

Wetterich 方程式に対する無固定点定理

大谷聡¹, 田中太一²

¹ 日本大学量子科学研究所, ² 日本大学大学院理工学研究科

1. 研究の背景と目的

繰り込み群は「繰り込み群変換」と呼ばれる分配関数を変変に保つ変換の集合であるが、その定義には主に2つの流儀が存在する。1つ目は K. G. Wilson が 1970 年代に導入したもので、彼の繰り込み群変換は (i) 粗視化, (ii) スケール変換, (iii) 場の再規格化の3つからなるものである [1]。もう1つは J. Polchinski が 1980 年代に4次元 ϕ^4 理論の摂動論的繰り込み可能性を証明する際に使用した Wilson 作用に対するフロー方程式 (Polchinski 方程式) [2] が依拠する繰り込み群変換で、これは粗視化のみからなる変換である。どちらも「繰り込み群変換」と呼ばれ混同されることも多いが、この2つは全く異なる。その決定的違いは、前者には固定点が存在し得るが後者には固定点は存在し得ないという点である [3]。特に連続極限でもって場の理論を非摂動論的に定義する際に用いるのは Wilson の繰り込み群変換であり、Polchinski の繰り込み群変換ではない。

ところで繰り込み群変換の無限小形であるフロー方程式には幾つか種類があり、そのうちの1つに Wetterich 方程式と呼ばれるものが存在する [4]。これは有効平均作用 (Wilson 作用の凸部分を Legendre 変換したもの) と呼ばれる量に対するフロー方程式で、本質的に Polchinski 方程式と等価である。したがってこの方程式にも固定点は存在しない。しかし (我々の知る限り) この事実は全く認識されておらず、その証明も無かった。本研究では有効平均作用の凸性を用いて、Wetterich 方程式に固定点が存在しないことを非摂動論的に証明する。

[1] K. G. Wilson and J. B. Kogut, Phys. Rept. **12** (1974) 75–199.

[2] J. Polchinski, Nucl. Phys. B **231** (1984) 269–295.

[3] Y. Igarashi, K. Itoh, and H. Sonoda, Prog. Theor. Phys. Suppl. **181** (2010) 1–166.

[4] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301** (1993) 90–94.

2. Wilson 作用 S_t とその凸部分 W_t

簡単のため以下では Euclid 空間上の実スカラー場 ϕ のカットオフ理論を考える。まず裸の作用 $S[\phi]$ と分配関数 Z は次で与えられる。

$$S[\phi] = \frac{1}{2}(\phi, \Delta^{-1}\phi) + V[\phi]$$

$$Z = \int [d\phi] \, \mathrm{e}^{-S[\phi]}$$

ただし、 $(f, g) := \int d^Dx f(x)g(x)$ は実関数の内積を表す。また Δ は正定値演算子で、その行列要素は次で定義される。

$$\Delta(x, y) := \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{K(\frac{|p|}{\Lambda})}{p^2} \mathrm{e}^{ip(x-y)}$$

ここで $0 < K(x) \leq 1$ はカットオフ関数で、 $x \leq 1$ に対してはほぼ 1, $x > 1$ で急激にゼロに収束する任意の単調減少関数である。このカットオフ関数の存在により、汎関数積分 (1b) のうち運動量が $|p| \gtrsim \Lambda$ のモードは実質寄与しない。

次に任意の正定値演算子 A , A_1 , A_2 (ただし $A = A_1 + A_2$) に対して成り立つ積分公式

$$\int \frac{[d\phi]}{\sqrt{\det(2\pi A)}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\phi, A^{-1}\phi) - V[\phi]} = \int \frac{[d\phi_1]}{\sqrt{\det(2\pi A_1)}} \int \frac{[d\phi_2]}{\sqrt{\det(2\pi A_2)}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\phi_1, A_1^{-1}\phi_1) - \frac{1}{2}(\phi_2, A_2^{-1}\phi_2) - V[\phi_1 + \phi_2]}$$

を用いると、式 (1b) の汎関数積分のうち運動量が $\mathrm{e}^{-t} \Lambda \lesssim |p| \lesssim \Lambda$ (ただし $t > 0$) の高運動量モードだけの積分 (粗視化) が実行できて、分配関数は $Z = \int [d\phi_1] \, \mathrm{e}^{-S_t[\phi_1]}$ と書き直せる。ただし、 $S_t[\phi]$ は Wilson 作用と呼ばれる量で次式で定義される。

$$\mathrm{e}^{-S_t[\phi]} := \text{const.} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\phi, \Delta_t^{-1}\phi)} \int [d\phi_2] \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\phi_2, (\Delta - \Delta_t)^{-1}\phi_2) - V[\phi + \phi_2]} \quad \text{with} \quad \Delta_t(x, y) := \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{K(\frac{|p|}{\Lambda}) \mathrm{e}^t}{p^2} \mathrm{e}^{ip(x-y)}$$

