

Large Charge展開入門

渡邊真隆 (名古屋大学)

2024年8月6日

場の理論と弦理論2024

今日の目標

- 顔と名前だけでも覚えて帰ってください！
- はじめましての人がlarge charge展開という場の理論の手法でとりあえず計算ができるようにします。
- 後半はlarge charge展開で最近見つけた面白い結果を話します。
- だから初めましての人でも詳しい人も半分ぐらいは眠いかも。ごめんなさい。あとアブスト提出し忘れてごめんなさい……。

強結合理論は難しい

- 場の理論は素粒子・原子核・物性の共通言語でめっちゃ大事.
- 普通の場合の理論において「ニュートンの第1, 2, 3法則」みたいな定義？公理？は大体わかっている（と思う）.
- じゃあもう古典力学みたいに大体理解したつもりになれるか？
　　というとそんなことはない.
- 自由度が無限大あって、強結合理論を解析するのは実は難しい.

強結合理論とは？

- 自由理論から摂動で解ける理論を弱結合理論，そうではない理論を強結合理論と言う。
- 弱結合理論は摂動展開で体系的に解けて簡単，強結合理論はそうではなく難しいと思われるはず。
- 強結合理論を解析するには，例えば可積分性を使うとか，超対称性を使うとか．最近ではアノマリーやブートストラップ法も使うようになった．格子計算も強力ですね．
- 結構いろいろあるけど，強結合理論はまだまだ難しい．また新たな解析方法がないか考えたい．

- 今日注目するのは共形場理論(CFT)と呼ばれるもの。共形場理論はざっくりいうとスケール不変性 $+\alpha$ がある理論のこと。
- 共形場理論は統計力学では2次相転移を記述するのでめっちゃ役に立つ。もちろん素粒子でも弦理論やAdS/CFTやその他の文脈で役に立つ。
- でも共形場理論は一般的に強結合理論なのでやはり解析が難しい。摂動パラメータで自由理論とつながっていないCFTとかだと大変。

Large Charge展開

- こういう強結合領域にある共形場理論を体系的に扱う手法がlarge charge展開.
- Large charge展開とは？まずcontinuous global symmetry (例えば $O(2)$)が存在するCFTを考える.
- 対称性があるので電荷 Q が存在する. この時, あるクラスの理論に対して, $Q \gg 1$ 極限が半古典極限になっている.
- つまり摂動パラメータがないCFTに関しても $1/Q$ に関する摂動展開が可能になって物理量が計算できる!
- 以下具体的にどのような計算で何を計算できるのかやってみます.

$O(2)$ Wilson-Fisher固定点

- 対称性のある強結合CFTの中でも簡単のため、3次元 $O(2)$ Wilson-Fisher固定点を考える.
- WF固定点とは？ラグランジアンは

$$L = |\partial\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}|\phi|^4$$

- 繰り込み群方程式を $4 - \epsilon$ 次元で書き下すと

$$0 = \beta(\lambda) \equiv \mu \frac{d\lambda}{d\mu} = -\epsilon\lambda + \frac{5\lambda^2}{(4\pi^2)^2} \Leftrightarrow \frac{\lambda_*}{(4\pi^2)^2} = \frac{\epsilon}{5}$$

- 3次元でも固定点があると信じると強結合な共形場理論が出た.

演算子次元

- 共形場理論の基本的な物理量は演算子次元か3点関数。今は演算子次元に注目しよう。
- 演算子 $\mathcal{O}$ の次元を Δ とすると

$$\langle \mathcal{O}(0) \mathcal{O}(x) \rangle = 1/x^{2\Delta}$$

- 興味がある演算子は ϕ^Q 。定義は電荷 Q を持つ演算子のうち次元が最小のもの。
- この次元を $\Delta(Q)$ とする。

演算子次元

- ϕ^Q の次元 $\Delta(Q)$ の $Q \gg 1$ でのふるまいはどんな感じでしょうか？
- $D = 4 - \epsilon$ では ϵ 展開が使える.

$$\Delta(0) = 1, \quad \Delta(1) = 1 - \epsilon/2 \quad (D\text{次元自由場の次元})$$

$$\Delta(2) = 2\Delta(1) + O(\epsilon), \quad \Delta(3) = 3\Delta(1) + O(\epsilon), \dots$$

- 結局leading orderで

$$\Delta(Q) = Q\Delta(1) + O(\epsilon) \sim Q \tag{1}$$

- どうでしょう？

演算子次元

- というのは大嘘.
- State-operator map: 3次元CFTの演算子 $\mathcal{O}$ の次元は半径1の円柱 $S^2 \times \mathbb{R}$ 上で定義された状態 $|\mathcal{O}\rangle$ のエネルギーに対応する.
- $|\phi^Q\rangle$ は電荷 Q セクターの基底状態. こいつのエネルギー密度 $\mathcal{E}$ と電荷密度 ρ の関係はスケール不変性から

$$\mathcal{E} \propto \rho^{3/2} \longrightarrow \Delta(Q) \propto Q^{3/2} \quad (2)$$

- 実際ファインマン図でまじめに計算すると

$$Q \left[\left(\frac{D}{2} - 1 \right) + \frac{\epsilon}{10} (Q - 1) + O((\epsilon Q)^2) + O((\epsilon Q)^3) + \dots \right]$$

だったので $Q \gg 1$ 領域は見られていなかった.

アイデア1 : State-operator correspondence

- このアイデアの精密化がlarge charge展開.
- 重要なので一旦state-operator mapから復習します.
- 3次元 $O(2)$ WF固定点で $\phi^{Q \gg 1}$ の演算子次元を計算したい. (強結合理論の物理量が無限個計算出来てうれしいので.)
- 今はCFTを考えているので, ϕ^Q の演算子次元を計算するためにstate-operator correspondenceを使う.
- D 次元CFTの演算子 $\mathcal{O}$ の次元は半径1の円柱 $S^{D-1} \times \mathbb{R}$ 上で定義された状態 $|\mathcal{O}\rangle$ のエネルギー.
- 今回は ϕ^Q が電荷 Q をもつ演算子のうち最小のものなので, 演算子次元は $S^2 \times \mathbb{R}$ 上で電荷 Q を持つ状態のうち最低エネルギーのもの.

大正準分布

- 電荷 Q を持つセクターの基底状態を計算することに問題が帰着した.
- 大正準分布

$$Z[\beta, \mu] = \text{Tr}_{\mathcal{H}_{S^2}} \left[e^{-\beta(H - \mu Q)} \right]$$
$$\langle Q \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \log Z, \quad \langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z + \mu \langle Q \rangle$$

を用いる. 理論は $S^2 \times S^1$ に置く.

- 最終的に低温極限($\beta \rightarrow \infty$)を取りたいので,

$$F \equiv -\frac{1}{\beta} \log Z \approx -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = \langle E \rangle - \mu \langle Q \rangle$$

となり, 大分配関数をルジャンドル変換すれば結果が得られる.

アイデア2:鞍点法

- 分配関数を経路積分で書くと

$$Z(\beta, \mu) \equiv \text{Tr} \left[e^{-\beta(H - \mu \hat{Q})} \right] = \int D\phi e^{-\int d^2x dt (L[\phi] - \mu \rho)}$$

- 新しい「作用」は化学ポテンシャルの項を含んでいる.

$$L - \mu \rho = |\partial \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 - \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 - i\mu (\bar{\phi} \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \bar{\phi}).$$

- この作用の鞍点を求めて、鞍点周りで展開する. 鞍点は

$$\phi_0 = A \times e^{i\mu t}$$

のようになる. Q が大きい時 A と μ は大きくなる.

- 大正準分布を計算する際の「作用」は

$$|\partial\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}|\phi|^4 - i\mu(\bar{\phi}\partial_0\phi - \phi\partial_0\bar{\phi})$$

で、その鞍点は $\phi_0 = A \times e^{i\mu t}$ となる。

- 普通こういう鞍点近似はうまくいかないが、 Q が大きい時 A や μ が大きくなり、作用自体が大きくなる。よって、量子補正が小さくなり鞍点法が正しい近似を与える。
- この「真空」は対称性 $O(2)$ を破っている。

最後のアイデア：有効作用の使用

- この理論が弱結合理論であれば、 ϵ 展開を行い結果を得ることができる。
- まったくの強結合理論の場合も実は計算できる。というのも対称性 $O(2)$ が破れを用いて低エネルギー有効作用が書けるから。
- これがlarge charge展開の最後の重要なアイデア！

Symmetry breaking pattern

- UV理論

$$|\partial\phi|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}|\phi|^4$$

の有効作用を $\phi_0 = A \times e^{i\mu t}$ まわりで書きたい.

