

Exceptional generalized coset を用いた超重力理論のコンパクト化 と一般化されたU双対性

酒谷 雄峰
(京都府立医科大学)

Based on [Falk Hassler, YS, arXiv:2311.12095;
ongoing work]

テーマ

SUGRAのコンパクト化

結果

(generalized) Scherk-Schwarz reduction

を含むより一般的なコンパクト化を

行う手法を与えた

従来のコンパクト化のレビュー

11次元SUGRA

D次元

d次元 (コンパクト)

$$(x^m, y^i)$$

$$g_{mn}(x^m, \cancel{y^i}) = g_{mn}(x^m)$$

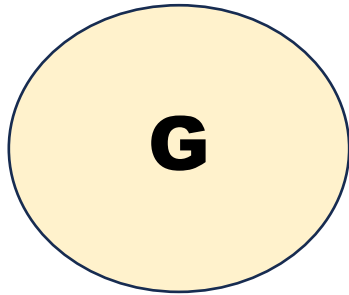
$$C_3(x^m, \cancel{y^i}) = C_3(x^m)$$

**Kaluza-Klein
reduction**

D次元 SUGRA (SUSYは破れない)

もっと複雑なコンパクト化がしたい

群多様体



$$[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$$

Lie代数

右不変ベクトル場 $e_a^i(y^i)$

$$\hat{\mathcal{L}}_{e_a} e_b^i = -f_{ab}^c e_c^i$$

Scherk-Schwarz ansatz

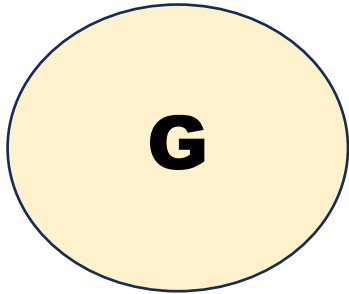
$$g_{ij} = e_i^a(y) e_j^b(y) \hat{g}_{ab}(x)$$

ツイスト **D次元場**

metric 以外の場の ansatz は?

素朴なansatz

群多様体



$$g_{ij} = e_i^a(y) e_j^b(y) \hat{g}_{ab}(x)$$

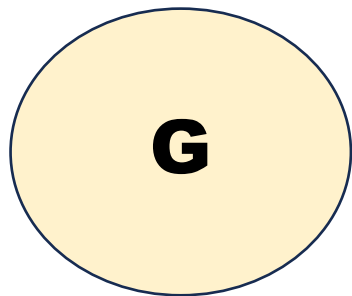
$$C_{ijk} = e_i^a(y) e_j^b(y) e_k^c(y) \hat{C}_{abc}(x) + \underline{C_{ijk}(y)}$$

群多様体上にどんなフラックスを入れるか
ということに対応

すべてのフラックスを指定する方法

一般化

群多様体

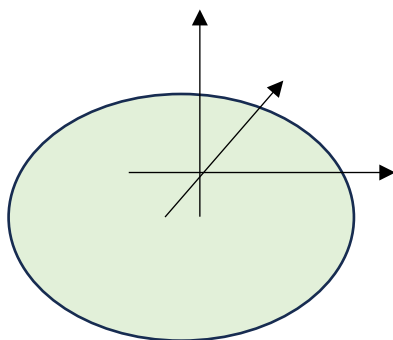


$$e_a{}^i(y^i) \in \mathrm{GL}(d)$$

$$\mathcal{L}_{e_a} e_b{}^i = -f_{ab}{}^c e_c{}^i$$

Generalized parallelizable space

[Lee, Strickland-Constable, Waldram, '14]



$$E_A{}^I \in \mathbb{E}_{d(d)}$$

gen.
frame場

一般化フラックス

$$\hat{\mathcal{L}}_{E_A} E_B{}^I = -X_{AB}{}^C E_C{}^I$$

右不変ベクトル場の拡張版

Generalized Scherk-Schwarz ansatz

$$\mathcal{M}_{IJ} = E_I^A(y) E_J^B(y) \hat{\mathcal{M}}_{AB}(x)$$

ツイスト

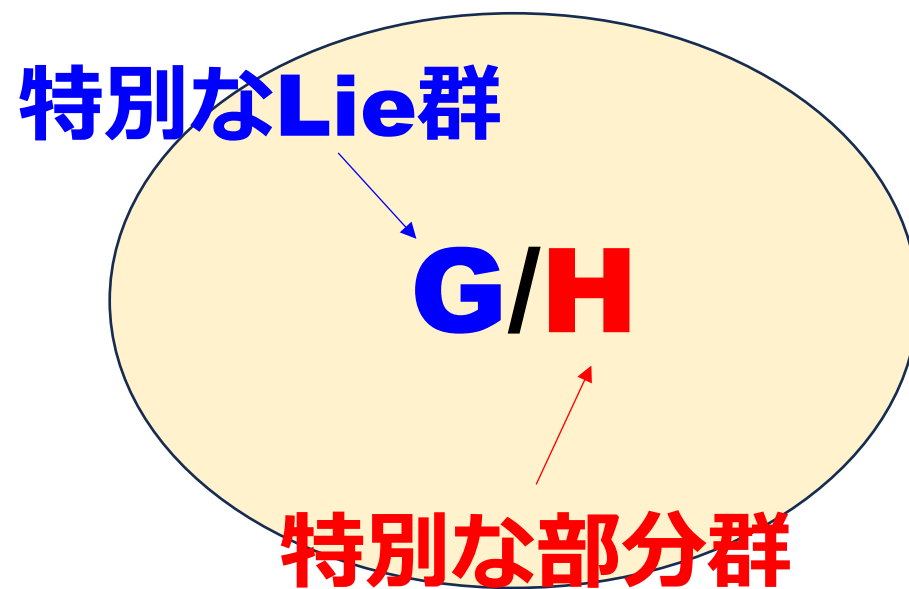
D次元場

$g_{ij}, C_{ijk}, \dots$

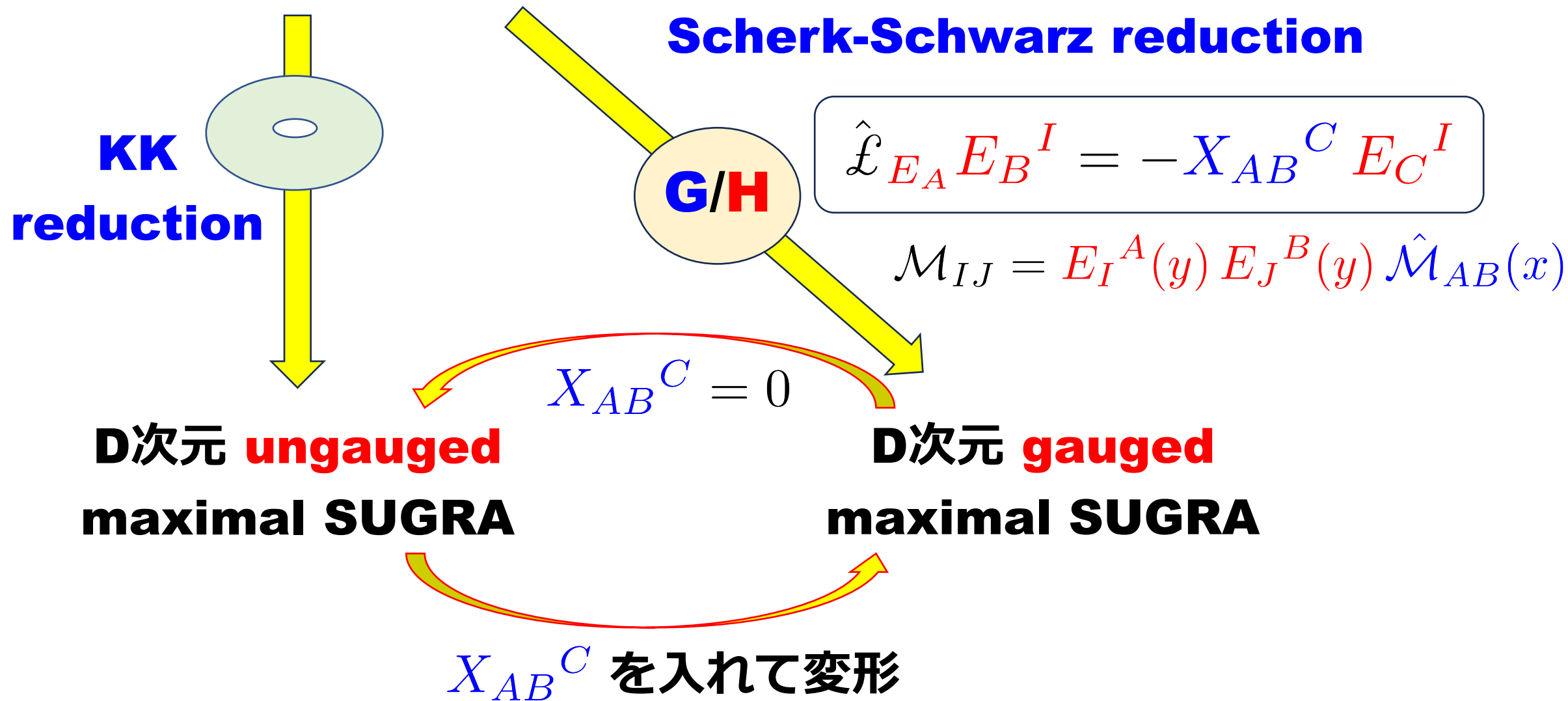
$$g_{ij} = e_i^a(y) e_j^b(y) \hat{g}_{ab}(x)$$

