

# The LSZ reduction formula from homotopy algebras

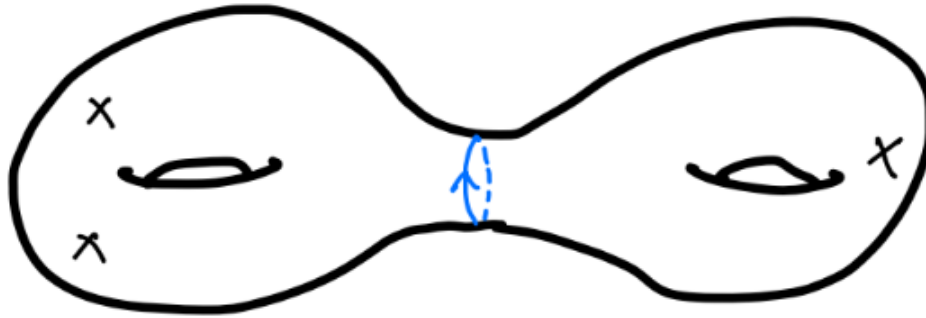
吉中讓次郎 (京都大学)

場の理論と弦理論2024@YITP

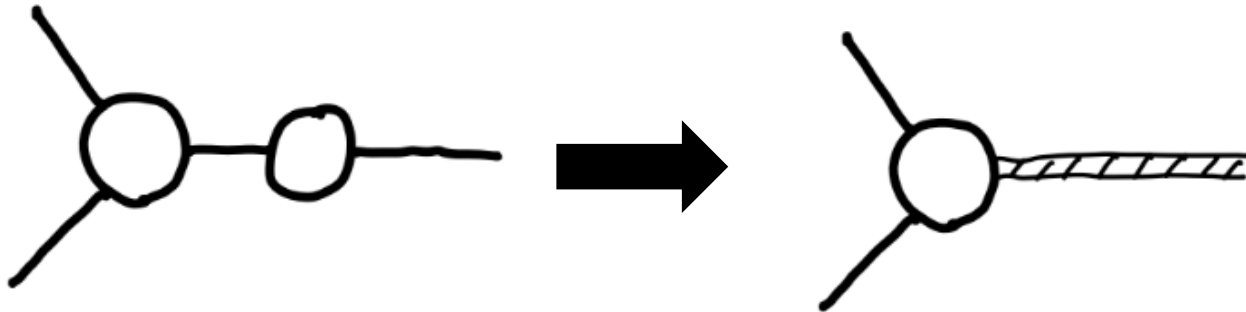
With 鴻巣圭佑, 大川祐司, 渋谷翔之

# 動機

弦の散乱振幅のIR発散



QFTでは 質量くりこみ



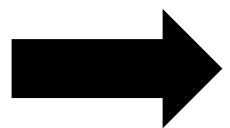
LSZ簡約公式, 1PI有効作用

弦の場の理論 (SFT) が必要

[Sen 2014~2016]

# 動機

- SFTはホモトピー代数で記述できる
- QFTもホモトピー代数で記述できる



QFTの処方をもとにホモトピー代数に  
翻訳すればSFTにも適用できる

まずはLSZ簡約公式をもとにホモトピー代数で理解したい

# Contents

- 動機
- ホモトピー代数に基づく場の理論
- LSZ簡約公式
- 散乱振幅の別の表式と  
1PI有効作用
- まとめ・展望

# ホモトピー代数

コホモロジー上で“通常”の代数になるように  
拡張された代数の総称

- 結合的代数の拡張..... $A_\infty$ 代数
- Lie代数の拡張 ..... $L_\infty$ 代数
- 量子ホモトピー代数
- $\vdots$

ベキ零な演算子で特徴づけられる

$$\boldsymbol{M}^2 = 0 \qquad (\boldsymbol{M} + i\hbar \boldsymbol{U})^2 = 0$$

# 場の理論 $\longrightarrow$ ホモトピー-代数

$$\omega(e_a, \tilde{e}^b) = \delta_a^b$$

$$\Phi = \phi^a e_a$$

$$S = -\frac{1}{2}\omega(\Phi, Q(\Phi)) - \frac{1}{3}\omega(\Phi, m_2(\Phi, \Phi)) - \dots$$

$\longrightarrow$  テンソル代数上の演算子  $Q, m_n, e_a, \tilde{e}^a$

分配関数の  
ゲージ不変性  $\longrightarrow \left( Q + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} m_n}_{\mathbf{m}} + i\hbar \underbrace{e_a \tilde{e}^a}_{\mathbf{U}} \right)^2 = 0$

量子 $A_\infty(L_\infty)$ 代数

# テンソル代数

ベクトル空間  $V$

テンソル代数  $T[V] := \sum_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$

$$m_n(A_1 \otimes \cdots \otimes A_m)$$

$$:= \begin{cases} 0 & m < n \\ m_n(A_1, \dots, A_n) \otimes A_{n+1} \otimes \cdots \otimes A_m \\ \quad + A_1 \otimes m_n(A_1, \dots, A_{n+1}) \otimes A_{n+2} \otimes \cdots \otimes A_m \\ \quad + \cdots & m \geq n \end{cases}$$

- $\pi_n : T[V] \rightarrow V^{\otimes n}$  への射影

# プロパゲータ $\longrightarrow$ ホモトピー演算子

$1 - P$  上のプロパゲータ  
 $\longrightarrow$  ホモトピー演算子  $h$

$$Qh + hQ = \mathbb{I} - P$$

$$h^2 = hP = Ph = 0$$

テンソル代数上の演算子に格上げ

$$\longrightarrow h = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \mathbb{I}^{\otimes n-k} \otimes h \otimes P^{\otimes k}$$

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P^{\otimes n}$$

$$Qh + hQ = I - P$$

$$h^2 = hP = Ph = 0$$

# ダイアグラムとの対応

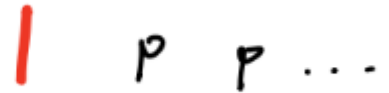
$m_n$  : vertex



$U$  : edgeの向きを変えるorループを作る



$h$  : プロパゲータ



$$m_3 h U h m_3 h U \supset \begin{array}{c} \text{trident} \\ | \\ \text{U} \\ | \\ \text{trident} \\ | \\ \text{U} \end{array} \begin{array}{c} p \dots \\ p \dots \end{array} = \begin{array}{c} \text{trident} \\ | \\ \text{U} \\ | \\ \text{trident} \\ | \\ \text{U} \end{array} \begin{array}{c} p \dots \\ p \end{array}$$

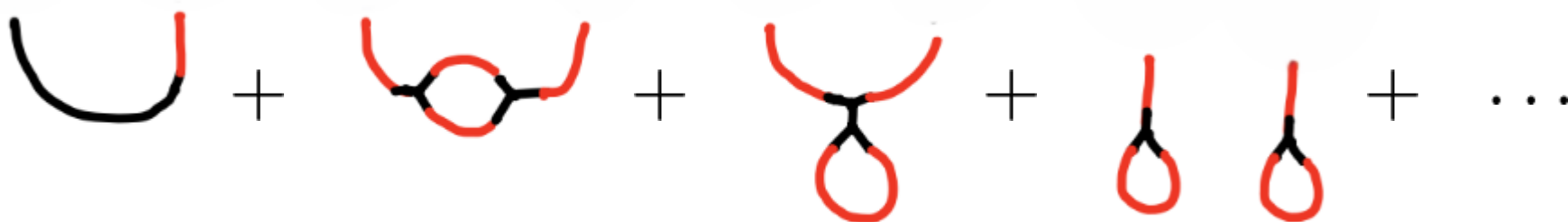
# 相關関数

[Konosu, Okawa] [Konosu, JTY]

$$Qh_0 + h_0Q = \mathbb{I}$$

$$\boldsymbol{f1} := \frac{1}{\boldsymbol{I} + h_0(\boldsymbol{m} + i\hbar \boldsymbol{U})} \overset{\Psi}{\boldsymbol{1}} \overset{V^{\otimes 0}}$$

$$\omega(\cdot, \tilde{e}^a) \otimes \omega(\cdot, \tilde{e}^b) \boldsymbol{f1} = \langle \phi^a \phi^b \rangle$$



