

1. Short Summary

- 有限温度Large-N ゲージ理論で温度に関するスケーリング関係を発見. → Polyakov loop有効作用や物理量に強い制限.
- Large-N ゲージ理論で角速度を虚にすると, 相構造が非常に豊富になる.

2. 有限温度 large-Nゲージ理論のスケーリング則 注目する系: d次元 SU(N) gauge場 + adjoint matter. (d≥1, matterはなくても良い.)

★ ゲージ理論の基本的な objects → 経路Cのloop operator := $W(C)$ 有限温度では, 巻き付いたloop operatorも存在

$$\frac{1}{N} \text{Tr} \left[\text{P exp} \left(i \int_C A_\mu dx^\mu \right) \right], \quad \frac{1}{N} \text{Tr} \left[\text{P exp} \left(i \int_C A_\mu dx^\mu \right) \Phi(x_1) \right], \quad \frac{1}{N} \text{Tr} \left[\text{P exp} \left(i \int_C A_\mu dx^\mu \right) \Phi(x_1) \Phi(x_2) \right],$$

★ Loop 方程式 (Schwinger-Dyson 方程式):
loop operatorの相関を与える(大雑把には以下の形の式).

$$\langle \delta W(C_m) \rangle = \sum_k \langle W(C_{m-k}) W(C_k) \rangle$$

特徴

- 両辺で巻き付き数が保存.
- Loop方程式では温度依存性があらわにはでない(演算δは温度に寄らない).
- Loop方程式では温度は $W(C_n)$ ($\leftarrow S_\beta^1$ の周期性がなければゲージ不変でない) の存在を通してのみ出現.
- Large-N factorization: $\langle W(C_n) W(C_m) \rangle = \langle W(C_n) \rangle \langle W(C_m) \rangle + O(1/N^2)$

★ Loop 方程式のスケーリング関係 (bosonic case): 任意の自然数 m に対し次が成立. Azuma-T.M. 2024 fermionがあると, 多少修正した関係が成立

「逆温度 β のloop方程式で $\langle W(C_n) \rangle = 0$ としたもの ($n \notin m\mathbb{Z}$)」 = 「逆温度 $m\beta$ のloop方程式」

例: m=2の場合

逆温度 2β の場合の loop operatorのみ残る.
ここで $C_{2n}(\beta) \rightarrow C_n(2\beta)$
→ loop 方程式 @ β
with $\begin{cases} \langle W(C_{2n+1}) \rangle = 0 \\ \langle W(C_{2n}) \rangle \rightarrow \langle W(C_n) \rangle \end{cases}$
= loop 方程式 @ 2β

★ Polyakov loop有効ポテンシャルへの応用

$$u_n = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(\text{P exp} \int_0^{\beta} A_\tau d\tau \right) : \text{Polyakov loop operator}$$
$$V(\beta, \{u_n\}) : \text{Polyakov loop 有効ポテンシャル (有限温度系の低エネルギー有効理論)}$$
$$V(\beta, \{u_n\}) := \epsilon(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\beta) u_n u_{-n} + \sum_{k,l} b_{k,l}(\beta) (u_k u_l u_{-k-l} + c.c.) + \dots$$

スケーリング則: $V(\beta, \{u_n\})|_{u_n=0 (n \notin m\mathbb{Z}), u_{mn} \rightarrow u_n} = V(m\beta, \{u_n\})$

$$V(\beta, \{u_n\}) := \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n\beta) u_n u_{-n} + \sum_n b_{1,1}(n\beta) (u_n u_{-2n} + c.c.) + \dots$$

各次数の u_n の係数: 無限個の関数 → 各々1個の関数

★ 有効ポテンシャル → 物理量
Polyakov有効作用から物理量の予言ができる.

例) 閉じ込め相での u_n :
 $\langle |u_1(T)| \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \langle |u_n(nT)| \rangle$
→ 模型によらず成立することを予言.

スケーリング則に従い
 $\langle |u_n(nT)| \rangle / \sqrt{n}$ の値がそろっている.

→ スケーリング則が正しく機能している.

◆ Monte-Carlo (Bosonic BFSS模型)

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \sum_{I=1}^D \frac{1}{2} (D_I X^I)^2 - \sum_{I,J=1}^D \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\}$$

D=3, N=30

3. 虚の角速度の相図 Azuma-T.M. 2024 cf. Chen-Fukushima-Shimada (PRL 2022)

- Large-N ゲージ理論に「虚の角速度」を導入すると, 豊富な相構造が出現.
- 相転移温度などの物理量がScaling関係で決まる.

例1: SU(N) pure YM on $S_\beta^1 \times S^3$ (free limit) cf. Aharony et al (2004) Murata-Nishioka-Tanahashi-Yumisaki (PTP 2008)

$$S = \frac{1}{g^2} \int_0^\beta dt \int_{S^3} d^3x \text{Tr} (F_{\mu\nu}^2)$$

free極限がとれ, 解析的に解ける.

$$Z = \text{Tr} \left[\exp(-\beta(\hat{H} - \Omega \hat{J})) \right]$$
$$Z = \text{Tr} \left[\exp(-\beta(\hat{H} - i\Omega_I \hat{J})) \right]$$

「 S^3 の半径=1」とした

周期性: $\beta\Omega_I = \beta\Omega_I + 2\pi$

A0の固有値分布:

閉じ込め相: (一様分布) $u_n = 0$

非閉じ込め相: (Z1相) $u_n \neq 0$

Z2相: $u_{2n} \neq 0, u_{2n+1} = 0$

Z3相: $u_{3n} \neq 0$ その他=0

通常gauge理論では出現しない相が出現

例2: N=4 SYM on $S_\beta^1 \times S^3$ (free limit) • Bosonic BFSS • pure YM on $S_\beta^1 \times R^3$ at high T でも同様に Z_m 相が出現.

Scaling関係からの予言:
異なる相の物理量の間に
相似関係が成立.

例) $u_m(mT, \beta\Omega_I = 2\pi k/m) = u_1(T, 0)$

↑ Zm相 ↑ Z1相

→ Scaling関係が物理量を支配

Bosonic BFSSのMCの結果

4. Future Directions

- Holography
- SU(3) pure YMへの応用
- Latticeとの比較
- SYMへの応用
- 様々な系への応用