

Duality between ABJM and orientifold ABJ theories from $A3=D3$

久保 尚敬 (CJQS, 天津大学)

Based on: [NK, 2403.19228]



(場の理論と弦理論 2024 @YITP, 2024.8)

はじめに

この発表の主張は単純です。
(面倒な計算も出てきますが、なるべく端折ります。)

本研究結果を一言で述べると:

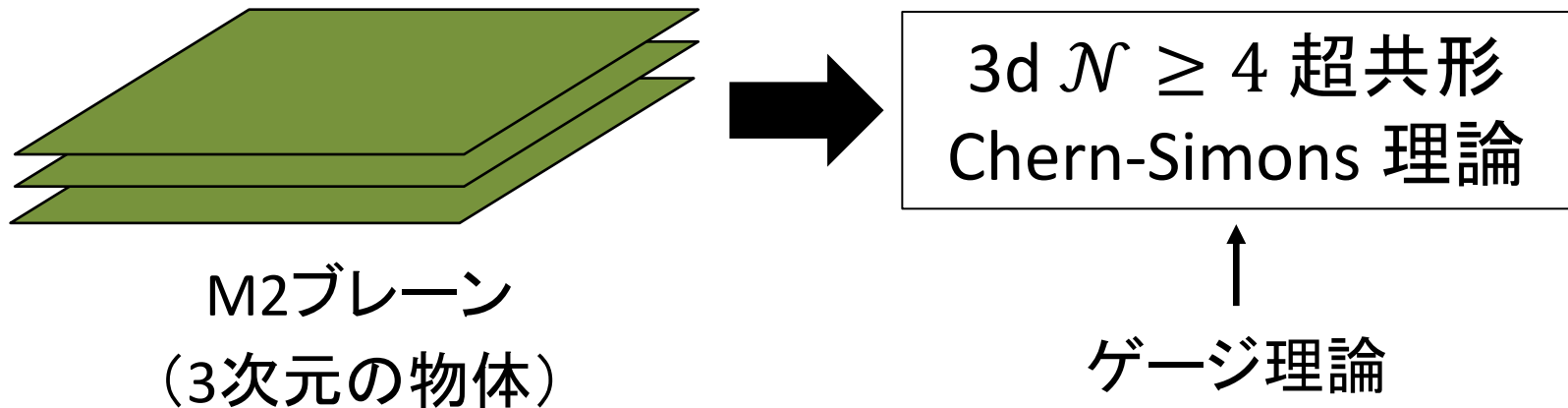
次ページから説明

ABJ(M)理論の双対性を、
 S^3 分配関数を用いて確かめた。

双対な理論の間の分配関数が等しいことを示す。

M理論とABJ(M)理論

- 超弦理論の非摂動的な定式化として、M理論と呼ばれる11次元の理論が考えられている。
- 超弦理論には基本的な物体として基本弦があるが、M理論においてこれに対応するのがM2ブレーン。
- 超弦理論におけるDブレーンのように、M2ブレーン上の世界体積理論を考えることができる。



M理論とABJ(M)理論

どのようなゲージ群になるかは、M2ブレーンをどのような幾何の上に置くかで決まる。

[Aharony-Bergman-Jafferis-Maldacena, 2008]

- $\mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}_k \rightarrow U(N_1)_k \times U(N_2)_{-k}$ (ABJM理論)
- $\mathbb{C}^4 / \mathbb{D}_k \rightarrow O(N_1)_{2k} \times USp(N_2)_{-k}$ (Orientifold ABJ理論)

↑
Chern-Simons level

[Aharony-Bergman-Jafferis, 2008]

$$\left(\begin{array}{l} \min(N_1, N_2): \text{Number of M2-branes.} \\ |N_1 - N_2|: \text{Number of fractional M2-branes.} \end{array} \right)$$

ABJ(M)理論と双対性

$$\mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}_k \rightarrow U(N_1)_k \times U(N_2)_{-k} \quad (\text{ABJM理論})$$

$$\mathbb{C}^4 / \mathbb{D}_k \rightarrow O(N_1)_{2k} \times USp(N_2)_{-k} \quad (\text{Orientifold ABJ理論})$$

