

行列模型の共変微分解釈 における行列正則化

水野優輝（静岡大学）

共同研究者：土屋麻人， 服部圭一郎（静岡大学）
arXiv:2408.xxxxx(論文準備中)

2024/08/09 場の理論と弦理論2024 基礎物理学研究所

序論...研究の動機

- 超弦理論 ... 量子重力理論の候補の一つ。非摂動的な定式化が必要。
- **行列模型** ... 超弦理論の非摂動的定式化の候補の1つ。

$$S = -\frac{1}{g^2} \text{Tr} \left(\frac{1}{4} [A_\mu, A_\nu] [A^\mu, A^\nu] + \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu [A_\mu, \psi] \right) \quad [\text{Ishibashi, Kawai, Kitazawa, Tsuchiya (1996)}]$$

- **時空の創発** ... 行列模型では、時空は理論の定義には存在せず、行列の自由度からダイナミカルに創発する。
- 行列模型は重力を含むと考えられている。

曲がった時空は行列によってどのように記述されるのか？

- 行列の共変微分解釈 [Hanada, Kawai, Kimura (2006)]

$$A_{(a)} = i\nabla_{(a)}$$

➡ 行列模型の運動方程式としてアインシュタイン方程式が現れる.

ただし,

- A_a の ∇_a 展開からツリーレベルでは無数の無質量の高階スピン粒子が生じる.
- A_a が無限次元の演算子であり、量子補正を非摂動論的に計算できない.

共変微分を有限サイズの行列によって正則化したい.

序論...本講演の概要

- 行列正則化の方法の一つとして、Berezin-Toeplitz (BT) 量子化が知られている。その漸近的性質に着目し、共変微分の行列正則化を与える。
- 例として S^2 を考え、共変微分解釈の結果を再現することを見る。

- 序論
- 行列の共変微分解釈
- 共変微分の行列正則化
- まとめと展望

- 序論
- 行列の共変微分解釈
- 共変微分の行列正則化
- まとめと展望

行列の共変微分解釈

- 共変微分解釈 [Hanada, Kawai, Kimura (2006)]

平坦な時空 : $A_a = i\partial_a$



曲がった時空

$$\nabla_a = e_a^\mu (\partial_\mu + \frac{1}{2} \Omega_\mu^{bc} O_{bc}) \quad O_{bc} : Spin(d) (\text{局所 Lorentz 群}) \text{ の生成子}$$

- 大域的に定義されていない : $\nabla_a^{[i]} = R_a^b(t_{ij}(x)) \nabla_b^{[j]}, x \in U^{[i]} \cap U^{[j]}$
- 積を行列積とみなせない : $\nabla_1 \nabla_2 = \partial_1 \nabla_2 + \frac{1}{2} \underline{e_1^\mu \Omega_{\mu 2}^a \nabla_a}$
 ∇_1 と ∇_2 のみで決まらない

共変微分を行列として表せるような空間を用意する必要がある.

→ $Spin(d)$ の正則表現を導入

行列の共変微分解釈

- 共変微分解釈 [Hanada, Kawai, Kimura (2006)]

ファイバー束 E_{reg} w/ ファイバー: $Spin(d)$ の正則表現 V_{reg}

$$f(x, g) \in \Gamma(E_{reg})$$

$$\hat{h}f(x, g) = f(x, h^{-1}g), h \in Spin(d)$$

$$f(x, g) = \sum_{r: irr} c_{ij}^{<r>}(x) R_{ij}^{<r>}(g) \quad \Gamma(E_{reg}) = \bigoplus_r \underbrace{(\Gamma(E_r) \oplus \cdots \oplus \Gamma(E_r))}_{d_r}$$

E_{reg} に対して以下の同型が存在.

$$\begin{cases} C^\infty(E_{prin}) \simeq \Gamma(E_{reg}) \\ \Gamma(T \otimes E_{reg}) \simeq \Gamma(E_{reg}) \oplus \cdots \oplus \Gamma(E_{reg}) \end{cases}$$

