

Exact non-Abelian supertubes

Ryo NEMOTO¹, Masaki SHIGEMORI^{1,2}

Nagoya University (E-lab)¹, Center for Gravitational Physics (CGP) YITP, Kyoto University²

ブラックホール(BH)と弦理論

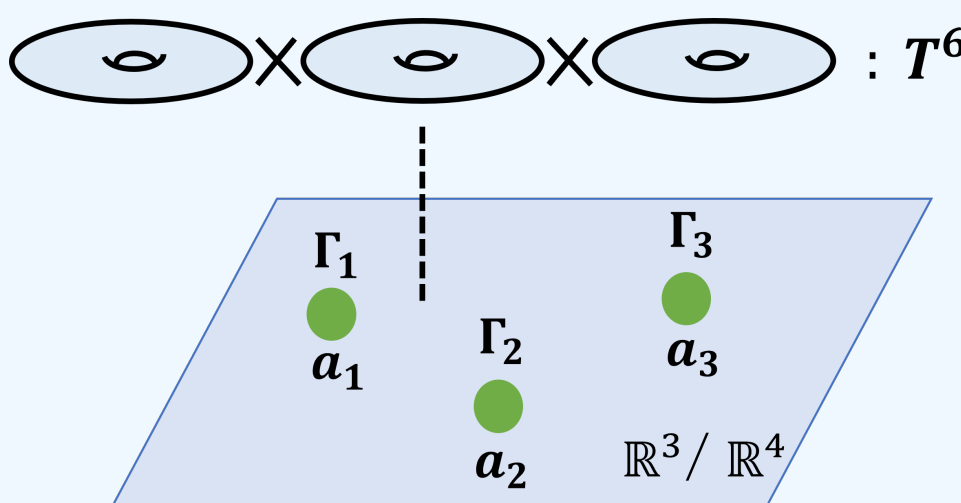
- ▶ Fuzzball...BHを「特異点も事象の地平面もない天体」と解釈。[Mathur (2000 ~)]
- ▶ Microstate geometry program...SUGRAでBH microstatesの再現を目指す。
しかし、 S_{BH} を再現する典型的なmicrostatesはまだ見つかっていない。
→本研究の目標：既知の解から出発し、典型的なmicrostatesを見つける。

Multicenter解：本研究の出発点

- ▶ 5D/4DのSUGRA解
M/IIA compactified on CY(本研究では $T^6 = T_{(45)}^2 \times T_{(67)}^2 \times T_{(89)}^2$)
- ▶ $\mathbb{R}^3$ 上のHarmonic functionで特徴づけされる。

$$\mathcal{H} = h + \sum_p \frac{\Gamma_p}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}_p|}$$

- ▶ S_{BH} を再現するほどEntropyは十分でない。[de Boer, El-Showk, Messamah, Van de Bleeken (2009)]

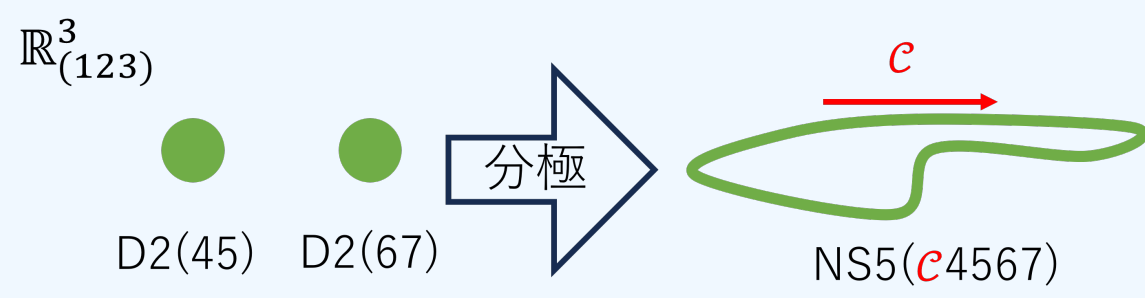


SWIP解 (2つの T^2 を固定: $\tau_1 = \tau_2 = i$) を仮定。 ($\tau = F/G$)

$$ds_{\text{IIA},10\text{D}}^2 = -\frac{1}{|G|^2 \text{Im}(\tau)} (dt + \omega)^2 + |G|^2 \text{Im}(\tau) dx_{123}^2 + dx_{45}^2 + dx_{67}^2 + \text{Im}(\tau) dx_{89}^2$$
$$B_2 = \text{Re}(\tau) dx^8 \wedge dx^9, \quad e^{2\Phi} = \text{Im}(\tau)$$

