

Improved robustness of quantum supremacy for random circuit sampling

Ryuhei Mori

Joint work with

Yasuhiro Kondo and Ramis Movassagh

<https://arxiv.org/abs/2102.01960>

Tokyo Institute of Technology

July 26, 2021

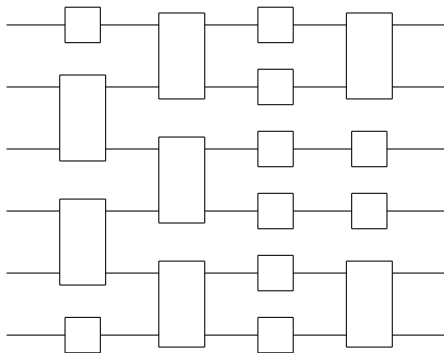
Quantum supremacy

- Constant-depth circuit [Terhal and DiVincenzo 2004]
- Boson Sampling [Aaronson and Arkhipov 2011]
- IQP circuit [Bremner, Jozsa, Shepherd 2011]
- **Random quantum circuit** [Bouland, Fefferman, Nirkhe, Vazirani, Nature Physics, 2019] [Movassagh 2019]

Hardness of sampling of outputs of random quantum circuits

- Google により 53qubit の 2 次元のランダム量子回路を“実行する”量子コンピュータが開発された
- ランダム量子回路の出力のサンプリングが古典コンピュータにとって難しい問題であることを理論的に示したい。
- 非ユニタリランダム量子回路の出力確率の厳密計算は #P-hard。
[Bouland, Fefferman, Nirkhe, Vazirani, Nature Physics, 2019]
- ゲート数 m のランダム量子回路の出力確率の加法的誤差 $2^{-\Omega(m^3)}$ の計算は #P-hard。[Movassagh 2019]

アーキテクチャとランダム量子回路



アーキテクチャ = 量子ゲートの配置

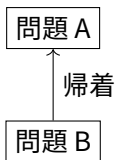
主結果

Theorem ([Kondo, Mori, and Movassagh 2021])

あるゲート数 m のアーキテクチャ $\mathcal{A}$ が存在し、アーキテクチャ $\mathcal{A}$ 上のランダムな量子回路のうちの $1 - O(1/m)$ の割合のものについて加法的誤差 $2^{-\Omega(m \log m)}$ で計算することは BPP 帰着のもとで #P-hard である。

同様の結果が [Bouland, Fefferman, Landau, and Liu 2021] によって独立に得られている。

帰着



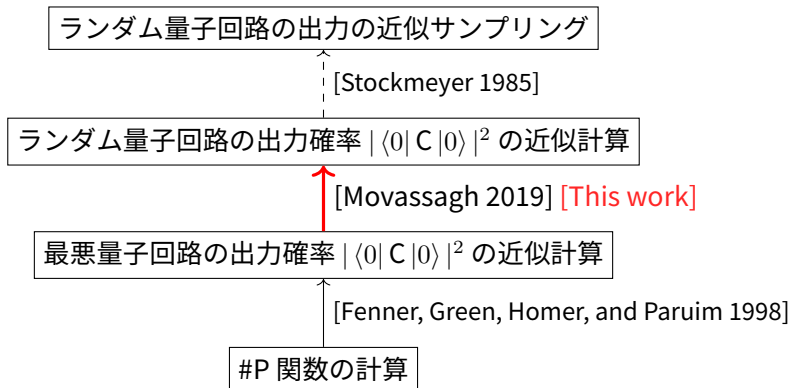
問題 B が問題 A に帰着できる

$\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 問題 A を解くオラクルを用いて問題 B が効率的に解ける

問題 B が問題 A に帰着できる

$\Rightarrow$ (問題 A が効率的に解ける $\Rightarrow$ 問題 B が効率的に解ける)

$\iff$ (問題 B が効率的に解けない $\Rightarrow$ 問題 A が効率的に解けない)



#P-関数

Definition (#P-関数)

関数 $f: \{0, 1\}^* \rightarrow \mathbb{N}$ について $f \in \#P \stackrel{\text{def}}{\iff}$ ある多項式時間計算可能な関数 $F: \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$ と多項式 p が存在して

$$f(x) = |\{y \in \{0, 1\}^{p(|x|)} : F(x, y) = 1\}|.$$

Theorem ([Fenner, Green, Homer, and Paruim 1998])

任意の $f \in \#P$ について、ある古典 TM で多項式時間計算可能な量子回路 $C(x)$ が存在して

$$\left| \langle 0^{p(|x|)} | C(x) | 0^{p(|x|)} \rangle \right|^2 = \left(1 - \frac{f(x)}{2^{p(|x|)-1}} \right)^2.$$

証明の概要.

$C(x) = H^{\otimes p(|x|)} V(x) H^{\otimes p(|x|)}$ とおけばよい。ここで
 $V(x) := \sum_{y \in \{0, 1\}^{p(|x|)}} (-1)^{F(x, y)} |y\rangle \langle y|.$

□

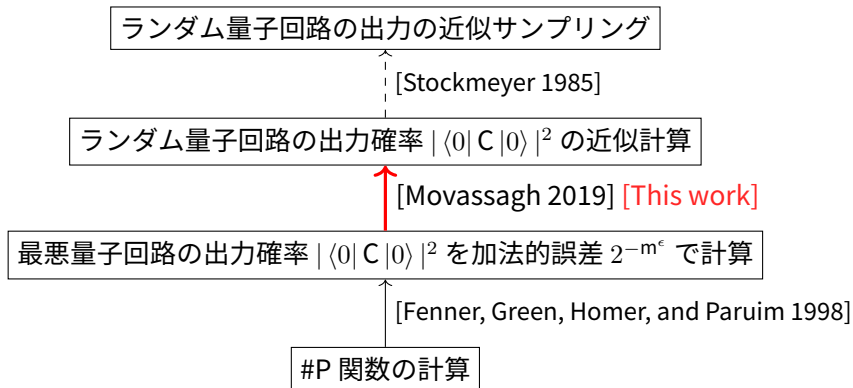
#P-関数から量子回路の出力確率の計算への帰着

Theorem

ϕ を与えられた量子回路 C について $|\langle 0^n | C | 0^n \rangle|^2$ を加法的誤差 2^{-m^ϵ} で計算するオラクルとすると (ϵ は任意に固定された定数)、任意の #P-問題について FP^{ϕ} アルゴリズムが存在する。

証明の概要.

$f \in \#P$ の入力 x について $C(x)$ にダミーのゲートを十分な個数付加して ϕ に投げればよい。 □



目標

ランダム量子回路 C_R のうち $1 - 1/O(m)$ の割合のものについて、出力確率 $|\langle 0 | C_R | 0 \rangle|^2$ を加法的誤差 ϵ で計算するオラクルを使って、与えられた量子回路 C_U の出力確率 $|\langle 0 | C_U | 0 \rangle|^2$ を加法的誤差 $\epsilon \exp\{O(m \log m)\}$ で計算する古典アルゴリズムを設計する

証明の方針

Definition (行列のパーマメント)

For $A \in \mathbb{F}_q^{n \times n}$,

$$\text{Perm}(A) := \sum_{\sigma} \prod_i A_{i, \sigma(i)}.$$

Theorem ([Lipton 1991])

$q \geq n + 2$ と仮定する。行列 R のうち $1 - \epsilon_n$ の割合のものについて、 $\text{Perm}(R)$ が時間 T_n で計算できるとすると、任意の行列 A について $\text{Perm}(A)$ が時間 $(n + 1)T_n + O(n(\log n)^2)$ 、確率 $1 - (n + 1)\epsilon_n$ で計算できる。

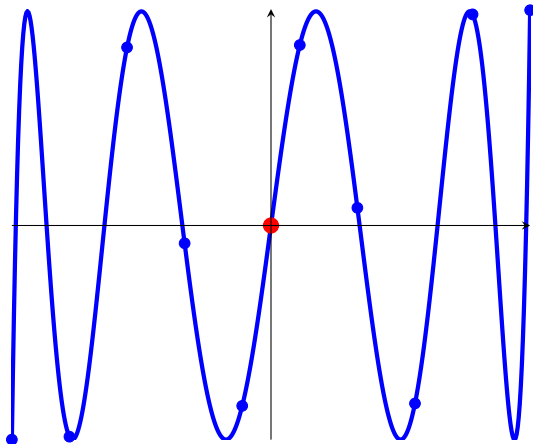
Proof.

行列 $R \in \mathbb{F}_q^{n \times n}$ について多項式 $f_R \in \mathbb{F}_q[\theta]$ を以下のように定義する

$$f_R(\theta) := \text{Perm}(A + \theta R).$$

$f_R(0) = \text{Perm}(A)$ が計算したいものである。ランダム行列 R について $A + \theta R$ も $\theta \neq 0$ の場合にはランダム行列となる。 $f_R(\theta)$ を $\theta \neq 0$ について $n + 1$ 点を評価すると n 次多項式 $f_R(\theta)$ が定まるので $f_R(0)$ も定まる。 □

多項式補間



ケイリー関数による内挿

与えられたユニタリ U とランダムなユニタリ R を多項式 (もしくは有理関数) でつなげたい

$f(0) = U$, $f(1) = R$ となる有理関数 f_R を定義したい。

- ① $f_H(\theta) = \exp\{i\theta H\}U$. 有理関数じゃない。テイラー展開を途中で打ち切ると多項式になるが、ユニタリにならない [Bouland, Fefferman, Nirkhe, Vazirani, 2019].

- ② $f_H(\theta) = C(i\theta H)U$. 有理関数になる！ [Movassagh 2019].

ケイリー関数

$$C(x) := \frac{1-x}{1+x}.$$

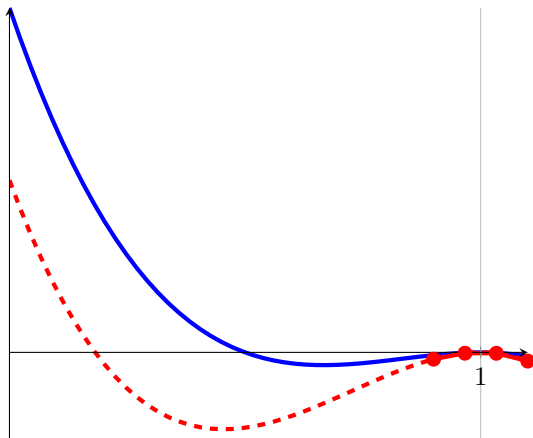
Total variation distance

Lemma ([Movassagh 2019])

For the Cayley path interpolation f_H , the total variation distance is $d_{\text{TVD}}(f_H(1), f_H(1 - \Delta)) = O(\Delta)$.

Total variation distance between random quantum circuits whose gates are drawn from $f_H(1)$ and $f_H(1 - \Delta)$ is $O(m\Delta)$.

多項式補完



$\theta = 1$ 付近の値から多項式補間すると $\theta = 0$ での誤差は大きくなる。

誤差有り多項式補完

先行研究では誤差を評価するのにPaturiの補題を使っていた。
[Aaronson, Arkhipov 2011] [Boulund, Fefferman, Nirkhe, Vazirani, 2019] [Movassagh 2019]

Lemma ([Paturi 1992])

Let $p(x)$ be a real polynomial of degree at most d . If $|p(x)| \leq \epsilon$ for all $x \in [1 - \Delta, 1 + \Delta]$, then $|p(0)| \leq \epsilon \exp\{2d(1 + \Delta^{-1})\}$.

この補題は簡単に改善できる。

Lemma ([Kondo, Mori, and Movassagh 2021])

Let $p(x)$ be a real polynomial of degree at most d . If $|p(x)| \leq \epsilon$ for all $x \in [1 - \Delta, 1 + \Delta]$, then $|p(0)| \leq \epsilon \exp\{d \log(2\Delta^{-1})\}$.

さらに補題の仮定を弱めることができる。

Lemma ([Kondo, Mori, and Movassagh 2021])

Let $p(x)$ be a real polynomial of degree at most d . If $|p(x)| \leq \epsilon$ for all $x \in \{1 - \Delta + \frac{2j\Delta}{d} \mid j = 0, 1, \dots, d\}$, then $|p(0)| \leq \epsilon \exp\{d \log(e\Delta^{-1})\}$.

Lagrange interpolation

For given $(x_0, y_0), \dots, (x_d, y_d)$, the **Lagrange polynomial** p is defined as

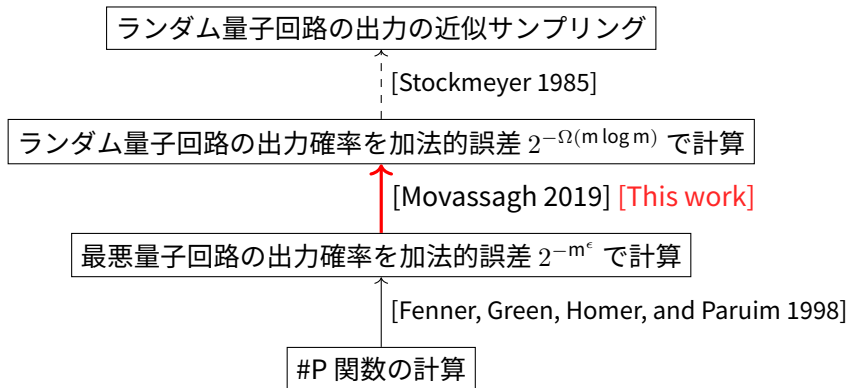
$$p(x) = \sum_{j=0}^d y_j \prod_{\substack{0 \leq k \leq d \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Lemma ([Kondo, Mori, and Movassagh 2021])

Let $p(x)$ be a polynomial of degree at most d . Let $\Delta \in (0, 1)$. Assume that $|p(x_j)| \leq \epsilon$ for all of the $d + 1$ equally-spaced points $x_j = 1 - \Delta + \frac{2j\Delta}{d}$ for $j = 0, 1, \dots, d$. Then

$$|p(0)| < \epsilon \frac{\exp [d(1 + \log \Delta^{-1})]}{\sqrt{2\pi d}}.$$

In this context, $d = O(m)$, $\Delta = \Omega(m^{-c})$.



今後考えられる研究

- 出力確率の計算の誤差の改善とランダム量子回路の出力のサンプリング問題の困難性の証明
- 他の量子計算モデルについての量子超越性の証明