

弦幾何理論による弦背景ポテンシャル導出と弦幾何現象論

佐藤松夫（弘前大学 理工学研究科・宇宙物理学研究センター）

M.S.	Int.J.Mod.Phys.A34 (2019)1950126
M.S., 杉本裕司(POSTECH)	Eur.Phys.J.C80 (2020) 789
M.S., 杉本	Nucl.Phys.B956 (2020) 115019
本多正樹（早大先進理工), M.S.	Int.J.Mod.Phys.A 35 (2020) 2050176
本多, M.S., 遠島大樹（弘前大）	Adv.High Energy Phys. (2021) 9993903
M.S., 杉本, 鵜沢報仁(関西学院大)	Phys.Rev.D 106 (2022) 8, 086006
M.S., 鵜沢	Phys.Rev.D 107 (2023) 6, 066023
M.S., 遠島	arXiv:2301.08952
長崎晃一（弘前大), M.S.	arXiv:2309.10394
畠山洸太（京大理), M.S., 田中豪太（明治学院大)	arXiv:2404.19413
長崎, M.S.	in preparation
M.S., 竹内万記（山口大）	in preparation

動機

弦理論における真空

- 弦理論には、摂動論的に安定な真空が無数に ($> 10^{500}$) ある (弦理論のランドスケープ)。
- 摂動論は極小のまわりでのみ定義されているので、摂動論では真の真空 (余剰次元の幾何) は決定できない。よって摂動論は4次元の物理に対する予言ができない。
- 非摂動論的に定式化された弦理論では、真の真空が決定できると考えられている。
- 本講演では、弦幾何理論から弦背景ポテンシャルを導出する。

弦理論の非摂動論的定式化の候補

このポテンシャルの最小を与える弦背景が、真の真空。



弦幾何理論のレビュー

弦幾何理論の動機

弦理論の基本的問題

6次元余剰空間を決定するような弦理論の非摂動論的な定式は何か



弦理論における時空とは何かを考える必要がある

弦の摂動論では

- 時空は点で構成される
- 粒子は弦で構成される



自然な拡張：量子時空は弦のゆらぎをもつ

弦の非摂動論的定式では、時空も弦で構成される

弦幾何理論の原理

弦幾何理論では、粒子だけでなく時空も弦で構成される

弦幾何理論で導出されたこと

- 弦幾何理論は弦理論の非摂動論的定式化の候補の一つ。 M.S. (2019)
- 一つの弦幾何理論のType IIA, IIB, SO(32) I, E8xE8 het, SO(32)het チャートにおける平坦に近い弦背景配位の周りの揺らぎから**平坦に近い背景中のType IIA, IIB, SO(32) I, E8xE8 het, SO(32) het 摂動論的超弦理論の経路積分**が導出される。 M.S. (2019)、 M.S., Y. Sugimoto, K. Uzawa (2022)



スペクトラム、任意次数までの散乱振幅の経路積分が導出されている。

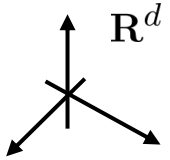
- 摂動的真空間のT双対性の拡張のT対称性により、弦幾何理論の作用は強く縛られる。
M.S., T. Tohshima (2023)
- 時空と粒子を統一する。(マクロには弦多様体そのものが時空、弦多様体のゆらぎが粒子。) M.S. (2019)