Supertube transition

2つのブレーンからより次元の大きなブレーンが生じる現象。
ex) $D2 + D2 \rightarrow \text{NS5}$



特に、非自明な Monodromy (**non-Abelian monodromy**) を持つブレーン
→ “**non-Abelian supertubes**” (NAS)

$$\mathcal{H} \rightarrow U\mathcal{H}, \quad [U_1, U_2] \neq 0 \quad (U: \text{Monodromy 行列})$$

期待：NASはnon-Abelian anyonsと同一視できる？ [de Boer-Shigemori (2012)]
(Anyons：2+1次元の量子力学系。粒子の入れ替え→非自明な位相。)

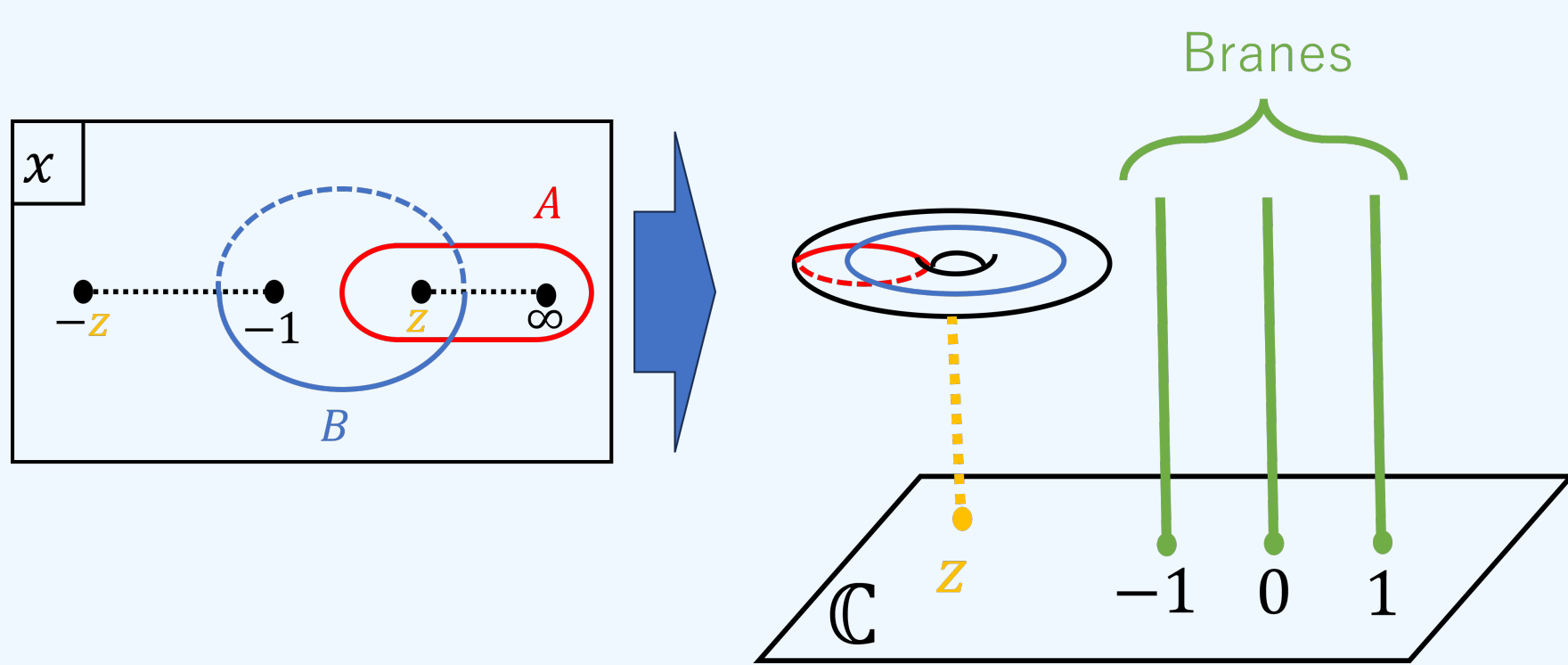
$$|\psi_1 \psi_2 \dots\rangle \rightarrow U |\psi_2 \psi_1 \dots\rangle, \quad [U_1, U_2] \neq 0$$

