

The algebra of the two-matrix model

日本大学大学院 理工学研究科 物理学専攻

素粒子論研究室

齊藤 佑太

1. 導入

- Jackiw-Teitelboim（JT）重力理論は2次元の重力理論の1つであり、境界の自由度によって解析出来ることからホログラフィー原理やブラックホール情報喪失問題などの多くの模型でしばしば用いられる。
- 物質場と結合しないJT重力理論はdouble scaling limit を取ったhermitian one-matrix model の手法を用いて解析することが出来る[1]。特にSchwinger-Dyson(SD)方程式（ループ方程式）から、ジーナスの高い分配関数はジーナスの低い分配関数を用いて求めることができる。
- 物質場と結合したJT重力理論の場合も行列模型（hermitian two-matrix model）の手法を用いた解析がされている [2]。この模型はgeneralized eigenstate thermalization hypothesis（ETH）行列模型と呼ばれる行列模型であり、ポテンシャルは無限個の項から構成され、様々なパターンでの2種類の行列積を含む。
- 一方で、行列模型はSD方程式からある代数を得ることができる。One-matrix model ではVirasoro 代数が得られる。
- 本発表ではETHのような無限個の項から構成されるポテンシャルを含むtwo-matrix modelについて考え、そこで得られる分配関数に作用する演算子や代数について考察する。その議論の際に[3]で扱われているポテンシャルを用い、[4]で行われる議論に沿ってSD方程式から得られる演算子や代数に関する議論を行う。

2. one-matrix model における代数のレビュー

○分配関数

$$Z_{1h} = \int dA e^{-\text{tr} V_A(A)} \quad (1)$$

$$V_A(A) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k A^k \quad (2)$$

(A : $N \times N$ のエルミート行列)

・任意の演算子 $O(A)$ に対する期待値

$$\langle O(A) \rangle = \int dA e^{-\text{tr} V_A(A)} O(A) \quad (3)$$

○resolvent $(\frac{1}{\nu-A})_{ij}$ (ν は定数、 i, j は行列の成分を表す添字) に対するSD方程式

$$\int dA \frac{\partial}{\partial A_{ij}} \left[e^{-\text{tr} V_A(A)} \left(\frac{1}{\nu-A} \right)_{ij} \right] = 0 \quad (4)$$



$$\left\langle \text{tr} \left(\frac{\partial V_A(A)}{\partial A} \frac{1}{\nu-A} \right) \right\rangle = \left\langle \text{tr} \left(\frac{1}{\nu-A} \right) \text{tr} \left(\frac{1}{\nu-A} \right) \right\rangle \quad (5)$$



$\frac{1}{\nu}$ 展開

$$\frac{1}{Z_{1h}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^{n+1}} L_{n-1} Z_{1h} = 0 \quad (6)$$

$$L_{n-1} = 2N(1 - \delta_{n,0}) \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} + \sum_{s=1}^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial t_s \partial t_{n-1-s}} + \sum_{k=0}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{n+k-1}} \quad (7)$$

・ L_{n-1} が満たす交換関係

$$[L_{n-1}, L_{m-1}] = (n-m) L_{n+m-2} \quad (8)$$

→ L_{n-1} はvirasoro代数

参考文献

- [1] P. Saad, S. H. Shenker and D. Stanford, “JT gravity as a matrix integral,” [arXiv:1903.11115 [hep-th]].
- [2] D.L. Jafferis, D.K. Kolchmeter, B. Mukhametzhanov and J. Sonner, “Jackiw-Teitelboim gravity with matter, generalized eigenstate thermalization hypothesis, and random matrices,” Phys. Rev. D 108 (2023) -66-15.
- [3] L. Y. Wang, Y. S. Zhu, Y. Chen and B. Kang, “W-representations of two-matrix models with infinite set of variables,” Phys. Lett. B **842**, 137953 (2023).
- [4] Y. Makeenko, “Methods of Contemporary Gauge Theory,” Cambridge University Press, 2023.
- [5] M. Fukuma, H. Kawai and R. Nakayama, “Continuum Schwinger-dyson Equations and Universal Structures in Two-dimensional Quantum Gravity,” Int. J. Mod. Phys. A **6**, 1385-1406 (1991).