弦多様体

※プレゼンのため、閉じたボソンセクターのみ。
理論は超対称で、開弦も含む。

弦で構成された無限次元多様体

有限次元多様体のモデル空間



弦多様体のモデル空間

$$\{[\bar{\tau}, \bar{h}, X(\bar{\tau})]\}$$

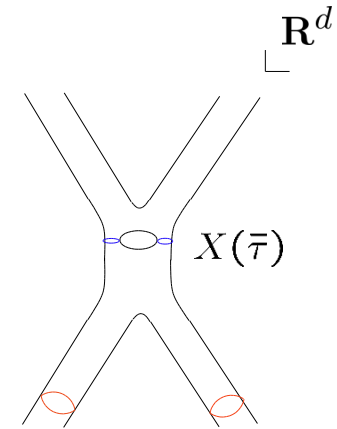
3種の座標

- $\bar{\tau}$: 弦幾何時間 $\in \mathbf{R}$
- h : 世界面 Σ 上の計量 ※ h は離散変数

$$\Sigma|_{\bar{\tau}} \cong S^1 \cup \dots \cup S^1$$

弦幾何時間 $\equiv \Sigma$ 上の大域的時間

- $X(\bar{\tau}) : \Sigma|_{\bar{\tau}} \rightarrow \mathbf{R}^d$: 弦の多体状態



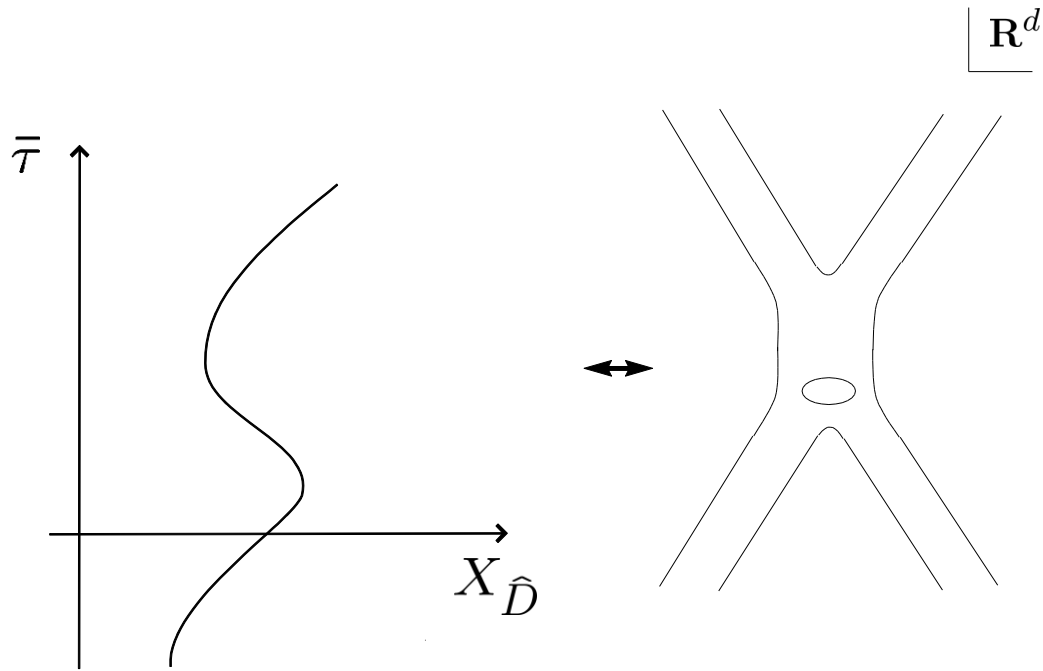
- 弦多様体は、モデル空間の開集合を張り合わせて構成される。

弦幾何理論における摂動弦

- モデル空間の漸近的な曲線は $\mathbb{R}^d$ 中のリーマン面を表す。



モジュライ空間を正しく再現



弦幾何理論

- $Z = \int \mathcal{D}G \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}B e^{-S}$

$$S = \int \mathcal{D}h \mathcal{D}\bar{\tau} \mathcal{D}X(\bar{\tau}) \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left[R + 4\nabla_I \Phi \nabla^I \Phi - \frac{1}{2} |\mathbf{H}|^2 \right]$$

→ T対称性により強く制限されている
M.S., T. Tohshima (2023)

- R : 弦多様体上の計量 G_{IJ} のスカラー曲率

- Φ : 弦多様体上のスカラー

- H : 弦多様体上の B 場の場の強さ

$$\nabla_I \Phi \nabla^I \Phi = \nabla_d \Phi \nabla^d \Phi + \int d\bar{\sigma} \bar{e} \nabla_{(\mu \bar{\sigma})} \Phi \nabla^{(\mu \bar{\sigma})} \Phi$$

