



軸対称モノポールの微分方程式について

渡邊 智朗, 宮本 薫, 中村 厚 (北里大理)

01 – Introduction

BPSモノポール解はBogomolny方程式と双対なNahm方程式を解くことで得ることができる。本研究では、正多面体対称性をもつNahm dataを軸対称な系に一般化することで、軸対称モノポールの構築を目指す。

Nahm construction

Configuration space $\mathbb{R}^3$

Bogomolny方程式: $B_i = -D_i\Phi$
gauge field: A_i

Dual space S^1

Nahm方程式: $\frac{dT_i}{ds} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}[T_j, T_k]$
Nahm data: $T_i(s)$

W. Nahm, (1982)

Nahm transform

Weyl方程式: $\left(1_{2N}\frac{d}{ds} + iT_j(s) \otimes \tau_j - 1_N \otimes x^j \tau_j\right)v(s) = 0$

► Nahm dataがWeyl方程式を定義。

gauge field: $A_\mu = \int_{-1}^1 v^\dagger(s) \partial_\mu v(s) ds$, Normalization: $1_2 = \int_{-1}^1 v^\dagger(s) v(s) ds$

► Weyl方程式のzero mode $v(s)$ からモノポールを復元できる。

軸対称モノポール ($N = 2$)

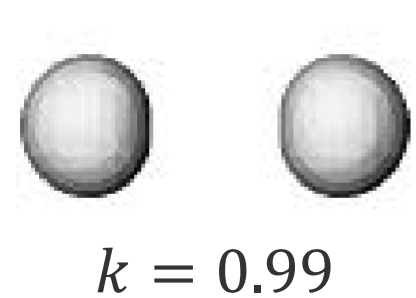
$$\begin{aligned} T_1(s) &= \frac{i}{2} f_1(s) \tau_1 & \frac{df_1}{ds} &= f_2 f_3 & f_1 &= \frac{-K \operatorname{dn}(u)}{\operatorname{sn}(u)} \\ T_2(s) &= \frac{i}{2} f_2(s) \tau_2 & \frac{df_2}{ds} &= f_3 f_1 & f_2 &= \frac{-K}{\operatorname{sn}(u)} \\ T_3(s) &= -\frac{i}{2} f_3(s) \tau_3 & \frac{df_3}{ds} &= f_1 f_2 & f_3 &= \frac{-K \operatorname{cn}(u)}{\operatorname{sn}(u)} \end{aligned}$$

► Jacobi elliptic functions
 $K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$
 $u = K(s + s_0)$

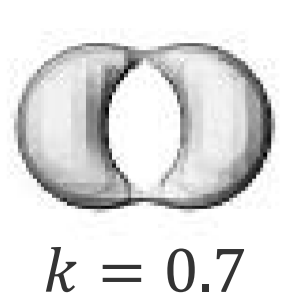
$k = 0$

$$f_1(s) = f_2(s) = \frac{-\pi}{2 \sin(\pi(s+1)/2)}, \quad f_3(s) = \frac{-\pi}{2 \tan(\pi(s+1)/2)}$$

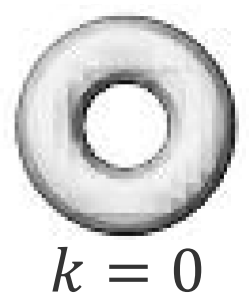
► これらにより構成されるモノポールは x^3 軸対称性を持つ。



$k = 0.99$



$k = 0.7$



$k = 0$

Fig.1. Energy density isosurfaces for the $N = 2$ monopole solution.

N. S. Manton and P. M. Sutcliffe, "Topological Solitons"

Spectral curves

Lax form: $T = T_1 + iT_2 - 2iT_3\xi + (T_1 - iT_2)\xi^2$
 $T^+ = -iT_3 + (T_1 - iT_2)\xi$

$$\frac{dT}{ds} = [T, T^+]$$

► Nahm方程式はLax form で書ける。

$$\eta^N + a_1(\xi)\eta^{(N-1)} + \dots + a_N(\xi) = 0$$

► $\det(\eta 1_N + (T_1 + iT_2) - 2iT_3\xi + (T_1 - iT_2)\xi^2) = 0$
係数部分が位相不変量となる。

N. J. Hitchin, CMP 89 (1983)

02 – Nahm data with axial symmetry

正多面体対称Nahm data

$$T_i(s) = f_i(s)\rho_i + g_i(s)S_i$$

$(f_1 = f_2 = f_3, g_1 = g_2 = g_3)$

軸対称Nahm data

$$\begin{aligned} T_1 &= f_1(s)\rho_1 + g_1(s)S_1 \\ T_2 &= f_2(s)\rho_2 + g_2(s)S_2 \\ T_3 &= f_1(s)\rho_3 + g_1(s)S_3 \end{aligned}$$

► $f_1 = f_3, g_1 = g_3$ とすることで, x^2 軸対称系に一般化。

N. J. Hitchin, N. S. Manton and M.K. Murray, Nonl 8 (1995)

Nahm data

N	対称性	Nahm data	
3	四面体対称	$f'_1 = 2(f_1 f_2 - g_1 g_2)$ $f'_2 = 2(f_1^2 - g_1^2)$	$g'_1 = -2(f_2 g_1 + f_1 g_2)$ $g'_2 = -4f_1 g_1$
4	八面体対称	$f'_1 = 2(f_1 f_2 - 6g_1 g_2)$ $f'_2 = 2(f_1^2 - 6g_1^2)$	$g'_1 = -3f_2 g_1 - 3f_1 g_2 + 4g_1 g_2$ $g'_2 = -6f_1 g_1 + 4g_1^2$
5	八面体対称	$f'_1 = 2(f_1 f_2 - 6g_1 g_2)$ $f'_2 = 2(f_1^2 - 6g_1^2)$	$g'_1 = -3f_2 g_1 - 3f_1 g_2 + 4g_1 g_2$ $g'_2 = -6f_1 g_1 + 4g_1^2$
6	二十面体対称	$f'_1 = 2(f_1 f_2 - 50g_1 g_2)$ $f'_2 = 2(f_1^2 - 50g_1^2)$	$g'_1 = -5(f_2 g_1 + f_1 g_2 + 2g_1 g_2)$ $g'_2 = -10(f_1 g_1 + g_1^2)$
7	二十面体対称	$f'_1 = 2(f_1 f_2 - 70g_1 g_2)$ $f'_2 = 2(f_1^2 - 375g_1^2)$	$g'_1 = -5(f_2 g_1 + f_1 g_2 + 18g_1 g_2)$ $g'_2 = -10(f_1 g_1 + 9g_1^2)$

位相不変量

N	位相不変量
3	$c_1 = (f_1^2 - g_1^2 + 2f_1 f_2) g_2$
4	$c_1 = (2f_1 - 3g_1)g_1(f_1 + g_1)^2$ $c_3 = 9f_1^4 - 18f_1^2 f_2^2 + \dots - 264f_1 g_1^3 + 234g_1^4$
5	$c_1 = (2f_1 + 3g_1)g_1(f_1 - g_1)^2$ $c_3 = 8f_1^4 - 16f_1^2 f_2^2 + \dots - 132f_1 g_1^3 + 83g_1^4$
6	$c_1 = (2f_1 - 5g_1)^2(3f_1 + 10g_1)$ $\times (5f_1 f_2 g_1 + 5f_2 g_1^2 + f_1^2 g_2 - 50g_1^2 g_2)$ $c_3 = 45(f_1 - f_2)^3(f_1 + f_2)^3 + \dots$
7	$c_1 = (f_1 - 5g_1)^3$ $\times (5f_1 f_2 g_1 + 45f_2 g_1^2 + f_1^2 g_2 - 375g_1^2 g_2)$ $c_3 = 4(f_1 - f_2)^3(f_1 + f_2)^3 + \dots$

► 一般化したことで現れた不変量
 $f_1 = f_2, g_1 = g_2$ の時, $c_1 = nc_3, c_2 = c_4 = 0$ 。

03 – $N = 3$ Nahm data (axial sym.)

両辺を s で微分

$$\begin{aligned} f_1'' &= 4f_1(f_1^2 + f_2^2 + g_1^2 + g_2^2) & f_2'' &= 8f_2(f_1^2 + g_1^2) \\ g_1'' &= 4g_1(f_1^2 + f_2^2 + g_1^2 + g_2^2) & g_2'' &= 8g_2(f_1^2 + g_1^2) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \frac{f_i''}{g_i''} = \frac{f_i}{g_i}$$

一変数微分方程式の構成

f_1, g_1

$$(f_1')^2 + (g_1')^2 = 4(f_1^2 + g_1^2)(f_1^2 + g_1^2 - c_2)$$

► 二乗和に不変量 c_2 を用いた。

$$f_1' f_1'' + g_1' g_1'' = -4(c_2 - 2f_1^2 - 2g_1^2)(f_1 f_1' + g_1 g_1')$$

► 両辺を微分。

$$g_1'' \left(\cancel{f_1' \frac{f_1''}{g_1''}} + g_1' \right) = -4(c_2 - 2f_1^2 - 2g_1^2)g_1 \left(\cancel{f_1' \frac{f_1}{g_1}} + g_1' \right)$$

► g_1', g_1 でくくる。 $\frac{f_i''}{g_i''} = \frac{f_i}{g_i}$

$$g_1(4g_1(c_2 - 2g_1^2) + g_1'')(16g_1^2(c_2^2 + 4g_1'^2) - g_1''^2) + 2(g_1'(16g_1^3 + g_1'') - g_1 g_1''')^2 = 0$$

f_2, g_2

$$2g_2(8g_2(c_2 + g_2^2) - g_2'')(16g_2^2 g_2'^2 - g_2''^2) - (g_2'(16g_2^3 + g_2'') - g_2 g_2''')^2 = 0$$

