

誤り訂正符号を用いた共形場理論の構成とその応用

矢萩 慎一郎 川畑 洸貴

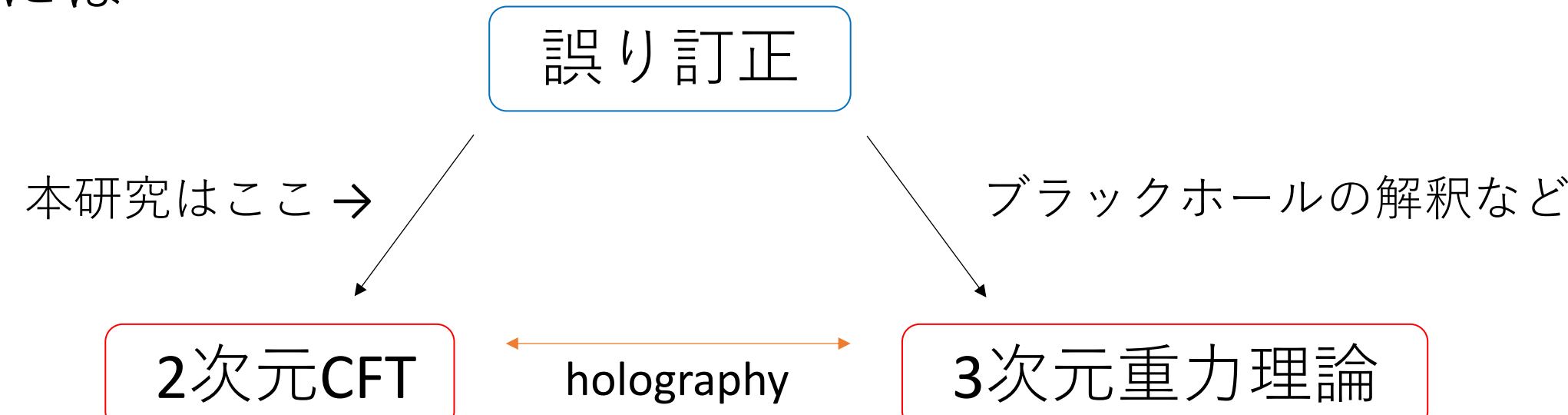
東京大学理学系研究科

背景

・近年、誤り訂正符号を用いて共形場理論（CFT）を構成することで情報理論の知見を基にCFTを解析する研究が行われている

・スペクトルや分配関数の計算の他、特定の対称性（ $N=2$ SUSY や triality）を持つCFTの系統的な探索が可能

・長期的には

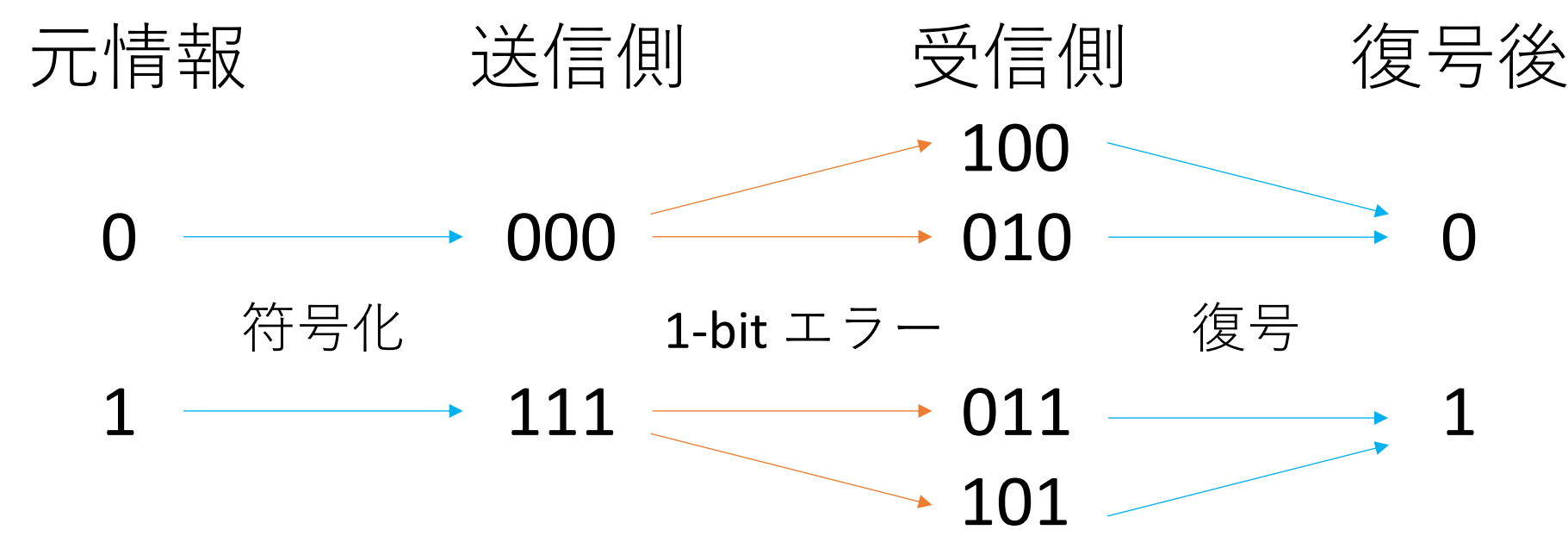