- $\mathbb{D}_k$ は binary dihedral group と呼ばれる群。
- 偶発的な同型 $\mathbb{D}_1 = \mathbb{Z}_4$ が知られている。
- これは、 $k = 4$ の ABJM理論と、 $k = 1$ の Orientifold ABJ理論の間の双対性を示唆している。

$$U(N)_4 \times U(N)_{-4} \Leftrightarrow O(2N)_2 \times USp(2N)_{-1}$$

$$U(N+1)_4 \times U(N)_{-4} \Leftrightarrow O(2N+1)_2 \times USp(2N)_{-1}$$

$$U(N+2)_4 \times U(N)_{-4} \Leftrightarrow O(2N+2)_2 \times USp(2N)_{-1}$$

このように、これらの双対性はM理論的な由来を持つ双対性。

Contents

- 導入
- 分配関数を用いた双対性の確認
- まとめと展望

分配関数

なぜ分配関数か？

- 今なら厳密にできる。
SUSY localization, Fermi gas formalism などの計算手法が発達した。
- パラメータの対応の確認。
- 双対性が本当に成り立つか？ 分離セクターの存在？？
→存在しなかった(双対性は正しいようだ)
- 分配関数が等しいことを証明する過程で、別の理論の分配関数が出てきて、それが本質的な役割を果たした。

証明の流れ

「ABJM理論やOrientifold ABJ理論の分配関数」が、「 $\hat{A}_3$ および $\hat{D}_3$ 型のクイバー図形で表されるゲージ群を持つ理論の分配関数」に埋め込めることを発見。

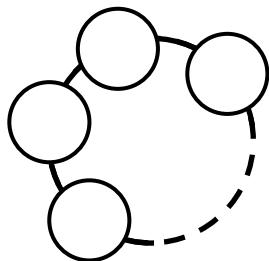
$$\boxed{[U \times U] \rightarrow \hat{A}_3 \quad \hat{D}_3 \leftarrow [O \times USp]}$$

(ABJM理論) (Orientifold ABJ理論)

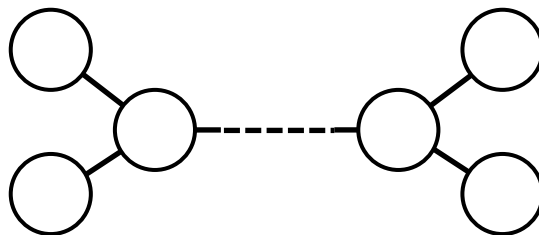
3d $\mathcal{N} = 4$ 超共形
Chern-Simons 理論

