

Generalized second law in effective field theory of hydrodynamics

西井 莞治 (神戸大 D3)

arXiv: 24xx.xxxxx に基づく

共著者: Pak Hang Chris Lau (大阪大),
野海 俊文(東京大)

場の理論と弦理論 2024

この発表で述べること

1, **Schwinger-Keldysh形式**(in-in形式)の流体の有効場理論[Crossley-Glorioso-Liu '15]を、ダイナミカルな重力が結合した理論に拡張する

→散逸を含んだ重力理論の構築

2, ブラックホールに流体が流入した場合の**見かけの地平面の面積**変化や**流体のエントロピー**の変化の和(一般化されたエントロピー)を計算し、ブラックホールの一般化された熱力学第二法則が成り立つための条件を調べる

→ ブラックホールと流体の間の温度勾配や流体の変形が寄与

$$\delta S_{\text{mat}} + \frac{\delta A_{\text{app}}}{4G} \geq ?$$

δS_{mat} : 物質のエントロピーの変化

δA : 面積の変化

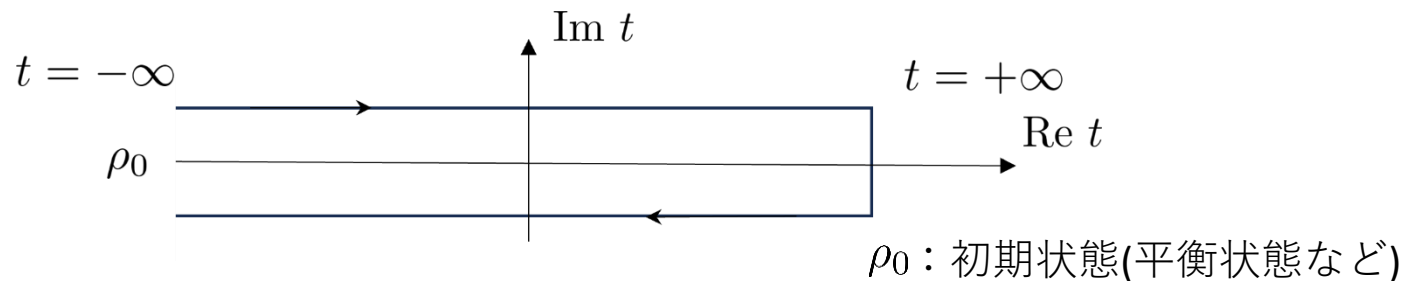
G : ニュートン定数

流体の有効場理論 (review)

[Crossley-Glorioso-Liu '15]

Schwinger-Keldysh形式と有効場理論

- 閉じた時間経路を用いる



$$\begin{aligned}
 Z[g_{1\mu\nu}, g_{2\mu\nu}] &= \text{Tr} [U(+\infty, -\infty; g_{1\mu\nu}) \rho_0 U^\dagger(+\infty, -\infty; g_{2\mu\nu})] \\
 &= \int_{\rho_0} \mathcal{D}\psi_1 \mathcal{D}\psi_2 \exp(iS[\psi_1; g_1] - iS[\psi_2; g_2]) & \psi_{1,2}: \text{macro and micro variables} \\
 &= \int \mathcal{D}X_1 \mathcal{D}X_2 e^{iS_{\text{eff}}[X_1(\sigma), X_2(\sigma); g_1, g_2]} & X_{1,2}^\mu: \text{macro variables}
 \end{aligned}$$

※1と2は環境を通じて混ざる

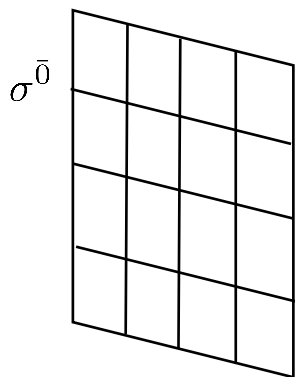
→有効場理論が流体を記述するときの作用の対称性は？

そのときの $X_{1,2}^\mu$ の物理的意味は？

流体の有効場理論

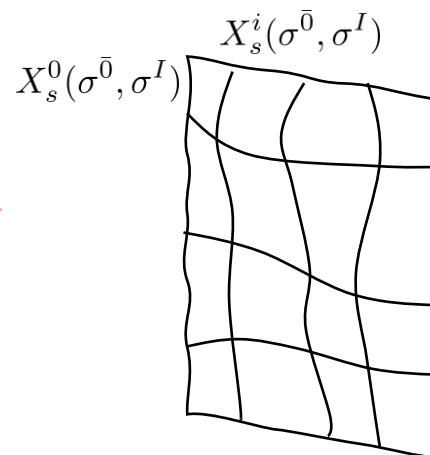
- σ^A ($A = \bar{0}, \dots, \bar{3}$) は流体要素をラベルする座標、 X_s^μ ($\mu = 0, \dots, 3$) は流体要素の位置を記述する場