$E_{prin} : Spin(d)$ 主束

行列の共変微分解釈

- 共変微分解釈 [Hanada, Kawai, Kimura (2006)]

$$\begin{aligned}\nabla_{(a)} &= R_{(a)}{}^b(g^{-1})\nabla_b \quad g \in Spin(d) \\ &= R_{(a)}{}^b(g^{-1})e_b^\mu(\partial_\mu + \frac{1}{2}\Omega_\mu{}^{cd}O_{cd})\end{aligned}$$

(O_{ab} : 正則表現 $f(x, g)$ に作用)

$R_a{}^b(g^{-1}) : Spin(d)$ のベクトル表現の行列
(a) は $Spin(d)$ によって変換されない

$$\nabla_{(a)} : \Gamma(E_{reg}) \rightarrow \overbrace{\Gamma(E_{reg}) \oplus \cdots \oplus \Gamma(E_{reg})}^d$$

(a) は右辺の正則表現のうちの
一つを指すラベル.



$$\bullet \nabla_{(a)}^{[i]} = \nabla_{(a)}^{[j]}, \quad x \in U^{[i]} \cap U^{[j]} \quad \bullet \nabla_{(1)} \text{ と } \nabla_{(2)} \text{ の積はこれらのみで決まる}$$

➡ $\nabla_{(a)}$ を行列とみなすことができる.

行列の共変微分解釈

例. S^2 w/ $Spin(2)$

$(z, \bar{z})$: 北極からの立体射影

$Spin(2) : R^{<s>}(\theta) = e^{2is\theta}$

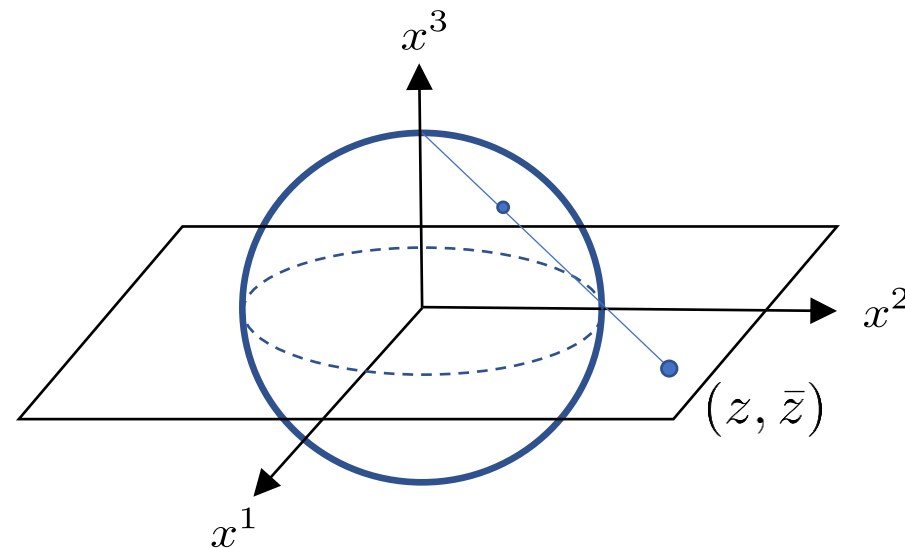
$Spin(2)$ の生成子 (正則表現) : $O_{+-} = \frac{1}{4i} \partial_\theta$

$$\begin{cases} \nabla_{(+)}^{[z, \theta]} = \frac{1}{2} e^{-2i\theta} ((1 + |z|^2) \partial_z + i\bar{z} \partial_\theta / 2) \\ \nabla_{(-)}^{[z, \theta]} = \frac{1}{2} e^{2i\theta} ((1 + |z|^2) \partial_{\bar{z}} - iz \partial_\theta / 2) \end{cases}$$



$$\nabla_{(a)}^{[z, \theta]} = \nabla_{(a)}^{[w, \theta']} \quad (w = \frac{1}{z}, \theta' = \theta + \arg(z) + \frac{\pi}{2} : \text{南極からの立体射影})$$

$$[\nabla_{(+)}, \nabla_{(-)}] = O_{+-}, [O_{+-}, \nabla_{(\pm)}] = \mp \frac{1}{2} \nabla_{(\pm)} \quad SU(2) \text{ リー代数}$$