といった関係を具体的に構築することが志向されている

誤り訂正符号

・誤り訂正符号とは、エラーが生じ得る通信路において冗長性を持たせることで正確に情報伝達を行うための枠組み

・例：古典バイナリ符号



・符号 C ：古典系では、符号化後の部分群＝送り得る情報のこと上の例では $C = \{000, 111\}$

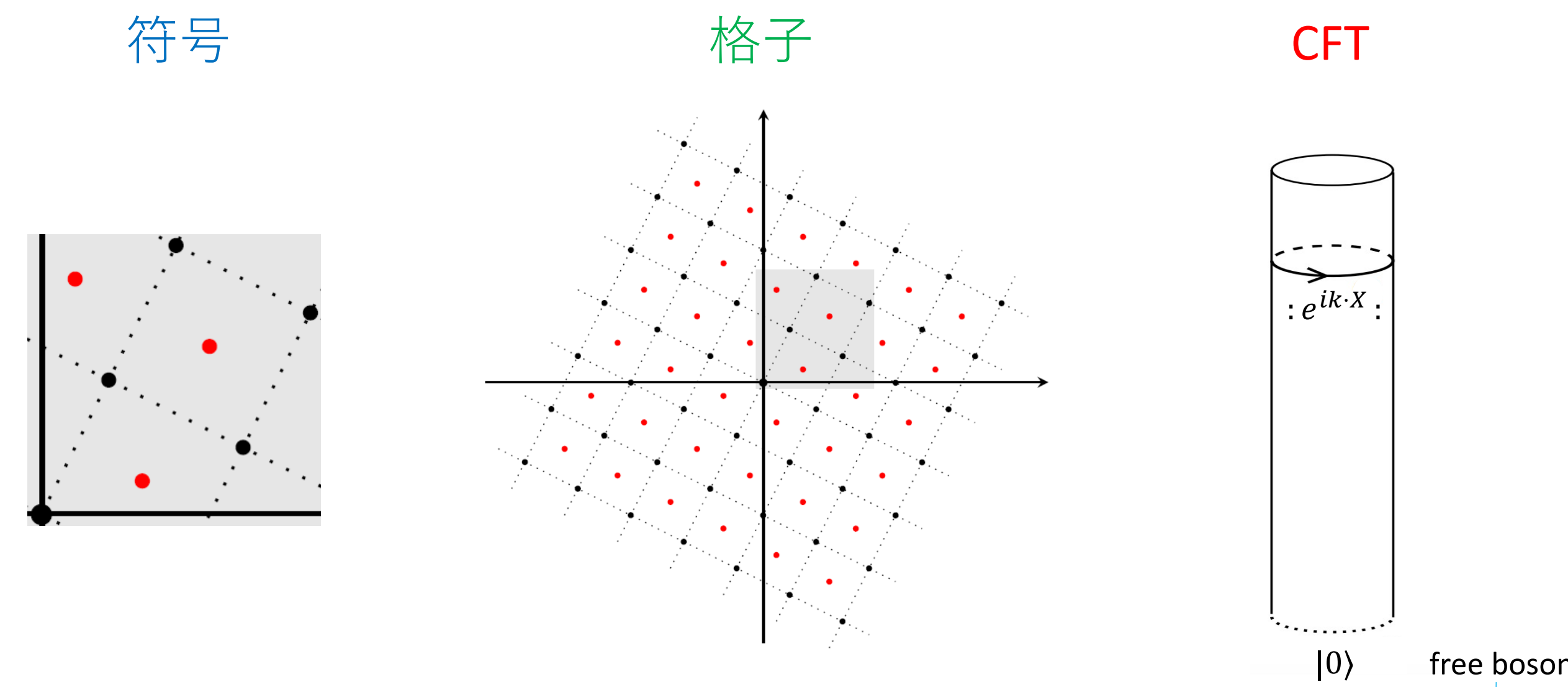
一般には、情報として $\mathbb{Z}_t$ 上の元を考える $\rightarrow C \subset (\mathbb{Z}_t)^n$