fluid spacetime $h_{sAB}(\sigma)$ $s = 1, 2$
 σ^I



$$h_{sAB}(\sigma) = \frac{\partial X_s^\mu}{\partial \sigma^A} g_{s\mu\nu}(X_s) \frac{\partial X_s^\nu}{\partial \sigma^B}$$

physical spacetime $g_{s\mu\nu}(X_s)$



空間座標の貼り換え： $\sigma^{\bar{0}} \rightarrow \sigma^{\bar{0}}, \quad \sigma^I \rightarrow \sigma'^I(\sigma^I)$
 世界線の固有時の再定義： $\sigma^{\bar{0}} \rightarrow f(\sigma^{\bar{0}}, \sigma^I), \quad \sigma^I \rightarrow \sigma^I$

→ fluid diffeo

一般座標変換(diffeo)： $X_s^\mu \rightarrow f_s^\mu(X_s)$

- 有効場理論にはfluid diffeoと通常のdiffeoの不変性を課す

準古典極限と一般座標変換

- ノイズを見るのに便利な基底を導入する

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{1\mu\nu} + g_{2\mu\nu}), \quad \hbar g_{a\mu\nu} = (g_{1\mu\nu} - g_{2\mu\nu})$$
$$X^\mu = \frac{1}{2}(X_1^\mu + X_2^\mu), \quad \hbar X_a^\mu = (X_1^\mu - X_2^\mu)$$

- 準古典極限($\hbar \rightarrow 0$)で一般座標変換($X_{1,2}^\mu \rightarrow f_{1,2}^\mu(X_{1,2}^\mu)$)が以下のように分離する:

(i) Physical space diffeomorphisms

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu(X) = f^\mu(X) + \mathcal{O}(\hbar)$$

(ii) Noise diffeomorphisms

$$X_a^\mu(\sigma) \rightarrow X_a'^\mu(\sigma) = X_a^\mu(\sigma) + f_a^\mu(X(\sigma)) + \mathcal{O}(\hbar)$$
$$g_{a\mu\nu} \rightarrow g_{a\mu\nu}' = g_{a\mu\nu} - \mathcal{L}_{f_a^\mu} g_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\hbar)$$

- よって fluid diffeo、physical diffeo、noise diffeo を理論の不変性として課す

Dynamical KMS対称性とユニタリ性

- fluid diffeo、physical diffeo、noise diffeo

- ユニタリ性 $\ast \ Z[g_{1\mu\nu}, g_{2\mu\nu}] = \int_{\rho_0} \mathcal{D}\psi_1 \mathcal{D}\psi_2 \exp(iS[\psi_1; g_1] - iS[\psi_2; g_2]) = \int \mathcal{D}X_1 \mathcal{D}X_2 e^{iS_{\text{eff}}[X_1, X_2; g_1, g_2]}$

$$S_{\text{eff}}[X_1, X_2 = X_1; g_1, g_2 = g_1] = S_{\text{eff}}[X, X_a = 0; g, g_a = 0] = 0,$$

$$S_{\text{eff}}^*[X_1, X_2; g_1, g_2] = -S_{\text{eff}}[X_2, X_1; g_2, g_1],$$

$$\text{Im } S_{\text{eff}} \geq 0 \Leftrightarrow |e^{iS_{\text{eff}}}| \leq 1, \quad \text{for any } X_{1,2}, g_{1,2}$$

- Dynamical KMS変換(Z_2 変換)のもとの不変性

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(X) = \Theta g_{\mu\nu}(X), \quad \tilde{g}_{a\mu\nu}(X) = \Theta g_{a\mu\nu}(X) + i\Theta \mathcal{L}_{\beta_0} g_{\mu\nu}(X)$$

$$\tilde{X}^\mu(\sigma) = \Theta X^\mu(\sigma), \quad \tilde{X}_a^\mu(\sigma) = \Theta X_a^\mu(\sigma) - i\Theta \beta^\mu(\sigma) + i\beta_0^\mu$$

Θ : T/PT/CPT transformation

$$\beta^\mu \equiv \beta u^\mu, \quad \beta_0^\mu \equiv \beta_0 \delta_0^\mu$$

流体の作用(完全流体)