→ 無限次元の足

弦幾何理論からの 曲がった一般背景上の摂動論的弦の経路積分の導出

物理的自由度の同定

- 背景周りのゆらぎを考える： $G_{MN} = \bar{G}_{MN} + \tilde{h}_{MN}$
- 一般座標変換不変性を調和ゲージに固定： $\bar{\nabla}^M \tilde{\psi}_{MN} = 0$ $(\tilde{\psi}_{MN} := \tilde{h}_{MN} - \frac{1}{2} \bar{G}^{IJ} \tilde{h}_{IJ} \bar{G}_{MN})$
- 弦の自由度： $\tilde{\psi}_{dd}$
他の揺らぎは0とおく
- 摂動論的真空

$$\bar{G}_{(\mu\bar{\sigma})(\nu\bar{\sigma}')} = G_{\mu\nu}(X(\bar{\sigma})) \frac{\bar{e}^3}{\sqrt{\bar{h}}} \delta_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}'} \quad G_{\mu\nu}(x), B_{\mu\nu}(x), \Phi(x) : \text{弦背景}$$

$$\bar{B}_{(\mu\bar{\sigma})(\nu\bar{\sigma}')} = B_{\mu\nu}(X(\bar{\sigma})) \frac{\bar{e}^3}{\sqrt{\bar{h}}} \delta_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}'}$$

$$\bar{\Phi} = \int d\bar{\sigma} \bar{e} \Phi(X(\bar{\sigma}))$$

$$\bar{G}_{dd} = e^{2\phi} \quad \phi \text{ は後で決定される}$$

他は0

プロパゲーター

- $\tilde{\psi}_{dd}$ をシフト $\tilde{\psi}_{dd} \rightarrow \tilde{\psi}_{dd} + f$ して1次項を消去 (条件 1)



$\tilde{\psi}_{dd}$ に対応する背景 ϕ が **on-shell**

- 結果、作用は

$$S = S_0 + \int \mathcal{D}\bar{\tau} \mathcal{D}\bar{h} \mathcal{D}X(\bar{\tau}) \tilde{\psi}_{dd} H\left(-i\frac{1}{\bar{e}}\frac{\partial}{\partial X}, -i\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}, X, \bar{h}\right) \tilde{\psi}_{dd}$$

ただし

$$\begin{aligned} H\left(-i\frac{1}{\bar{e}}\frac{\partial}{\partial X}, -i\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}, X, \bar{h}\right) &= \frac{1}{2} \int d\bar{\sigma} \sqrt{\bar{h}} \bar{G}^{\mu\nu} \left(-i\frac{1}{\bar{e}}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\right) \left(-i\frac{1}{\bar{e}}\frac{\partial}{\partial X^\nu}\right) - \frac{1}{2} e^{-2\phi} \left(-i\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}\right)^2 \\ &\quad + \int d\bar{\sigma} \bar{n}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\sigma}} X^\mu \bar{e} \left(-i\frac{1}{\bar{e}}\frac{\partial}{\partial X^\mu}\right) + \int d\bar{\sigma} i \frac{\sqrt{\bar{h}}}{\bar{e}^2} \partial_{\bar{\sigma}} X^\rho B_{\rho\mu}(X(\bar{\sigma})) G^{\mu\nu}(X(\bar{\sigma})) \bar{e} \left(-i\frac{1}{\bar{e}}\frac{\partial}{\partial X^\nu}\right) \\ &\quad + U[X] \end{aligned}$$

微分を含まない項

- プロパゲーター $\Delta_F(\bar{h}, X(\bar{\tau}), \bar{\tau}; \bar{h}', X'(\bar{\tau}'), \bar{\tau}') = \langle \tilde{\psi}_{dd}(\bar{h}, X(\bar{\tau}), \bar{\tau}), \tilde{\psi}_{dd}(\bar{h}', X'(\bar{\tau}'), \bar{\tau}') \rangle$
が満たすべき微分方程式

$$H\left(-i\frac{1}{\bar{e}}\nabla, -i\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}, X(\bar{\tau}), \bar{h}\right) \Delta_F(\bar{h}, X(\bar{\tau}), \bar{\tau}; \bar{h}', X'(\bar{\tau}'), \bar{\tau}') = \delta(\bar{h} - \bar{h}') \delta(X(\bar{\tau}) - X'(\bar{\tau}')) \delta(\bar{\tau} - \bar{\tau}')$$

2点相関関数

- 弦の摂動論の導出のため、第一量子化の形式に移る。つまり、プロパゲーターをシュインガー表示する。

演算子 $(\hat{h}, \hat{X}, \hat{\tau})$ 共役運動量 $(\hat{p}_{\bar{h}}, \hat{p}_X, \hat{p}_{\bar{\tau}})$ 固有状態 $|\bar{h}, X, \bar{\tau}\rangle$ 、 $|p_{\bar{h}}, p_X, p_{\bar{\tau}}\rangle$