写像 $S \mapsto S_t$ (ただし $t \geq 0$) が分配関数を変変に保つ粗視化のみからなる繰り込み群変換である。導出はしないが、この写像の無限小形が Polchinski 方程式である。

さて、ここで式 (4) の積分変数を ϕ_2 から $\varphi := \phi + \phi_2$ に変数変換すると、Wilson 作用は次のように書けることがわかる。

$$S_t[\phi] = \frac{1}{2}(\phi, [\Delta_t^{-1} + (\Delta - \Delta_t)^{-1}]\phi) - W_t[(\Delta - \Delta_t)^{-1}\phi] + \text{const.}$$

ただし、 W_t は次式で定義される汎関数である。

$$\mathrm{e}^{W_t[J]} := \int [d\varphi] \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\varphi, (\Delta - \Delta_t)^{-1}\varphi) - V[\varphi] + (J, \varphi)} = \int [d\varphi] \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\varphi, R_t\varphi) - S[\varphi] + (J, \varphi)} \quad \text{with} \quad R_t := (\Delta - \Delta_t)^{-1} - \Delta^{-1}$$

R_t はレギュレータと呼ばれる正定値演算子で、 t の単調減少関数である。重要なのは、式 (6) で定義される $W_t[J]$ は J に関して狭義凸である、という点である。実際、Hölder の不等式を用いると次の不等式が成り立つことが言える (補遺 A 参照)。

$$W_t[(1 - \alpha)J_1 + \alpha J_2] < (1 - \alpha)W_t[J_1] + \alpha W_t[J_2], \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad \forall J_1 \neq J_2$$

以上により Wilson 作用 S_t から凸部分 W_t が分離できた。以下では S_t に対するフロー方程式 (Polchinski 方程式) ではなく、それと本質的に等価な W_t の凸共役に対するフロー方程式 (Wetterich 方程式) を考える。

3. 有効平均作用 Γ_t と Wetterich 方程式

W_t は凸なのでその凸共役 Γ_t が存在する。これは有効平均作用と呼ばれ、次の最大化問題 (Legendre 変換) で定義される。

$$\Gamma_t[\Phi] := \max_J ((J, \Phi) - W_t[J]) = (J_t[\Phi], \Phi) - W_t[J_t[\Phi]]$$

ただし、 $J_t[\Phi]$ は $(J, \Phi) - W_t[J]$ を最大化する J である。このようにして定義された Γ_t の t 依存性は W_t の t 依存性と等しい。実際、次が成り立つ。

$$\frac{\partial \Gamma_t[\Phi]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} ((J_t[\Phi], \Phi) - W_t[J_t[\Phi]]) = \cdots = - \left. \frac{\partial W_t[J]}{\partial t} \right|_{J=J_t[\Phi]}$$

ここで、 W_t の t 依存性はフロー方程式で決定される。まず $\mathrm{e}^{W_t[J]}$ に対するフロー方程式は次で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{e}^{W_t[J]} = \frac{1}{2} \int [d\phi] \, (\phi, -\dot{R}_t\phi) \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\phi, R_t\phi) - S[\phi] + (J, \phi)} = \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left(-\dot{R}_t \frac{\delta^2}{\delta J \delta J} \mathrm{e}^{W_t[J]} \right)$$

これより $W_t[J]$ に対する次のフロー方程式が得られる。

$$\frac{\partial W_t[J]}{\partial t} = \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left(-\dot{R}_t \frac{\delta^2 W_t[J]}{\delta J \delta J} \right) + \left(\frac{\delta W_t[J]}{\delta J}, -\dot{R}_t \frac{\delta W_t[J]}{\delta J} \right)$$

ただし $\dot{R}_t := \partial R_t / \partial t$ であり、 $\frac{\delta^2 W_t[J]}{\delta J \delta J}$ は行列要素が $\frac{\delta^2 W_t[J]}{\delta J(x) \delta J(y)}$ で与えられる演算子である。式 (9) と式 (11) より、有効平均作用は次のフロー方程式を満たすことが言える。

$$\frac{\partial \Gamma_t[\Phi]}{\partial t} = - \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left(-\dot{R}_t \left(\frac{\delta^2 \Gamma_t[\Phi]}{\delta \Phi \delta \Phi} \right)^{-1} \right) - \frac{1}{2} (\Phi, -\dot{R}_t \Phi)$$