応用的な期待：量子計算への応用？ Entropy増加？

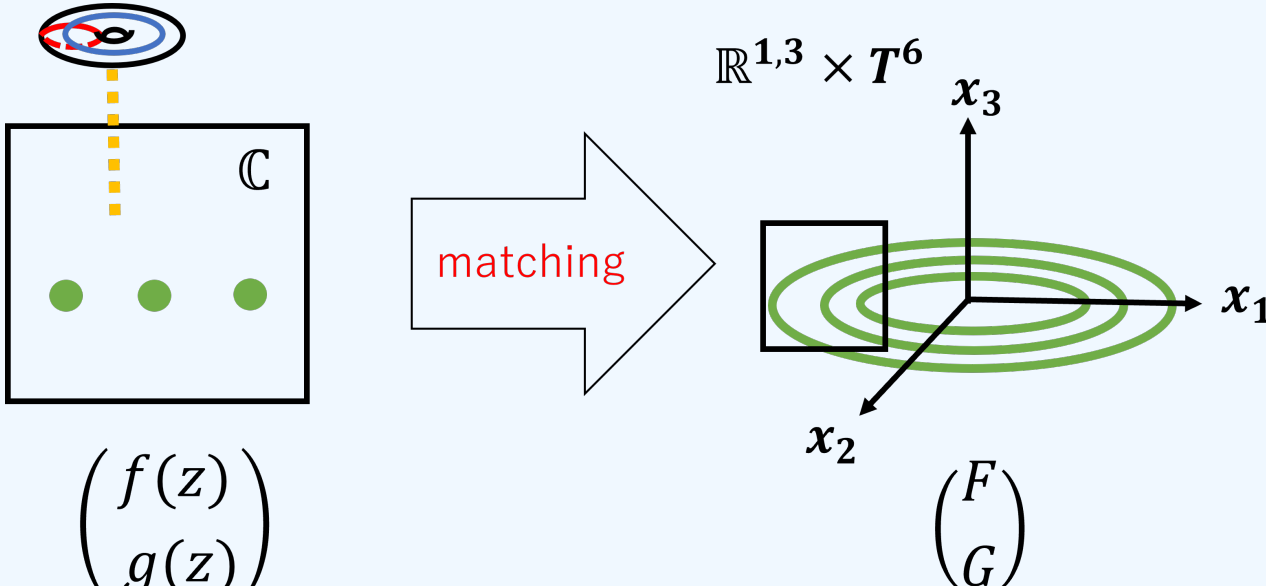
解の作り方

1. 楕円曲線 $y^2 = x^3 + p(z)x + q(z)$ を与え、2次元解 $(f(z), g(z))$ を構築。
ex) $y^2 = (x^2 - z^2)(x + 1)$

$$f(z), g(z) = \oint_{A,B} \frac{dx}{y} = \oint_{A,B} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + p(z)x + q(z)}}$$



2. Matching techniqueを使い、直線をリングに読み替える。
+ $(f(z), g(z))$ を3次元解 (F, G) へ拡張。



3. (F, G) からSUGRA解を得る。

Matching technique [J.J.Fernandez-Melgarejo et al.(2017)]

(ここでは一般的な2次元解を $h(z)$, 3次元解を $H(u, \sigma)$ と書く。)