← ゲージ理論

ディンキン図



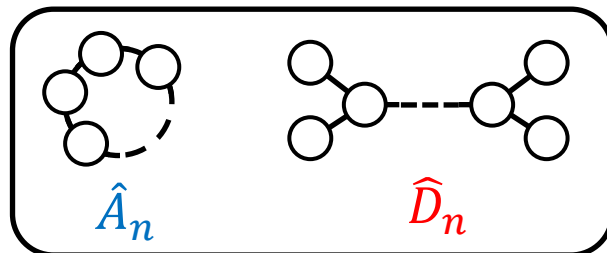
$\hat{A}_n$



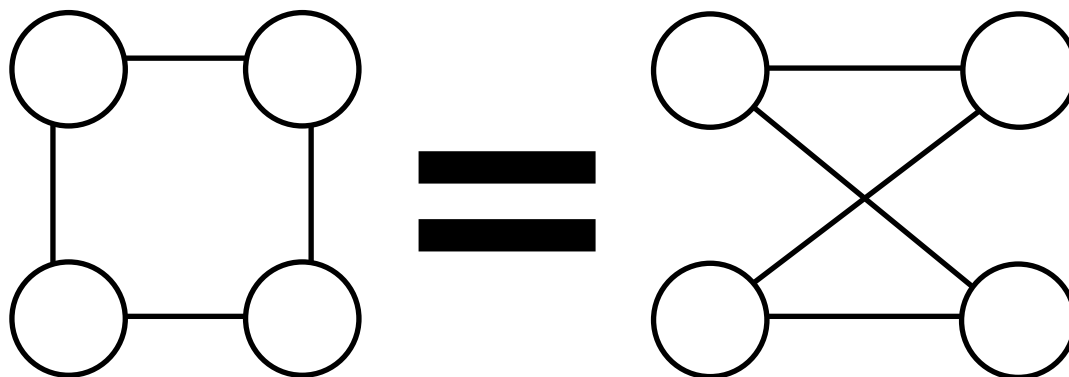
$\hat{D}_n$

○ の数 = $n + 1$

証明の流れ



実は、 $\hat{A}_3 = \hat{D}_3$ 。



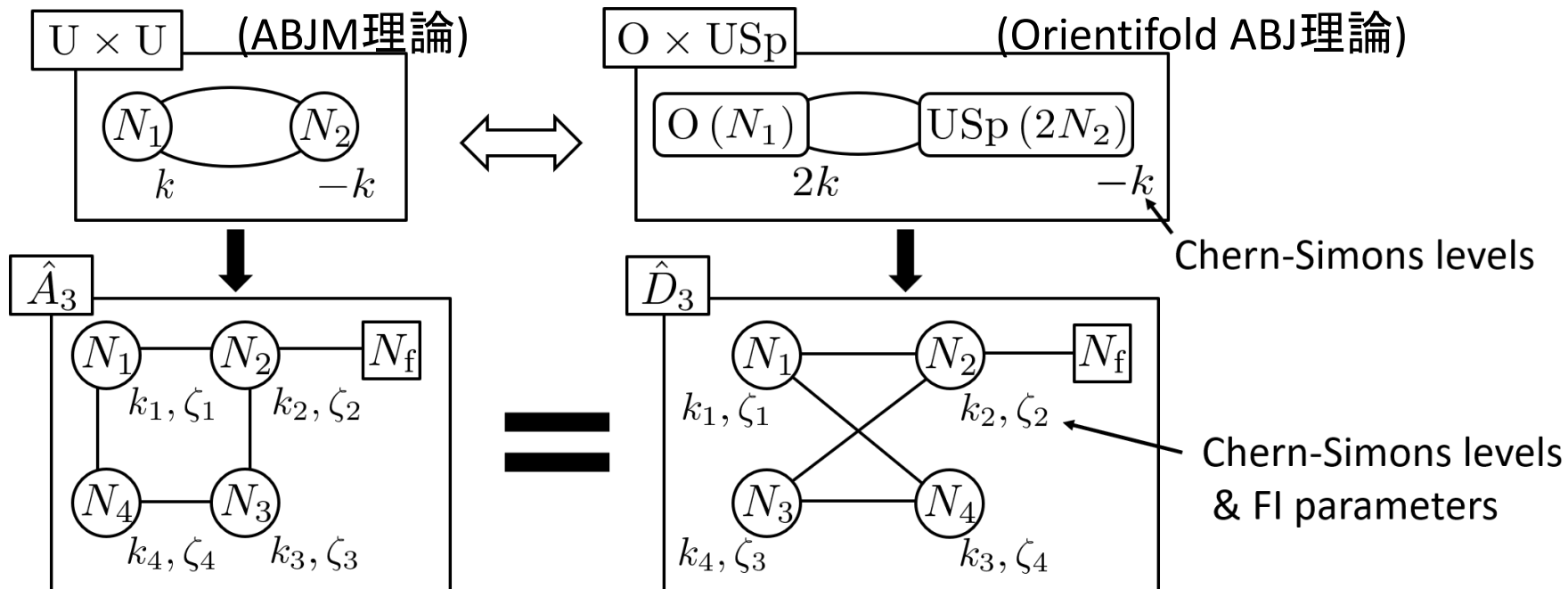
この偶発的な同型が証明の肝。

$$[U \times U] \rightarrow \hat{A}_3 = \hat{D}_3 \leftarrow [O \times \text{USp}]$$

↑
偶発的な同型

証明の流れ

より具体的には、

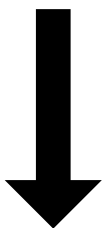


SUSY localization

• S^3 上の分配関数を計算していく。

$$Z = \int_{S^3} D\Phi e^{-S[\Phi]}$$

経路積分
(無限次元積分)



SUSY Localization technique

[Pestun, 2007]

[Kapustin-Willet-Yaakov, 2009]

$$Z = (\text{有限次元積分})$$



行列模型

SUSY localization

行列模型の例。

ABJM理論の行列模型：

$$U(N_1)_k \times U(N_2)_{-k}$$

$$\begin{aligned} & Z_k^{U \times U} (N_1, N_2) \\ &= \frac{1}{N_1! N_2!} \int \frac{d^{N_1} \mu}{(2\pi k)^{N_1}} \int \frac{d^{N_2} \nu}{(2\pi k)^{N_2}} e^{\frac{i}{4\pi k} \sum_m^{N_1} \mu_m^2} e^{-\frac{i}{4\pi k} \sum_m^{N_2} \nu_m^2} \\ &\quad \times \frac{\prod_{n < n'}^{N_1} 2 \sinh \frac{\mu_n - \mu_{n'}}{2k} \prod_{m < m'}^{N_2} 2 \sinh \frac{\nu_m - \nu_{m'}}{2k}}{\prod_n^{N_1} \prod_m^{N_2} 2 \cosh \frac{\mu_n - \nu_m}{2k}} \\ &\quad \times \frac{\prod_{m < m'}^{N_2} 2 \sinh \frac{\nu_m - \nu_{m'}}{2k} \prod_{n < n'}^{N_1} 2 \sinh \frac{\mu_n - \mu_{n'}}{2k}}{\prod_m^{N_2} \prod_n^{N_1} 2 \cosh \frac{\nu_m - \mu_n}{2k}} \end{aligned}$$