これが Wetterich 方程式である。ただしこのフロー方程式には固定点は存在しない。最後にこれを非摂動論的に証明しよう。

注意 1. 有効平均作用の定義には複数の流儀があり、 $\Gamma_{t,t}[\Phi] := \Gamma_t[\Phi] - \frac{1}{2}(\Phi, R_t\Phi)$ を有効平均作用と呼ぶ文献も多い。この場合、フロー方程式は

$$\frac{\partial \Gamma_{t,t}[\Phi]}{\partial t} = - \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left(-\dot{R}_t \left(\frac{\delta^2 \Gamma_{t,t}[\Phi]}{\delta \Phi \delta \Phi} + R_t \right)^{-1} \right)$$

となる。このフロー方程式にも固定点は存在しない。

注意 2. Wetterich 方程式は赤外カットオフ k を変化させていったときのフロー方程式であると説明されることが多い。 k と t の関係は $k = \Lambda \, \mathrm{e}^{-t}$ である。 t に関する単調増加 (単調減少) は k に関する単調減少 (単調増加) に対応する。

4. 無固定点定理

Wetterich 方程式 (12) には固定点 (つまり $\frac{\partial \Gamma_t[\Phi]}{\partial t} = 0$ となる解) は存在しない。以下の定理が成立する。

定理
$\Gamma_t[\Phi]$ を式 (8) で定義される有効平均作用とする。すると、任意の t と Φ に対して次の不等式が成り立つ。
$\frac{\partial \Gamma_t[\Phi]}{\partial t} < 0$
つまり $\Gamma_t[\Phi]$ は t の単調減少関数である。したがって固定点は存在しない。

証明. まずレギュレータ R_t は t の単調減少関数なので $-\dot{R}_t$ は正定値である。つまり任意の $f \neq 0$ に対して次が成り立つ。

$$(f, -\dot{R}_t f) > 0$$

また $W_t[J]$ は J に関して狭義凸なのでその2階微分は正定値である (補遺 A 参照)。したがって次が成り立つ。

$$\left(f, \frac{\delta^2 W_t[J]}{\delta J \delta J} f \right) > 0$$

ところで一般に2つの正定値演算子の積のトレースは正定値である (補遺 B 参照)。よって次が成り立つ。

$$\mathrm{tr} \left(-\dot{R}_t \frac{\delta^2 W_t[J]}{\delta J \delta J} \right) > 0$$

また $-\dot{R}_t$ は正定値なのでその平方根が存在し、次が成り立つ。

$$\left(\frac{\delta W_t[J]}{\delta J}, -\dot{R}_t \frac{\delta W_t[J]}{\delta J} \right) = \left\| \sqrt{-\dot{R}_t} \frac{\delta W_t[J]}{\delta J} \right\|^2 \geq 0$$

ただし、 $\|*\|$ は内積 $(*,*)$ から定まるノルムである。式 (18) の等号が成り立つのは $\sqrt{-\dot{R}_t} \frac{\delta W_t[J]}{\delta J} = 0$ の場合のみであることに注意。式 (17) と (18)、およびフロー方程式 (11) を組み合わせると次の不等式が得られる。

$$\frac{\partial W_t[J]}{\partial t} = \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left(-\dot{R}_t \frac{\delta^2 W_t[J]}{\delta J \delta J} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta W_t[J]}{\delta J}, -\dot{R}_t \frac{\delta W_t[J]}{\delta J} \right) > 0$$

この不等式は任意の J に対して成り立つ。よって $J = J_t[\Phi]$ の時も成り立ち、式 (9) より次の不等式が得られる。

$$\frac{\partial \Gamma_t(\Phi)}{\partial t} = - \left. \frac{\partial W_t[J]}{\partial t} \right|_{J=J_t[\Phi]} < 0$$

つまり $\Gamma_t[\Phi]$ は t の単調減少関数である。したがって $\partial \Gamma_t[\Phi] / \partial t = 0$ となる $\Gamma_t[\Phi]$ は存在しない。 □

注意 1. 式 (17) から $\frac{\partial \Gamma_{t,t}[\Phi]}{\partial t} = -\frac{1}{2} \mathrm{tr} \left(-\dot{R}_t \left(\frac{\delta^2 \Gamma_{t,t}[\Phi]}{\delta \Phi \delta \Phi} + R_t \right)^{-1} \right) < 0$ も成り立つ。

注意 2. 上の証明から明らかのように、 W_t (および Γ_t) が狭義凸である限り固定点は存在しない。逆に言うと、Wetterich 方程式を解く際に有効平均作用の凸性を破るような ansatz をおいてしまうと、あたかも固定点が存在するかのような解が得られる場合はある。

5. まとめ

基本的に粗視化のみからなる繰り込み群変換に固定点は存在しない。Wetterich 方程式は Wilson 作用の凸部分を Legendre 変換したものに対するフロー方程式であり、したがって粗視化の無限小形の1つに過ぎず、固定点は存在しない。本研究では有効平均作用の凸性を用いて Wetterich 方程式に固定点が存在しないことを非摂動論的に証明した。