- $H\left(-i\frac{1}{e}\nabla, -i\frac{\partial}{\partial\bar{\tau}}, X(\bar{\tau}), \bar{h}\right)\Delta_F(\bar{h}, X(\bar{\tau}), \bar{\tau}; \bar{h}', X'(\bar{\tau}'), \bar{\tau}') = \delta(\bar{h} - \bar{h}')\delta(X(\bar{\tau}) - X'(\bar{\tau}'))\delta(\bar{\tau} - \bar{\tau}')$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned}\Delta_F(\bar{h}, X(\bar{\tau}), \bar{\tau}; \bar{h}', X'(\bar{\tau}'), \bar{\tau}') &= \langle \bar{h}, X(\bar{\tau}), \bar{\tau} | H^{-1}(\hat{p}_X(\bar{\tau}), p_{\bar{\tau}}, \hat{X}(\bar{\tau}), \hat{h}) | \bar{h}', X'(\bar{\tau}'), \bar{\tau}' \rangle \\ &= \int_0^\infty dT \langle \bar{h}, X(\bar{\tau}), \bar{\tau} | e^{-T\hat{H}} | \bar{h}', X'(\bar{\tau}'), \bar{\tau}' \rangle.\end{aligned}$$

一般座標変換不変状態の2点関数 (Xについては最後に積分)

$$\Delta_F(X_f; X_i | h_f; h_i) := \int_0^\infty dT \langle X_f | h_f; h_i \rangle_{\text{out}} e^{-T\hat{H}} | X_i | h_f; h_i \rangle_{\text{in}}$$

$$\text{ただし、} \quad | X_i | h_f; h_i \rangle_{\text{in}} := \int_{h_i}^{h_f} \mathcal{D}h' | \bar{h}', X_i, \bar{\tau}' = -\infty \rangle$$

$$\langle X_f | h_f; h_i \rangle_{\text{out}} := \int_{h_i}^{h_f} \mathcal{D}h \langle \bar{h}, X_f, \bar{\tau} = \infty |$$

経路積分表示

- 経路積分表示

$$\Delta_F(X_f; X_i | h_f; h_i) = \int_{h_i X_i, -\infty}^{h_f X_f, \infty} \mathcal{D}h \mathcal{D}X(\bar{\tau}) \mathcal{D}\bar{\tau} \int \mathcal{D}T \int \mathcal{D}p_T \mathcal{D}p_X(\bar{\tau}) \mathcal{D}p_{\bar{\tau}} \\ \exp \left(- \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(-ip_T(t) \frac{d}{dt} T(t) - ip_{\bar{\tau}}(t) \frac{d}{dt} \bar{\tau}(t) - ip_X(\bar{\tau}, t) \cdot \frac{d}{dt} X(\bar{\tau}, t) + T(t) H(p_{\bar{\tau}}(t), p_X(\bar{\tau}, t), X(\bar{\tau}, t), \bar{h}) \right) \right)$$

- p_X を積分することで、正準形式からラグランジュ形式へ移る。

$$p_{X\mu} = \frac{\bar{e}}{\sqrt{\bar{h}}} G_{\mu\nu} \left(\frac{1}{T} \frac{dX^\nu}{dt} - T \bar{n}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\sigma}} X^\nu \right) - i \frac{1}{\bar{e}} \partial_{\bar{\sigma}} X^\nu B_{\nu\mu}$$

曲がった背景中での弦の摂動論の経路積分

$$\Delta_F(X; X') = Z \int_{X'}^X \mathcal{D}h \mathcal{D}X e^{-S_s}$$

$$S_s = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d\sigma \sqrt{h(\sigma, \tau)} \frac{1}{2} \left(\left(h^{mn}(\sigma, \tau) G_{\mu\nu}(X(\sigma, \tau)) + i\epsilon^{mn}(\sigma, \tau) B_{\mu\nu}(X(\sigma, \tau)) \right) \partial_m X^\mu(\sigma, \tau) \partial_n X^\nu(\sigma, \tau) \right. \\ \left. + \alpha' R_{\bar{h}} \Phi(X(\sigma, \tau)) \right)$$