- 最も簡単な例(完全流体):

$$S_{\text{eff}(0)} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{(0)}^{\mu\nu} G_{\alpha\mu\nu}$$

$$G_{\alpha\mu\nu}(X) \equiv g_{\alpha\mu\nu} + \mathcal{L}_{X_a^\mu} g_{\mu\nu} \quad T_0^{\mu\nu} = \rho_0(\beta) u^\mu u^\nu + p_0(\beta) \Delta^{\mu\nu}$$

$$u^\mu(\sigma) = \frac{1}{b} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^0}, \quad b = \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^0} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^0}}, \quad u^2 = -1 \quad \Delta^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}$$

- X_a^μ で変分すると、流体の運動方程式(ストレストンソルの保存)が再現される(σ, X_a^μ がダイナミカルな変数)

$$\nabla_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0$$

→作用のdynamical KMS不変性は満たされてる?

Dynamical KMS対称性と熱力学

- Dynamical KMS不変性の要求から熱力学恒等式が導かれる

$$\tilde{G}_{a\mu\nu}(X) = \Theta G_{a\mu\nu}(X) + i\Theta \mathcal{L}_\beta g_{\mu\nu}(X) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{S}_{\text{eff}(0)} = S_{\text{eff}(0)} + \int d^4x T_{\mu\nu}^{(0)} \nabla^\mu \beta^\nu$$

$$\Longrightarrow \quad T_{\mu\nu}^{(0)} \nabla^\mu \beta^\nu = \nabla^\mu (p_0 \beta_\mu) + \left(\rho_0 + p_0 + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} p_0 \right)$$

ここがゼロ $\Leftrightarrow$ 熱力学恒等式

- Dynamical KMS対称性に付随するNoetherカレント(のようなもの)としてエントロピーカレントが定義される:

$$s_{(0)}^\mu = p_0 \beta^\mu - T_{(0)}^{\mu\nu} \beta_\nu$$

- 完全流体のときは保存する

$$\nabla_\mu s_{(0)}^\mu = 0$$

流体の作用(散逸流体)

- 1次の微分を含む作用はLandau frameでdynamical KMS不変性が明白な形で書ける

$$S_{\text{eff}(1)} = S_{\text{eff}(0)} + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{i}{4} \beta^{-1} \zeta \Delta^{\mu\nu} \hat{G}_{a\mu\nu} \Delta^{\alpha\beta} G_{a\alpha\beta} + \frac{i}{2} \beta^{-1} \eta \left(\Delta^{\alpha(\mu} \Delta^{\nu)\beta} - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta^{\alpha\beta} \right) \hat{G}_{a\mu\nu} G_{a\alpha\beta} \right]$$

$$G_{a\mu\nu}(X) \equiv g_{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{X_a^\mu} g_{\mu\nu}$$

$$\hat{G}_{a\mu\nu}(X) \equiv \Theta \tilde{G}_{a\mu\nu}(X)$$

$$\tilde{G}_{a\mu\nu}(X) = \Theta G_{a\mu\nu}(X) + i\Theta \mathcal{L}_\beta g_{\mu\nu}(X)$$

ζ : viscosity

η : shear

$\zeta, \eta > 0$ ←ユニタリ性!

$$\text{Im } S_{\text{eff}} \geq 0$$

→この場合のエントロピーカレントは？

流体の第二法則

- エントロピーカレントは完全流体と同様に定義される

$$s^\mu = p_0 \beta^\mu - \left(T_{(0)}^{\mu\nu} + T_{(1)}^{\mu\nu} \right) \beta_\nu$$

$$T_{(1)}^{\mu\nu} \equiv -2\eta(\beta) \Delta^{\mu\alpha} \Delta^{\nu\beta} \left(\nabla_{(\alpha} u_{\beta)} - \frac{1}{3} g_{\alpha\beta} (\nabla_\rho u^\rho) \right) - \zeta(\beta) (\nabla_\rho u^\rho) \Delta^{\mu\nu},$$

- エントロピーカレントの発散の非負性はユニタリ性から要請される

$$\nabla_\mu s^\mu = \frac{\beta}{2} \eta \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + \beta \zeta (\nabla_\mu u^\mu)^2 \geq 0$$

$\zeta, \eta > 0$ ←ユニタリ性！

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \Delta^{\mu\lambda} \Delta^{\nu\rho} \left(\nabla_\lambda u_\rho + \nabla_\rho u_\lambda - \frac{2}{3} g_{\lambda\rho} \nabla_\alpha u^\alpha \right)$$

重力理論への応用

[Lau-KN-Noumi (in preparation)]