- 序論
- 行列の共変微分解釈
- **共変微分の行列正則化**
- まとめと展望

共変微分の行列正則化 [Hattori, Mizuno, Tsuchiya]

- $Spin(2)$ のチャージ s 表現の Berezin-Toeplitz 量子化

M : 2次元コンパクトリーマン面

- $Spin(2) (\simeq U(1))$ チャージによるテンソルの分解

$$x^\pm = x^1 \pm ix^2 \longrightarrow Spin(2) \text{変換} : x'^\pm = e^{\pm i\theta} x^\pm \quad x^\pm \text{ はチャージ } \pm 1 \text{ を持つ}$$

テンソル $\longrightarrow Spin(2)$ チャージ $(s' - s)$ を持つ場 φ

- 仮想的なスピノル場 $\psi \in \Gamma(S \otimes L^{\otimes N} \otimes E), \psi' \in \Gamma(S \otimes L^{\otimes N} \otimes E')$

- S : スピノル束

- L : 複素直線束 w/ $U(1)$ 接続 A , $F = dA = \omega/V$ (ω : 体積形式, V : M の体積)

- E, E' : $Spin(2)$ のチャージ s, s' 表現のファイバー束

チャージ $(s' - s)$ を持つ場 φ を E から E' への準同型とみなす.

$$\psi \in \Gamma(S \otimes L^{\otimes N} \otimes E) \rightarrow \varphi\psi \in \Gamma(S \otimes L^{\otimes N} \otimes E')$$

- Dirac方程式

$$D^{(E)}\psi = ie_a^\mu \gamma^a (\partial_\mu + \Omega_\mu - iN A_\mu - is\Omega_\mu^1{}_2)\psi = 0$$

⇒ 指数定理からこの方程式の独立な解は $N + c^{(E)}$ 個 $c^{(E)}$: E の Chern 数

- Toeplitz 演算子

φ を $D^{(E')}$, $D^{(E)}$ のゼロモードの空間に射影:

$$T^{(2s', 2s)}(\varphi)_{m'n} := (\psi'_{m'}, \varphi \psi_n) = \int_M \omega(\psi'_{m'})^\dagger \varphi \psi_n$$

→ $(N + c^{(E')}) \times (N + c^{(E)})$ 行列

- Toeplitz演算子の漸近的性質 [Adachi, Ishiki, Kanno, Matsumoto (2021)]

Toeplitz演算子はラージ N で漸近的性質を満たす ($|s|, |s'| \ll N$) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| T^{(2s'', 2s')}(\varphi') T^{(2s', 2s)}(\varphi) - T^{(2s'', 2s)}(\varphi' \varphi) \right| = 0,$$
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \hbar_N^{-1} [T(f\mathbf{1}), T(\varphi)]^{(2s', 2s)} + iT^{(2s', 2s)}(\{f, \varphi\}) \right| = 0, \quad (\hbar_N = V/N)$$

$$[T(f\mathbf{1}), T(\varphi)]^{(2s', 2s)} := T^{(2s', 2s')}(f\mathbf{1}_{E'}) T^{(2s', 2s)}(\varphi) - T^{(2s', 2s)}(\varphi) T^{(2s, 2s)}(f\mathbf{1}_{E'}),$$

$$\{f, \varphi\} := \epsilon^{ab} (\partial_a f) (\nabla_b \varphi), \quad \text{Poisson括弧}$$

共変微分の行列正則化 [Hattori, Mizuno, Tsuchiya]