Fermi gas formalism

行列模型



Fermi gas formalism

[Mariño-Putrov, 2011]

$$Z \sim \int \frac{d^N x}{N!} \det \left(\langle x_m | \hat{\rho}_M | x_n \rangle \right)_{m,n}$$

密度行列

理想フェルミ気体の分配関数

このFermi gas formalismを、証明の中で出てくるすべての分配関数に適用することに成功した。

→残りの仕事は、 $\hat{\rho}^{U \times U} \sim \hat{\rho}^{\hat{A}_3}$ 及び $\hat{\rho}^{O \times USp} \sim \hat{\rho}^{\hat{D}_3}$ を証明すること。



Up to a similarity transformation

Fermi gas formalism

例: ABJM 理論

[Awata-Hirano-Shigemori, 2012]

[Honda, 2013]

$$\hat{\rho}_{k,M}^{\mathbf{U} \times \mathbf{U}}(\hat{x}, \hat{p})$$

$$= i^M \frac{1}{\prod_j^M 2 \cosh \frac{\hat{x} - 2\pi i t_{M,j}}{2k}} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} \frac{\prod_j^M 2 \sinh \frac{\hat{x} - 2\pi i t_{M,j}}{2k}}{2 \cosh \frac{\hat{x} + i\pi M}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{l} N = \min(N_1, N_2), M = |N_1 - N_2| \\ t_{M,j} = \frac{M+1}{2} - j \end{array} \right)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = 2\pi i k$$



