

O(3)非線形シグマ模型と非可換ボソン化の汎函数くりこみ群による解析

京都大学理学研究科素粒子論研究室修士課程 2 回 清水慧人
Junichi Haruna, KS and Masatoshi Yamada arXiv: 2405.14627[hep-th]

0. 概要

- 2フレーバー自由フェルミオン系, U(2)WZWモデル, $\theta(=\pi)$ 項付きのO(3)非線形シグマ模型+自由ボソン系は等価
- これらの双対性を汎函数くりこみ群を用いて調べるには①標的空間の非線形性② θ 項のトポロジカル性という2つの問題を処理する必要がある
- 標的空間を拡張することによって汎函数くりこみ群を適用可能にし, 非可換ボソン化との整合性を確かめる

1. 非可換ボソン化

ボソン化... **フェルミオンの理論をボソンの理論へ**
フェルミオンの理論と演算子の組($S_f, \{O_f\}$)

$$\langle O_{f1} \cdots O_{fn} \rangle_{S_f} = \langle O_{b1} \cdots O_{bn} \rangle_{S_b}$$

ボソンの理論と演算子の組($S_b, \{O_b\}$)

例) 非可換ボソン化 (in 2-dim)

... Nフレーバー自由フェルミオン系とU(N)WZWモデル:

$$S_f = \int \bar{\psi}_i i \gamma_\mu \partial_\mu \psi_i$$



$$S_b = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \text{Tr}(\partial_\mu g \partial_\mu g^{-1}) - \frac{i}{12\pi} \int_B \text{Tr}(\tilde{g} d\tilde{g}^{-1})^3$$

- $g, \tilde{g} \in \text{U}(N), \tilde{g}|_{\partial B=\mathbb{R}^2} = g$
- フェルミオンの $\text{U}(N)_L \times \text{U}(N)_R$ 対称性はボソンの $g \rightarrow g_L \cdot g \cdot g_R, g_{L,R} \in \text{U}(N)$ という対称性に

- U(N)をU(1)とSU(N)に分離 ($g = e^{i\varphi} \hat{g}, \hat{g} \in \text{SU}(N)$)

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \text{Tr}(\partial_\mu \hat{g} \partial_\mu \hat{g}^{-1}) - \frac{i}{12\pi} \int_B \text{Tr}(\tilde{g} d\tilde{g}^{-1})^3 + \frac{N}{2} \int (\partial_\mu \varphi)^2$$

→ SU(N)WZW作用と1フレーバー自由ボソンの理論

特にN=2の場合には別の双対性

... **SU(2)WZWモデルと θ 項付きのO(3)非線形シグマ模型:**

$$S_b = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \text{Tr}(\partial_\mu g \partial_\mu g^{-1}) - \frac{i}{12\pi} \int_B \text{Tr}(\tilde{g} d\tilde{g}^{-1})^3$$



$$S_{NL+\theta} = \frac{1}{8\pi} \int (\partial_\mu \phi_i)(\partial_\mu \phi_i) + \frac{i\theta}{48\pi} \int \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{ijk} \phi_i (\partial_\mu \phi_j) (\partial_\nu \phi_k)$$

- $\phi_i \phi_i = 1$, 双対性は $\theta = \pi$ で成立

2. 汎函数くりこみ群(FRG)

上の3つの双対性は摂動論に依らず正しい

→ くりこみ群の観点から理解するなら非摂動的に

FRG... **非摂動的, 系統的にRGフローを調べる計算手法**

1. カットオフを理論に導入

→ カットオフを導入した作用から1PI有効作用 Γ_k を構成

2. カットオフに関する微分方程式を立てる

→ **Wetterich方程式:**

R_k : カットオフ関数

$$k \partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_i \delta \phi_j} + R_k \delta_{ij} \right)^{-1} k \partial_k R_k \right]$$

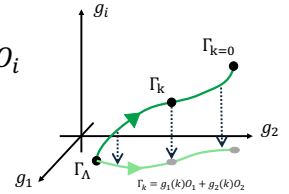
3. 演算子空間で展開

$$\rightarrow \Gamma_k = \sum g_i(k) O_i, \partial_k \Gamma_k = \sum (\partial_k g_i) O_i$$

4. 理論空間を制限(truncation)

$$\rightarrow \Gamma_k = g_1(k) O_1 + \cdots + g_n(k) O_n$$

5. β 関数を読み取る



3. FRG適用上の問題

FRGを適用するモデル: θ 項付きのO(3)非線形シグマ模型

1. 場の標的空間が球面上に制限: $\phi_i \phi_i = 1$

- 補助場の導入 → 余計な自由度が発生
- 背景場の方法 → 極めて複雑

2. θ 項はトポロジカル

- 汎函数微分が消えるためRGフローに寄与しない (ように見える, これはWittenの解析と矛盾)

共に標的空間が球面に制限されていることが原因

→ **標的空間を球面から $\mathbb{R}^3$ に拡張すれば形式上は解決**

→ 適切なポテンシャル項を入れる(truncation)ことにより**RGフローの結果として標的空間を制限する**

4. FRGセットアップとRGフローの構造

• truncation

$$\Gamma_k = \int_x \left[\frac{Z}{2} (\partial_\mu \phi_i)^2 + \frac{m^2}{2} (\phi_i)^2 \right] + i\theta \int_x \epsilon_{ijk} \epsilon_{\mu\nu} \phi_i (\partial_\mu \phi_j) (\partial_\nu \phi_k) + \int_x \left[\frac{\tilde{\lambda}_3}{24} (\phi_i \phi_i)^2 + \frac{\lambda_1}{24} (\phi_i)^2 (\partial_\mu \phi_i)^2 + \frac{\lambda_2}{24} (\phi_i \partial_\mu \phi_i)^2 \right]$$

• カットオフ関数: $R_k(p) = Z(k^2 - p^2) \Theta(k^2 - p^2)$

• β 関数を求めると物理的な固定点が2つ見つかる

固定点	$\tilde{m}_*^2$	$\tilde{\theta}_*$	$\tilde{\lambda}_{1*}$	$\tilde{\lambda}_{2*}$	$\tilde{\lambda}_{3*}$	η_*
Gauss固定点	0	0	0	0	0	0
非自明固定点	-0.17 ± 0.096	0.17	1.77	1.6	0.045	

• 非自明固定点周りでの臨界指数

固有値	1.8	0.092	$-2.9 \pm 1.1i$	-0.50
固有ベクトル	$\tilde{m}^2$	1.0	-0.011	0.94
	$\tilde{\theta}$	0.0050	1.0	$-0.016 \pm 0.071i$
	$\tilde{\lambda}_1$	0.0034	0.039	$0.0010 \mp 0.10i$
	$\tilde{\lambda}_2$	-0.0013	-0.0077	$0.046 \mp 0.087i$
	$\tilde{\lambda}_3$	0.056	0.00038	$-0.31 \pm 0.034i$
				0.000035

• 質量変形方向の臨界指数

~非可換ボソン化の予言**1.5**(正準次元は2)

• θ 項の臨界指数~非可換ボソン化の予言**0**

→ **非可換ボソン化と整合的**

outlook: truncationの改善で臨界指数の収束を確認する