- 理論の対称性は共形対称性（特にスケール不変性）と $O(2)$ 対称性. 有効作用にもこの対称性がある.
- 出てくる場はNGボゾン（ $\phi = ae^{i\chi}$ と書くと χ ）だけ. 「真空」は $\chi = \mu t$ で $\mu \gg 1$.
- この「真空」はローレンツ対称性も破っているので少し見慣れないかもしれないが大丈夫.

Rules for the EFT

- $O(2)$ 対称性から使えるのは $\partial\chi$ だけ. radial方向の場合は質量 $|\partial\chi| \equiv \sqrt{-\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi} \sim \mu$ を持つのでintegrate outする.
- Integrateした場の質量は有効作用の分母にきてよい.
- ラグランジアンは質量次元3で χ は質量次元0. スケール不変性からこれ以外次元を持つ量は存在しない.
- Leading order有効作用はこうなる

$$L = c_{3/2}|\partial\chi|^3 + \dots$$

- Leading orderでネーターの定理を使うと $Q \sim 3(\partial\chi)^2\partial_0\chi \sim \mu^2$.
 $E \propto Q^{3/2}$ が見えた.

The large-charge EFT

- ここまではほぼ自明な次元解析. より小さな項を理論的に出せるのが有効理論のいいところ.
- 有効作用はこうなる. (ひそかにbackground metricと結合したとき局所性を保つことを使っているけど, こんなことはナイーブな次元解析ではできない.)

$$L = c_{3/2}|\partial\chi|^3 + c_{1/2}\text{Ric}_3|\partial\chi| + O(Q^{-1/2})$$

- 二番目の項は $Q^{1/2}$ の大きさ. Q^0 の有効演算子はない!
- 有効作用なので不定パラメータはどうしても出る.

The ground state energy

- 有効作用

$$L = c_{3/2}|\partial\chi|^3 + c_{1/2}\text{Ric}_3|\partial\chi| + O(Q^{-1/2})$$

の「真空」 $\chi_0 = \mu t$, $\mu = O(\sqrt{Q})$ のエネルギーを知りたいのだった。そのエネルギーが演算子次元 $\Delta(Q)$ なので。

- 古典近似の寄与は真空の配位を代入すればわかって、

$$E_{\text{cl}} = c_{3/2}Q^{3/2} + c_{1/2}\text{Ric}_3Q^{1/2} + O(Q^{-1/2}).$$

- この値は $Q^{3/2} \gg 1$ なので、量子効果は $1/Q^{3/2} \ll 1$ で展開できる。

The ground state energy

- 有効作用

$$L = c_{3/2}|\partial\chi|^3 + c_{1/2}\text{Ric}_3|\partial\chi| + O(Q^{-1/2})$$

からくる1-loopの寄与を計算しよう.

- Leading order actionを真空周りに展開して得られる二次の項からくる1-loopを計算すればよい.
- 寄与は $O(1)$ だが, $O(1)$ に不定パラメータがないのでなんとこの計算はuniversalな量を計算できる.
- 展開 $\chi = \mu t + \hat{\chi}$ を用いて

$$|\partial\chi|^3 \ni \hat{\chi} \left(\partial_t^2 - \frac{1}{2}\Delta_{S^2} \right) \hat{\chi}$$

- ローレンツ対称性を破るスケール不変な理論なので $\hat{\chi}$ の速度がconformal speed $1/\sqrt{D-1}$ といわれるものとなる.

The ground state energy

- 二次の揺らぎの作用

$$\hat{\chi} \left(\partial_t^2 - \frac{1}{2} \Delta_{S^2} \right) \hat{\chi} \quad (3)$$

からくる寄与はCasimirエネルギーの計算とまったく同じ.