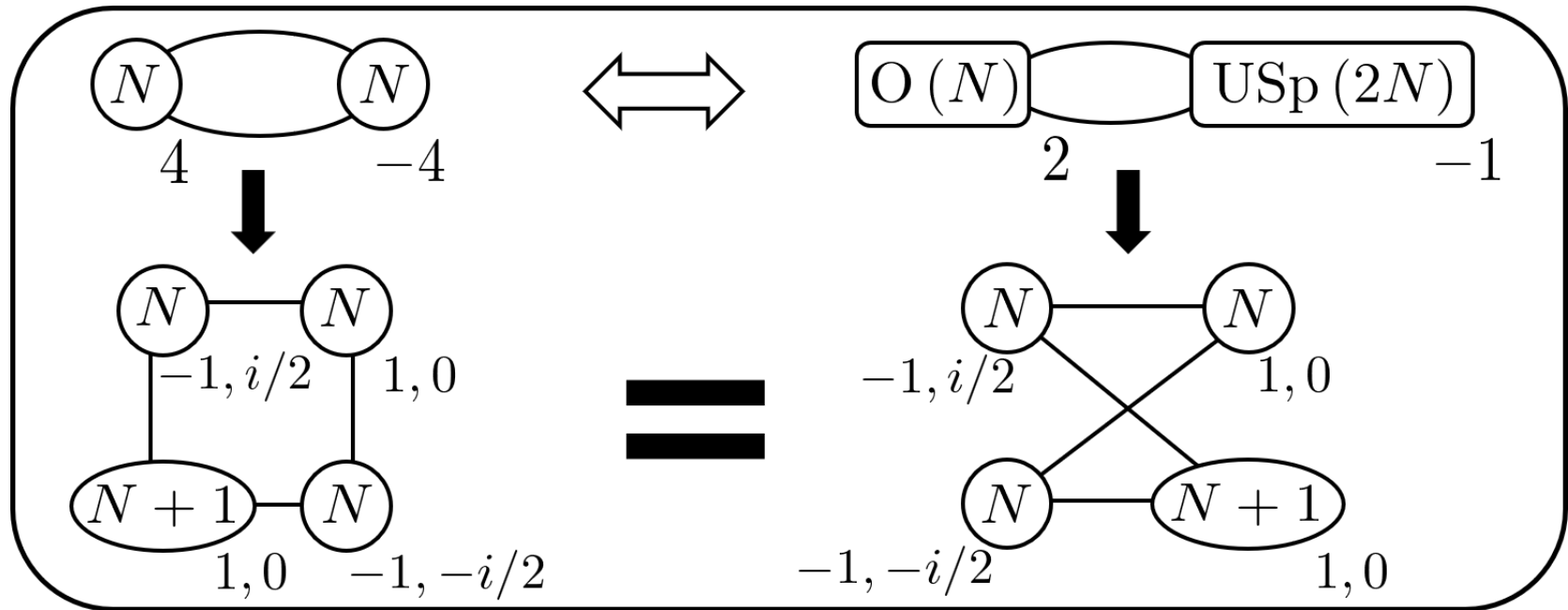
Chern-Simons level

※質量パラメターを入れることもできる。

双対性1

3つの双対性の中の一つを紹介。

$$\underline{U(N)_4 \times U(N)_{-4} \Leftrightarrow O(2N)_2 \times USp(2N)_{-1}}$$



双対性1

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{4,0}^{\text{U} \times \text{U}}(\hat{X}, \hat{P}) &= \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{P}}{2}} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{X}}{2}} \\ &= \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{P} - \frac{1}{2}\pi i}{2}} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{P} + \frac{1}{2}\pi i}{2}} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{X} + \frac{1}{2}\pi i}{2}} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{X} - \frac{1}{2}\pi i}{2}}\end{aligned}$$

$$[\hat{X}, \hat{P}] = 8\pi i$$

$$\Downarrow \hat{x} = \hat{X}/2, \hat{p} = \hat{P}/2$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = 2\pi i$$

||

$$\leftarrow e^{-\frac{i\eta}{\hbar}\hat{x}} f(\hat{p}) e^{\frac{i\eta}{\hbar}\hat{x}} = f(\hat{p} + \eta), \quad e^{-\frac{i\eta}{\hbar}\hat{p}} f(\hat{x}) e^{\frac{i\eta}{\hbar}\hat{p}} = f(\hat{x} - \eta)$$

$$\hat{\rho}_{1,1,0}^{\hat{A}_3}(\hat{x}, \hat{p}; \zeta) = e^{-\frac{1}{4}\hat{x}} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{\frac{1}{2}\hat{x}} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{-\frac{1}{4}\hat{x}} e^{-\frac{1}{4}\hat{p}} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{x}}{2}} e^{\frac{1}{2}\hat{p}} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{x}}{2}} e^{-\frac{1}{4}\hat{p}}$$

↑↓

← 元の理論がidenticalなので、分配関数同士は自明に等しい。

$$\hat{\rho}_{1,1,0}^{\hat{D}_3}(\hat{x}, \hat{p}; \zeta) = \frac{1}{2 \sinh \hat{p}} e^{-\frac{i}{4\pi}\hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{\frac{i}{4\pi}\hat{x}^2} (2 \sinh \hat{p}) e^{\frac{i}{4\pi}\hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{-\frac{i}{4\pi}\hat{x}^2}$$

||

$$\leftarrow \hat{x} \rightarrow -\hat{p}, \quad \hat{p} \rightarrow \hat{x}, \quad e^{\pm \frac{i}{4\pi}\hat{p}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{x}}{2}} e^{\mp \frac{i}{4\pi}\hat{p}^2} = e^{\mp \frac{i}{4\pi}\hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{\pm \frac{i}{4\pi}\hat{x}^2}$$

$$\hat{\rho}_{1,0}^{\text{O} \times \text{USp}}(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{1}{2 \sinh \hat{x}} e^{\frac{i}{4\pi}\hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{-\frac{i}{4\pi}\hat{x}^2} (2 \sinh \hat{x}) e^{-\frac{i}{4\pi}\hat{x}^2} \frac{1}{2 \cosh \frac{\hat{p}}{2}} e^{\frac{i}{4\pi}\hat{x}^2}$$

まとめと展望

Summary

- ABJM理論とorientifold ABJ理論の間の双対性を、 S^3 分配関数を用いて調べた。
- 双対な理論間で分配関数が等しいことを、SUSY localizationとFermi gas formalismを適用することで証明した。
- 双対性と $\hat{A}_3 = \hat{D}_3$ クイバー理論の間の不思議な関係を見つけた。

Future directions

- $\hat{A}_3 = \hat{D}_3$ クイバー理論との関係の物理的な解釈。
- この手法を応用し、より広いクラスの双対性を確認・発見。
- 可積分系への応用？

Back up

クイバー理論

クイバー図形:

