

テンソルネットワークによる 2-flavor Schwinger模型の 質量スペクトルの θ 依存性

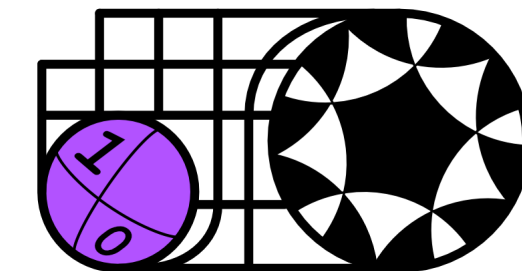
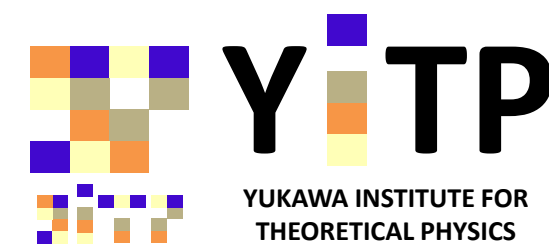
松本 祥 (YITP, Kyoto U, RIKEN iTHEMS)

collaboration with

伊藤 悦子 (YITP, Kyoto U, RIKEN iTHEMS) and 谷崎 佑弥 (YITP, Kyoto U)

JHEP11 (2023) 231 [[2307.16655](#)] and [[2407.11391](#)]

場の理論と弦理論2024, 8 August 2024 @YITP



背景：QCDの質量スペクトル

- QCDにおけるクォーク閉じ込め
… 低エネルギーの自由度はクォーク単体ではなく **複合粒子(ハドロン)**

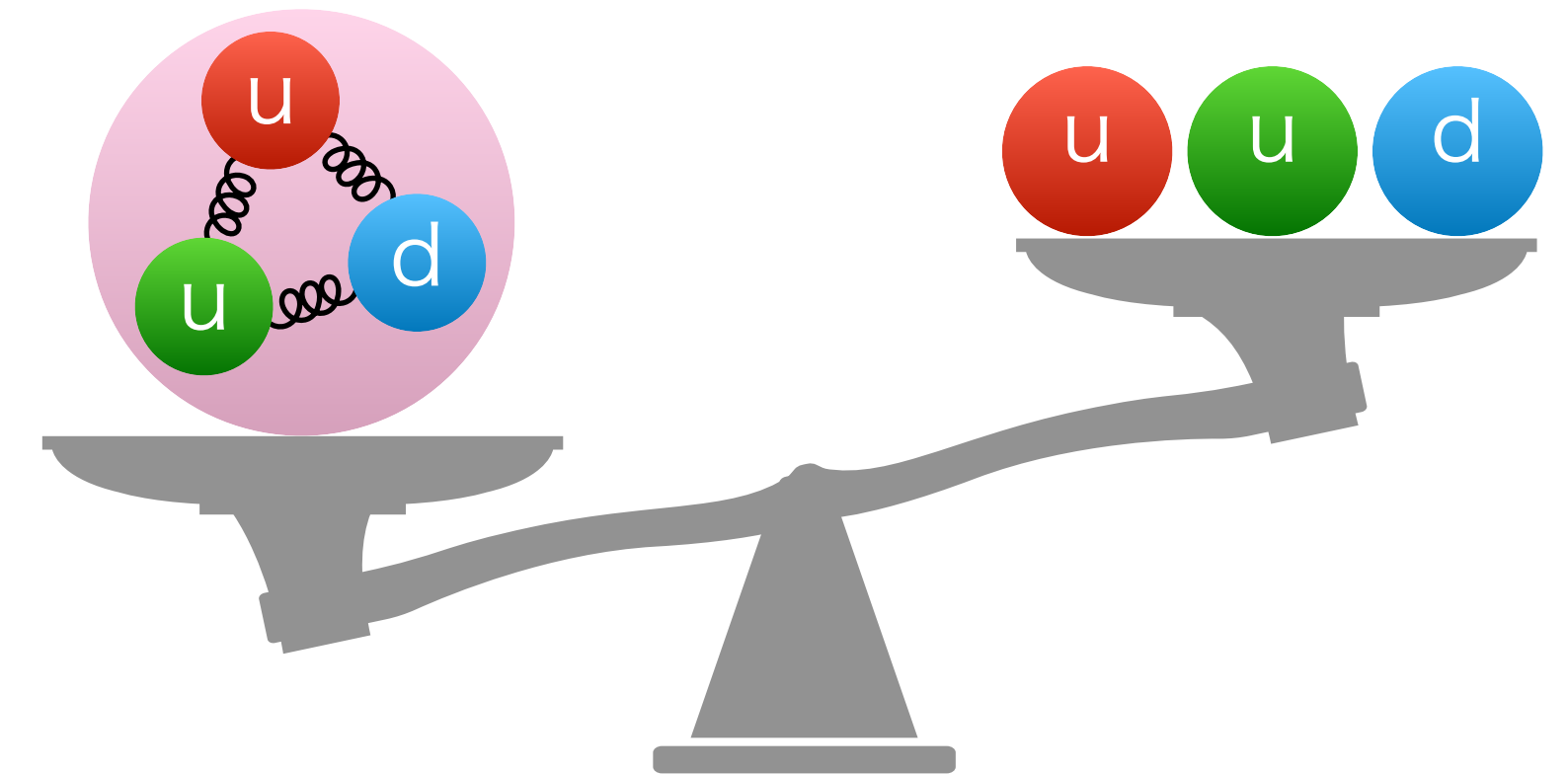
- ハドロンはクォークと比べて非常に“重い”

u/d クォーク： $m_u \sim 2 \text{ MeV}$, $m_d \sim 5 \text{ MeV}$

π^+ 中間子(u, d)： $140 \text{ MeV} \gg m_u + m_d$

陽子(u, u, d)： $938 \text{ MeV} \gg 2m_u + m_d$

- ハドロンの性質を理解するためには非摂動計算が重要



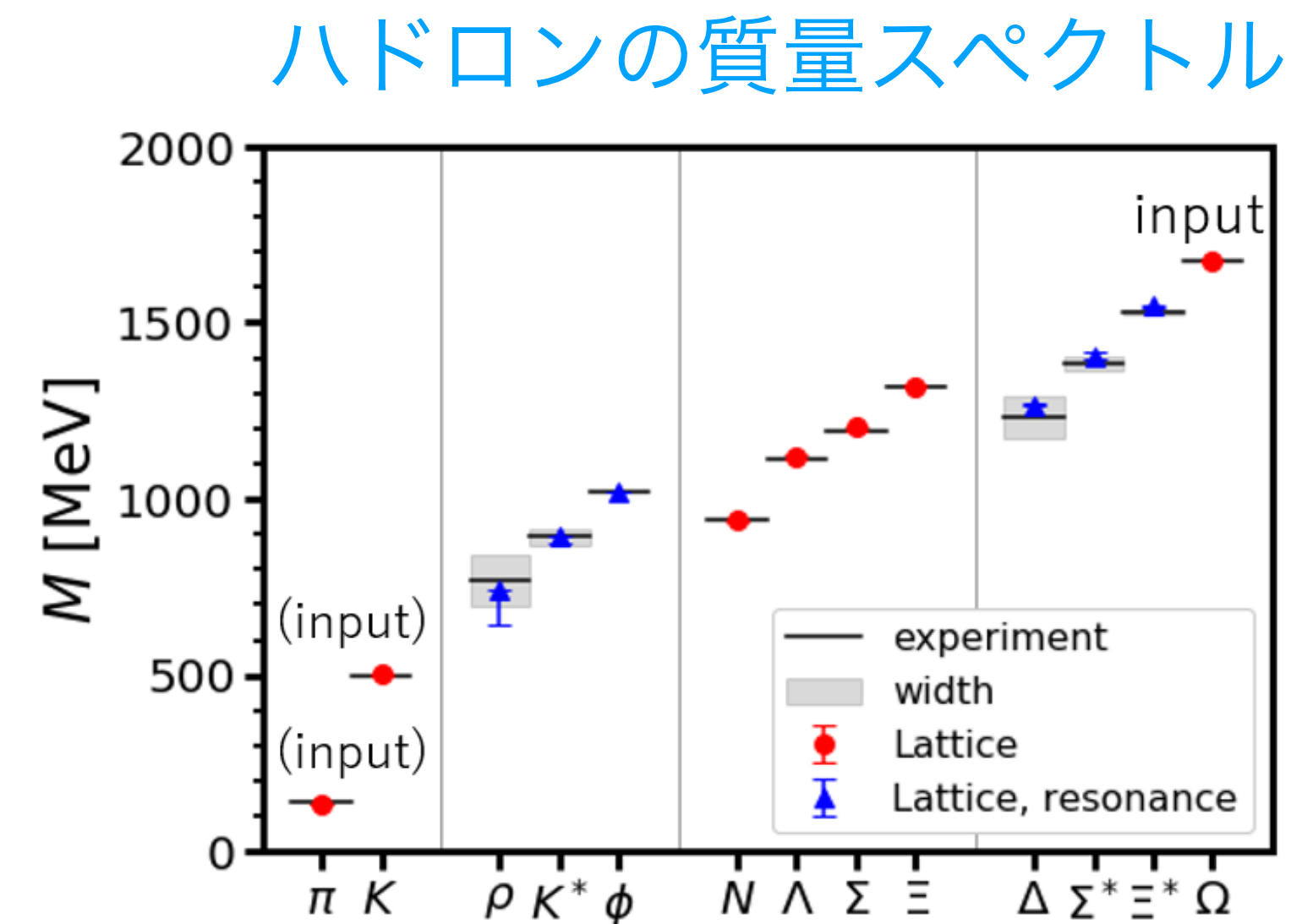
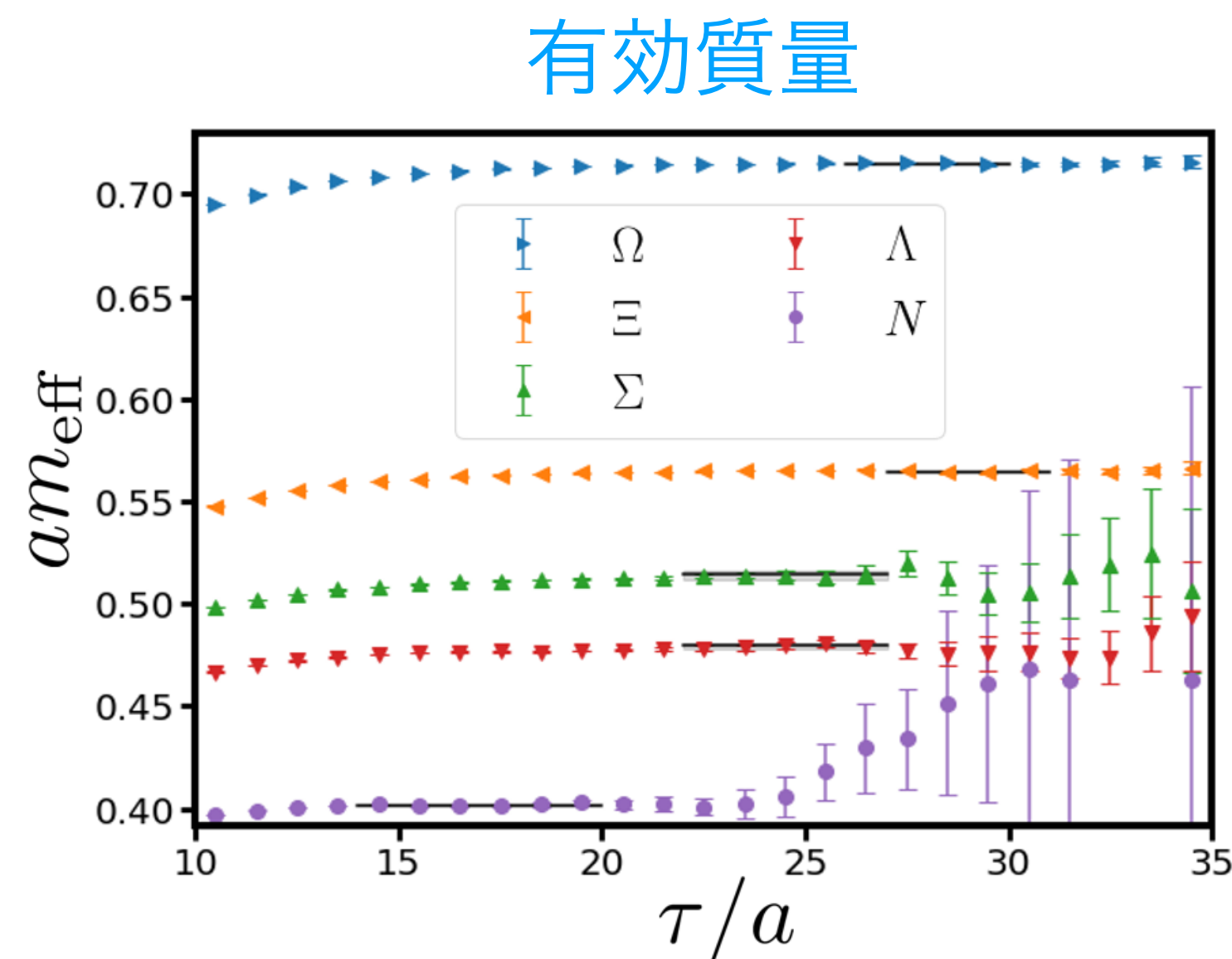
motivation

数値計算を用いてQCDのようなゲージ理論の質量スペクトルを明らかにする

格子QCDによる質量スペクトルの計算

- 一般的な手法：格子ゲージ理論に基づくモンテカルロ計算(ラグランジアン形式)
- 虚時間相関関数を用いてハドロン質量を得る

$$C(\tau) = \sum_x \langle \mathcal{O}(0,0) \mathcal{O}(x,\tau) \rangle \sim e^{-M\tau} \rightarrow \text{有効質量(log微分)} \quad m_{\text{eff}}(\tau) = -\log \frac{C(\tau+1)}{C(\tau)} \sim M$$



[HAL QCD collab. (2024)]

ハミルトニアン形式によるアプローチ

😞 作用が複素数となる模型にはモンテカルロ法が適用できない

→ 符号問題 eg.) 有限密度QCD, トポロジカル θ 項, 実時間経路積分, ...

- ハミルトニアン形式に基づくテンソルネットワークや量子計算が相補的な手法になり得る

👍 符号問題がない

👍 励起状態の直接的な解析

研究の目的

符号問題が生じる模型にも適用可能な、
ハミルトニアン形式の手法で
ハドロンの質量スペクトルを計算する



©IBM

Short summary

- 2-flavor Schwinger模型を対象として質量スペクトルの解析を行った
- JHEP11 (2023) 231 [[2307.16655](#)] : $\theta = 0$ におけるスペクトルを3つの方法で計算
 - (1) 相関関数 scheme
 - (2) 1点関数 scheme
 - (3) 分散関係 scheme
- [[2407.11391](#)] : 3つの手法を改良して $\theta \neq 0$ の場合に拡張
 - (1)+(2) improved 1点関数 scheme → 本発表
 - (3) 分散関係 scheme → 伊藤さんのトーク
- 各手法で得たスペクトルは互いに一致し、ボソン化を用いた計算とも無矛盾

Outline

1. 2-flavor Schwinger模型と数値解析手法
2. 有限 θ での演算子混合
3. Improved 1点関数 scheme
4. $\theta = \pi$ における1点関数

Outline

1. 2-flavor Schwinger模型と数値解析手法

2. 有限 θ での演算子混合

3. Improved 1点関数 scheme

4. $\theta = \pi$ における1点関数

2-flavor Schwinger模型における“メソン”

Schwinger模型 = 1+1次元のQED

- QCDとよく似た性質の性質を持つ、単純ながら非自明なゲージ理論

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_{f=1}^{N_f} \left[i\bar{\psi}_f\gamma^\mu \left(\partial_\mu + iA_\mu \right) \psi_f - m\bar{\psi}_f\psi_f \right] \quad \theta \neq 0 \text{では符号問題が生じる}$$

- 量子数：

isospin J , parity P , G-parity $G = Ce^{i\pi J_y}$

- $\theta \neq 0$ において P と G は顕に破れる
→ η メソンは不安定粒子となる

$N_f = 2 \rightarrow$ 3種類の“メソン”

$$\pi_a = -i\bar{\psi}\gamma^5\tau_a\psi : J^{PG} = 1^{-+}$$

$$\sigma = \bar{\psi}\psi : J^{PG} = 0^{++}$$

$$\eta = -i\bar{\psi}\gamma^5\psi : J^{PG} = 0^{--}$$

ボソン化による解析計算

- 2-flavor Schwinger模型は $m = 0$ のとき $SU(2)_1$ Wess-Zumino-Witten模型に帰着
- $m \neq 0$ の場合は解けないが、 $g \gg m$ ではボソン化による解析が有効

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\eta)^2 - \mu^2\eta^2] + \frac{1}{4\pi}(\partial\varphi)^2 + \frac{e^\gamma}{\pi}m\rho N_\rho \left[\cos \left(\sqrt{2\pi}\eta - \frac{\theta}{2} \right) \cos \varphi \right] \quad [\text{Coleman (1976)}]$$

η : non-compact scalar φ : 2π -periodic scalar

$N_\rho[\cdot]$: スケール ρ でのnormal ordering $\mu^2 = 2g^2/\pi$

- $O(\mu)$ の質量をもつ η を積分
→ 低エネルギーのスペクトルはsine-Gordon模型で記述される

ボソン化による質量スペクトラム

- optimized perturbationとWKB近似によるsine-Gordon模型の解析

[Coleman (1976)]

[Dashen et al. (1975)]

$$\pi \text{ メソン} : M_{\pi}(\theta) \sim \left| m\sqrt{\mu} \cos \frac{\theta}{2} \right|^{2/3}$$

$$\sigma \text{ メソン} : M_{\sigma}(\theta) = \sqrt{3} M_{\pi}(\theta)$$

ここで用いた近似がどこまで有効か非自明
→ 第一原理計算により検証

- η メソンは $O(\mu)$ の質量をもつが、 $\theta \neq 0$ では不安定となる

⚠ θ に依存した相互作用 $\left(\sqrt{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} \right) \eta \cos \varphi$ によって

η から σ の1粒子状態または $\pi \pi$ 散乱状態が作られる → η - σ 混合 / $\eta \rightarrow \pi \pi$ 崩壊

2-flavor Schwinger模型の格子正則化

- 開放端格子上のstaggered fermion

$$H = \frac{g^2 a}{2} \sum_{n=0}^{N-2} \left(L_n + \frac{\theta}{2\pi} \right)^2 + \sum_{f=1}^{N_f} \left[\frac{-i}{2a} \sum_{n=0}^{N-2} \left(\chi_{f,n}^\dagger U_n \chi_{f,n+1} - \chi_{f,n+1}^\dagger U_n^\dagger \chi_{f,n} \right) + m_{\text{lat}} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \chi_{f,n}^\dagger \chi_{f,n} \right]$$

- Gauss lawとゲージ固定によりゲージ場を消去

[Kogut & Susskind (1975)]

[Dempsey et al. (2022)]

- $N_f = 2$ の場合のJordan-Wigner変換

$$\chi_{1,n} = \sigma_{1,n}^- \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j}^z), \quad \chi_{2,n} = \sigma_{2,n}^- (-i\sigma_{1,n}^z) \prod_{j=0}^{n-1} (-\sigma_{2,j}^z \sigma_{1,j}^z)$$

→ 有限のヒルベルト空間を持つスピン系のハミルトニアン

密度行列繰り込み群 (DMRG)

[White (1992)] [Schollwöck (2005)]

行列積状態(MPS)をansatzとして、変分法により基底状態を求める

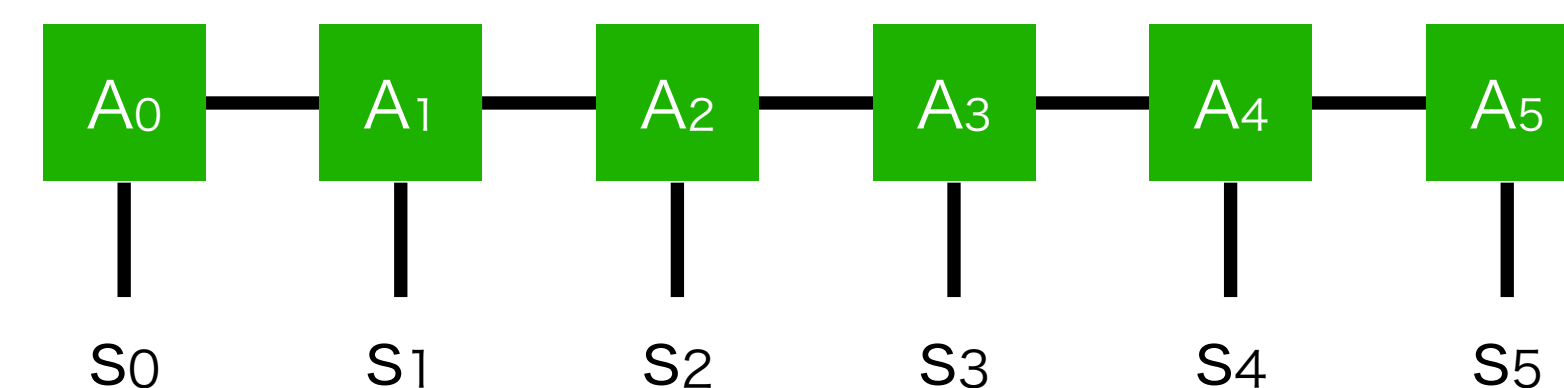
- コスト関数：エネルギー $E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle$
- E が減少するように $A_i(s_i)$ を順次更新
- 特異値分解により行列の低ランク近似を行う
近似の誤差 $\leq$ cutoff parameter ε

high accuracy $\leftrightarrow$ small $\varepsilon \leftrightarrow$ large $D \leftrightarrow$ high cost

$$|\Psi\rangle = \sum_{\{s_i\}} \text{Tr} [A_0(s_0) A_1(s_1) \cdots] |s_0 s_1 \cdots\rangle$$

$A_i(s_i) : D \times D$ 行列

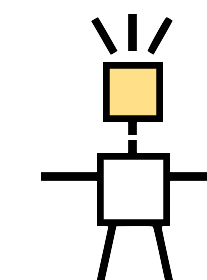
D : ボンド次元



第 ℓ 励起状態 $|\Psi_\ell\rangle \rightarrow H_\ell = H + W \sum_{\ell'=0}^{\ell-1} |\Psi_{\ell'}\rangle \langle \Psi_{\ell'}|$

[Banuls et al. (2013)]

本研究の計算には、ITensorのC++ libraryを用いた [Fishman et al. (2022)]



Outline

1. 2-flavor Schwinger模型と数値解析手法

2. 有限 θ での演算子混合

3. Improved 1点関数 scheme

4. $\theta = \pi$ における1点関数

$\theta \neq 0$ におけるメソン演算子

$\theta \neq 0$ の場合、メソン演算子はaxial回転を考慮して定義する

$$\pi_a = -i\bar{\psi} \exp \left[i\frac{\theta}{2}\gamma^5 \right] \gamma^5 \tau_a \psi$$

$$\sigma = \bar{\psi} \exp \left[i \left(\frac{\theta}{2} + \omega(\theta) \right) \gamma^5 \right] \psi$$

$$\eta = -i\bar{\psi} \exp \left[i \left(\frac{\theta}{2} + \omega(\theta) \right) \gamma^5 \right] \gamma^5 \psi$$

$\omega(\theta)$: η - σ 混合による非自明な補正

相関行列を用いたメソン演算子の定義

θ に依存する混合角を数値計算から求める

- 相関行列の対角化

e.g.) isosinglet sector

$$\begin{pmatrix} \langle S(x) S(y) \rangle_c & \langle S(x) PS(y) \rangle_c \\ \langle PS(x) S(y) \rangle_c & \langle PS(x) PS(y) \rangle_c \end{pmatrix} = R(\delta)^T \begin{pmatrix} \langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle_c & 0 \\ 0 & \langle \eta(x) \eta(y) \rangle_c \end{pmatrix} R(\delta)$$

$S(x) \leftrightarrow \bar{\psi}\psi(x)$
 $PS(x) \leftrightarrow -i\bar{\psi}\gamma^5\psi(x)$

$$R(\delta) = \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \dots \text{混合角 } \delta \text{ の回転行列}$$

$$\langle AB \rangle_c := \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$$

メソン演算子の定義 $\begin{pmatrix} \sigma(x) \\ \eta(x) \end{pmatrix} := R(\delta) \begin{pmatrix} S(x) \\ PS(x) \end{pmatrix}$

混合角の数値計算結果

triplet sector : $\delta_- \approx \theta/2$

π メソンは混合しないため、自明な回転 $\exp [i(\theta/2)\gamma^5]$ のみ

singlet sector : $\delta_+ \approx \theta/2 + \omega(\theta)$

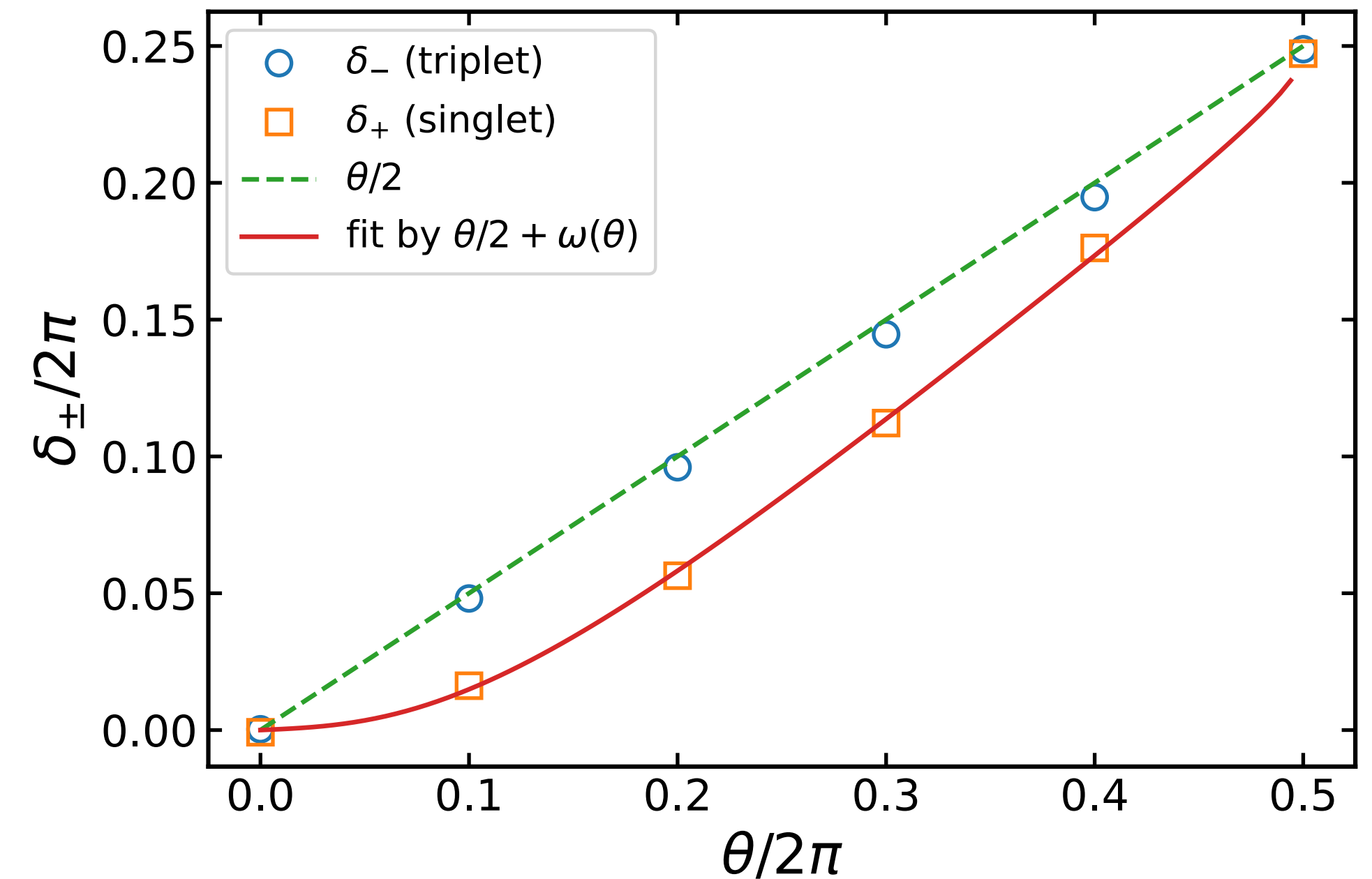
η - σ 混合による補正がある

- δ_+ の結果はボソン化で得られる関数でfitting可能

$\omega(\theta)$ は質量行列を対角化する回転行列の角度に相当

$$\mathcal{M} \propto \begin{pmatrix} 1 & A \sin(\theta/2) |\cos(\theta/2)|^{1/3} \\ A \sin(\theta/2) |\cos(\theta/2)|^{1/3} & B |\cos(\theta/2)|^{4/3} \end{pmatrix} = R(\omega(\theta))^T \Lambda R(\omega(\theta))$$

fitting結果 : $A = -0.23(2)$, $B = 0.76(4)$



Outline

1. 2-flavor Schwinger模型と数値解析手法
2. 有限 θ での演算子混合
- 3. Improved 1点関数 scheme**
4. $\theta = \pi$ における1点関数

相関関数から質量を求める場合

- 格子QCDでは空間積分(ゼロ運動量射影)した相関関数を計算 $\sum_x \langle \mathcal{O}(0,0) \mathcal{O}(x, \tau) \rangle \sim e^{-M\tau}$

- ハミルトニアン形式で計算する等時-空間相関関数は湯川型

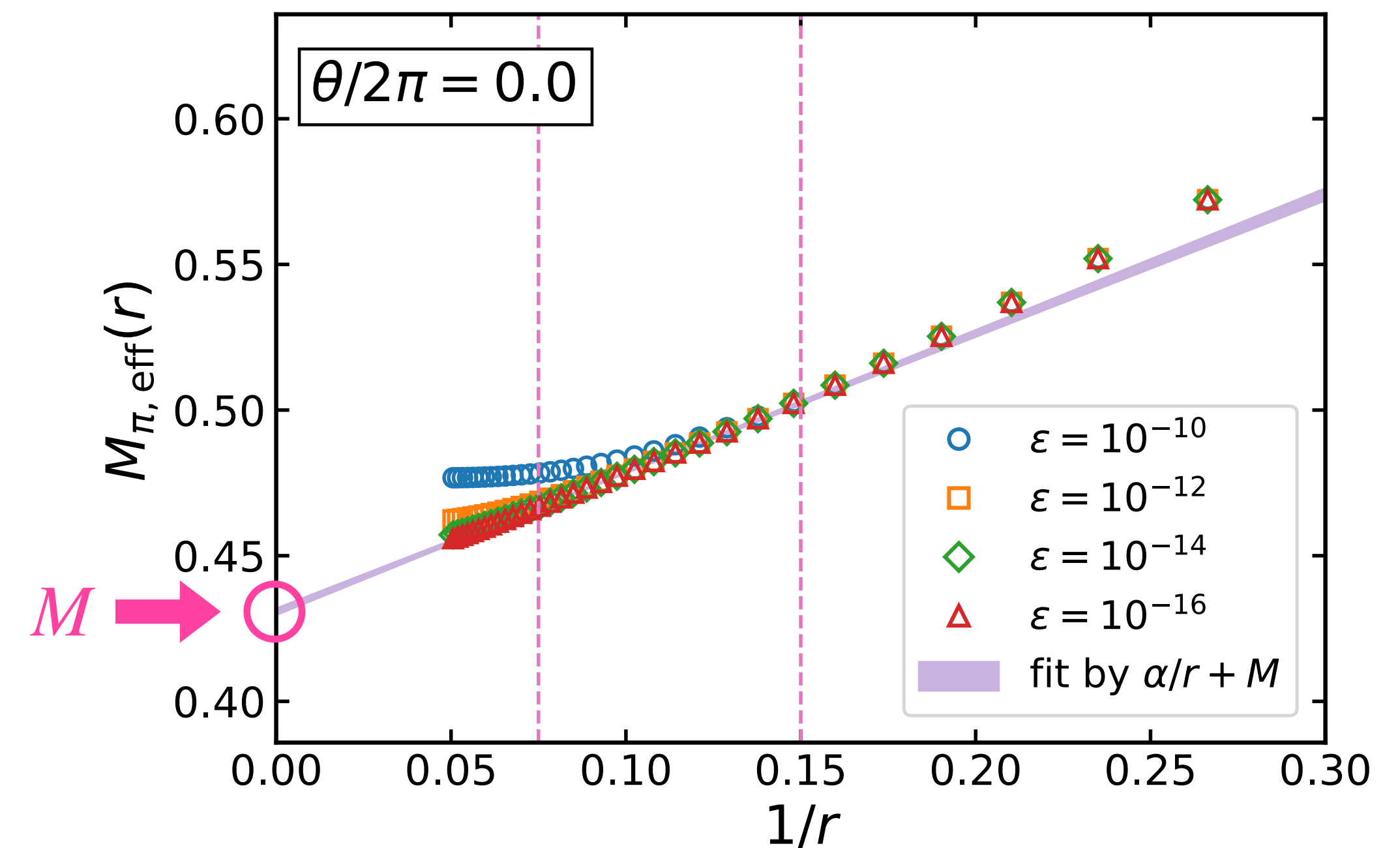
$$C(r) = \langle \mathcal{O}(0,0) \mathcal{O}(r,0) \rangle \sim \frac{1}{r^\alpha} e^{-Mr}$$

→ 有効質量 $M_{\text{eff}}(r) = -\frac{d}{dr} \log C(r) \sim \frac{\alpha}{r} + M$

- MPSのボンド次元が十分大きくないと
 $\propto 1/r$ の振る舞いが見られない

⚠ 低ランク近似による系統誤差が大きい

π メソンの有効質量



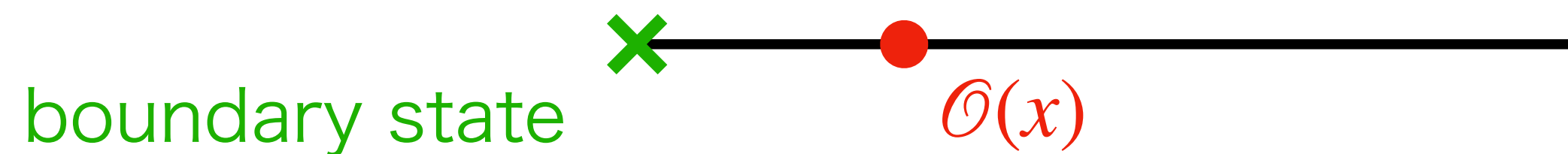
一点関数を用いた手法

開放端(格子欠損)をメソンのソースとして、一点関数の減衰から質量を求める

- 開放端境界での1点関数 $\langle \mathcal{O}(x) \rangle_{\text{obc}}$ は boundary state との相関に対応
- 境界は(虚)時間並進不変 $\rightarrow$ 自動的にゼロ運動量射影 $\rightarrow$ 指数関数的減衰

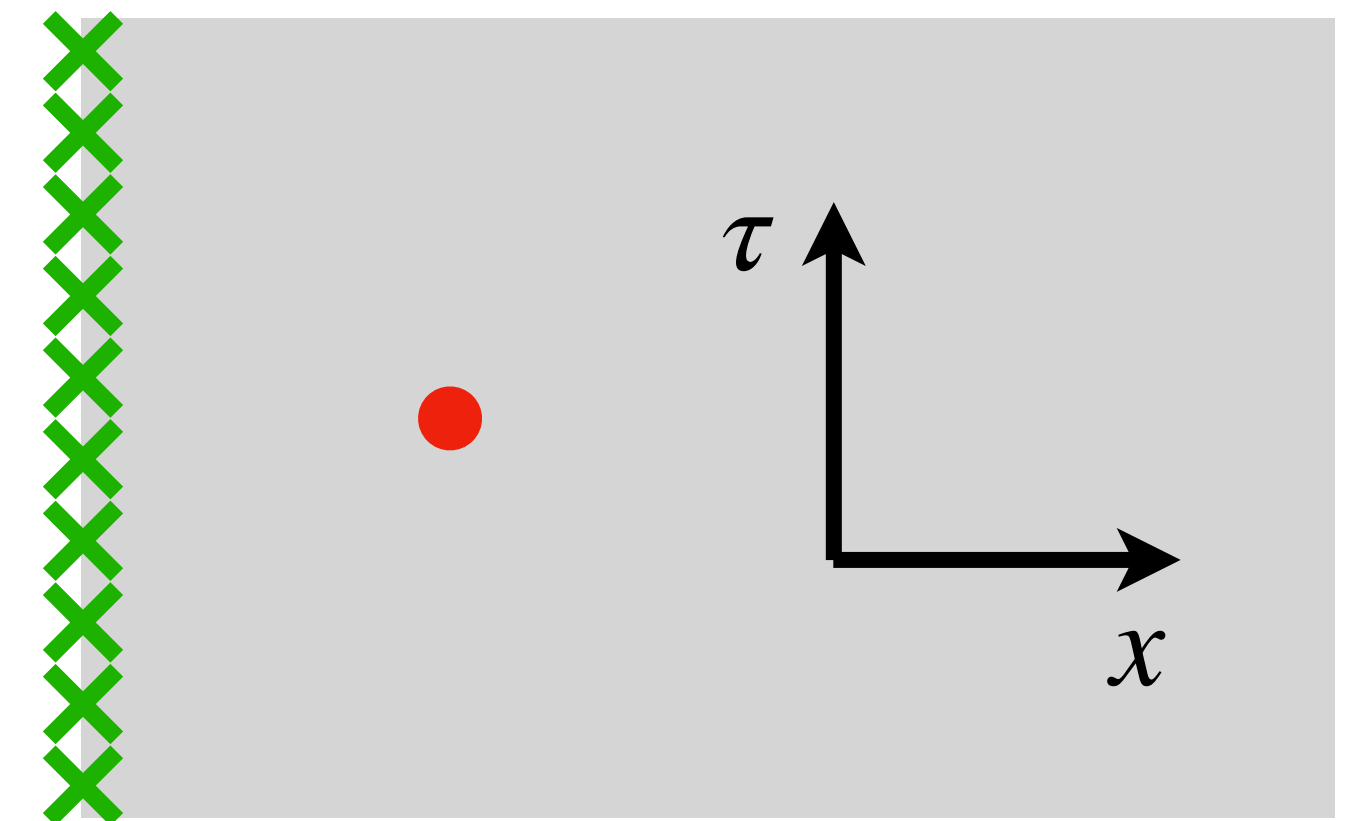
$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_{\text{obc}} \sim \langle \text{bdry} | e^{-Hx} \mathcal{O} | 0 \rangle_{\text{bulk}} \sim e^{-Mx}$$

👍 低ランク近似の影響が小さい



Euclidean space

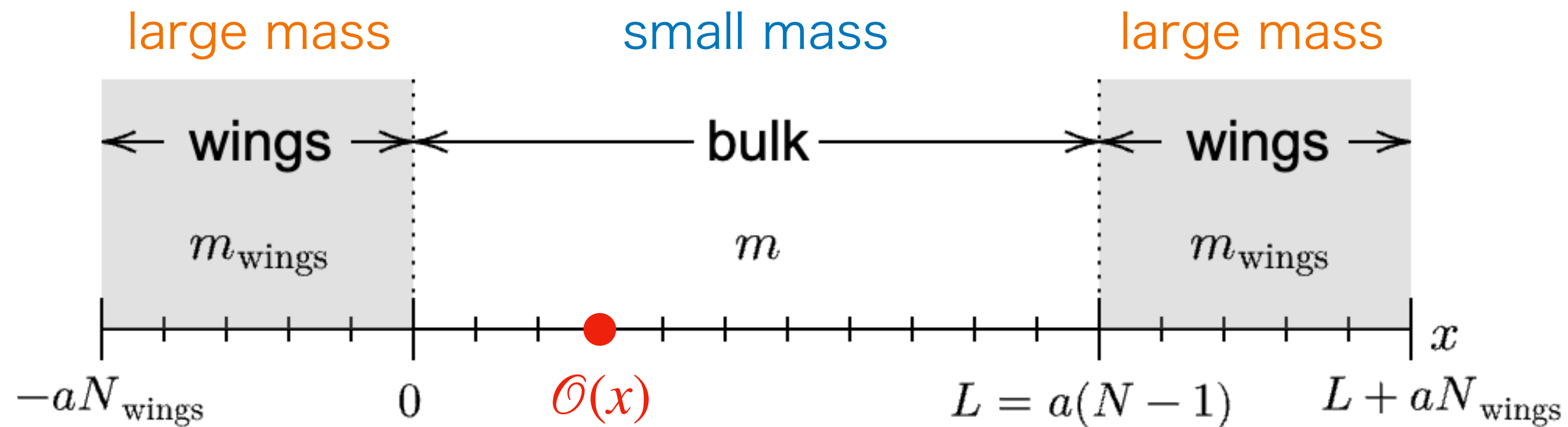
$$p_\tau | \text{bdry} \rangle = 0$$



Improved 1点関数 scheme

- 境界条件を柔軟に制御するために1次元格子に“wings”(舞台袖)を追加

e.g.) Dirichlet境界条件 $\cdots m_{\text{wings}} \gg m$



- 非自明な量子数を持つメソンを測る場合、対称性を破る境界条件が必要

σメソンとηメソンの結果

- Dirichlet境界条件 $m_{\text{wings}} = m_0 \gg m$ においてsingletメソンの1点関数を測定

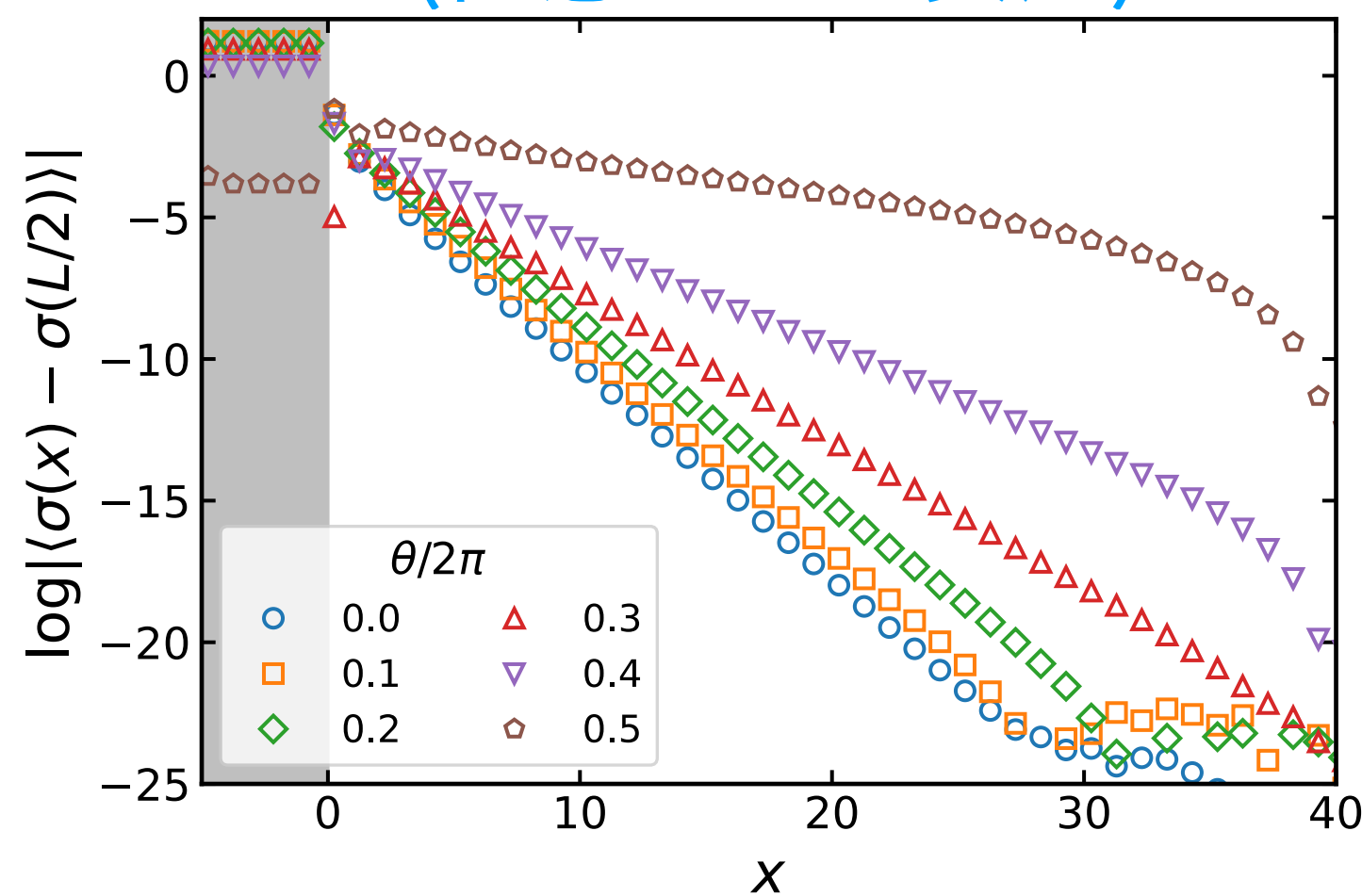
- $\langle \sigma(x) \rangle \sim Ae^{-Mx} + Be^{-(M+\Delta M)x}$ を仮定し、

有効質量を $M + \frac{\Delta M}{1 + Ce^{\Delta Mx}}$ でfittingして質量 M を得る

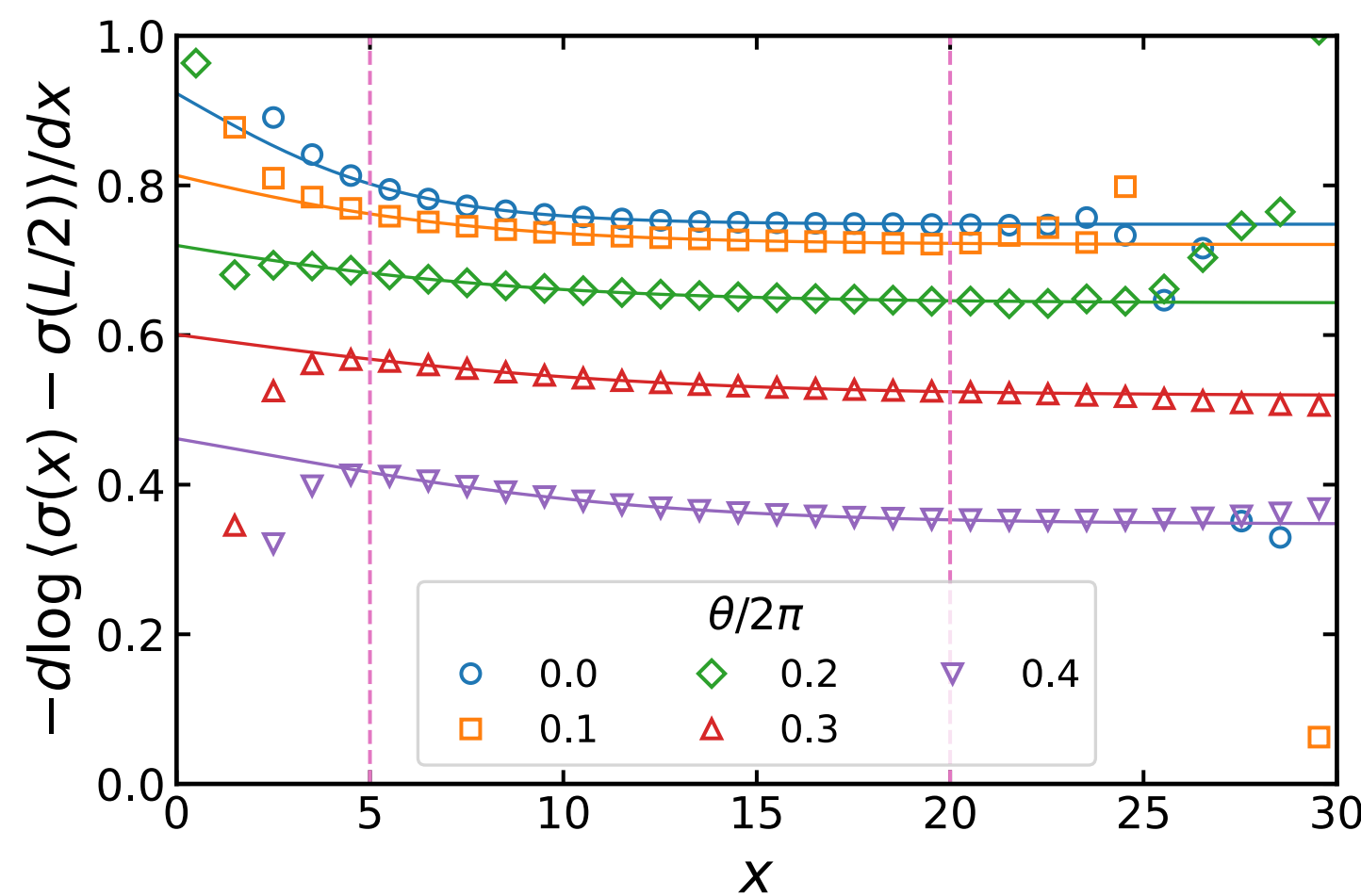
$$N = 320, a = 0.25$$

$$m = 0.1, m_0 = 10$$

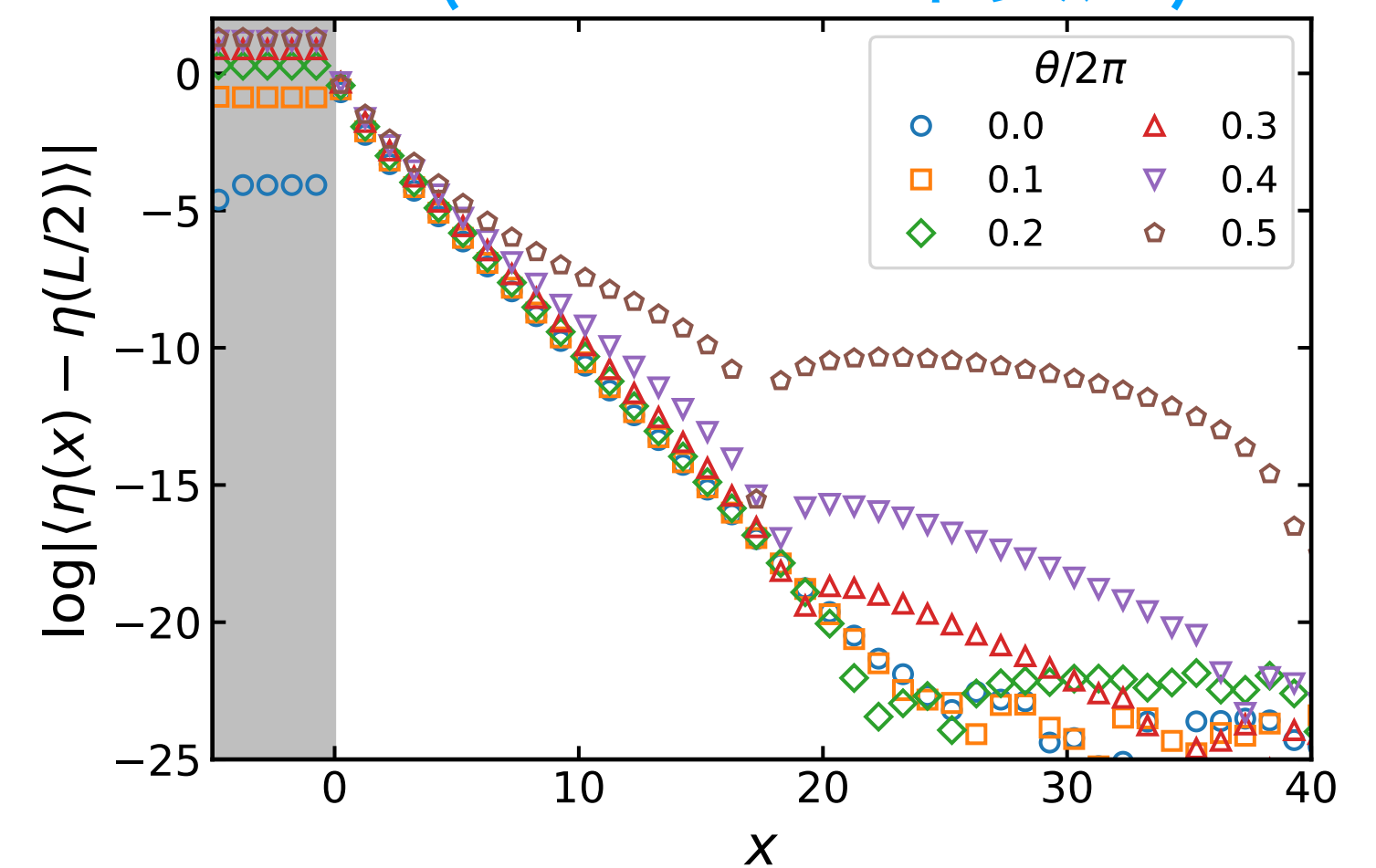
σの1点関数
(任意のθで安定)



σの有効質量



ηの1点関数
(θ ≠ 0では不安定)



π メソンの結果

⚠ Dirichlet境界は isospin singlet であるため常に $\langle \pi(x) \rangle = 0$

$$N = 320, a = 0.25$$

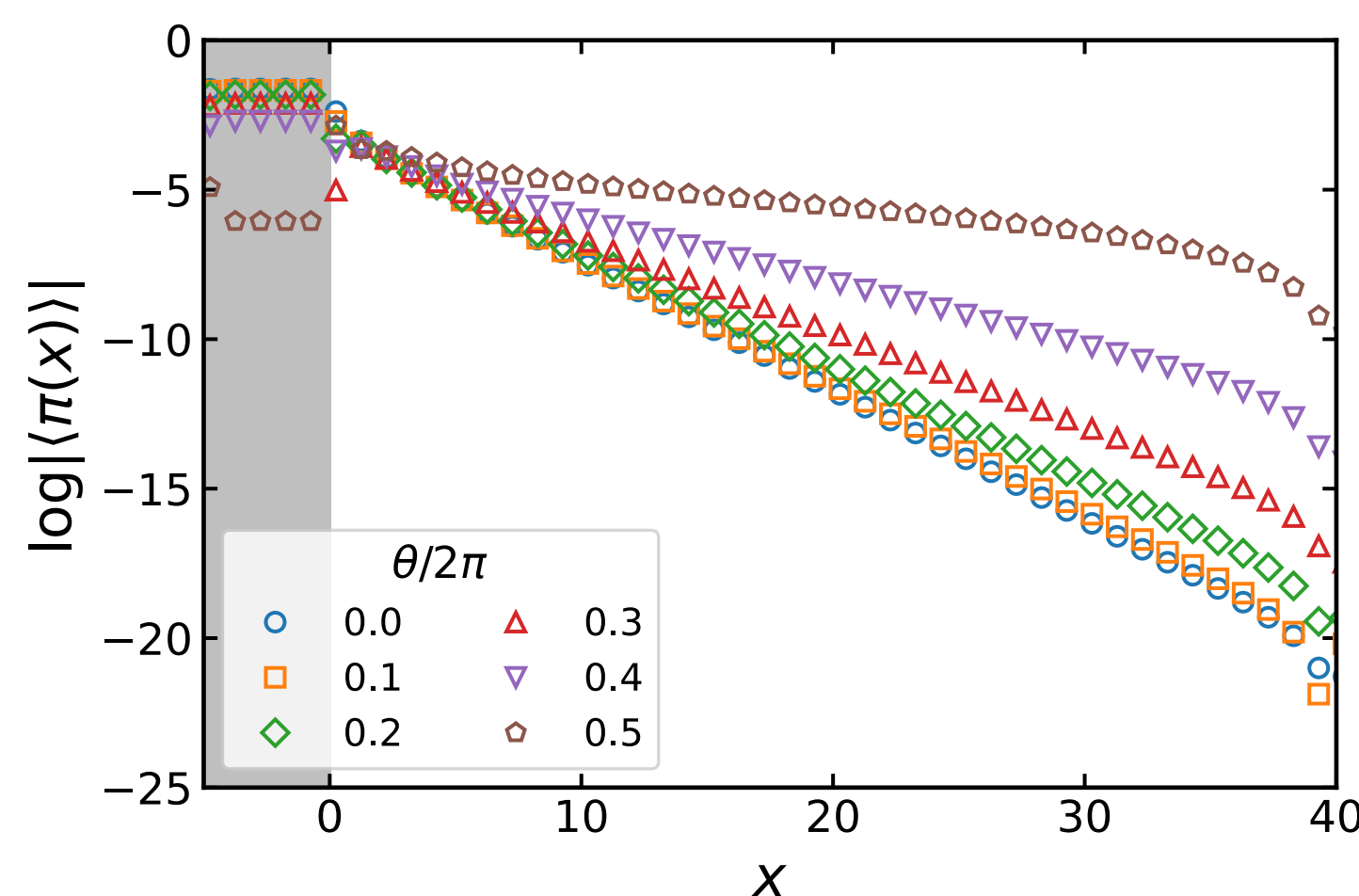
$$m = 0.1, m_0 = 10$$

$$\Delta = 0.1$$

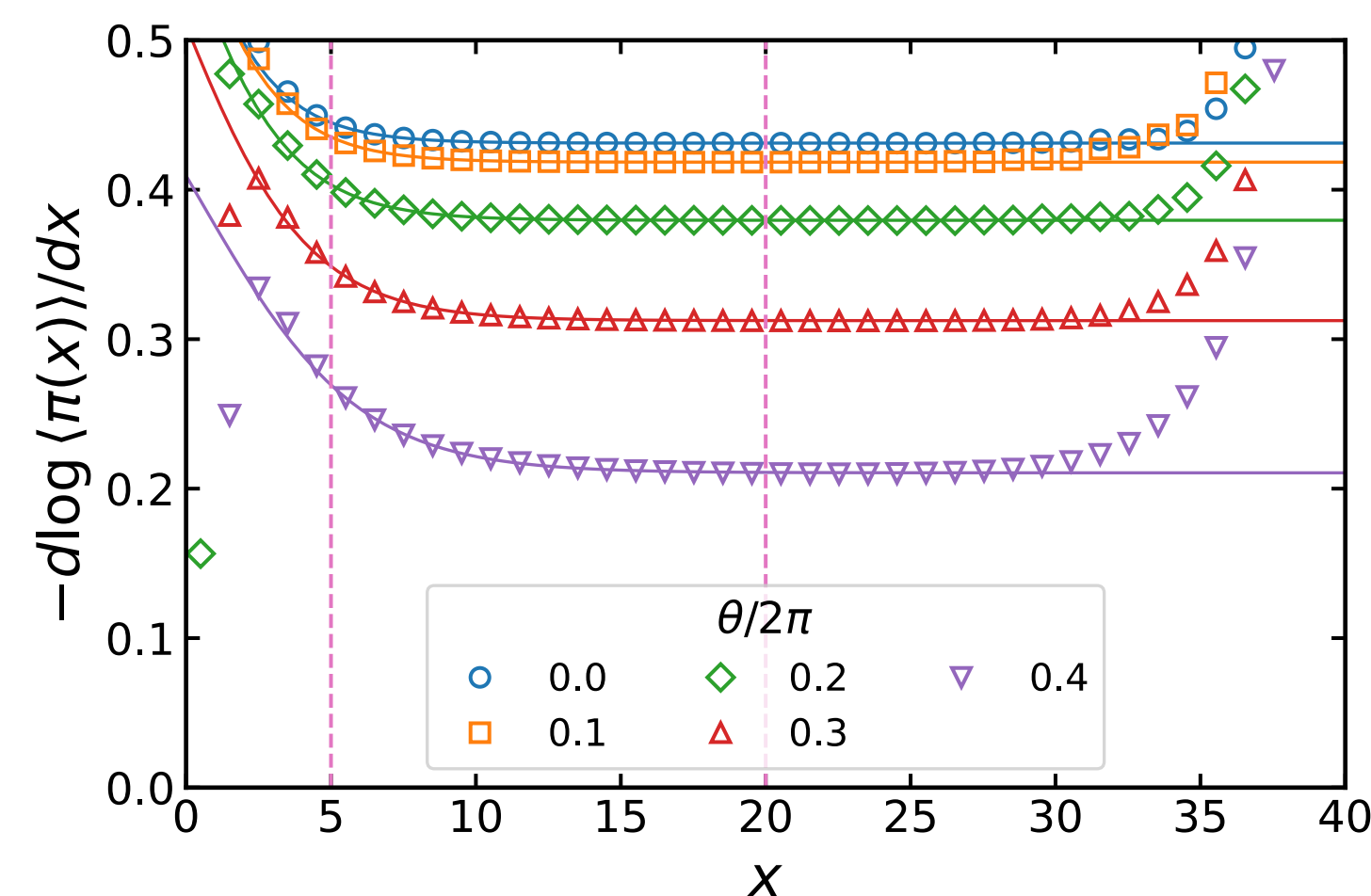
- wings領域でflavor非対称ツイスト $m_{\text{wings}} = m_0 \exp(\pm i\Delta\gamma^5)$ を課し、isospin-breakingな境界条件を設定

cf.) $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ としてSPT状態を用いる方法もある

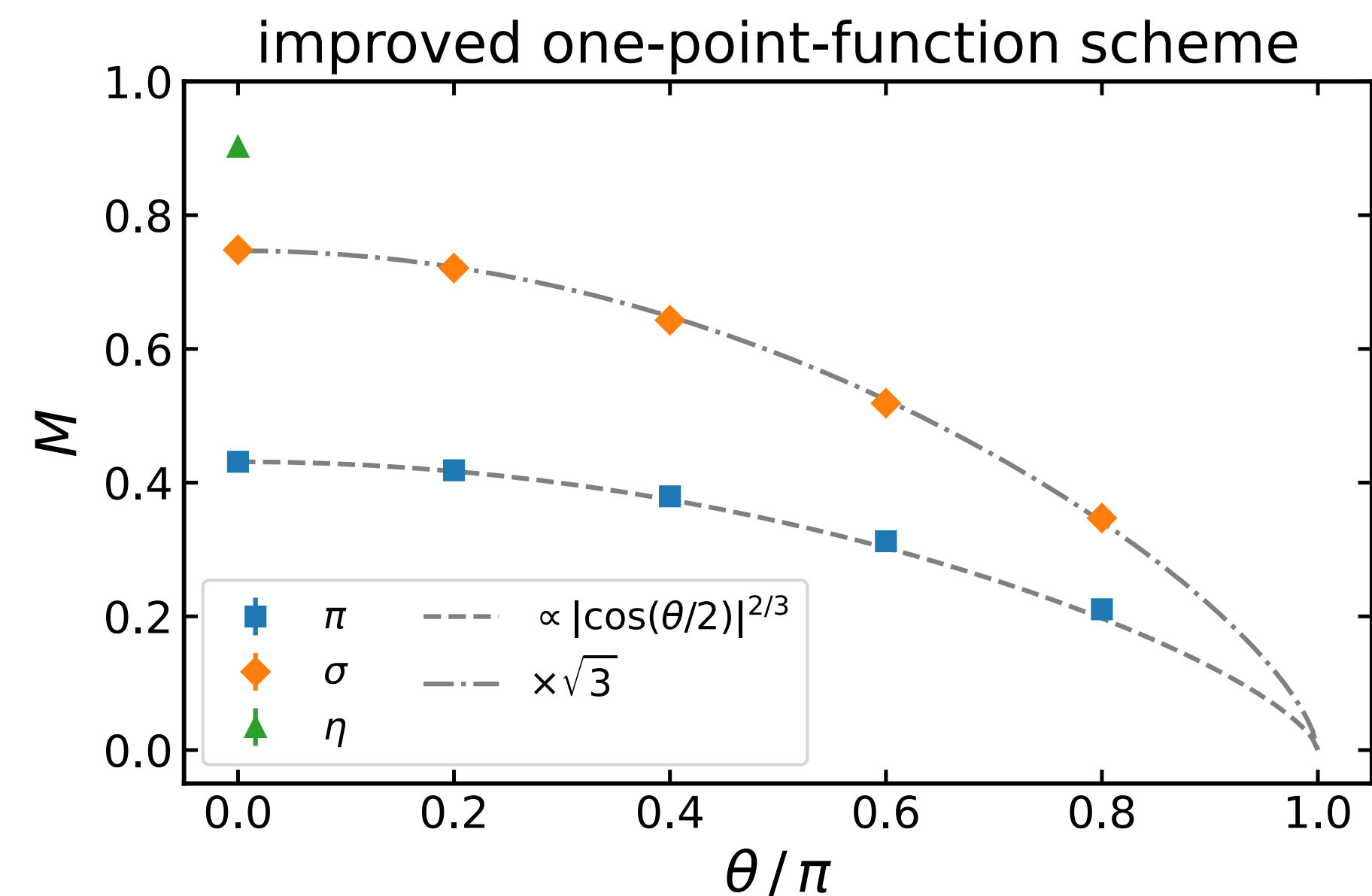
π の1点関数



π の有効質量



summary



Outline

1. 2-flavor Schwinger模型と数値解析手法
2. 有限 θ での演算子混合
3. Improved 1点関数 scheme
- 4. $\theta = \pi$ における1点関数**

$\theta = \pi$ におけるCFT的な振る舞い

MPSのボンド次元 D を見ると、 $\theta = \pi$ ではgapless的に振る舞っている

cf.) ボンド次元はエンタングルメント・エントロピーの上限を与える： $S_{EE} \lesssim \log D$

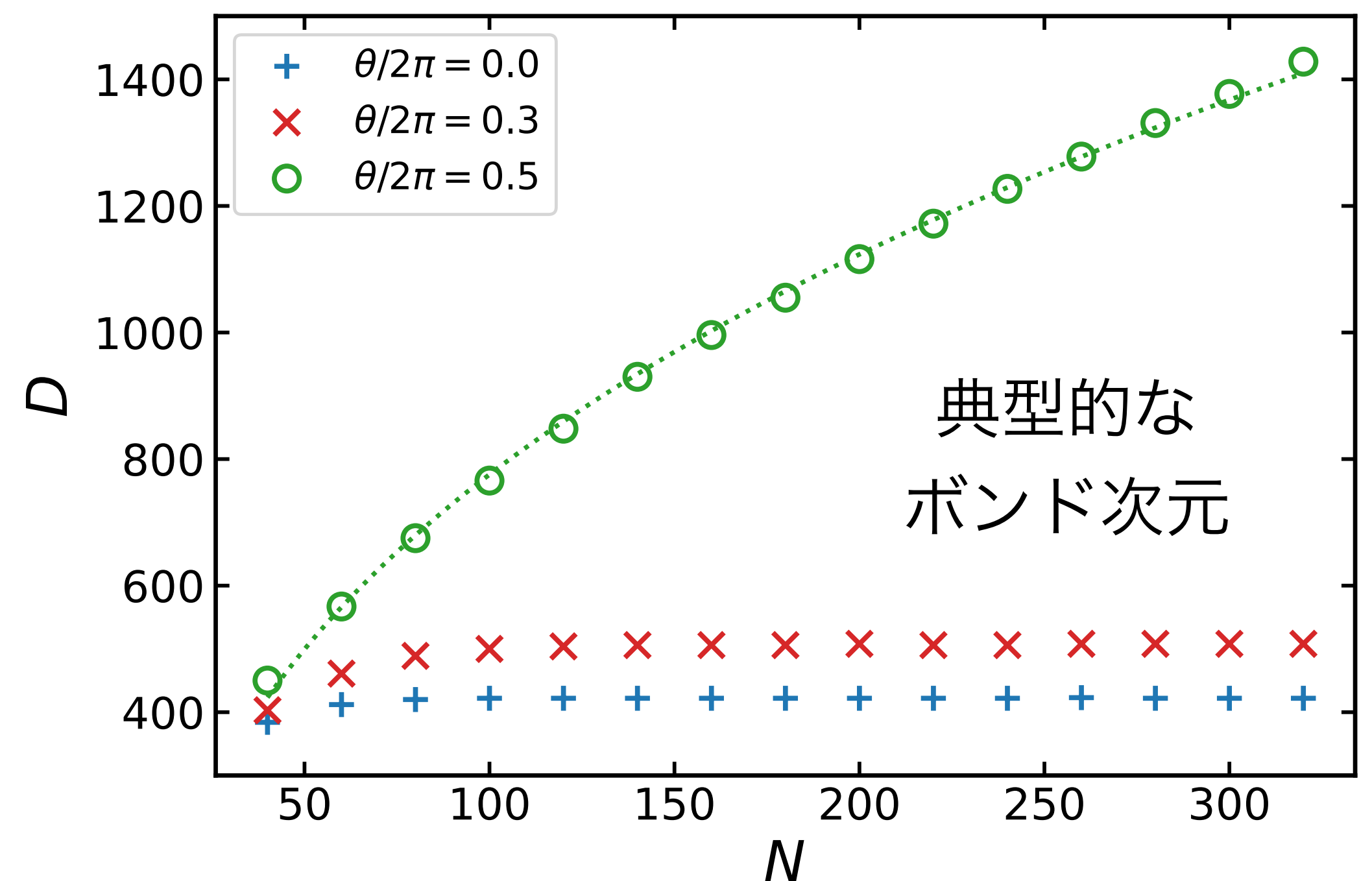
1+1d **gapped**： $S_{EE} \sim \text{const.}$