補遺 A. Hölder の不等式と W_t の狭義凸性

W_t の狭義凸性 (7) は Hölder の不等式の帰結である。まず2つの線形独立な (可積分) 正定値汎関数 $F_1[\phi] > 0$ と $F_2[\phi] > 0$ に対しては、Hölder の不等式は次のように表される。

$$\int [d\phi] (F_1[\phi])^{1-\alpha} (F_2[\phi])^\alpha < \left(\int [d\phi] F_1[\phi] \right)^{1-\alpha} \left(\int [d\phi] F_2[\phi] \right)^\alpha, \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

この不等式は対数関数が狭義凹関数であることの直接の帰結であることに注意。実際、対数関数の狭義凹性

$$\log((1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2) > (1 - \alpha) \log(x_1) + \alpha \log(x_2), \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad \forall x_1 \neq x_2 > 0$$

から2つの異なる任意の正数 x_1, x_2 に対して次の不等式が成り立つ。

$$x_1^{1-\alpha} x_2^\alpha < (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2, \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad \forall x_1 \neq x_2 > 0$$

これより線形独立な2つの正定値汎関数 $F_1[\phi]$, $F_2[\phi]$ に対しても次の不等式が成り立つ。

$$\left(\frac{F_1[\phi]}{N_1} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{F_2[\phi]}{N_2} \right)^\alpha < (1 - \alpha) \frac{F_1[\phi]}{N_1} + \alpha \frac{F_2[\phi]}{N_2}, \quad \text{where} \quad N_i := \int [d\phi] F_i[\phi] > 0$$

Hölder の不等式 (21) は単にこの不等式の両辺を積分したものである。

さて、Hölder の不等式 (21) を用いると、任意の実関数 J_1 と J_2 (ただし $J_1 \neq J_2$) に対して次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{W_t[(1-\alpha)J_1 + \alpha J_2]} &= \int [d\varphi] \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\varphi, R_t\varphi) - S[\varphi] + (1-\alpha)(J_1, \varphi) + \alpha(J_2, \varphi)} \\ &= \int [d\varphi] \, \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\varphi, R_t\varphi) - S[\varphi] + (J_1, \varphi)} \right)^{1-\alpha} \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\varphi, R_t\varphi) - S[\varphi] + (J_2, \varphi)} \right)^\alpha \\ &< \left(\int [d\varphi] \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\varphi, R_t\varphi) - S[\varphi] + (J_1, \varphi)} \right)^{1-\alpha} \left(\int [d\varphi] \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\varphi, R_t\varphi) - S[\varphi] + (J_2, \varphi)} \right)^\alpha \\ &= \mathrm{e}^{(1-\alpha)W_t[J_1] + \alpha W_t[J_2]}, \quad \forall \alpha \in (0, 1) \end{aligned}$$

よって次の不等式が成り立つ。

$$W_t[(1 - \alpha)J_1 + \alpha J_2] < (1 - \alpha)W_t[J_1] + \alpha W_t[J_2], \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad \forall J_1 \neq J_2$$

また、この不等式より任意の J , $f \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$ に対して不等式 $W_t[J] = W_t[\frac{1}{2}(J + \varepsilon f) + \frac{1}{2}(J - \varepsilon f)] < \frac{1}{2}W_t[J + \varepsilon f] + \frac{1}{2}W_t[J - \varepsilon f]$ が成り立ち、これより演算子 $\frac{\delta^2 W_t[J]}{\delta J \delta J}$ が正定値演算子であることも言える。

$$\left(f, \frac{\delta^2 W_t[J]}{\delta J \delta J} f \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{W_t[J + \varepsilon f] + W_t[J - \varepsilon f] - 2W_t[J]}{\varepsilon^2} > 0, \quad \forall f \neq 0, \quad \forall J$$

補遺 B. 2つの正定値演算子の積のトレースの正定値性

A と B を正定値演算子とする。つまり任意の $f \neq 0$ に対して次が成り立つとする。

$$(f, Af) > 0 \quad \text{and} \quad (f, Bf) > 0$$

すると不等式 $\mathrm{tr}(AB) > 0$ が成り立つ。実際、

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(\sqrt{A}\sqrt{AB}) = \mathrm{tr}(\sqrt{AB}\sqrt{A}) = \sum_n \langle e_n, \sqrt{AB}\sqrt{A}e_n \rangle = \sum_n \langle \sqrt{A}e_n, B\sqrt{A}e_n \rangle > 0$$

ただし $\{e_n\}$ は任意の完全正規直交系である。