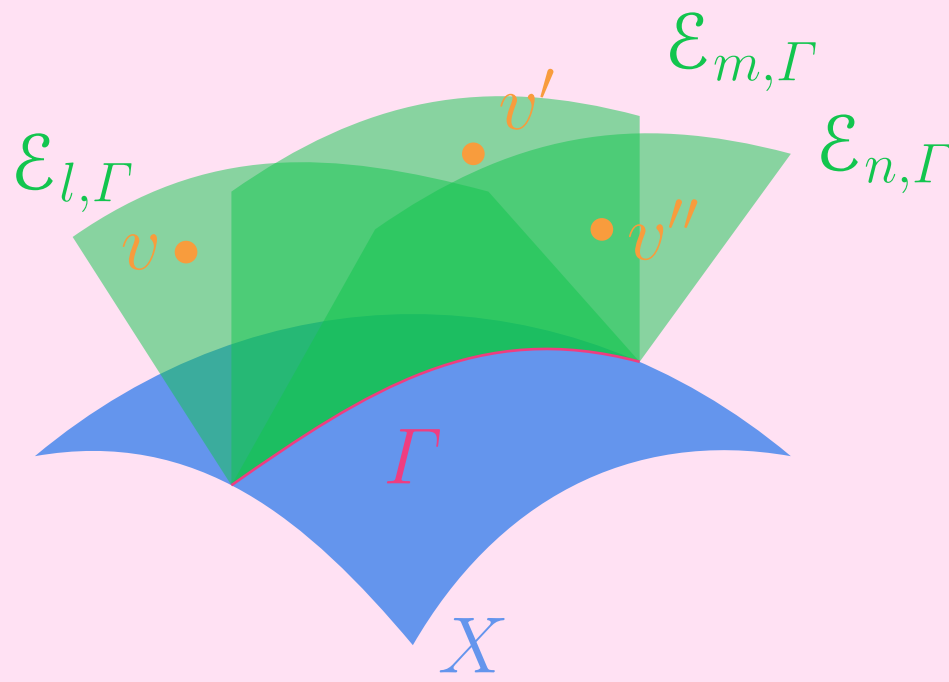
これは， $G \rightrightarrows M$ から圏 $\mathbf{VectBdl}_X$ への関手 $E: G \rightrightarrows M \rightsquigarrow \mathbf{VectBdl}_X$ と見做せる．


場（切断）の変換 $g, h \in G \rightrightarrows M$ は， $s(h) = t(g)$ （または $s(g) = t(h)$ ）のとき合成 $h \cdot g$ （または $g \cdot h$ ）が行える．


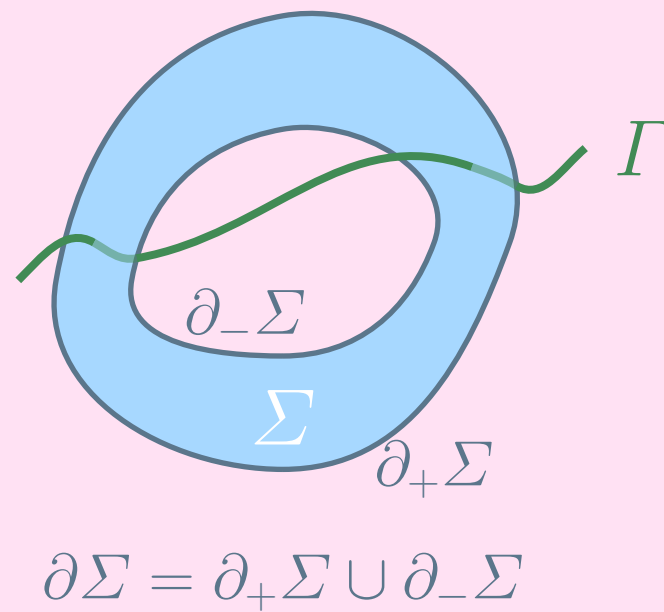
$g \in G \rightrightarrows M$ による作用
$\begin{array}{ccc} g \triangleright : & E_{s(g)} & \longrightarrow & E_{t(g)} \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & v & \longmapsto & g \triangleright v \end{array}$
により，ベクトル束 $\pi_{s(g)}: E_{s(g)} \rightarrow X$ の切断 $\mathcal{O}_{s(g)} \in \Gamma(E_{s(g)})$ は $g \triangleright \mathcal{O}_{s(g)} \in \Gamma(E_{t(g)})$ へと変換する．