- Coleman-Weinbergの定理から $\log \det$ を計算する. $S^2 \times \mathbb{R}$ 上でモード展開して固有エネルギーを全部足し合わせて正則化したものが答え.

$$E_{1\text{-loop}} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2}} \xrightarrow[\text{renormalise}]{\text{regulate \&}} -0.094.$$

The final result

- 結局 $\Delta(Q)$ はこうなる

$$\Delta[Q] = c_{3/2}Q^{3/2} + c_{1/2}\text{Ric}_3Q^{1/2} - 0.094 + O(Q^{-1/2}).$$

- $c_{3/2,1/2}$ は不定のパラメータだが、数値計算や弱結合展開から決めることができる。

Remark: Large-charge universality

- ここまでで使った仮定は、化学ポテンシャルを入れたときに $O(2)$ 対称性が自発的に破れるということだけ。
- むしろパラメータ $c_{3/2,1/2}$ などの不定性を許せば、まったく同じ議論がほかの理論にも使える。
- 例えば3次元 CP^{N-1} 模型の large monopole number 領域も $O(2)$ が自発的に破れている。よって、monopole charge Q の演算子の次元はやっぱり

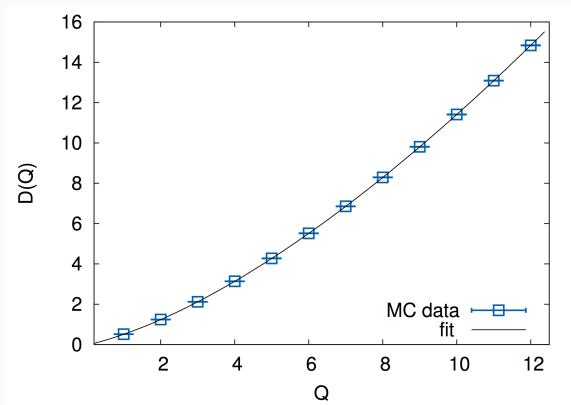
$$\Delta[Q] = \tilde{c}_{3/2} Q^{3/2} + \tilde{c}_{1/2} \text{Ric}_3 Q^{1/2} - 0.094 + O(Q^{-1/2}).$$

- ある意味 large-charge universality と呼んでもよい。化学ポテンシャルを入れたときの相で共形場理論をより粗く分類しようというアイデア。（例えばこのアイデアを使って3次元のいろいろな双対性の証拠を出せるとうれしい。）

Remark: Numerics

- 数値計算もあり、フィットが謎に $Q = 1$ までよい。理屈はいろいろあるが本質的には理由は謎。

$$\Delta[Q] = \frac{1.195}{\sqrt{4\pi}} Q^{3/2} + 0.075\sqrt{4\pi} Q^{1/2} - 0.094 + O(Q^{-1/2}).$$



- ここまでで20分は残っている予定なのであとは最近の結果を話します。ちょっと駆け足になると思うのでわかりにくければ後での質問也大歓迎です。
- 6d SCFTはラグランジアンがない理論として有名。 Large charge展開はラグランジアンがあろうがなかろうが使えるはずなので、物理量の計算に使えるはず。
- 今回注目するのは $(2, 0)$ 超対称性がある A_1 理論。これはM理論でM5ブレーンを二枚原点に置いたときの低エネルギー理論として作れる。
- SUSYのおかげでmoduliがある。実5次元。
- R 対称性は $SO(5)$ で、このmoduliを回転するようなもの。

- A_1 理論にはhalf-BPS ringがある. stress tensorのbottom componentを Φ^{IJ} とすると Φ^n はhalf-BPS. I, J は $SO(5)_R$ index. 一つの $n \gg 1$ での物理量を知りたい.
- SUSYから次元が $4n$ であることはわかりきっているが, これをまずEFTで確かめる. さらにこの二点関数の係数を調べる.

$$\lambda_n \equiv x^{8n} \langle \Phi^n(0) \Phi^n(x) \rangle \quad (4)$$

- さっきはNG bosonだけでEFTを書いたが, 今回はmoduliがあるのでdilatonもmassless. よってaxiodilaton φ^I (質量次元2)を使ってEFTを書く. φ^I はAbelian tensor multipletのbottom component.
- Φ^{IJ} と φ^I の関係は対称性と質量次元から $\Phi = \varphi^2$.