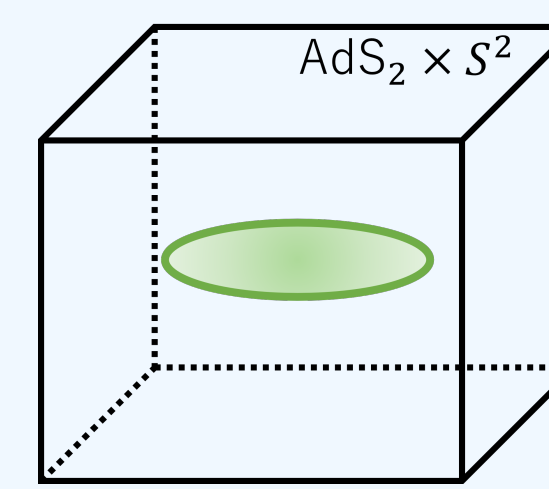
$$h(z) = \sum_k (\mathbf{a}_k / \hat{z}^{k+1/2}) \quad (\hat{z} = z/L)$$
$$H(u, \sigma) = \sqrt{\frac{u - \cos \sigma}{Z}} \sum_k \frac{2^k (k!)^2 \mathbf{a}_k}{(2k)! Z^k} P_k(u)$$

($P_k(u)$: 第1種 Legendre 関数)

$$Z = (R/L) e^{i(\sigma-l)} = u(z/L) = u\hat{z}$$

具体例1：“Constant- τ ”

$$g(z) = z^{-N/12}, \quad f(z) = \tau_0 z^{-N/12} \quad (N \in 2\mathbb{N} \text{ or } 3\mathbb{N} \text{ or } 6\mathbb{N})$$