# minimal model : on-shell 散乱振幅 ?

$$Qh + hQ = \mathbb{I} - P$$

$$QP = PQ = 0$$

$$m^{(\min)} = Pm \frac{1}{I + h(m + i\hbar U)} P$$

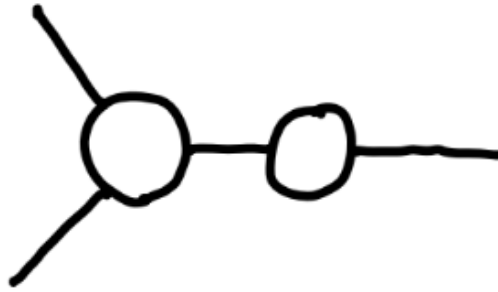
$$\omega(\Phi_1, m_n^{(\min)}(\Phi_2, \dots, \Phi_{n+1}))$$

$$Pm_3hm_3hUP \supset$$


The diagram is a Feynman diagram representing a loop. It consists of a vertical line with a loop at the bottom. The top of the vertical line is labeled 'P'. The loop has two red segments. The left side of the loop is labeled 'P'. The right side of the loop has two branches, each labeled 'P'.

ナイーブな散乱振幅  
のダイアグラム

# Minimal model の問題点



“普通”の散乱振幅

- 内線がon-shell  $\longrightarrow$  発散

Minimal model

- 内線がon-shell  $= P$  に比例
  - 内線  $= h$
  - $hP = Ph = 0$
- $\longrightarrow 0$

# Contents

- 動機
- ホモトピー代数に基づく場の理論
- **LSZ簡約公式**
- 散乱振幅の別の表式と  
**1PI有効作用**
- まとめ・展望

# 相関関数 $\longrightarrow$ 散乱振幅

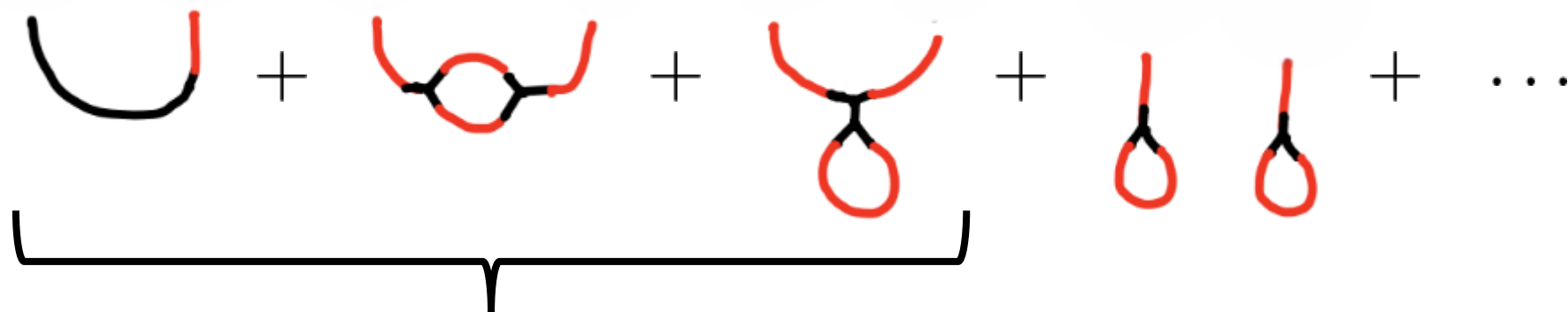
## LSZ簡約公式

相関関数の連結部分  
の外線を切除  $=$  散乱振幅

対応するホモトピー代数の公式を見つければ

$$\frac{1}{I + h_0(m + i\hbar U)} \mathbf{1}$$
 から 散乱振幅 を導けるはず

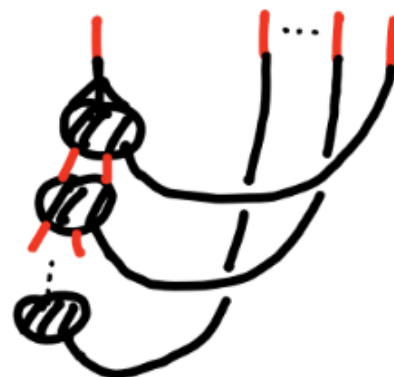
# 相関関数の連結部分



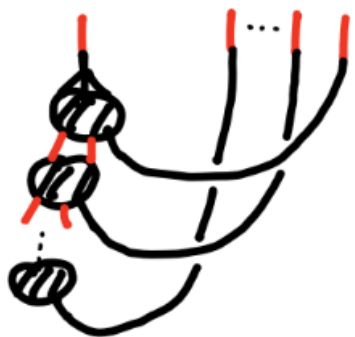
$U := e_a \tilde{e}^a$  の片足が出ている部分