を得る。

ここで摂動論的真空 ϕ を選んだ (条件2) **ワイル不変性**

一般背景中の弦の任意次数までの摂動論の経路積分が導出された。

弦幾何理論からの弦背景ポテンシャル

弦幾何理論からの弦背景ポテンシャルの導出

- 弦幾何理論の古典作用を摂動論的真空に制限した S_0 は弦幾何時間 τ に依らないので
 $V = -S_0$ は弦背景ポテンシャル

※弦幾何理論の古典ポテンシャルだが、弦幾何理論ではtree levelで全オーダー散乱振幅を導出できたので、弦理論の量子論的情報を全て含む。

- 単純化のため、粒子極限 $X^\mu(\sigma, \tau) \rightarrow x^\mu$ をとる

このとき
$$\int \mathcal{D}X \rightarrow \frac{1}{2\kappa_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-G(x)}$$

条件の解

- (条件1 : ϕ が on-shell) $\nabla^2 f = -e^{-\Phi+\phi/2}(\nabla^2 \phi + (\partial\phi)^2)$
(条件2 : Weyl不変性) $R - \frac{1}{2}|H|^2 - \frac{1}{2}\nabla^2 \phi + \frac{\alpha}{2}(\partial\phi)^2 - 3\nabla^2 \Phi + 11(\partial\Phi)^2 + \frac{17}{2}\partial\Phi\partial\phi = 0$
を解く

- 平坦周りの ϵ 展開

$$|H|^2 = \epsilon |\tilde{H}|^2 \quad G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon \tilde{g}_{\mu\nu} \quad \Phi = \epsilon \tilde{\Phi}$$

- 解 (簡単のため2次まで、具体形は省略)

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2$$

$$f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2$$



$$V = \int d^{10}x \sqrt{-G} \left[-e^{-2\Phi+\phi} \left(R - \frac{1}{2}|H|^2 - 2\nabla^2 \phi - 2(\partial\phi)^2 + 4(\partial\Phi)^2 \right) + e^{-\Phi+\phi/2} (\nabla^2 \phi + (\partial\phi)^2) f \right]$$

弦幾何理論における弦背景ポテンシャル

- 平坦周りの2次までの弦背景ポテンシャルを得る

$$V = \frac{1}{2\kappa_{10}} \int d^{10}x \sqrt{-G} \left(\left(-\frac{3}{2} - f_0\right)(|H|^2 - 2R) - (542 + 270f_0)\phi(|H|^2 - 2R) + (1540 + 778f_0)(\partial\phi)^2 \right) \\ + \frac{1}{(2\kappa_{10})^2} \int d^{10}x \sqrt{-G} \int d^{10}x' \sqrt{-G'} \left(-\frac{97}{2} - 24f_0 \right) (|H|^2 - 2R) G(x; x') (|H'|^2 - 2R')$$

multilocal: 量子重力の有効ポテンシャルの典型的な形の実現

Coleman(1988), Asano-Kawai-Tsuchiya(2012), Hamada-Kawai-Kawana(2014)

ここで $\begin{cases} f_0 : \text{任意定数} \\ \Delta G(x; x') = \delta(x - x') \end{cases}$

- 弦幾何時間に依らないので弦背景の有効理論は弦背景ポテンシャルである。
- 超重力解の中で、ポテンシャル最小を与えるものを選ばれる。

ゆらぎの無矛盾性（ワイル不変性）をみたす背景
一般には時間 t に依存



真の真空！

弦幾何理論は時間依存する弦背景を決定する非摂動効果を含む。

我々の宇宙

ヘテロ弦背景ポテンシャル

- 簡単のため、ヘテロ真空に限定
- どのような6次元余剰空間が選ばれるのかを効率よく調べるため、ワープドコンパクト化を仮定
$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{-2A(y)} G_{mn}(y) dy^m dy^n$$
- 平坦周りの ϵ 展開、8次まで
$$G_{mn} = \eta_{mn} + \epsilon g_{mn} \quad A = \epsilon a \quad B_{mn} = \epsilon b_{mn} \quad \Phi = \epsilon \phi \quad A_m = \epsilon a_m$$
- プレゼンの簡単のため、
$$R = 0 \quad \partial_m \phi = 0 \quad \tilde{H} = 0 \quad \text{tr}|F|^2 = \text{const.} \quad a = 0 \quad \int d^6x \sqrt{g} G(x; x') = -1/\Lambda_{IR}^2 \text{ の時、}$$