► $\frac{f_i''}{g_i''} = \frac{f_i}{g_i}$ より f_1, g_1 と f_2, g_2 はそれぞれ同じ方程式を満たす。

04 – $N \geq 4$ conditions

f_i, g_i の制限

N	位相不変量の s 微分
4	$c'_1 = 2(f_1 + g_1)(3f_1^2 - 4f_1 g_1 + 18g_1^2)(\underline{f_1 g_2 - f_2 g_1}) = 0$ $c'_3 = -60(\underline{f_1 g_2 - f_2 g_1})(3f_1^3 + \dots) = 0$
5	$c'_1 = c'_2 = c'_3 = 0$
6	$c'_1 = 5(2f_1 - 5g_1)(f_1^2 + 2f_1 g_1 + 50g_1^2)(\underline{f_1 g_2 - f_2 g_1})$ $\times (18f_1 f_2 + 25f_2 g_1 - 10f_1 g_2 - 150g_1 g_2) = 0$ $c'_3 = 280(\underline{f_1 g_2 - f_2 g_1})(12f_1^5 + \dots) = 0$ $c'_4 = 1400(3f_2 + 10g_2)(\underline{f_1 g_2 - f_2 g_1})^2 = 0$
7	$c'_1 = -15(f_1 - 5g_1)^2(f_1^2 + 18f_1 g_1 + 375g_1^2)$ $\times (f_2 - 5g_2)(\underline{f_1 g_2 - f_2 g_1}) = 0$ $c'_3 = -350(\underline{f_1 g_2 - f_2 g_1})(f_1^5 + \dots) = 0$

$$f_1 g_2 - f_2 g_1 = 0 \quad \text{が要請される。}$$

$$f_1 \propto f_2, g_1 \propto g_2$$

軸対称性の可能性

$$\begin{aligned} T_1 &= f_1(s)\rho_1 + g_1(s)S_1 \\ T_2 &= f_2(s)\rho_2 + g_2(s)S_2 \\ T_3 &= f_1(s)\rho_3 + g_1(s)S_3 \end{aligned}$$

本来の八面体(二十面体)対称性

$$T_i = f_i(s)\rho_i + g_i(s)S_i + h_i(s)\Sigma_i$$

► 正多面体対称系では $h_i = 0$ が解になっていた。

► $h_i \neq 0$ を導入することで軸対称解を構成可能?

定数倍である為, 本質的に同じ式

► 軸対称系に一般化されていない。

$N = 5$ conditions ($h_i \neq 0$)

$$c = f_1^4 + f_2^4 + 76g_1^4 + 16g_2^4 - 4h_1^4 + \dots$$

$$c' = -120f_1^4 g_2 + 8f_1^3(15f_2 g_1 - 5g_1 g_2 + 3h_1 h_2) + \dots$$

$$c' = 5(\underline{f_1 g_2 - f_2 g_1})(-24f_1^3 + \dots)$$

► $h_i \rightarrow 0$ をとることで, 制限が現れる。

05 – Octahedral $N = 5$ Nahm data

八面体対称Nahm data: $T_i = f_i(s)\rho_i + g_i(s)S_i + h_i(s)\Sigma_i$

► $f_1 = f_3, g_1 = g_3, h_1 = h_3$ とすることで軸対称系に一般化

変数変換: $x_j = f_j + 4g_j, y_j = f_j - g_j$ ► 6変数の方程式に代入

係数方程式

$$\begin{aligned} h_1' &= x_1 h_2 + x_2 h_1 & y_2' &= 2x_1 y_1 \\ y_1' &= x_1 y_2 + x_2 y_1 & h_2' &= 2x_1 h_1 \end{aligned}$$

位相不変量

$$\begin{aligned} c_2 &= x_1^2 - x_2^2 - 4(y_1^2 - y_2^2) + 4(h_1^2 - h_2^2) \\ c_3 &= x_1(y_1^2 + h_1^2)(y_1 h_2 - y_2 h_1) \end{aligned}$$

$$y_1 h_1' - h_1 y_1' = x_1(y_1 h_2 - y_2 h_1) = \frac{c_3}{y_1^2 + h_1^2}$$

► c_3 は拡張により現れた。
 $h_1 = h_2 = 0$ の時, $c_3 = 0$ 。

► 2変数まで落とすことができる。

06 – Conclusion

■ $N = 3$ Nahm data の各係数は高階の一変数微分方程式として得られた。

► f_i, g_i の解を得ることで軸対称性を持つモノポールを構成できる可能性がある。

■ $N = 5, 7$ Nahm dataの $T_i = f_i(s)\rho_i + g_i(s)S_i + h(s)\Sigma_i$ への拡張が要求される。

► 2変数の微分方程式が得られた。

Future work

■ $N = 3$ Nahm data の微分方程式を解く→モノポールを構成

■ 四面体対称性と八面体対称性を合わせもつ $N = 4$ Nahm data の議論。

$$\text{四面体/八面体対称Nahm data: } T_i = f_i \rho_i^T + g_i S_i^T + h_i \Sigma_i^T + \underline{l_i(s) S_i^O}$$

Tetrahedral sym.

Octahedral sym.

C. J. Houghton and P. M. Sutcliffe, CMP 180 (1996)

■ $N = 5, 7$ についての係数方程式を一変数関数の形で得る。