$$f_{\text{con}} \mathbf{1} := h_0 \tilde{e}^{a_1} \otimes e_{a_1}$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \pi_1 h_0 m(f h_0 \tilde{e}^{a_n}) \cdots (f h_0 \tilde{e}^{a_1}) f \mathbf{1} \otimes e_{a_1} \otimes \cdots \otimes e_{a_n}$$



# 外線の切除



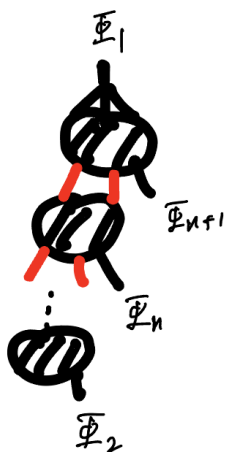
$$\text{外線} = h_0$$

$$Qh_0 + h_0Q = \mathbb{I}$$

$$\omega(\cdot, Q\Phi) \quad h_0\Phi = 0$$

$h_0$ を切除して  $\Phi$  を挿入

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \omega(\cdot, e_a) \otimes \tilde{e}^a \\ &\quad + \omega(\cdot, \tilde{e}^a) \otimes e_a \end{aligned}$$



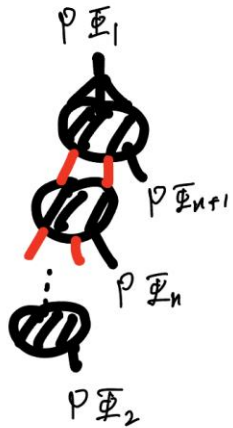
$$\omega(\cdot, Q\Phi_1) \otimes \cdots \otimes \omega(\cdot, Q\Phi_{n+1}) f_{\text{con}} \mathbf{1}$$

$$= \omega(\Phi_1, Q\Phi_2)$$

$$+ \omega\left(\Phi_1, \pi_1 m f D'(\Phi_{n+1}) \cdots f D'(\Phi_2) f \mathbf{1}\right)$$

# 相關関数 $\longrightarrow$ minimal model-like

外線を切除した~~後~~で  $\Phi = P\Phi$        $QP = PQ = 0$



$$\omega(P\Phi_1, QP\Phi_2)$$

$$+ \omega\left(P\Phi_1, \pi_1 m f D'(P\Phi_{n+1}) \cdots D'(P\Phi_2) f \mathbf{1}\right)$$

||



$$\omega\left(P\Phi_1, \pi_1 m \frac{1}{I + h(m + i\hbar U)} \pi_n(P\Phi_2, \dots, P\Phi_{n+1})\right) \Big|_{\underline{h \rightarrow h_0}}$$