・復号：幾何的には C の中で「最も近い状態」へと戻す

・誤り訂正能力：何bitのエラーまで訂正できるか。例では 1-bit

フェルミオンCFTの構成

・構成：



・性質：

自己双対 $\Leftrightarrow$ 奇自己双対 $\Leftrightarrow$ モジュラー不変

→ 自己双対符号から必ず無矛盾なCFTを構成できる
誤り訂正や格子理論において分類が知られている

・対応関係：

誤り訂正能力 $\Leftrightarrow$ 最小ノルム $\Leftrightarrow$ スペクトルギャップ

→ スペクトルギャップが極値を取るCFTの探索に有用
holography を通して3次元重力理論のスペクトルにも関連

列挙多項式 $\Leftrightarrow$ 格子テータ関数 $\Leftrightarrow$ 分配関数

$W_C(x_0, \dots, x_{t-1}) \quad \Theta_\Lambda(\tau) = \sum_{\lambda \in \Lambda} q^{\frac{1}{2}\lambda^2} \quad Z(\tau) = \text{Tr}[q^H]$

→ 符号を指定すれば直ちにトーラス分配関数を計算できる

超対称性、楕円種数

・CFT が SUSY を持つ必要条件是誤り訂正符号の言葉に焼き直せる
例えばバイナリ符号の場合、

符号 $C \subset \{0,1\}^n$ に 1 が 2 or 6 個の元が含まれる
 $\Leftrightarrow$ super current となり得る spin-3/2 プライマリ場が存在する

・楕円種数：CFT が $N=2$ 超共形対称性を持つとき、

$$Z_{EG}(\tau, z) = \text{Tr}_R \left[(-y)^{J_0} q^{L_0 - \frac{n}{24}} \right]$$

J_0 ：R対称性に対応する $U(1)$ current $J(z)$ のゼロモード

・楕円種数は弱Jacobi形式となることが知られている。逆に、

符号 $C \subset \{0,1,2\}^n, n \in 12\mathbb{Z}$ が 1,2 のみからなる元を含む
 $\Leftrightarrow Z_{EG}$ が弱Jacobi形式となるような $J(z)$ を取ることができる