→ D は格子サイズ N に依存しない

1+1d **gapless**： $S_{EE} \sim \frac{c}{3} \log N$

→ 冪的に振る舞う $D \sim N^{c/3}$

- $c = 1$ としてfitting
(実際には有限 a によるずれがある)



$\theta = \pi$ におけるCFT的な振る舞い

- $\theta = \pi$ では mass gap が指数関数的に小さくなる $\sim e^{-\#g^2/m^2}$

[Coleman (1976)]

[Dempsey et al. (2024)]

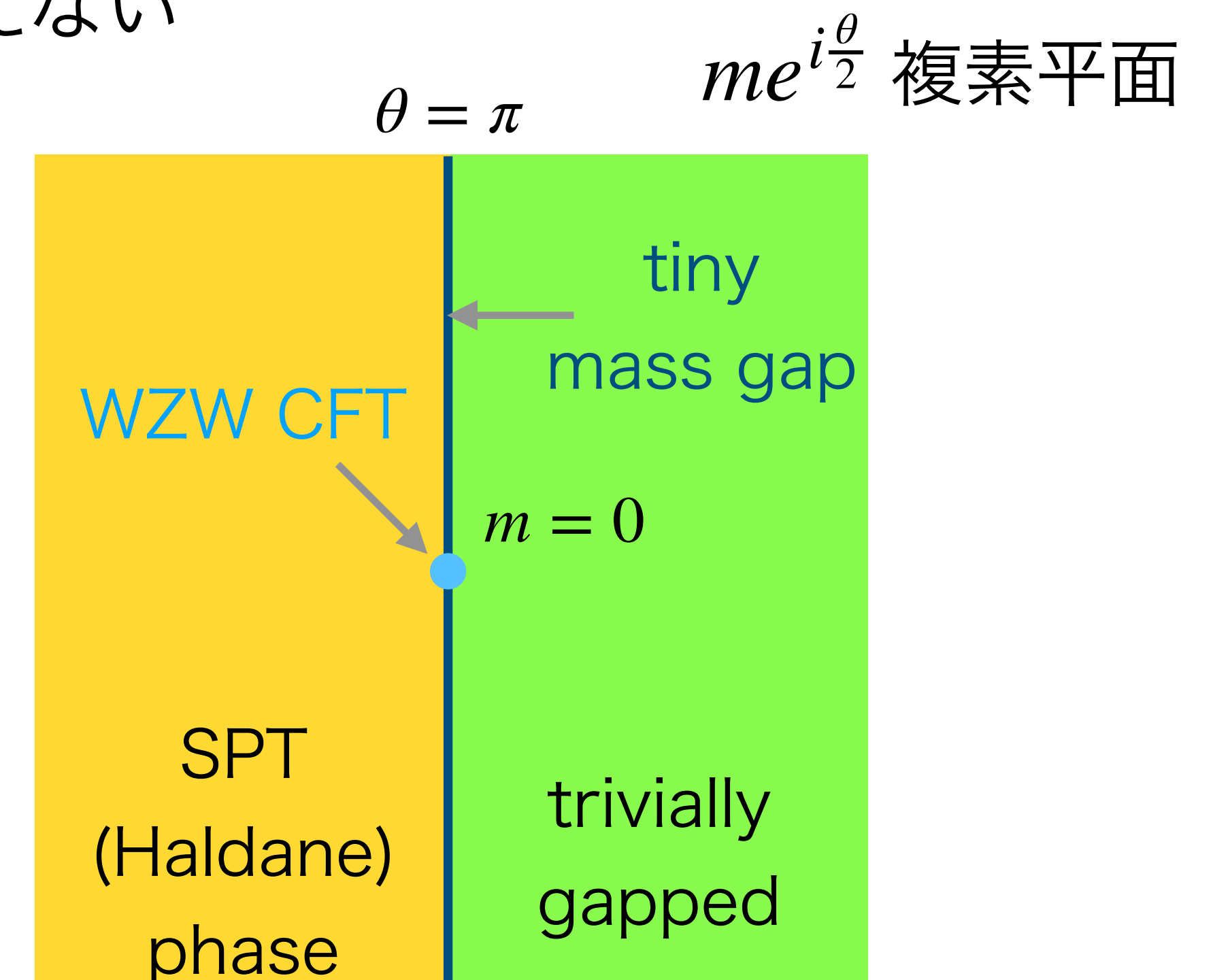
cf.) $SU(2)_1$ WZW model with marginally relevant $J_L J_R$ deformation

- 有限サイズ L では $O(1/L)$ 以下のエネルギースケールは見えない

$\rightarrow L < e^{\#g^2/m^2}/g$ ならば、ほぼCFT的になるはず

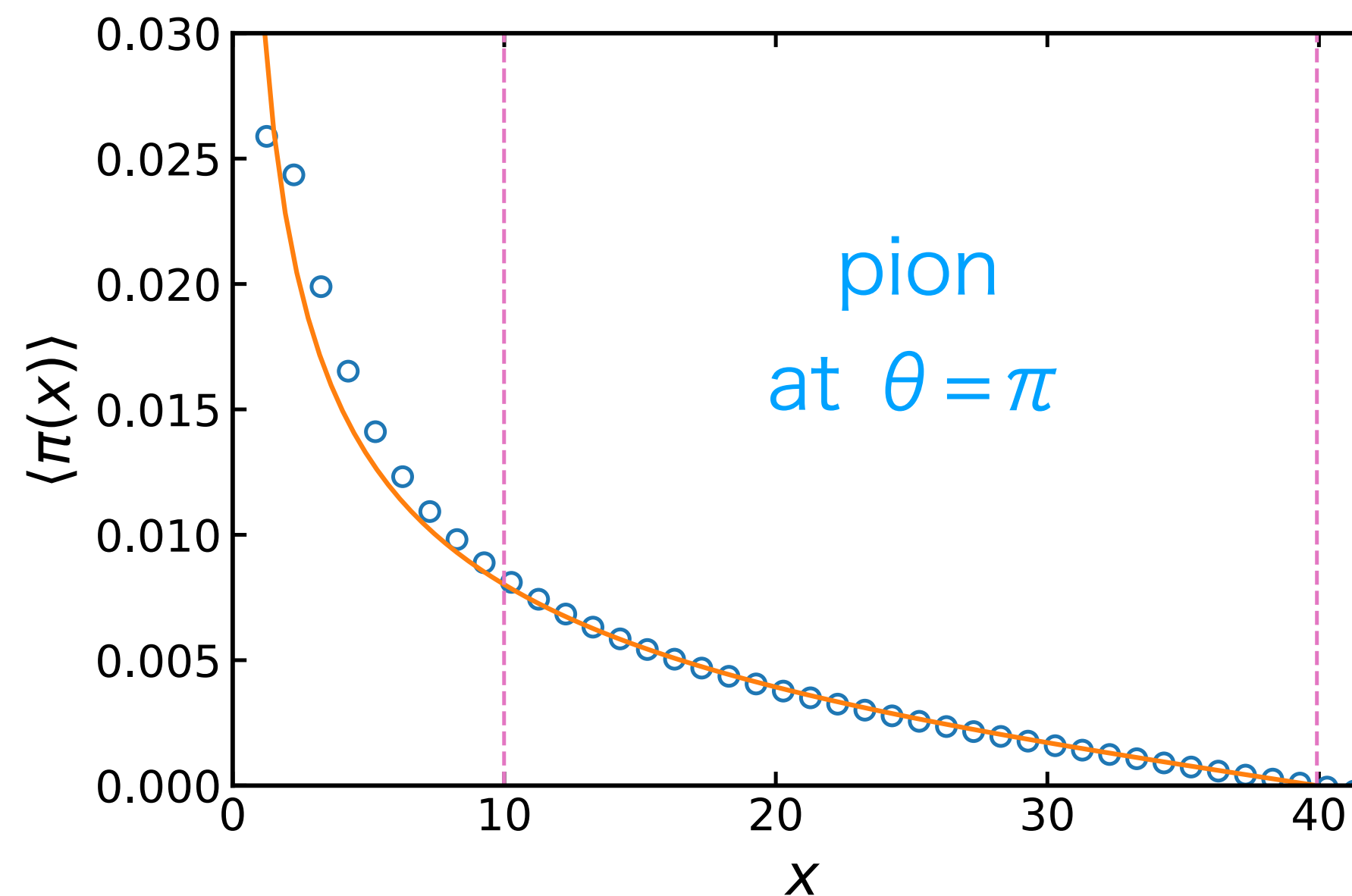
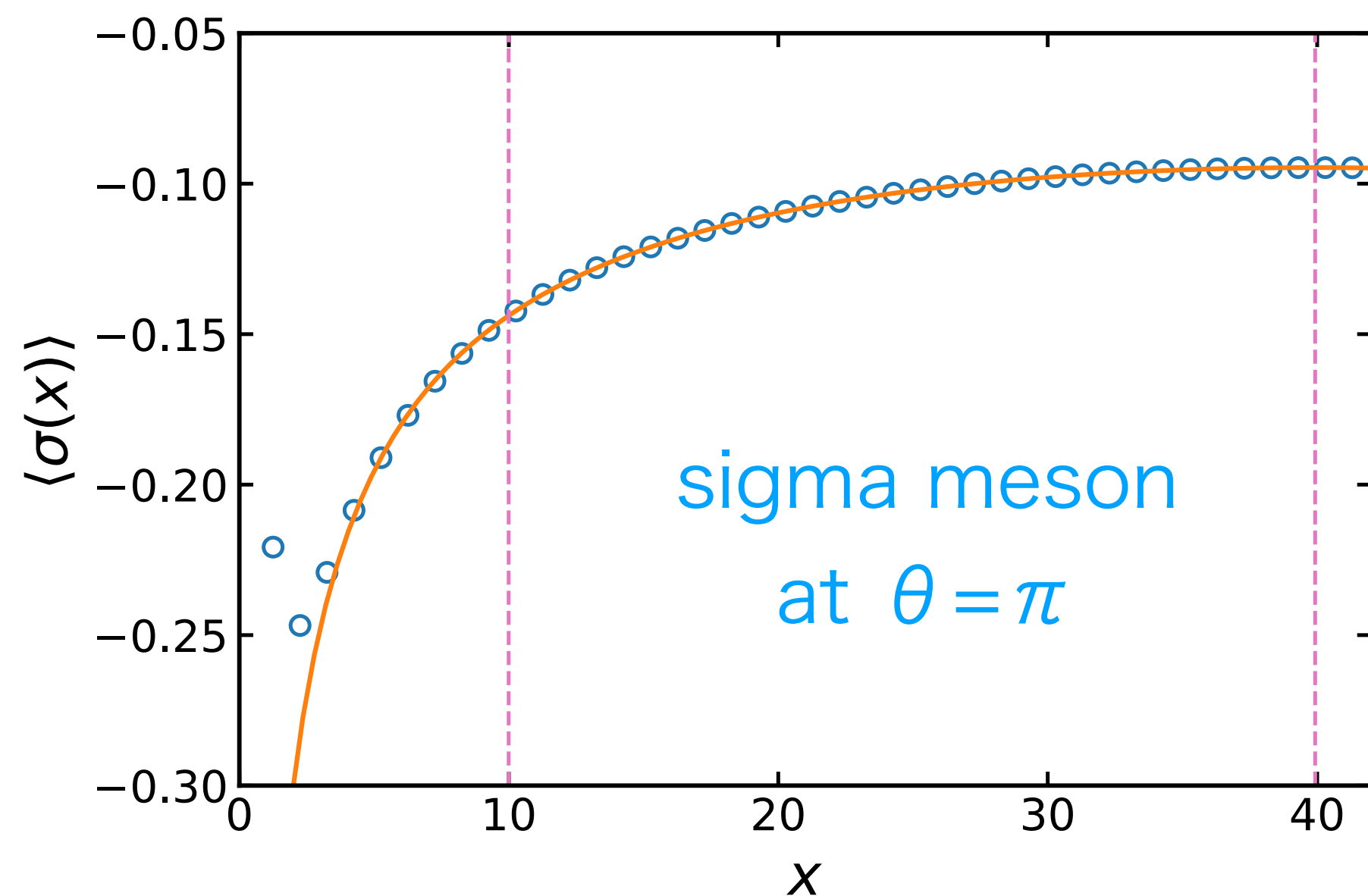
our setup : $L = 80, m = 0.1, g = 1$

- π と σ の1点関数について
数値計算とWZW模型の解析計算を比較



$\theta = \pi$ における π と σ の1点関数

- Dirichlet境界条件での σ の1点関数： $\langle \sigma(x) \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{\sin(\pi x/L)}}$ cf.) 鏡像法を用いて計算
appendix A of [\[2407.11391\]](#)
- isospin-breakingな境界条件での π の1点関数： $\langle \pi(x) \rangle \propto \frac{\sin[\Delta(1 - 2x/L)]}{\sqrt{\sin(\pi x/L)}}$



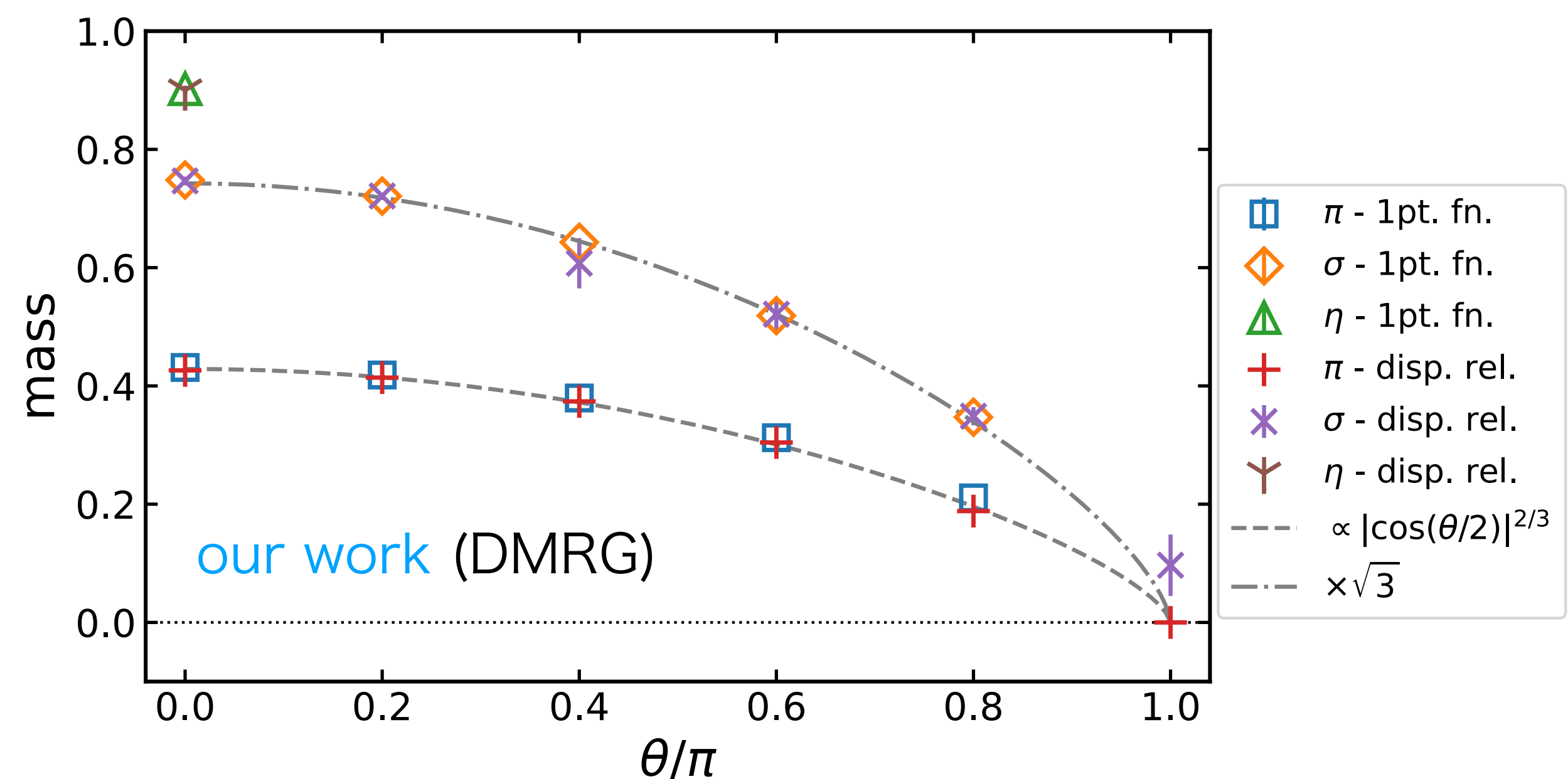
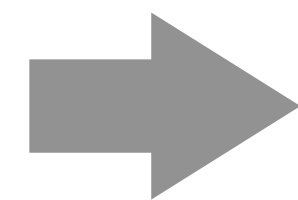
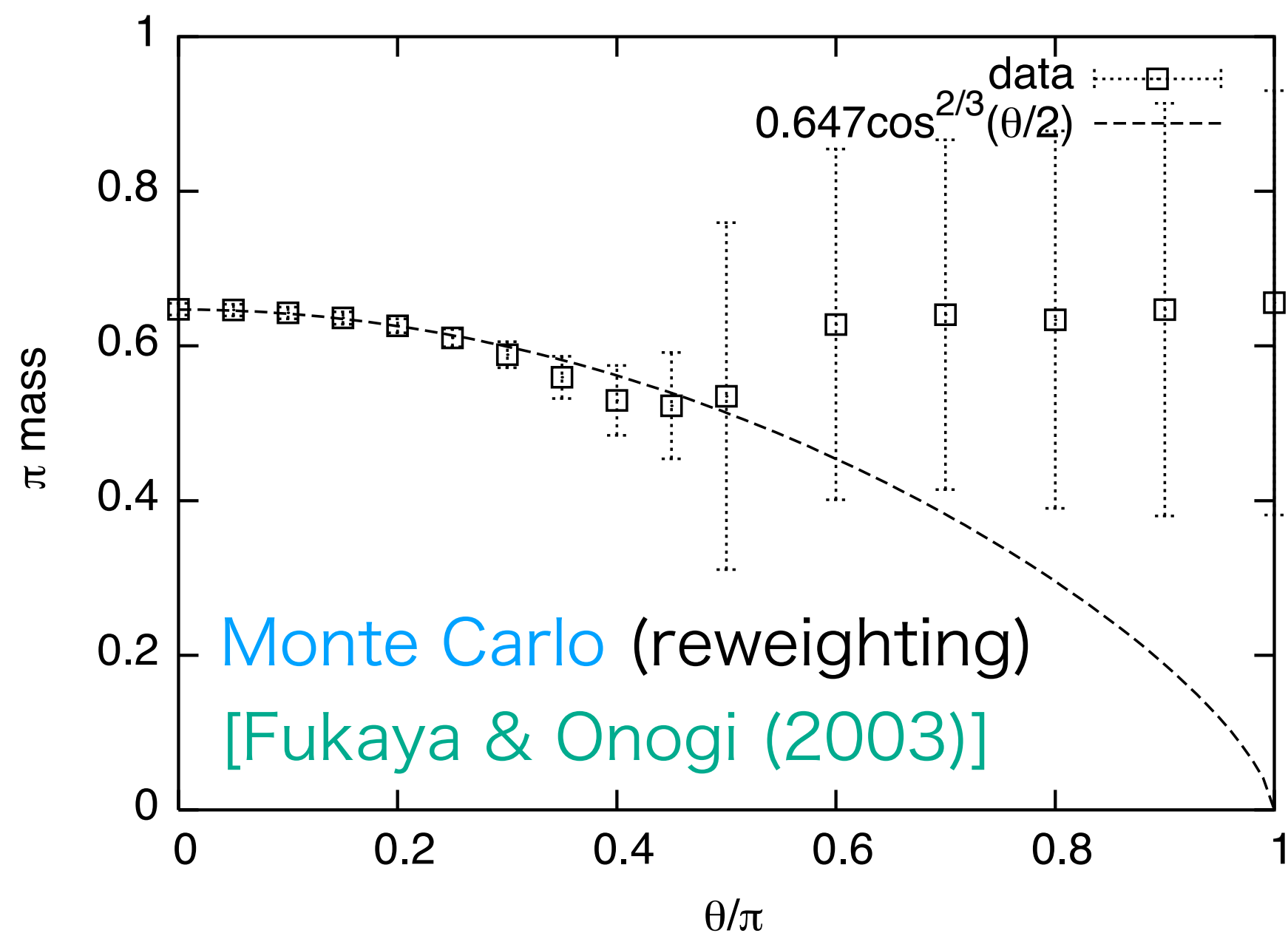
バルクでは
WZW模型の
計算と一致

まとめ

- 1点関数を用いた質量スペクトルの計算結果は、分散関係によるものと一致
- ボソン化による計算とも無矛盾 $M_\pi(\theta) \propto |\cos(\theta/2)|^{2/3}$ $M_\sigma(\theta)/M_\pi(\theta) = \sqrt{3}$

[Coleman (1976)] [Dashen et al. (1975)]

符号問題がなく、 θ が大きい領域まで計算可能



Future prospect

- 2+1次元への拡張(ゲージ場のダイナミクスが非自明になる)
- 化学ポテンシャルを導入した模型への応用
 - … 高密度領域におけるゲージ理論のスペクトル
- 励起状態の波動関数を用いた解析
 - … 散乱問題, エンタングルメントの性質, etc.

Thank you for listening.