3. two-matrix model における代数

○分配関数

$$Z_{2h} = \int dA dB e^{-\text{tr} V_A(A) - \text{tr} V_B(B) + \text{tr} V_{AB}(A, B)} \quad (9)$$

$$V_A(A) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k A^k, \quad V_B(B) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k A^k \quad (10)$$

$$V_{A,B}(A, B) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_{2l}=1}^{\infty} t_{k_1, k_2, \dots, k_{2l}} A^{k_1} B^{k_2} \cdots B^{k_{2l}} \quad (11)$$

(A, B : $N \times N$ のエルミート行列)

○ A でのresolvent $(\frac{1}{\nu-A})_{ij}$ に対するSD方程式から得られる式:

$$\frac{1}{Z_{1h}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^{n+1}} L_{n-1}^A Z_{1h} = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} L_{n-1}^A = & 2N(1 - \delta_{n,0}) \frac{\partial}{\partial t_{n-1}} + \sum_{s=1}^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial t_s \partial t_{n-1-s}} + \sum_{k=0}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{n+k-1}} \\ & + \delta_{n,0} \sum_{k_2=1}^{\infty} t_{1, k_2} \frac{\partial}{\partial g_{k_2}} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{\{k\}=1}^{\infty} t_{\{k\}} \delta_{k_1, 1} \delta_{n, 0} \frac{\partial}{\partial t_{k_3, k_4, \dots, k_{2l-1}, k_{2l} + k_2}} \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{\{k\}=1}^{\infty} t_{\{k\}} \sum_{a=2}^l \delta_{k_{2a-1}, 1} \delta_{n, 0} \frac{\partial}{\partial t_{k_1, k_2, \dots, k_{2a-2} + k_{2a}, \dots, k_{2l}}} \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\{k\}=1}^{\infty} t_{\{k\}} \sum_{a=1}^l k_{2a-1} (1 - \delta_{k_{2a-1}, 1} \delta_{n, 0}) \frac{\partial}{\partial t_{k_1, k_2, \dots, k_{2a-1} + n - 1, \dots, k_{2l}}} \end{aligned} \quad (13)$$

・ L_{n-1}^A が満たす交換関係

$$[L_{n-1}^A, L_{m-1}^A] = (n-m) L_{n+m-2}^A \quad (14)$$

→ L_{n-1} はvirasoro代数

○ B でのresolvent $(\frac{1}{\nu-B})_{ij}$ に対するSD方程式から得られる式:

$$\frac{1}{Z_{1h}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^{n+1}} L_{n-1}^B Z_{1h} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} L_{n-1}^B = & t_1 \frac{\partial}{\partial g_n} + \delta_{n,0} \sum_{k=2}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k-1}} + (1 - \delta_{n,0}) \sum_{k=2}^{\infty} k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k-1, n}} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} t_{1, k} \frac{\partial}{\partial g_{k+n}} + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\{k\}=1}^{\infty} t_{\{k\}} (1 - \delta_{k_1, 1}) \frac{\partial}{\partial t_{k_1-1, \dots, k_{2l}+n}} \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\{k\}=1}^{\infty} t_{\{k\}} \left[\sum_{a=1}^l \{ (1 - \delta_{k_{2a-1}, 1}) \left(\frac{\partial}{\partial t_{k_1, \dots, k_{2a-1}-1, k_{2a}+n, \dots, k_{2l}}} \right) \right. \\ & \left. + \delta_{n,0} (k_{2a-1} - 2) \frac{\partial}{\partial t_{k_1, \dots, k_{2a-1}-1, k_{2a}+n, \dots, k_{2l}}} \right) \\ & + \sum_{s=2}^{k_{2a-1}-1} (1 - \delta_{n,0}) \left((1 - \delta_{a,1}) \frac{\partial}{\partial t_{k_1, \dots, s-1, n, k_{2a-1}-s, \dots}} + \delta_{a,1} \frac{\partial}{\partial t_{s-1, n, k_1-s, \dots}} \right) \} \\ & + \sum_{a=2}^{l-1} \{ (1 - \delta_{k_{2a-1}, 1}) \frac{\partial}{\partial t_{k_1, \dots, k_{2a-2}+n, k_{2a-1}-1, \dots}} + \delta_{k_{2a-1}, 1} \frac{\partial}{\partial t_{k_1, \dots, k_{2a-2}+k_{2a}+n, k_{2a+1}, \dots}} \} \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{\{k\}=1}^{\infty} t_{\{k\}} \left[\delta_{k_1, 1} \frac{\partial}{\partial t_{k_3, k_4, \dots, k_{2l}+k_2+n}} + \delta_{k_{2l-1}, 1} \frac{\partial}{\partial t_{k_1, k_2, \dots, k_{2l}+k_2+n}} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

4. まとめ

- two-matrix model において、resolventに対するSchwinger-Dyson方程式から分配関数の条件式と、分配関数に作用する演算子を求めた。
- L_{n-1}^A はVirasoro代数を満たす。

5. 今後の展望

- L_{n-1}^B は何らかの代数を成すのか。
- L_{n-1}^A と合わせて閉じるのか。
- さらに多くのresolventを入れる時、SD方程式から得られる分配関数に作用する演算子は代数として閉じるのか。
- A と B が2次で相互作用するポテンシャルを持つtwo-matrix modelではSDから W_3 代数が得られる[5]。無限個の相互作用を含む場合でも W_3 が得られるのか。