流体とEinstein重力

- fluid diffeo、physical diffeo、noise diffeo、dynamical KMS対称性、ユニタリ性を考慮して重力を結合させる

$$S_{\text{grav}} + S_{\text{hydro}} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} - 8\pi G T^{\mu\nu} \right) G_{a\mu\nu} + \mathcal{O}(G_a^2)$$

$$G_{a\mu\nu}(X) \equiv g_{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{X_a^\mu} g_{\mu\nu}$$

- $g_{a\mu\nu}$ と X_a^μ の変分でEinstein方程式と保存則が再現される

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \\ \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \end{cases}$$

- 流体の時と同じ手続きでエントロピーカレントが定義される

$$s^\mu = p_0 \beta^\mu - T^{\mu\nu} \beta_\nu$$

ブラックホールと流体

- ブラックホール時空を考える

$$ds^2 = -e^{2h(v,r)} F dv^2 + 2e^{h(v,r)} dv dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) ,$$

$$F = \left(1 - \frac{2GM(v,r)}{r} \right) ,$$

- 流体の速度ベクトルを以下のようなヌルベクトルを基底にとって定義して計算する

$$u^\mu = C_1 l^\mu + C_2 k^\mu ,$$

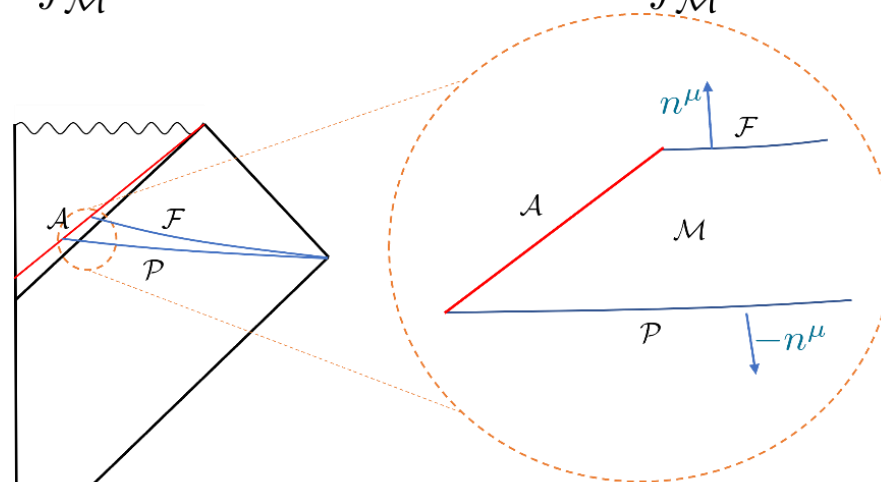
$$l^\mu \partial_\mu = -e^{-h(v,r)} \partial_r , \quad k^\mu \partial_\mu = \left(2\partial_v + e^{h(v,r)} F \partial_r \right) ,$$

$$l^2 = 0 = k^2 , \quad k^\mu l_\mu = -2$$

ブラックホールと流体

- ブラックホール時空で $\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\mu} s^{\mu} \geq 0$ を考える

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\mu} s^{\mu} = \delta S_{\text{mat}} + \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\mu} s^{\mu} \times \theta(r - r_{\mathcal{A}}) \geq 0$$



$\mathcal{F}, \mathcal{P}$: Cauchy surface

$\mathcal{A}$: apparent horizon

$r_{\mathcal{A}}$: radius of apparent horizon

$$\partial\mathcal{M} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{A}$$

- 仮定

- $\mathcal{A}$ は局所温度 $\beta(\sigma)$ が定数と見なせるくらい小さい

- 流体の流入による時空の変化は小さく、摂動的

一般化された第二法則

- 散逸流体に対して

$$\delta S_{\text{mat}} + \frac{\delta A_{\text{app}}}{4G} \geq \left(1 - \frac{T_0}{C_1 T}\right) \frac{\delta A_{\text{app}}}{4G} + \frac{\beta}{4C_1} T_{\mu\nu}^{(1)} k^\mu k^\nu \Delta v \times 4\pi r^2.$$

$$\frac{1}{T_0} = \beta_0 \equiv \frac{2\pi}{\kappa} = 4\pi r|_{r=2GM}.$$

- C_1 は流体の速度ベクトルの地平面に入る方向の大きさ
 $\rightarrow C_1 T \equiv T_{\text{eff}}$ を有効温度とする
- ヌルエネルギー条件で地平面の面積の増減が決まる