- 共変微分の行列正則化

2次元リーマン面 M

E, E' : チャージ s, s' の $Spin(2)$ の表現

$$T(\varphi) = \begin{pmatrix} \ddots & & \ddots & s' - s : \text{const} \\ & \ddots & & \\ & & T^{(2s', 2s)}(\varphi) & \\ \ddots & & T^{(2s, 2s)}(\varphi) & \ddots \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \ddots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} s' \\ \downarrow \\ V_{reg} \end{array} \otimes \begin{array}{c} s \\ \downarrow \\ V_{reg} \end{array} \cong V_{reg} \oplus \cdots \oplus V_{reg}$$

有限サイズの行列にするために s, s' の取り得る値に対してカットオフを入れる

- 共変微分の行列正則化

$\mathcal{D}_\pm : T(\varphi)$ にかかる線形演算子

$$\mathcal{D}_\pm T(\varphi) := \pm \hbar_N^{-1} i T(e_\pm^\mu \partial_\mu X^A) [T(X^A), T(\varphi)] \mp \frac{i}{2} \hbar_N^{-1} [T(\partial_\pm X^A), T(X^A)] T(\varphi)$$

$$\simeq T(\pm \partial_\pm X^A \partial_a X^A \epsilon^{ab} \nabla_b \varphi)$$

$$= T(\pm \delta_{\pm a} \epsilon^{ab} \nabla_b \varphi)$$

$$= T(i \nabla_\pm \varphi)$$

$$\simeq \mathcal{O}(1/N)$$

$(\mathcal{D}_\pm)^\dagger = \mathcal{D}_\mp$ を満たすための補正項

$X^A : M$ の $\mathbb{R}^n$ への埋め込み座標

$$(\mathcal{D}_\pm T)_{mn}^{(2s', 2s)}(\varphi) = \sum_{t,u} \sum_{k,l} \mathcal{D}_\pm_{\underline{mn}, \underline{kl}}^{[(\underline{2s'}, \underline{2s}), (\underline{t}, \underline{u})]} T_{kl}^{(t,u)}(\varphi)$$

➡ $\mathcal{D}_\pm$ を共変微分の行列正則化とみなせる。

- $\mathcal{D}_\pm$ と $\nabla_{(a)}$ の対応

- $\mathcal{D}_\pm$ は局所ローレンツ不変


$$\mathcal{D}_\pm T(\varphi) := \pm \hbar_N^{-1} i T(e_\pm^\mu \partial_\mu X^A) [T(X^A), T(\varphi)] \mp \frac{i}{2} \hbar_N^{-1} [T(\partial_\pm X^A), T(X^A)] T(\varphi)$$
$$T^{(s',s)}(\varphi)_{m'n} := \underline{(\psi'_{m'}, \varphi \psi_n)} \quad U(1) \text{ チャージの保存から不変}$$

- $\nabla_{(a)}$: (a) は局所ローレンツ変換で変換されない

$\mathcal{D}_\pm$ は $\nabla_{(a)}$ の行列正則化になっている.

- $\mathcal{D}_\pm$ の構造

$$\mathcal{D}_\pm T(\varphi) := \pm \hbar_N^{-1} i T(e_\pm^\mu \partial_\mu X^A) [T(X^A), T(\varphi)] \mp \frac{i}{2} \hbar_N^{-1} [T(\partial_\pm X^A), T(X^A)] T(\varphi)$$

$$T(\partial_+ X^A) = \begin{pmatrix} \ddots & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & T(\partial_+ X^A) & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$(2s-2, 2s)$

$$T(X^A) = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & T(X^A) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$(2s, 2s)$

$\mathcal{D}_\pm$ のゼロでないブロックは $[(2s' \mp 2, 2s), (2s', 2s)]$ ブロックのみ

共変微分の行列正則化... 単位球面

- 例. S^2

$X^A : \mathbb{R}^3$ への埋め込み座標, $(z, \bar{z})$: 立体射影

- L の $U(1)$ 接続 : Wu-Yang モノポール $A = -\frac{i}{2} \frac{\bar{z}dz - zd\bar{z}}{1 + |z|^2}$