すべての場に対する ansatz が一気に書き下せる

Generalized parallelizable space



11D SUGRA



ungauged

gauged

$$\mathcal{F}^I = d\mathcal{A}^I \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}^A = d\mathcal{A}^A + X_{BC}{}^A \mathcal{A}^B \wedge \mathcal{A}^C$$

$$\partial_m \quad \rightarrow \quad D_m = \partial_m - \mathcal{A}_m{}^C X_{CA}{}^B$$

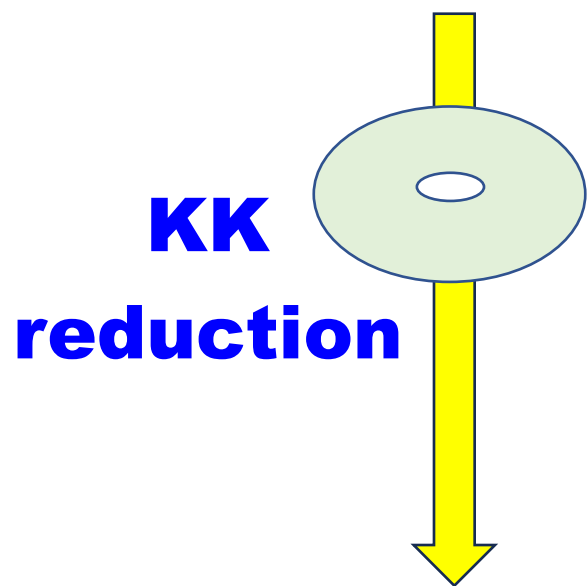
SUSY変換則も変形されるが, **SUSY**は破れない.

**D次元 ungauged
maximal SUGRA**



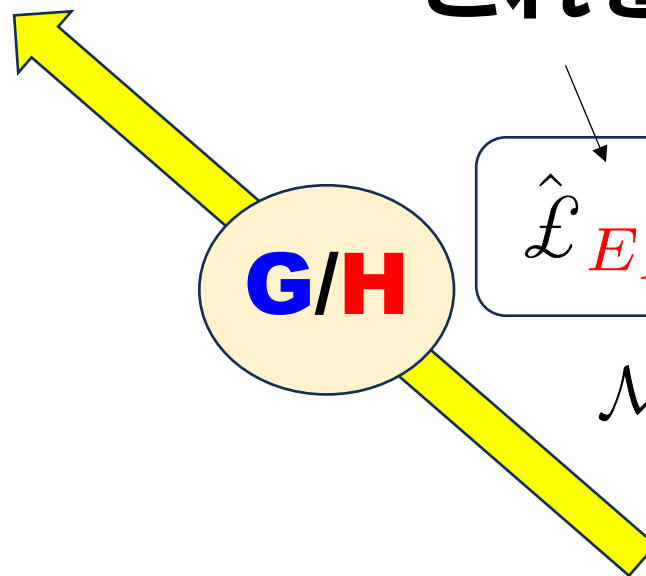
**D次元 gauged
maximal SUGRA**

11D SUGRA



**D次元 ungauged
maximal SUGRA**

これを満たす **frame** 場が必要



$$\hat{\mathcal{L}}_{E_A} E_B^I = -X_{AB}{}^C E_C^I$$

$$\mathcal{M}_{IJ} = E_I^A(y) E_J^B(y) \hat{\mathcal{M}}_{AB}(x)$$

**D次元 gauged
maximal SUGRA**

$X_{AB}{}^C$ を入れて変形

最近の発展

[Inverso '17; Bugden, Hulik, Valach, Waldram '21;
Hassler, YS '23]

$$X_{AB}{}^C$$



$$T_A \circ T_B = X_{AB}{}^C T_C$$

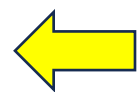
Gauged SUGRA

Exceptional Geometric Algebra



対称部分を“除く”

$$[T_{\tilde{A}}, T_{\tilde{B}}] = F_{\tilde{A}\tilde{B}}{}^{\tilde{C}} T_{\tilde{C}}$$



$$[T_{A'}, T_{B'}] = F_{A'B'}{}^{C'} T_{C'}$$

ある性質を満たす部分群 **H**
(一般に複数存在)

Lie群 G
(一意的)

Gauged SUGRA $X_{AB}{}^C$ $\Rightarrow$ **G** が決まり, **H** を選ぶ

$$\Rightarrow g(y^i) \in G/H$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{E_A} E_B{}^I = -X_{AB}{}^C E_C{}^I$$

G/H

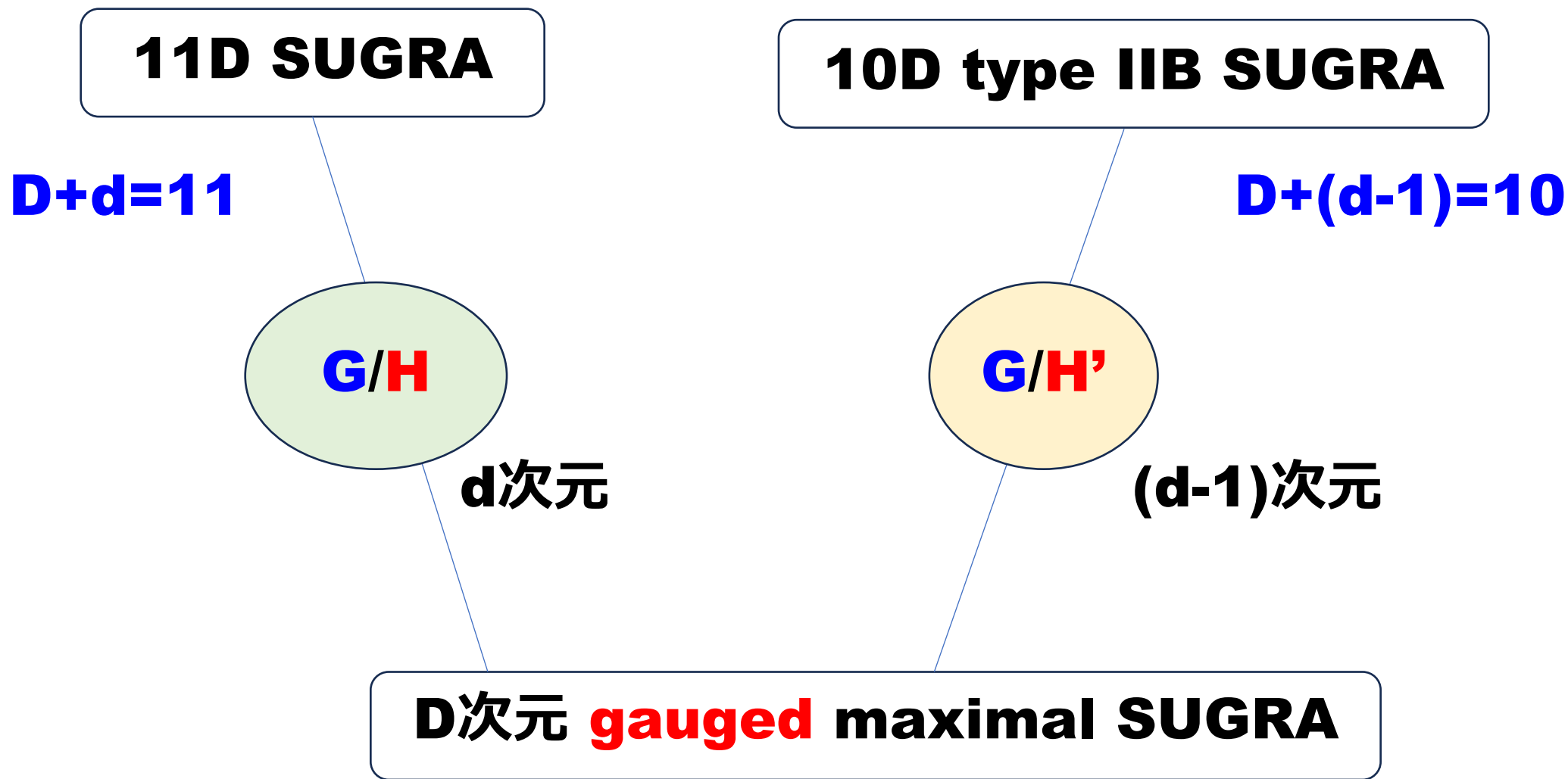
$\Rightarrow E_A{}^I(y^i)$
**Frame fieldsが
自動計算できるようになった.**

11D SUGRA

$X_{AB}{}^C$
gauged SUGRA

$$\mathcal{M}_{IJ} = E_I{}^A(y) E_J{}^B(y) \hat{\mathcal{M}}_{AB}(x)$$

部分群Hの選び方の任意性



Generalized U-duality

[YS '20; Malek, Thompson '20; ...]