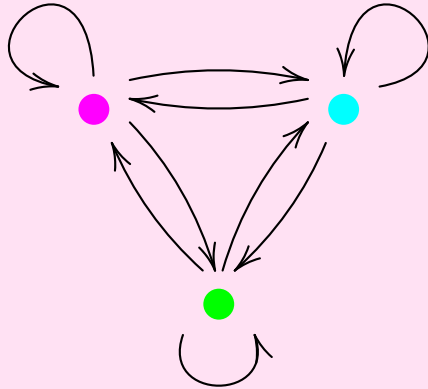
葉層構造上のベクトル束
境界のない多様体 X の葉層構造 $\mathcal{F}$ 上のベクトル束 $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ における切断は， X の葉によって定まる charged operator を表す．

$\Gamma \in \mathcal{F}$ であることから，これが他の $\Gamma' \in \mathcal{F}$ と交わることはない．

Lie 亜群による charged operator の変換
Lie 亜群 $G \rightrightarrows M$ の対象の集合 M を添字集合とする， X の葉層構造 $\mathcal{F}$ 上のベクトル束の族 $\{\mathcal{E}_m \xrightarrow{\pi_m} \mathcal{F} \mid m \in M\}$ を用意し，各ベクトル束の間の束写像による物理量の変換を考える．

これは， $G \rightrightarrows M$ から圏 $\mathbf{VectBdl}_{\mathcal{F}}$ への関手 $\mathcal{E}: G \rightrightarrows M \rightsquigarrow \mathbf{VectBdl}_{\mathcal{F}}$ と見做せる．


場（切断）の変換 $g, h \in G \rightrightarrows M$ は， $s(h) = t(g)$ （または $s(g) = t(h)$ ）のとき合成 $h \cdot g$ （または $g \cdot h$ ）が行える．


$g \in G \rightrightarrows M$ による作用
$\begin{array}{ccc} g \triangleright : & \mathcal{E}_{s(g)} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{t(g)} \\ & \Downarrow & & \Downarrow \\ & v & \longmapsto & g \triangleright v \end{array}$
により，ベクトル束 $\pi_{s(g)}: \mathcal{E}_{s(g)} \rightarrow X$ の切断 $\mathcal{O}_{s(g)} \in \Gamma(\mathcal{E}_{s(g)})$ は $g \triangleright \mathcal{O}_{s(g)} \in \Gamma(\mathcal{E}_{t(g)})$ へと変換する．

Lie 亜群による symmetry defect operator を用いた charged operator の変換
境界のない多様体 X の 2 つの連結成分からなる境界のある埋め込まれた部分多様体 $\Sigma \subset X$ を用意し，Lie 亜代数 $A \rightrightarrows M$ の元 $\sigma \in A$ に対する Lie 亜群の元 $\exp(s\sigma) \in G \rightrightarrows M$ による $\mathcal{O} \in \Gamma(\mathcal{E}_{s(\exp(s\sigma))})$ への作用を
$\exp(s\sigma) \triangleright_{\Sigma} \mathcal{O}(\Gamma) := \exp(\mathrm{Link}(\Sigma, \Gamma)s\sigma) \triangleright \mathcal{O}(\Gamma)$
と定める．


亜群の例
G を非可換 Lie 群とする．新たな圏を，対象が 3 つであり，あらゆる射集合が G と全単射で結ばれる圏とすると，これは亜群となる．

$\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) \cong G$
この亜群による作用は，3 つのベクトル束 $\mathcal{E}_{\bullet} \cong \mathcal{E}_{\bullet} \cong \mathcal{E}_{\bullet}$ の間の束写像を与える．このとき， $g_{\bullet\bullet} \in \mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ ， $g_{\bullet\bullet} \in \mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ ， $h_{\bullet\bullet} \in \mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ ， $h_{\bullet\bullet} \in \mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ に対して
$h_{\bullet\bullet} \triangleright_{\Sigma} g_{\bullet\bullet} \neq h_{\bullet\bullet} \triangleright_{\Sigma} g_{\bullet\bullet}$
となり， G の非可換性が symmetry defect operator へ引き継がれる．つまり，非可換 Lie 群を亜群へと埋め込むことにより，亜群による一般化対称性を用いて非可換 Lie 群による一般化対称性が議論できることになる．

展望
★★具体的にどのような模型で亜群の構造を持った対称性が現れるかわかっていないため，それらを探索する．
★★具体的な非可換 Lie 群による一般化対称性を議論する．