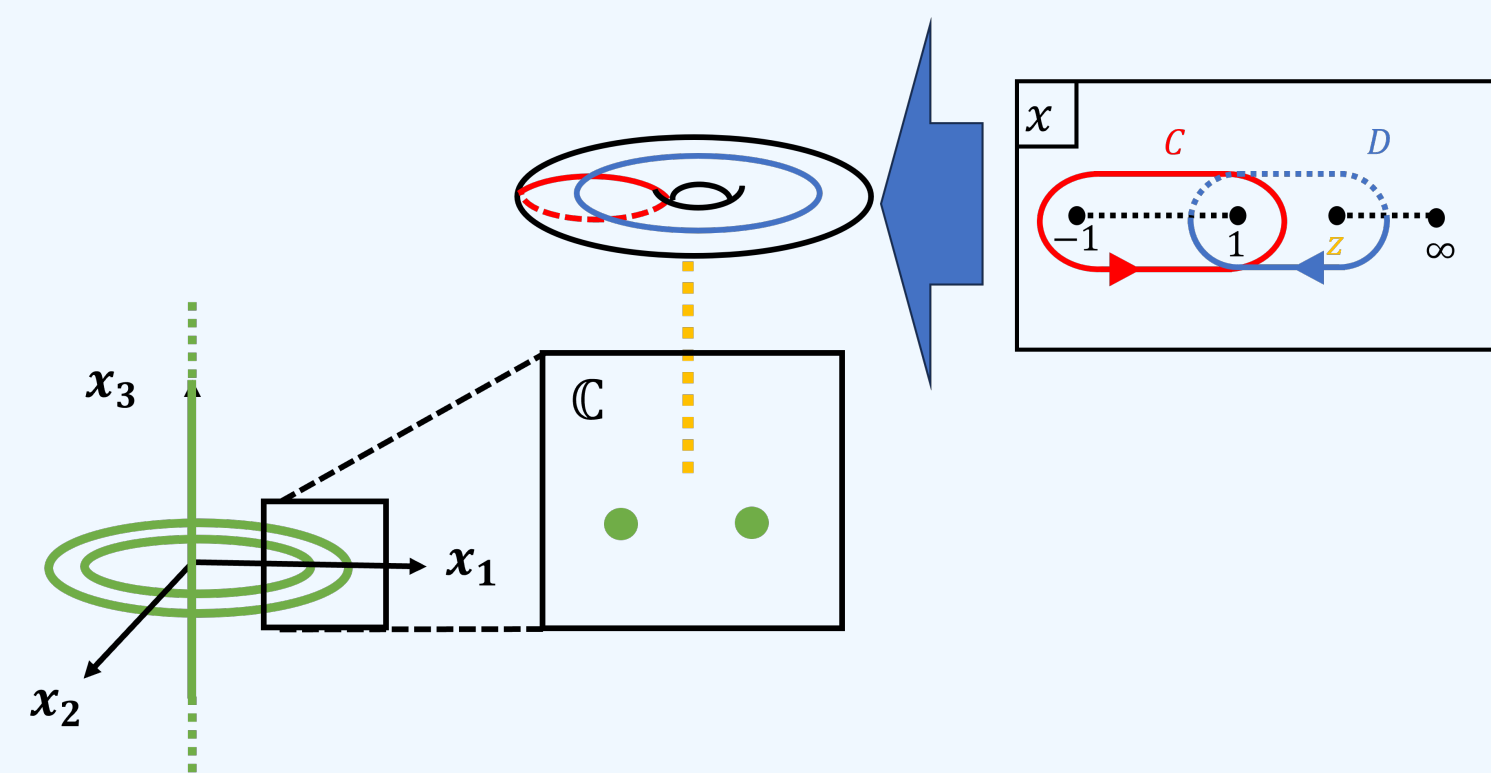


$$G = \frac{c}{R} \sqrt{u - \cos \sigma} e^{-i \frac{N}{12} \sigma} P_{\frac{N-6}{12}}(u), \quad F = \tau_0 G. \quad (c: \text{const.})$$

- ▶ 漸近的に $\text{AdS}_2 \times S^2$ の時空構造。
- ▶ CTCがないためには $N \leq 6$ 。(数値計算)
- ▶ Total chargeを矛盾なく計算できる。($Q_G = c, Q_F = \tau_0 c$)
(Branch cutからの寄与もある：Cheshire charge)

具体例2：“Infinite Seiberg-Witten”

$$y^2 = (x^2 - 1)(x - z) : \text{Seiberg-Witten型の楕円曲線}$$



$$G = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{(u - \cos \sigma)Z}{4Z^2 - 1 + 4Z\sqrt{u^2 - 1}}} K \left(\frac{8Z^2\sqrt{u^2 - 1}}{4Z^2 - 1 + 4Z\sqrt{u^2 - 1}} \right)$$
$$F = \frac{i2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{(u - \cos \sigma)Z}{4Z^2 - 1 + 4Z\sqrt{u^2 - 1}}} K \left(\frac{4Z^2 - 1 - 4Z\sqrt{u^2 - 1}}{4Z^2 - 1 + 4Z\sqrt{u^2 - 1}} \right)$$

K : 第1種完全楕円積分

- ▶ 2つのリングと1つの無限に長い直線で構成。
- ▶ CTCは存在しない。
- ▶ x_3 軸上で F が $\log$ 発散 → x_3 軸上の charge 分布を示唆。
物理的意味：解の安定性に寄与？
- ▶ Q_G は有限： $\left(\sqrt{\frac{LR}{1 - (L^2/4R^2)}} \right)$
 Q_F は x_3 軸上に charge 分布があるため、well-defined でなくなる。
→ BHの微視的状态とはみなせない。

今後の展望と議論：以上の解をよりよく理解するためには？

- Matching techniqueにおける不定性。
- ▶ 拡張公式： z^{-k} を P_k に置き換えている。
しかし代わりに Q_k (第2種 Legendre 関数) を加えても良い。
- ▶ 反正則項 $(h(\bar{z}))$ の導入。
 - SWIP解の仮定を外す。(他の T^2 も動かす: τ_1, τ_2 .)
 - Codim-3 と Codim-2 のハイブリット解 [Park-Shigemori (2015)]

参考文献

- R. Nemoto and M. Shigemori, "Exact non-Abelian supertubes", JHEP **03** (2024) 052, *arXiv:2312.16384*