$$\begin{aligned} V = \frac{V_4}{2\kappa_{10}} \int d^6x & \left[(-3 - 2f_0) \text{tr}|F|^2 + \left(-\frac{1653}{2} - 413f_0 \right) \Phi(\text{tr}|F|^2) + (194 + 96f_0) \frac{1}{\Lambda_{IR}^2} (\text{tr}|F|^2)^2 + \left(-\frac{334069}{8} - 21244f_0 \right) \Phi^2(\text{tr}|F|^2) \right. \\ & + (38477 + 19359f_0) \frac{1}{\Lambda_{IR}^2} \Phi(\text{tr}|F|^2)^2 + \left(-\frac{5864759}{48} - \frac{1290569}{24} f_0 \right) \Phi^3(\text{tr}|F|^2) \\ & - (9069 + 4511f_0) \left(\frac{1}{\Lambda_{IR}^2} \right)^2 (\text{tr}|F|^2)^3 + \left(\frac{3909205}{2} + \frac{3955979f_0}{4} \right) \frac{1}{\Lambda_{IR}^2} \Phi^2(\text{tr}|F|^2)^2 + \left(\frac{53306871569}{384} + \frac{13303989739}{192} f_0 \right) \Phi^4(\text{tr}|F|^2) \\ & + \left(-\frac{3608337}{2} - 907620f_0 \right) \left(\frac{1}{\Lambda_{IR}^2} \right)^2 \Phi(\text{tr}|F|^2)^3 + \left(\frac{1579632661}{8} + \frac{1206052111}{12} f_0 \right) \frac{1}{\Lambda_{IR}^2} \Phi^3(\text{tr}|F|^2)^2 \\ & + \left(-\frac{81568155846721}{3840} - \frac{6840475314449}{640} f_0 \right) \Phi^5(\text{tr}|F|^2) \\ & + \left(425508 + \frac{636005}{3} f_0 \right) \left(\frac{1}{\Lambda_{IR}^2} \right)^3 (\text{tr}|F|^2)^4 + \left(\frac{412490741}{8} + \frac{104079829}{4} f_0 \right) \left(\frac{1}{\Lambda_{IR}^2} \right)^2 \Phi^2(\text{tr}|F|^2)^3 \\ & \left. + \left(-\frac{1423530383873}{48} - \frac{119898064305}{8} f_0 \right) \frac{1}{\Lambda_{IR}^2} \Phi^4(\text{tr}|F|^2)^2 + \left(\frac{10365229603350959}{46080} + \frac{1306473484726133}{11520} f_0 \right) \Phi^6(\text{tr}|F|^2) \right] \end{aligned}$$

- デイラトン期待値が決まる！

弦幾何現象論

弦背景ポテンシャルの最小が弦理論のランドスケープ、つまり 10^{500} 個以上あるとされる摂動論的真空のうち、真の真空を決定する。

愚直に解析的に調べるのはほぼ不可能。



- 数値計算（一般的に探せる）

レジエカリキュラスによりポテンシャルを離散化、遺伝的アルゴリズムで最適化、強化学習で高速化
(with 畠山光汰 (京大理)、田中豪太 (明治学院)、長崎晃一 (弘前))

- 弦幾何現象論

領域を限って解析的に探す。その領域が真の真空を含んでいれば領域内の最小が真の真空を与える。

領域を限る操作が重要であり、そこに現象論が必要となる。

標準模型を含むような4次元理論を与える弦現象論の6次元多様体を仮定してその中で最小を探す。

with 竹内万記 (山口) ($S^2 \times S^2 \times H^2/\Gamma$)

増田暢 (工学院) (IIB、カラビヤウオリエンティフォルドと分数ブレーン)



6次元多様体、フラックス、Dブレーン配位を決定



余剰次元を積分してコンパクト化

(3+1)次元有効作用を決定



現象論的解析

弦理論初の物理現象予言

結論

結論

- 弦幾何理論において、一般の弦背景を含む弦理論の摂動論的真空を同定した。
- その真空の周りのゆらぎから、任意次数までの弦背景上の摂動弦の経路積分を導出した。
- 摂動論的真空を具体的に得るための微分方程式を導出した。
- 微分方程式を場の 8 次まで解き、弦幾何理論のポテンシャルを摂動論的真空に制限することで場の 8 次までの弦背景ポテンシャルを得た。ポテンシャルはディラトンの期待値も含めて決定できる。

- 弦幾何理論のインスタントン遷移は弦理論の非摂動論的效果： $Z \sim e^{-S_0} = e^V \sim e^{-1/g_s^2}$
 $\bar{\Phi} = \ln g_s$