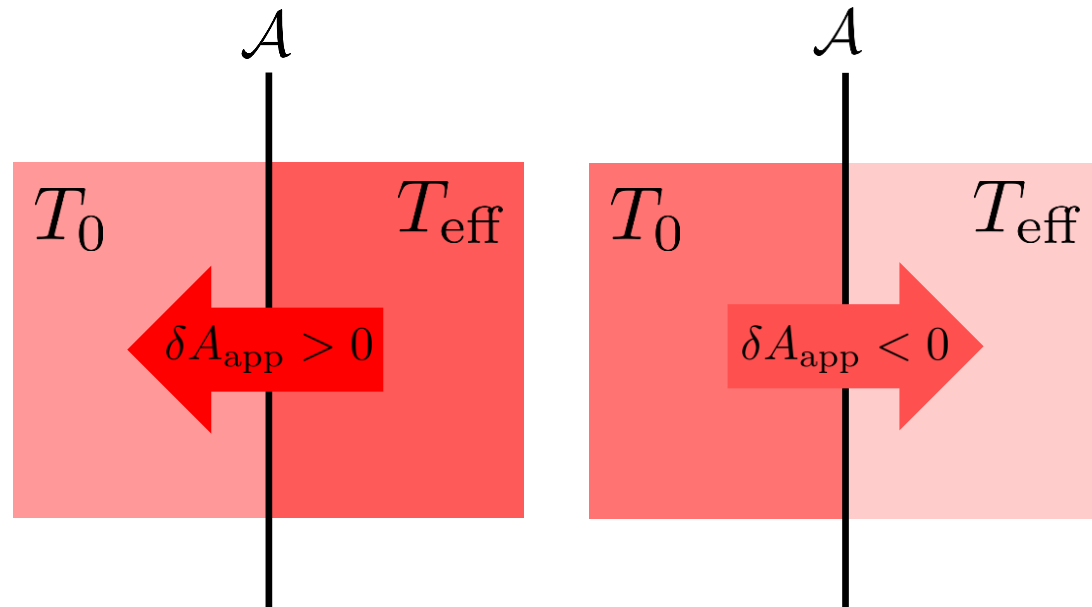
$$\frac{\delta A_{\text{app}}}{4G} = T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \times (\pi r^2 \Delta v \beta_0),$$

- 右辺が正の時に一般化されたエントロピーが増大する
 $\rightarrow$ 右辺が正になるための条件は？

温度勾配とエントロピー生成

- 第一項が T_0 と $C_1 T \equiv T_{\text{eff}}$ の温度勾配によるエントロピー生成を表す:

$$\left(1 - \frac{T_0}{T_{\text{eff}}}\right) \frac{\delta A_{\text{app}}}{4G} \geq 0 \Rightarrow$$



- 高温から低温にエネルギーが流ればエントロピーが増える
→従来の熱力学と同じ

流体の変形とエントロピー生成

- 第二項は流体の変形によるエントロピー生成を表す

$$\frac{1}{4C_1^2} T_{\mu\nu}^{(1)} k^\mu k^\nu = -\zeta \vartheta - 2\eta \left(\vartheta^\nu - \frac{1}{3} \vartheta \right),$$

$$\vartheta^\nu \equiv v_\mu v_\nu \Delta^{\mu\alpha} \nabla_\alpha u^\nu, \quad v^\mu = -C_1 l^\mu + C_2 k^\mu, \quad v^\mu u_\mu = 0$$

$$\eta \quad : \text{shear} \qquad \qquad \vartheta \quad : \text{expansion of } u^\mu \quad (\vartheta \equiv \nabla_\mu u^\mu)$$

$$\zeta \quad : \text{viscosity} \qquad \zeta, \eta > 0 \quad \leftarrow \text{ユニタリ性!}$$

$$\delta S_{\text{mat}} + \frac{\delta A_{\text{app}}}{4G} \geq \left(1 - \frac{T_0}{C_1 T} \right) \frac{\delta A_{\text{app}}}{4G} + \frac{\beta}{4C_1} T_{\mu\nu}^{(1)} k^\mu k^\nu \Delta v \times 4\pi r^2.$$

- 全体的に収縮して ($\vartheta < 0$)、かつ進行方向と直行方向に収縮する ($\vartheta^\nu - \frac{1}{3} \vartheta < 0$) とエントロピーが増える

まとめと展望

- Schwinger-Keldysh形式で流体とEinstein重力が結合した理論を構成した
- 流体がブラックホールに流入したときに一般化された第二法則が満たされるための条件を考察した
→温度勾配と流体の変形が一般化されたエントロピーの増大に寄与する
- さまざまな重力系への応用
→インフレーション、ホログラフィー、etc...