といった定理が成り立つ

→ 符号を用いてSUSYを持つ蓋然性が高い理論を構成できる

・例：Ternary Golay code $C = \{xG | x \in \mathbb{Z}_3^6\} \subset \mathbb{Z}_3^{12}$

$$\text{生成行列: } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$c = (1, \dots, 1)$ を含む。 $J(z) = i \frac{c}{\sqrt{3}} \cdot \partial X(z)$ に対し、

$$Z_{EG}(\tau, z) = y^2 + 22 + y^{-2} + \mathcal{O}(q^1)$$

は弱Jacobi形式。

実際、super current $G_i(z)$ を具体的に与えることができ、extremal CFT ($N=2$ 真空表現に「最も近い」理論) として知られるCFTと同型

orbifold

・誤り訂正符号から構成したCFTに対し、orbifold上の理論を考える

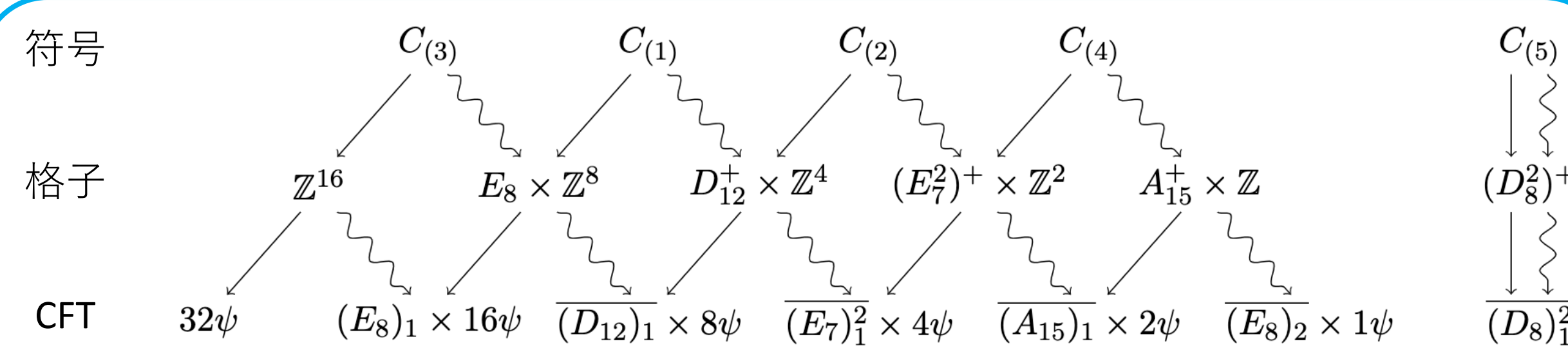
shift orbifold: $X \rightarrow X + \pi\delta$ reflection orbifold: $X \rightarrow -X$

・orbifold上での分配関数は元の理論のそれを用いて表される

例えばバイナリ符号、 $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \dots, 1)$ の shift では

$$Z_{\text{orbifold}}^{NS}(\tau) = \frac{1}{2} Z_{\text{original}}^{NS}(\tau) + \frac{(\theta_2 \theta_3)^{n/2} + (\theta_3 \theta_4)^{n/2}}{2 \eta(\tau)^n}$$
$$Z_{\text{orbifold}}^{\bar{R}}(\tau) = \frac{1}{2} Z_{\text{original}}^{\bar{R}}(\tau)$$

・長さ $n=16$ のバイナリ符号は5種類。shift, reflection orbifold を組み合わせ、 $c=16$ の全カイラルフェルミオンCFT (7種類) を網羅できる



・元の理論が SUSY を持つ場合、orbifold 上でも同等の構造を持つ

→ 特定の楕円種数 (Witten index) を持つCFTの探索(?)

結論

・誤り訂正符号を用いてCFTを構成することで、超対称性や楕円種数について誤り訂正の言葉を用いた効率的な解析が可能となる

・特に、extremal と呼ばれるような「良い」性質を持つCFTについて、一定の中心電荷の範囲ではこの枠組みで捉えることができる

・orbifold上の理論を考えることで誤り訂正を用いた枠組みを拡張し、より広範囲のmoduli空間を探索し得る

・今後は別の種類のorbifoldや具体的な重力理論との関連を調べたい

参考文献

[1] K. Kawabata & S. Yahagi, *J. High Energ. Phys.* **2024**, 130 (2024)

[2] K. Kawabata & S. Yahagi, “Orbifolds of chiral fermionic CFTs and Triality” (投稿予定)