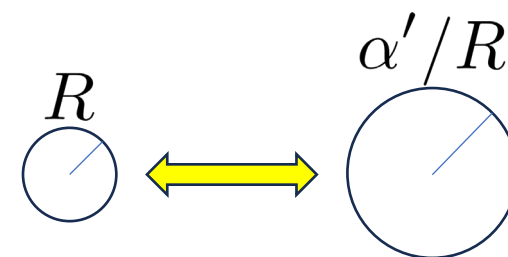
11D SUGRA

10D type IIB SUGRA

G/H

G/H'

G/H''



同じ理論

様々なコンパクト化が同じ理論を与える

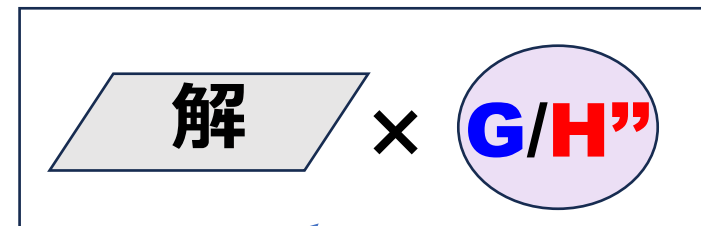
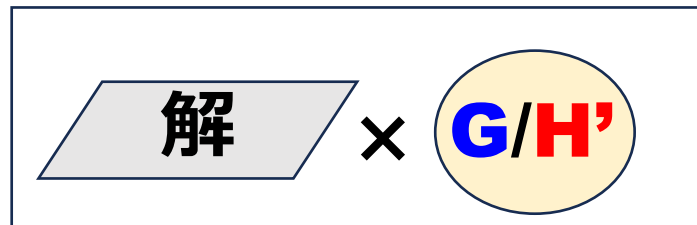
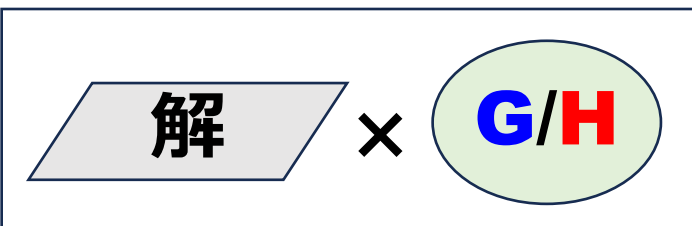
D次元 **gauged** maximal SUGRA

$X_{AB}{}^C$

高次元SUGRAの解の生成手法

11D SUGRAの解

10D type IIB SUGRAの解



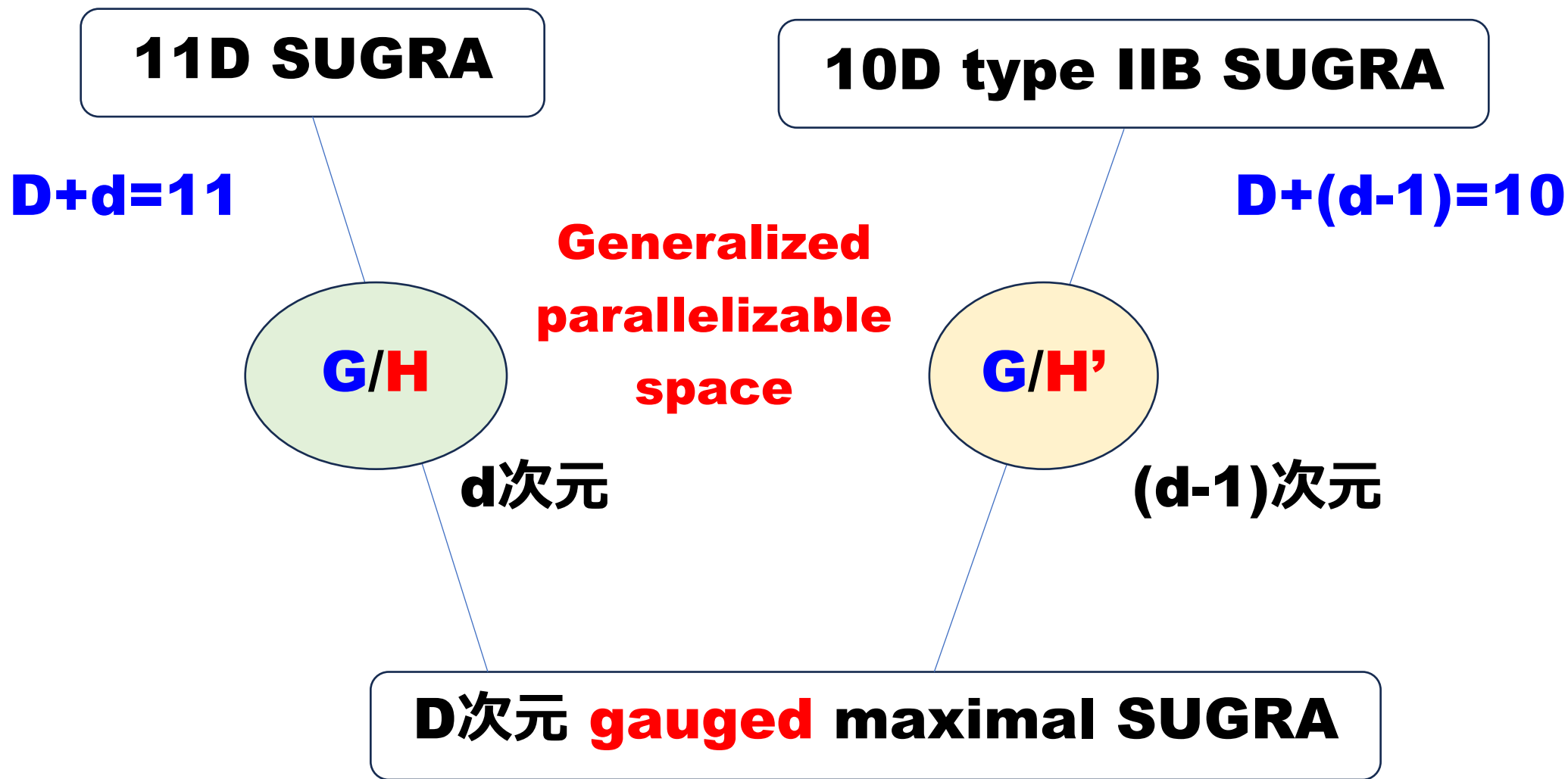
D次元 **gauged**
maximal SUGRA



今回の研究

generalized
Scherk-Schwarz reduction
の一般化

SS reduction



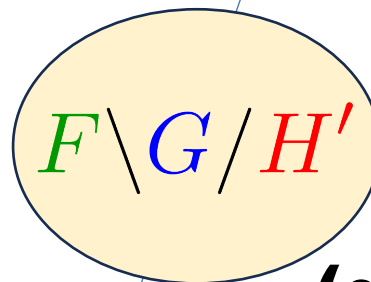
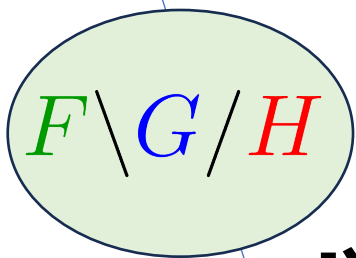
新たなコンパクト化

11D SUGRA

10D type IIB SUGRA

$D+d=11$

$D+(d-1)=10$

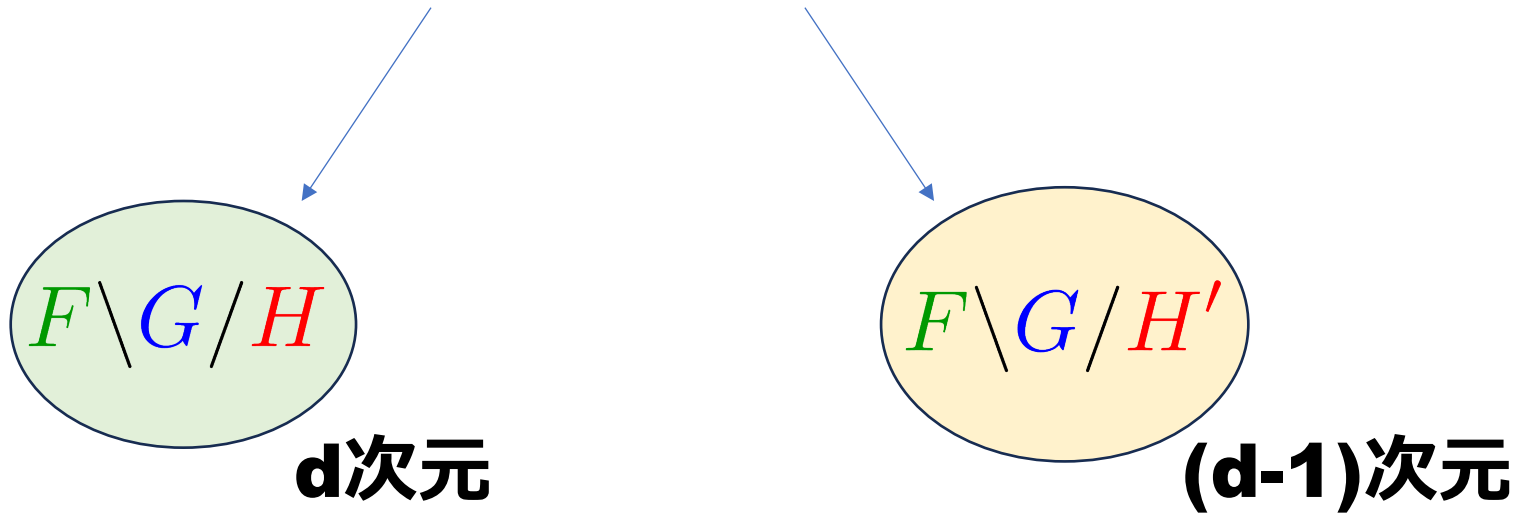


d次元

(d-1)次元

D次元理論

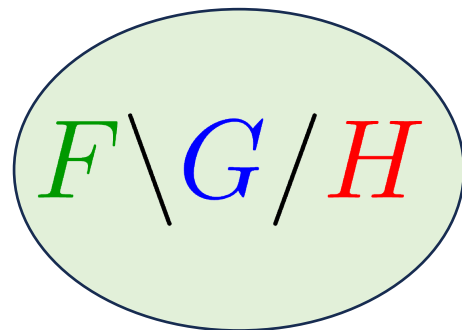
Exceptional Generalized Cosets



T-dualityの文脈で作られていた
Dressing Cosets の **U-duality**版

[Klimčík, Ševera '96;
Sfetsos '98, '99; ...]

Exceptional Generalized Cosets とは?


$$F \setminus G / H$$

→ 通常の Cosets の自然な拡張

$$F \setminus G$$

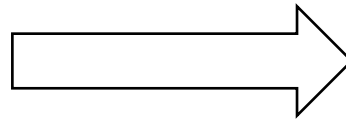
群多様体 G

群多様体 G

部分群

$$F \curvearrowright \begin{matrix} \bullet f g \\ \bullet g \end{matrix}$$

左からの
連続的な F の作用



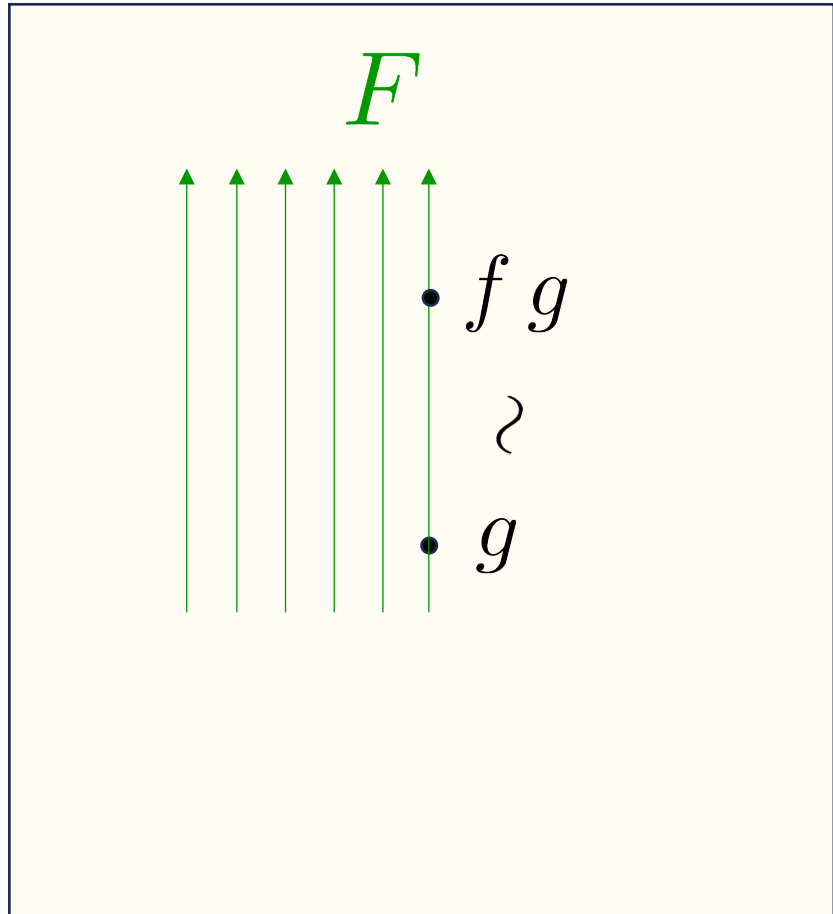
部分群 F

$$\begin{matrix} \uparrow \uparrow \uparrow \\ \mathcal{L}_{e_\alpha} \\ \bullet g \end{matrix}$$

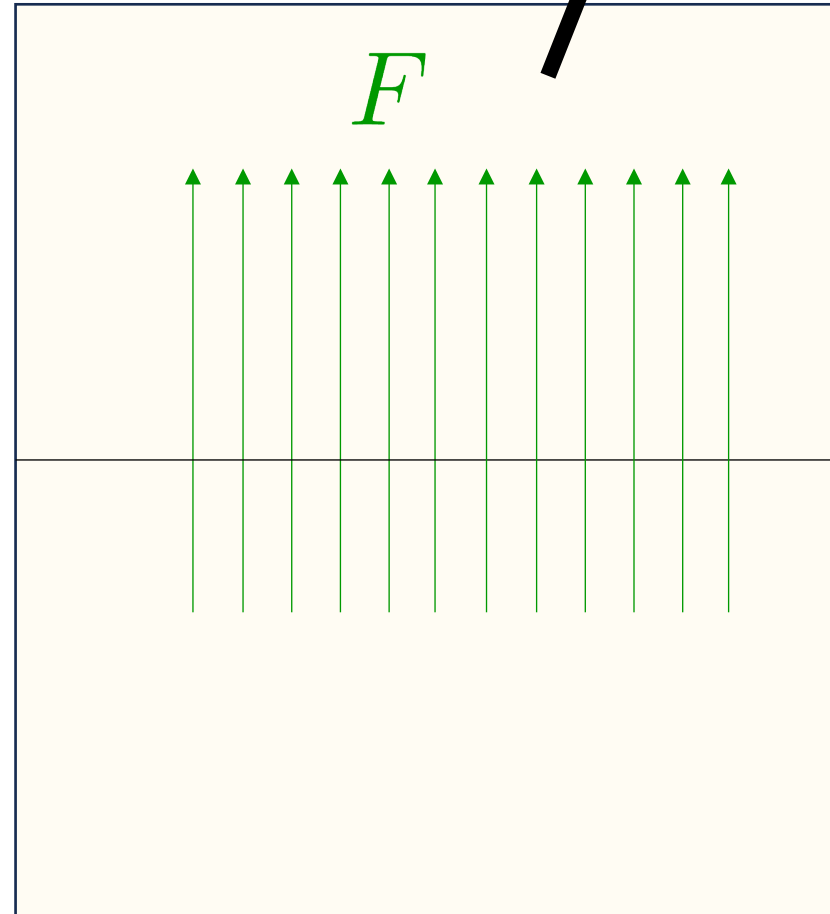
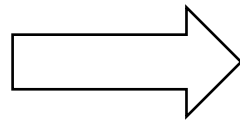
Cosets

Cosetの幾何学

[Polacek, Siegel '14]

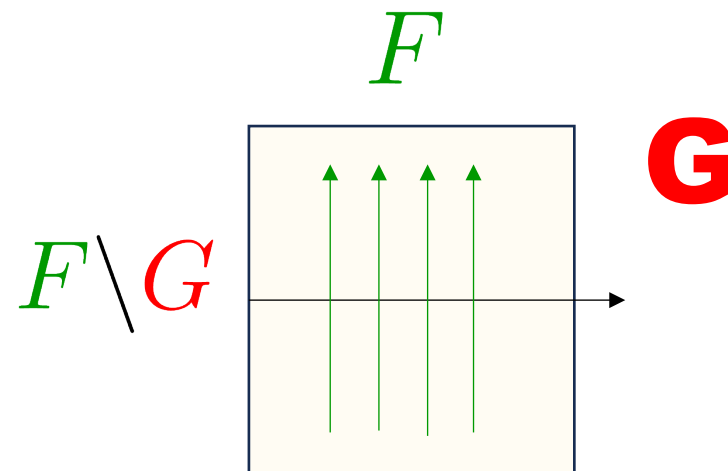


商空間



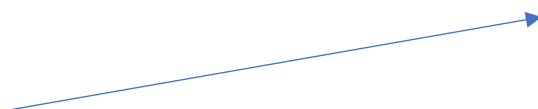
$F \setminus G$

[Polacek, Siegel '14]



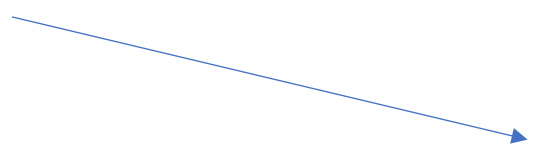
Gの右不変ベクトル場

$$\hat{e}_{\hat{a}}^{\hat{i}}$$



$$e_a^i$$

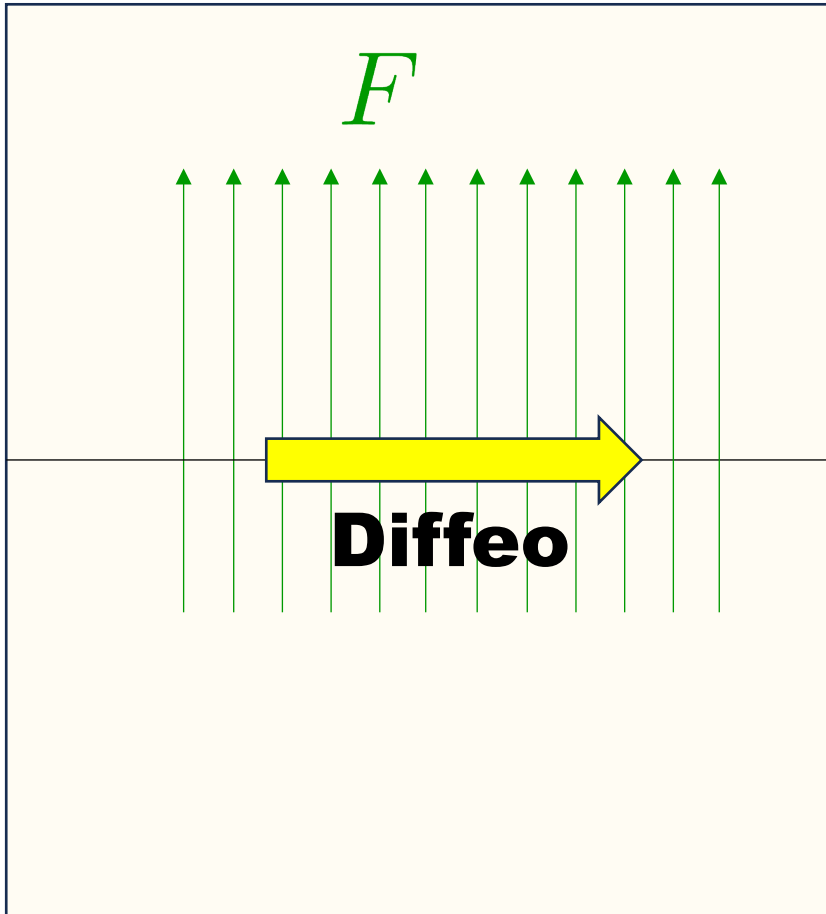
$F \setminus G$ 上の **frame** 場



$$\Omega_{ab}^c$$

Spin 接続

特定の成分



$F \setminus G$

Coset上のテンソル

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta e_a^i = \mathcal{L}_v e_a^i \\ \delta \Omega_{ab}^c = \mathcal{L}_v \Omega_{ab}^c \end{array} \right.$$

構造群としての役割

$\text{Lie}(\mathbf{F})$

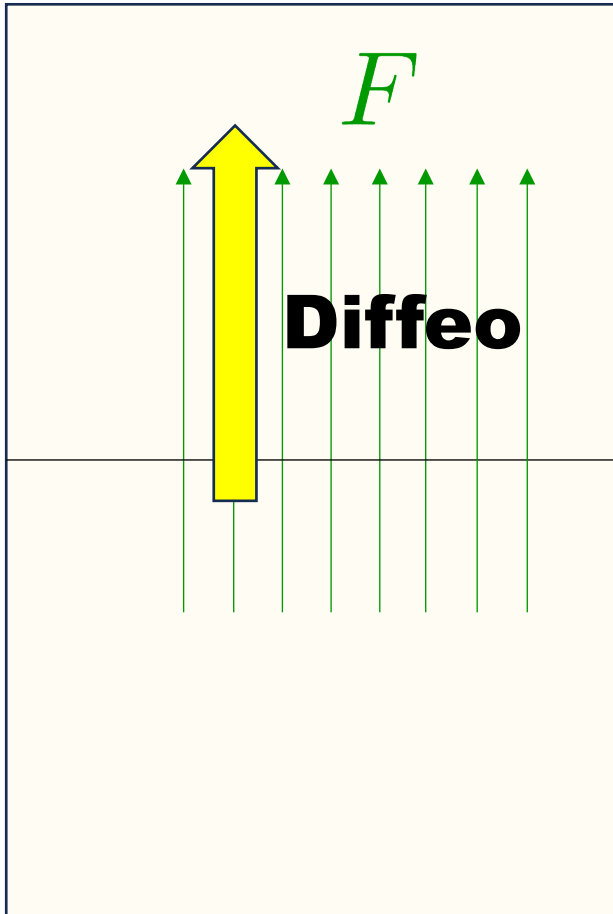
$\hookrightarrow$

$$\delta e_a^i = \xi_a^b e_b^i$$

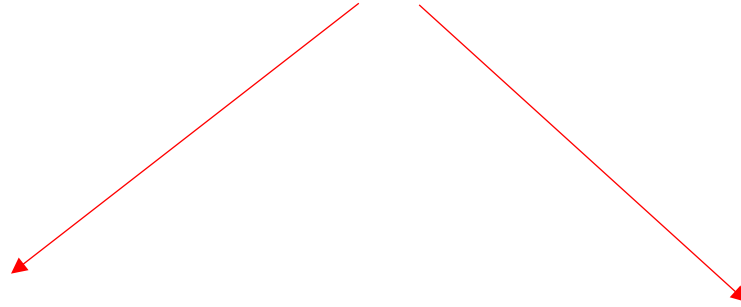
$$\delta \Omega_{ab}^c = \xi_a^e \Omega_{eb}^c + \xi_b^e \Omega_{ae}^c - \xi_e^c \Omega_{ab}^e$$

$$+ D_a \xi_b^c$$

Spin 接続の役割



$\Omega_{ab}{}^c$ **spin 接続**



$$T_{ab}{}^c = f_{ab}{}^c$$

Torsion (定数)

$$R_{abc}{}^d = -f_{ab}{}^{\alpha} f_{\alpha c}{}^d$$

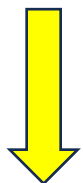
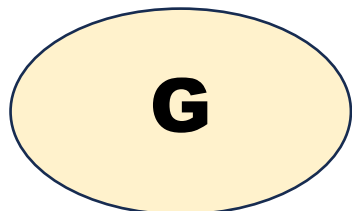
Curvature (定数)

Lie群 G の構造定数で与えられる

一般化



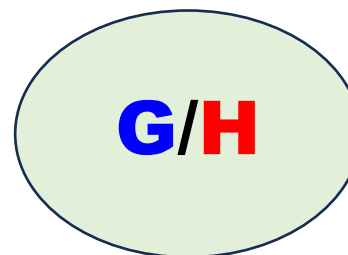
群多様体G



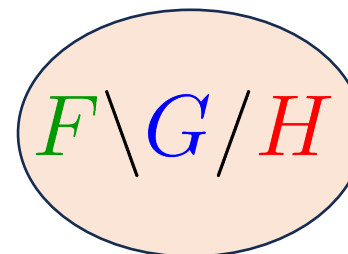
Coset



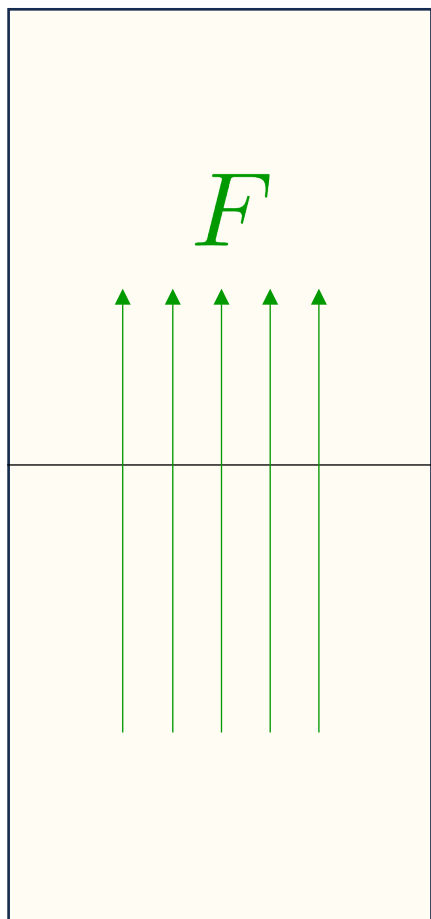
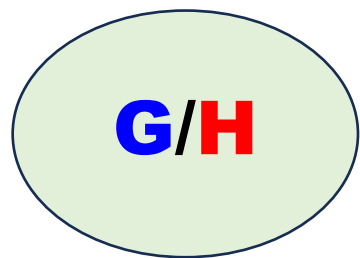
Generalized parallelizable space



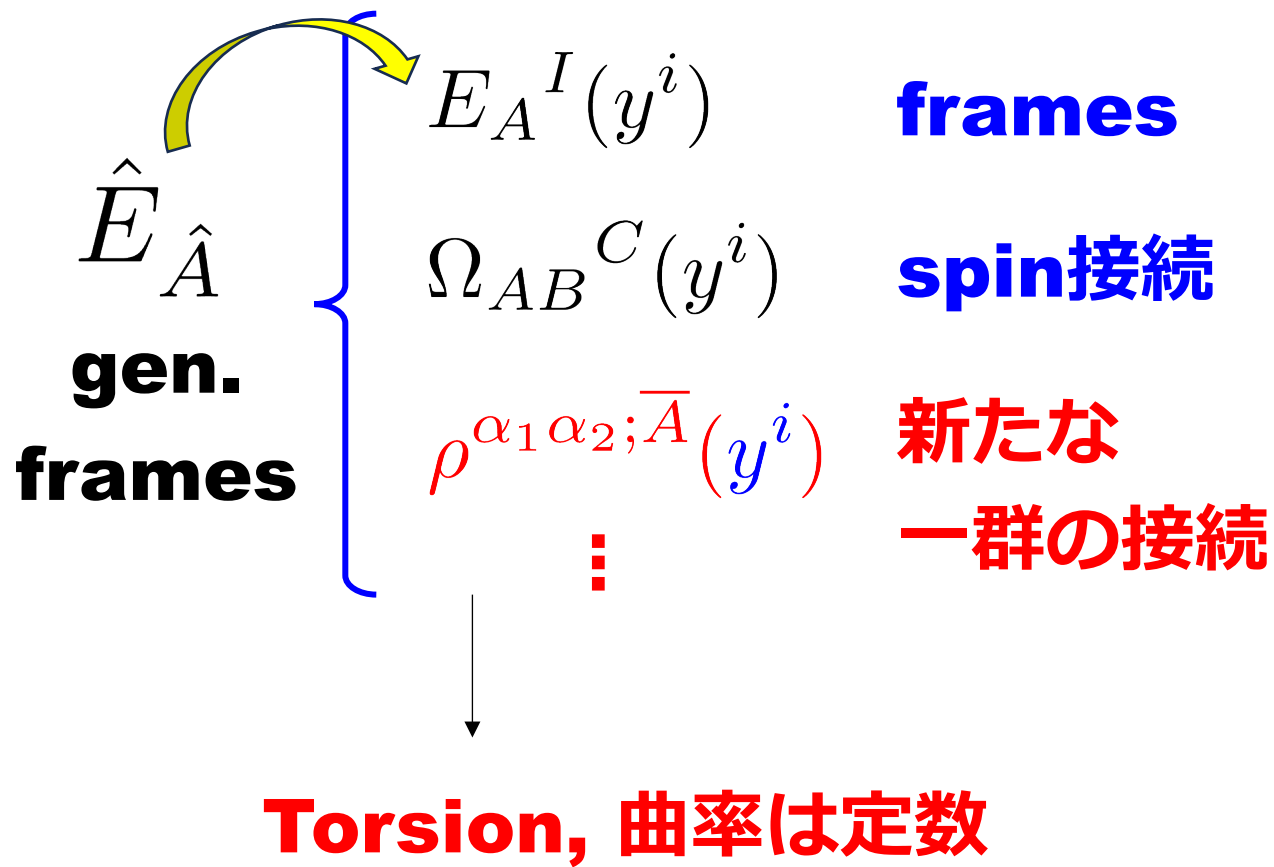
Exceptional Generalized Coset



$$F \setminus G / H$$



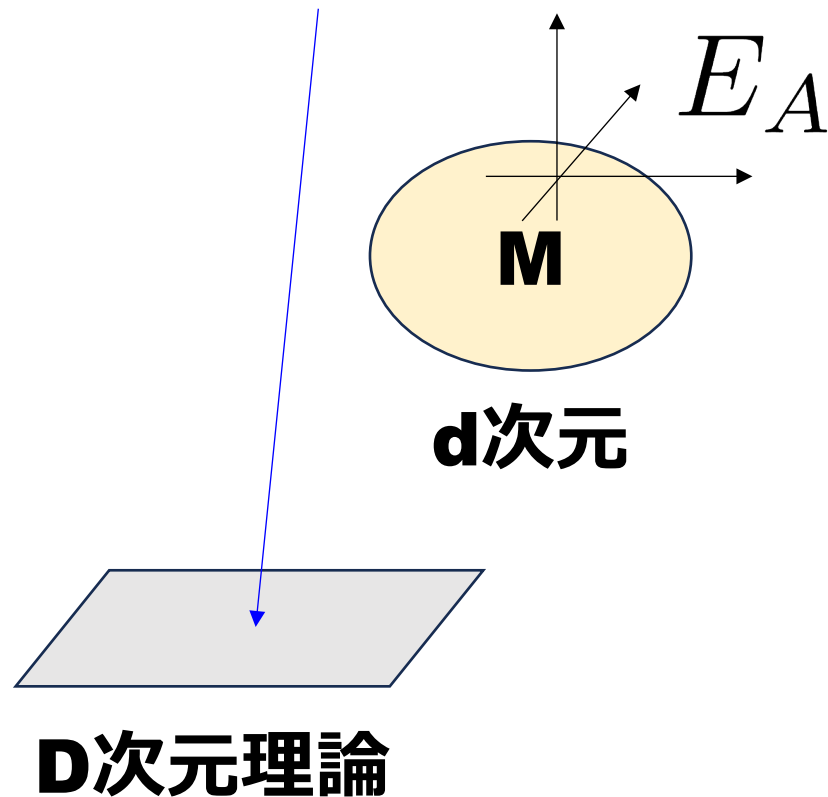
$$F \setminus G / H$$



Exceptional Generalized Cosets の応用

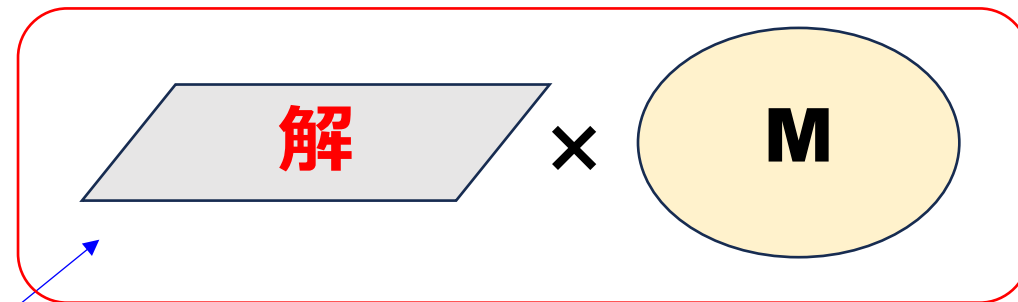
Consistent truncationとは?

11/10D SUGRA



Consistent truncationとは?

11/10D SUGRA



11/10D理論の解



Consistent truncation



D次元理論

[Cassani, Josse, Petrini, Waldram '19]

全ての **SUGRA** 場が構造群 **F** の下で
singlet ならそのコンパクト化は **consistent truncation**.

11/10D SUGRAのコンパクト化

scalar 場: $\mathcal{M}_{AB} \in \frac{E_{d(d)}}{H_d}$ **U-duality群**
Maximal compact subgroup

F-singlet
のみ残す

SS reduction
と違う点!

$$(\mathfrak{t}_\alpha)_A^C \mathcal{M}_{CB} + (\mathfrak{t}_\alpha)_B^C \mathcal{M}_{AC} = 0$$

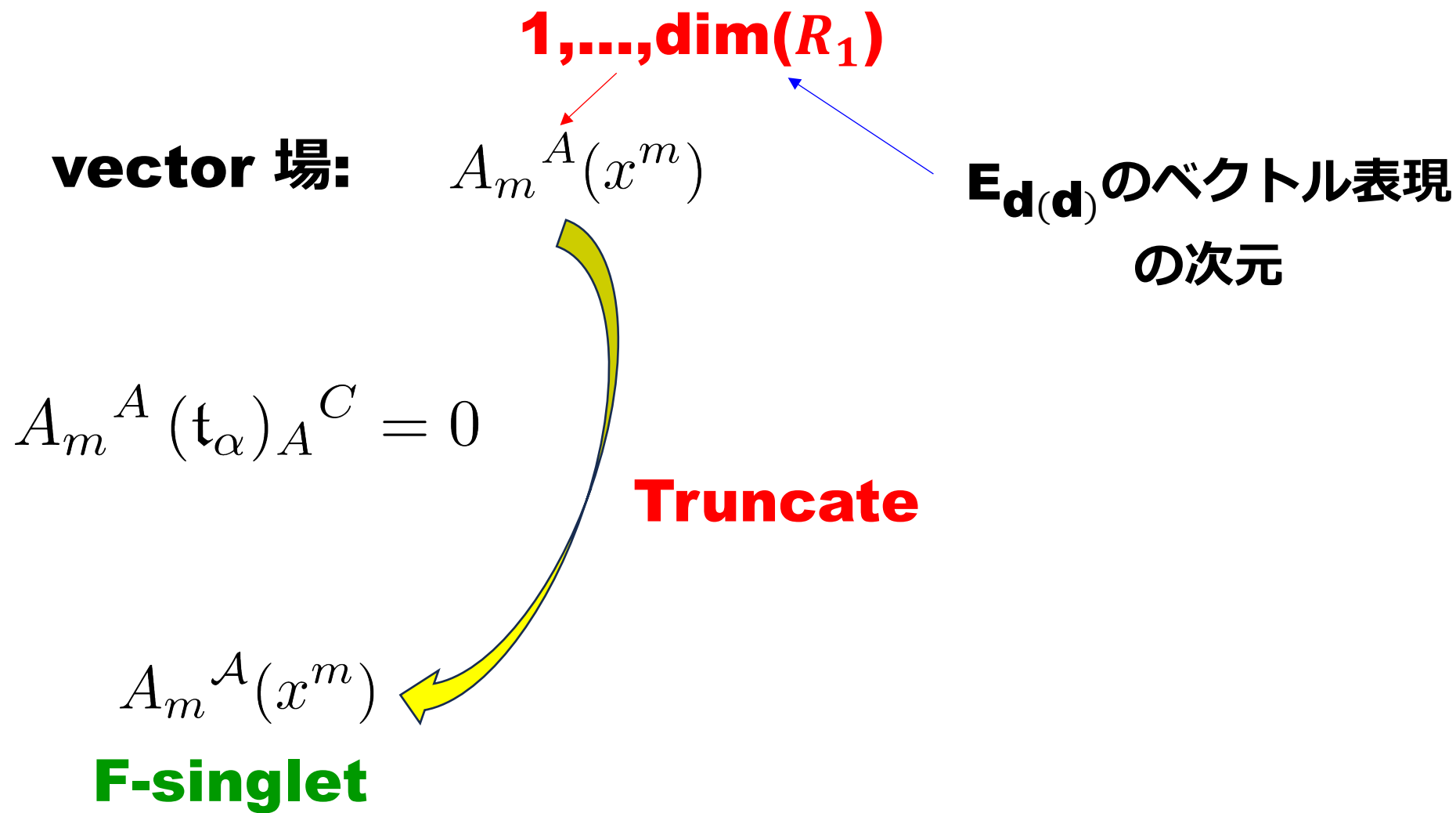
$$\mathcal{M}_{AB} \in \frac{C_{E_{d(d)}}(F)}{C_{H_d}(F)}$$

F-singlet

$E_{d(d)}$ で **F** と交換する部分群

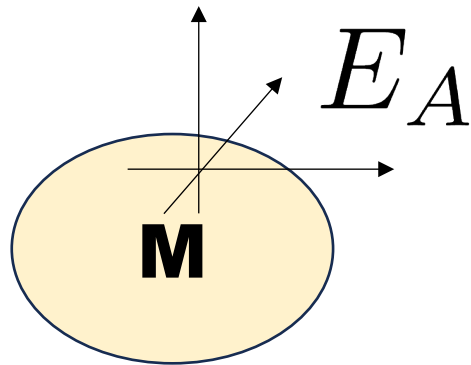
H_d で **F** と交換する部分群

11/10D SUGRAのコンパクト化

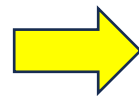


[Josse, Malek, Petrini, Waldram '22]

色んな構造群 F を考えて
truncation後にどんな理論が得られるかは調べられていた.



Frame場の系統的な構成法はなかった.
(高次元場と低次元場の関係が書き下せない)



Exceptional Generalized Coset

$$M = F \backslash G / H$$

Reduction ansatz

Generalized Coset

**11D/10D
SUGRA 場**

$$F \backslash G / H$$

**低次元理論
の場**

$$\mathcal{M}_{IJ}(x, y) = E_I^A(y^i) E_J^B(y^i) \mathcal{M}_{AB}(x^m)$$

$$A_m^I(x, y) = E_{\mathcal{A}}^I(y^i) A_{\mu}^{\mathcal{A}}(x^m) \quad \textbf{F-singlets}$$

$\vdots$

D次元理論の作用

scalar potential

定数の曲率

$$\mathcal{T}_{AB}^C, R_{AB}$$

定数

$$V \sim R = \mathcal{M}^{AB}(x^m) R_{AB}$$

Reduction ansatz

Generalized Coset

**11D/10D
SUGRA 場**

$$F \backslash G / H$$

**低次元理論
の場**



$$\mathcal{M}_{IJ}(x, y) = E_I^A(y^i) E_J^B(y^i) \mathcal{M}_{AB}(x^m)$$

$$A_m^I(x, y) = E_{\mathcal{A}}^I(y^i) A_{\mu}^{\mathcal{A}}(x^m)$$

重要!

**D次元理論の作用は
F と G で決まる**

scalar potential

$$V \sim R = \mathcal{M}^{AB}(x^m) R_{AB}$$

F singlet

G

$$\hat{X}_{AB}^C$$

新たなGeneralized Coset

**11D/10D
SUGRA 場**

$$F \backslash G / H'$$

**低次元理論
の場**

$$\mathcal{M}'_{IJ}(x, y) = E_I'^A(y^i) E_J'^B(y^i) \mathcal{M}_{AB}(x^m)$$

$$A_m'^I(x, y) = E_{\mathcal{A}}'^I(y^i) A_{\mu}^{\mathcal{A}}(x^m)$$

D次元理論の作用

$$\mathcal{T}_{AB}^C, R_{AB}$$

定数

scalar potential

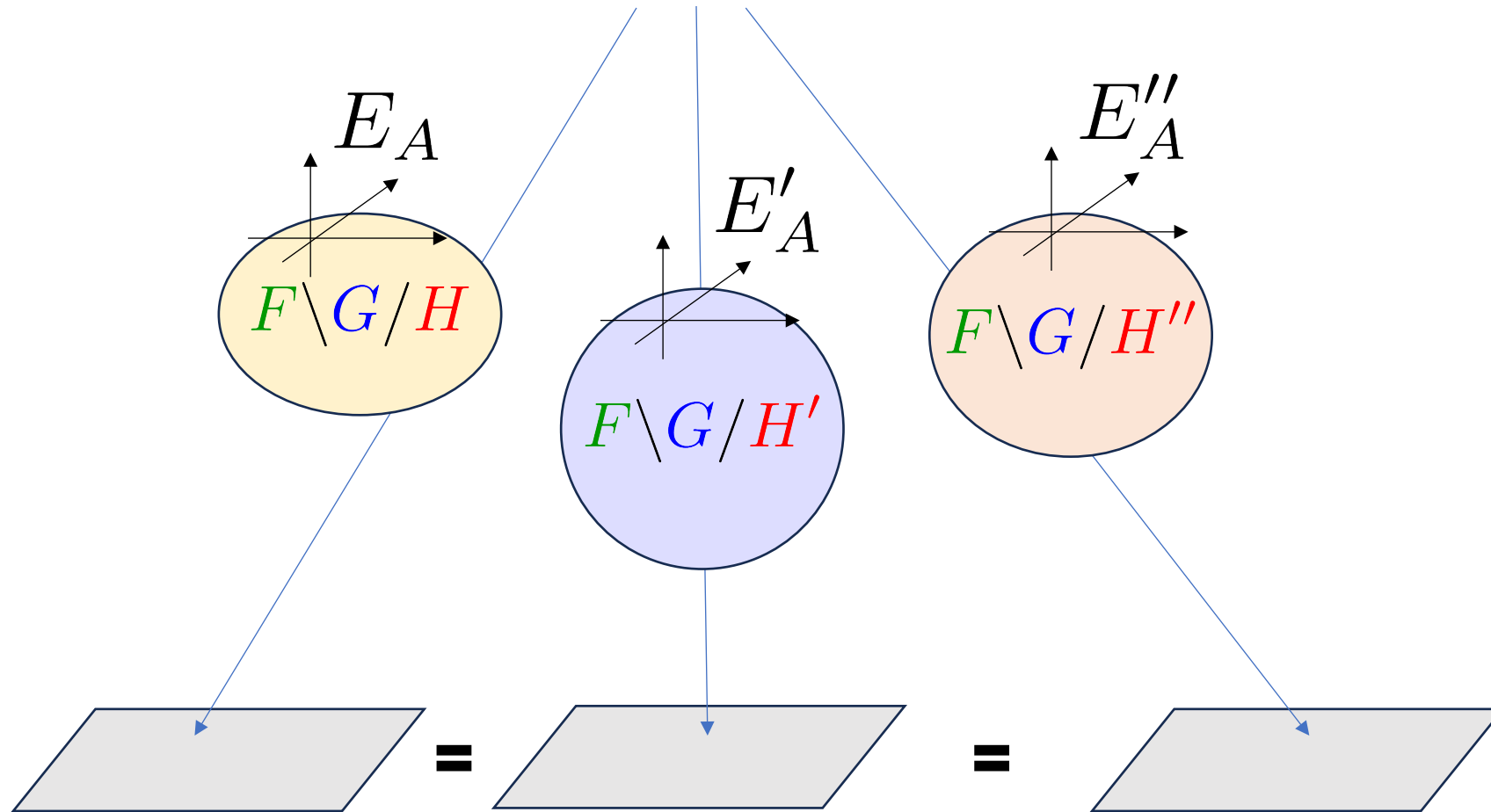
$$V \sim R = \mathcal{M}^{AB}(x^m) R_{AB}$$

F singlet

G

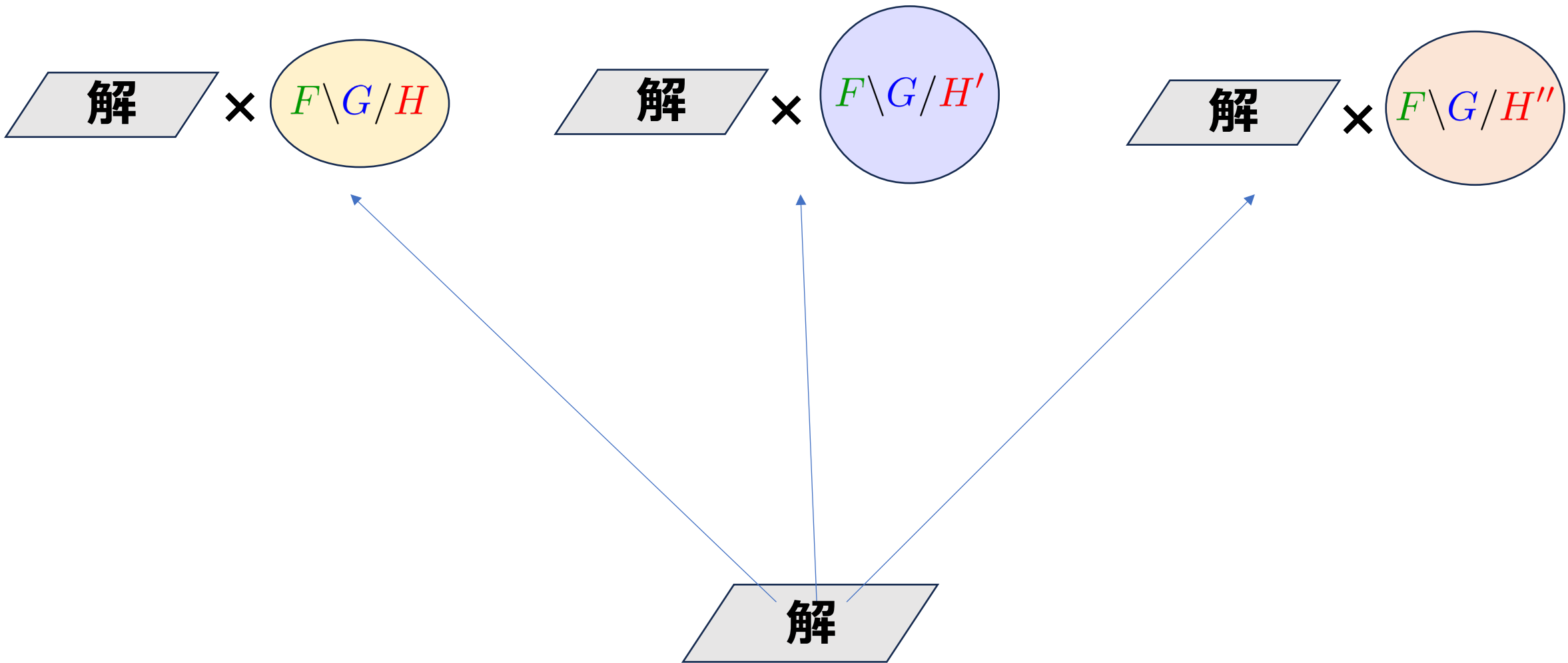
$$\hat{X}_{AB}^C$$

11/10D SUGRA



Generalized U-duality

一群の 11D/10D SUGRA 解



例

11/10D SUGRA

$F \backslash G / H$

Half-maximal gauged SUGRA

d=5, N=4 gauged SUGRA

[Schon, Weidner '06]

Scalar場: $\mathcal{M}_{AB} \in \mathbb{R}^+ \times \frac{O(5, n)}{O(5) \times O(n)}$

Vector場: $\mathcal{A}_\mu{}^{\mathcal{A}} \quad (\mathcal{A} = 1, \dots, 6 + n)$

例

11/10D SUGRA

$F \backslash G / H$

$$\mathcal{M}_{AB} \in \mathbb{R}^+ \times \frac{\mathrm{SO}(3,1)}{\mathrm{SO}(3)} \times \frac{\mathrm{SU}(2,1)}{\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1))}$$

d=5, N=2 gauged SUGRA (?)

Non-SUSY重力理論 (?)

... 多数の低次元理論

さらにSUSYの少ないgauged SUGRA

まとめ

Exceptional Generalized Cosets
を定義し, 具体的に構築した.

“Exceptional Geometric Algebra”

isotropic subgroup $F \setminus G / H$ **ある性質を持つ部分群**

Exceptional Generalized Cosets

11/10D SUGRAと

低次元の **gauged (super)gravities** をつなぐ内部空間.