# LSZ簡約公式

$$\begin{aligned} & \omega(\cdot, Q\Phi_1) \otimes \cdots \otimes \omega(\cdot, Q\Phi_{n+1}) \mathbf{f_{con}} \mathbf{1} \mid_{\Phi \rightarrow P\Phi} \\ & \parallel \\ & \omega\left(P\Phi_1, \pi_1 \mathbf{m} \frac{1}{I + \hbar(\mathbf{m} + i\hbar \mathbf{U})} \pi_n(P\Phi_2, \dots, P\Phi_{n+1})\right) \mid_{h \rightarrow h_0} \end{aligned}$$

- ダイアグラムはminimal modelと同じ
- 内線がon-shellのとき発散
- $\Phi \rightarrow P\Phi$  としなければoff-shell散乱振幅
- $Q$  を変えると切除する外線が変わる  
➡ 質量くりこみ

# 質量くりこみ

2点1PIダイアグラム： $m_1^{(\Gamma)}$



$$h_0^{(\Gamma)} := \frac{1}{I + h_0 m_1^{(\Gamma)}} h_0$$



$$Q^{(\Gamma)} := Q + m_1^{(\Gamma)}$$

$h_0^{(\Gamma)}$  を切除

$$Q^{(\Gamma)} h_0^{(\Gamma)} + h_0^{(\Gamma)} Q^{(\Gamma)} = I$$

# Contents

- 動機
- ホモトピー代数に基づく場の理論
- LSZ簡約公式
- 散乱振幅の別の表式と  
1PI有効作用
- まとめ・展望

# 散乱振幅 as $IBL_\infty$ -morphism



$$m^{(W)} := \pi_1 m \frac{1}{I + h(m + i\hbar U)} \Big|_{h \rightarrow h_0}$$

$$= \pi_1 m \mathcal{F}$$

## $IBL_\infty$ -morphism

$$\mathcal{F} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{\wedge n}$$

$$F := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^k}{(k+1)!} e_{a_1} \wedge \cdots \wedge e_{a_k} \wedge \pi_1(I - h_0 m \mathcal{F}) D(h_0 \tilde{e}^{a_k}) \cdots D(h_0 \tilde{e}^{a_1})$$

逆  $\mathcal{F}^{-1}$  が存在

# $IBL_\infty$ -morphismの性質

$$\mathcal{F}^{-1}(Q + m + i\hbar U)\mathcal{F} = Q$$

$$\Rightarrow m^{(W)} = \pi_1 m \mathcal{F} = -\pi_1 [Q, \mathcal{F}]$$

$$\Rightarrow [Q, m^{(W)}] = 0$$

Q-exactな場はon-shell散乱振幅に効かない  
= On-shell散乱振幅はゲージ不変

# 1PIダイアグラム

$$\begin{array}{ccc}
 m & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}} \\ \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} \end{array} & m^{(W)} \\
 & \mathcal{F} \big|_{\hbar=0} \updownarrow \mathcal{F}^{-1} \big|_{\hbar=0} & \\
 & \text{cohomomorphism} & \\
 & m^{(\Gamma)} : \text{1PIダイアグラム} & 
 \end{array}$$

$$\pi_1 m^{(\Gamma)} \left( \mathcal{F} \big|_{\hbar=0} \right) = m^{(W)}$$

Tree-level  
ダイアグラム

fullのダイアグラム

# まとめ

- ホモトピー代数における**LSZ**簡約公式に対応する式を発見
- Minimal model を超えた散乱振幅の定義  
off-shell, 質量くりこみ
- 散乱振幅を $IBL_{\infty}$ -morphismとして理解
- 1PIダイアグラムの構成  
ルジャンドル変換はcohomomorphism

# 展望

- OCSFTへの適用 (QOCHA)
- 非摂動へ拡張
- $m^{(W)}$  の対称性