- さっきはEFTを自分で頑張って作ったが、moduli上のEFTはよく調べられているのでそれを使う。
- Bosonic actionの重要なところだけ取り出すと

$$-\frac{1}{2} \sum_{I=1}^5 (\partial_\mu \varphi^I)^2 + \sqrt{\frac{7}{98304\pi^3} \frac{\Delta a}{a_{U(1)}}} \frac{\partial^2(\varphi^I \varphi^J) \partial^2(\varphi^I \varphi^J)}{4|\varphi|^3} + \Delta a \times \tau E_6 + \dots$$

ちなみにLorentzian signatureです。

- 4-derivativeと6-derivativeの係数がGreen-Schwarz機構で関係づいている。 E_6 はtrace anomalyでおなじみのEuler densityでWZ項。
- Δa は元の A_1 理論とAbelian tensor multipletの a -anomaly difference。
 $\tau \equiv -\frac{1}{2} \log |\varphi^I|$ はdilaton.

- $\Phi^n = \varphi^{2n}$ の次元はleading orderで $4n$. 自由理論なので当然.
- Subleadingを計算するのは手法の正当化に有用. (だがまだちゃんとやってません.)

OPE係数

- $SO(5)_R$ から $U(1)$ を取り出してその電荷を大きくする.
 $\phi = (\varphi^1 + i\varphi^2)/\sqrt{2}$ として残りの成分を忘れてよい.
- OPE係数は S^6 のantipodal pointsに φ^{2n} を挿入してactionを計算すればよい.

$$\langle \phi^q(x_1) \bar{\phi}^q(x_2) \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \phi^q(x_1) \bar{\phi}^q(x_2) \exp \left[- \int d^6x \mathcal{L}_{\text{EFT}}[\phi] \right] \\ \int d^6x [\mathcal{L}_{\text{EFT}} - q \log(\phi(x)) \delta(x - x_1) - q \log(\phi(x)) \delta(x - x_2)].$$

なお $q = 2n$.

- これを鞍点近似すればよい. 量子効果は $O(1)$ 以降でしか効かず, ほぼ鞍点を作用に代入するだけ. 結果は

$$\log \lambda_n = \log \Gamma(2n + 1) + 8\sqrt{n} - 2 \log n + An + B + O(n^0)$$

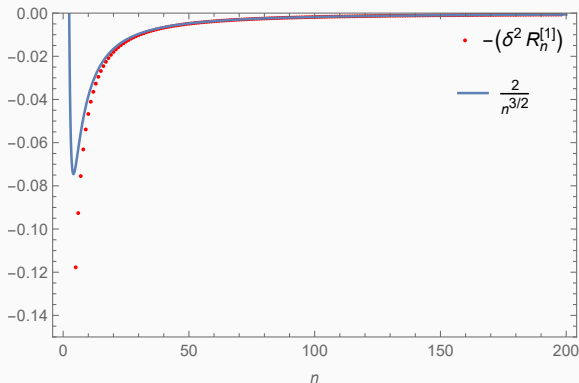
A, B は φ の定義やsphere partition functionに依るので今回は計算できない.

- この計算, 実は6d/2d対応を用いれば2dのVirasoro代数の計算から確かめられます.
- 6d理論はある特殊な超電荷をもってくるとうまいcohomology classが取れて, これが2d chiral algebraの元と対応することが知られている.
- 例えば ϕ が $T(z)$ と対応. A_1 理論は $c = 25$ のchiral algebraを持つ.
- 詳細は省くが, λ_n はVirasoro blockの外部演算子次元を h , cross-ratioを z と書くと, hz を固定して $z \rightarrow 0$ の極限をとるdouble-scaling limitの hz 展開の n 次係数と一致する.
- (2d CFTの熱力学極限と関係あり.)

- Virasoro blockの展開係数は数値的に求めるアルゴリズムが知られていて計算できる.
- $c = 25$ で, 確かに

$$\log \lambda_n = \log \Gamma(2n + 1) + 8\sqrt{n} - 2 \log n + An + B + O(n^0)$$

とconsistentだった.



- 対応する6d理論は知らないが、2d CFTの文脈では一般の c に拡張したくなるのは人情.
- 数値的には

$$\log \lambda_n = \log(2n)! + \alpha n + 4\sqrt{\frac{2(c-1)}{12}}\sqrt{n} - \frac{c-1}{12} \log n + O(n^0).$$

を得た. これをVirasoro代数だけから示す方法はまだわからない.

- Large charge展開から, Virasoro blockの展開係数に対する新しい予想まで得られて面白いと思っている.
- 今日はこんなところで. まとめは口頭でやります.