- E, E' : チャージ s, s' の $Spin(2)$ の表現
スピン接続 $\Omega^1_2 = 2A$

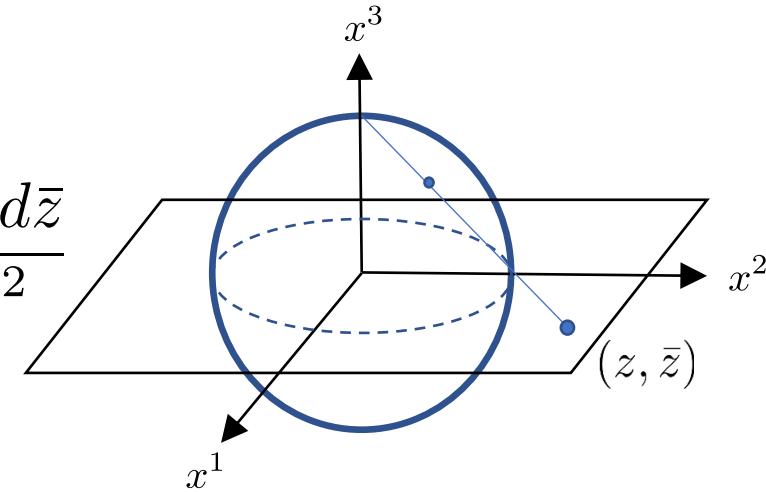
- Toeplitz演算子

$T^{(2s, 2s)}(X^A) : SU(2)$ の $(N + 2s)$ 次元表現の生成子

$$\longrightarrow [T(X^A), T(X^B)]^{(2s, 2s)} = -\frac{2}{N + 2s + 1} i\epsilon^{ABC} T^{(2s, 2s)}(X^C)$$

$T^{(2s-2, 2s)}(\partial_+ X^A) : (N + 2s - 2) \times (N + 2s)$ 長方形行列

$T^{(2s+2, 2s)}(\partial_- X^A) : (N + 2s + 2) \times (N + 2s)$ 長方形行列



共変微分の行列正則化... 単位球面

- $\mathcal{D}_\pm$ の交換関係

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3 T^{(2s', 2s)}(\varphi) &:= [\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-] T(\varphi) \\ &\simeq \hbar_N^{-2} T(\partial_+ X^A) T(\partial_- X^B) [[T(X^A), T(X^B)], T(\varphi)] \\ &\simeq -\frac{s' - s}{2} T^{(2s', 2s)}(\varphi)\end{aligned}$$

フーリエ変換 $\exp(i2s\theta)$

cf.

$$O_{+-} = \frac{1}{4i} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \begin{cases} [\nabla_{(+)}, \nabla_{(-)}] = O_{+-} \\ [O_{+-}, \nabla_{(\pm)}] = \mp \frac{1}{2} \nabla_{(\pm)} \end{cases}$$

$SU(2)$ の $(N + 2s)$ 次元表現

$$T(X^A) = \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & T^{(s,s)}(X^A) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Cf. [Ishii, Ishiki, Shimasaki, Tsuchiya (2008)]

$\mathcal{D}_3$ は Lorentz 生成子 O_{+-} に相当.
 $\mathcal{D}_\pm, \mathcal{D}_3$ は $N \rightarrow \infty$ で $SU(2)$ リー代数をなす.

まとめ

- 曲がった時空と行列模型の関係の解明に向けて、共変微分の有限サイズの行列による正則化をBerezin-Toeplitz量子化に基づき行った.
- S^2 に対して、共変微分解釈による結果を再現することが確かめられた.

今後の展望

- 高次元への拡張.
- 今回の結果に基づく（有効）作用や物理量の計算.
特にツリーレベルでの無質量高階スピン粒子に対する量子補正の計算.
- 数値シミュレーションの結果の解釈に今回の結果（高次元）を適用する.