

量子場理論における変分法—カイラル相転移の動的過程へのアプローチ—

津江保彦
高知大学理学部

カイラル相転移の動的過程の記述を与えることを目標に講義する。QCD の特徴のいくつかを概観した後、カイラル対称性と、その対称性を保持するいくつかの有効模型を紹介する。さらに、線形シグマ模型に基づきカイラル相転移のダイナミクスを考えていく。そのために、ガウス近似の範囲内で、汎関数シュレーディンガー描像に基づく量子系の扱いと、これと同等なスクイーズ状態を用いた時間依存変分法について解説する。これは量子効果を含んで平均場の時間発展を記述できる方法であり、この方法を用いてカイラル相転移の動的過程について、特に DCC(Disoriented Chiral Condensate) との関連で述べる

I. はじめに

夏の学校準備校から与えられた講義テーマは、「カイラル相転移の動的過程についてのお話など」であり、「自身の研究も交えつつ話して」良いということであった。また、対象は「主として M1 の院生向け」であるとの話を伺った。

そこで、M1 対象ということであり、講義は、強い相互作用の基礎理論である量子色力学 (QCD) のいくつかの特徴的な性質を、本講のテーマでもあるカイラル対称性の説明を含んで行う。QCD を直接扱うのは困難であるので、カイラル対称性を保持した有効模型と、その模型によりカイラル相転移がどのようになっているかを交えて紹介する。ここで話を変えて、線形シグマ模型でカイラル相転移の時間発展を記述する一つの方法として、スカラー場の理論に対する時間依存変分法を与え、やや詳しくこの手法を見ていく。最後に、この手法をカイラル相転移のダイナミクスの記述に応用し、カイラル相転移の秩序変数であるカイラル凝縮体が、通常の真空ではなく異なるアイソスピン方向に発達する disoriented chiral condensate (DCC) 生成の可能性など、どのような結果が得られうるのかを紹介したい。

第 1 講：強い相互作用の基礎理論 QCD の特徴

第 2 講：QCD の低エネルギー有効模型

第 3 講：量子場理論における時間依存変分法

第 4 講：DCC 生成・崩壊へのアプローチ

(第 5 講：非相対論的ボーズ多体系への応用 (時間が許せば。))

以下に、講義で使用する予定のスライドの内容の一部を与えておくことにする。

量子場理論における変分法 —カイラル相転移の動的過程へのアプローチ—

高知大理 津江保彦

対象・・・QCDカイラル相転移
有効模型(線形シグマ模型)

手法・・・汎関数シュレーディンガー描像
場の理論における時間依存変分法
Gaussian wave functional

適用・・・動的カイラル相転移

contents

- 第1講: 強い相互作用の基礎理論QCDの特徴
- 第2講: QCDの低エネルギー有効模型
- 第3講: 量子場理論における時間依存変分法
- 第4講: DCC生成・崩壊へのアプローチ

(第5講: 非相対論的ボーズ多体系への応用)

第1講:強い相互作用の基礎理論QCDの特徴

Text books for QCD

- Quarks & Leptons (F.Halzen, A.D.Martin, John Willey & Sons)
- Foundations of Quantum Chromodynamics (T. Muta, World Scientific)

Text bookes of quantum field theory

- ゲージ場の量子論I. II (九後汰一郎、培風館)
- Quantum Field theory (Itzykson & Zuber, McGrawHill)
- Gauge theory of elementary particle physics(T.-P.Cheng & L.-F.Li)
- An Introduction to Quantum Field Theory (Peskin & Schroeder, Addison Wesley)

Asymptotic freedom

- D.J.Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett.30 (1973) 1343, Phys. Rev. D8 (1973) 3633
- H.D.Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346

Chiral dynamics

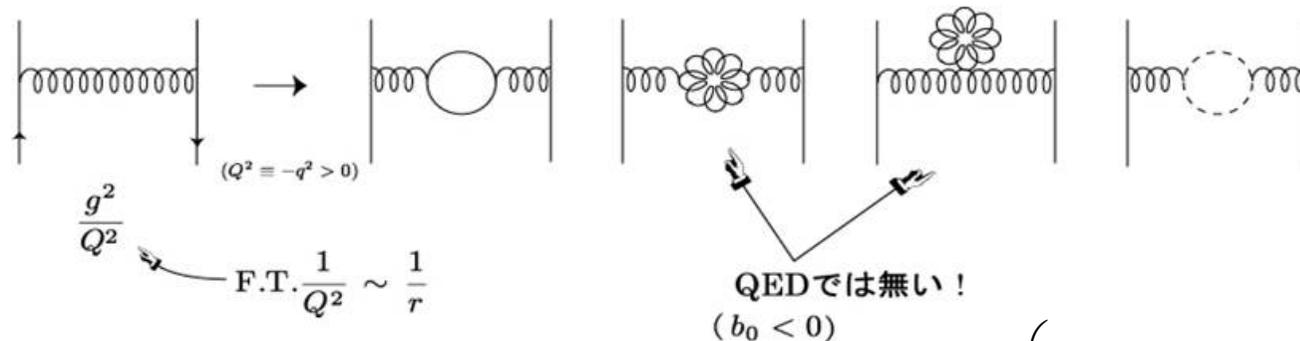
- Current Algebra (S.L.Adler & R.F.Dashen, Benjamin)

Lagrangian density of QCD

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}(i\gamma_\mu(\partial^\mu - igA_\mu^a t^a) - m)q - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)^2$$

- $t_a \cdots \text{su}(3)_c$ generator

- Gluonの自己相互作用 (非線形相互作用)



$$g_{\text{eff}}^2(Q^2) \equiv \frac{g^2}{1 + g^2 b_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)} \equiv \frac{1}{\frac{b_0}{2} \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right)}$$

$$\left(\Lambda_{\text{QCD}} = \mu \exp\left(-\frac{1}{b_0 g(\mu^2)}\right) \right)$$

$$\left(b_0 = \frac{1}{8\pi^2} \cdot \frac{11N_c - 2N_f}{3} \right)$$

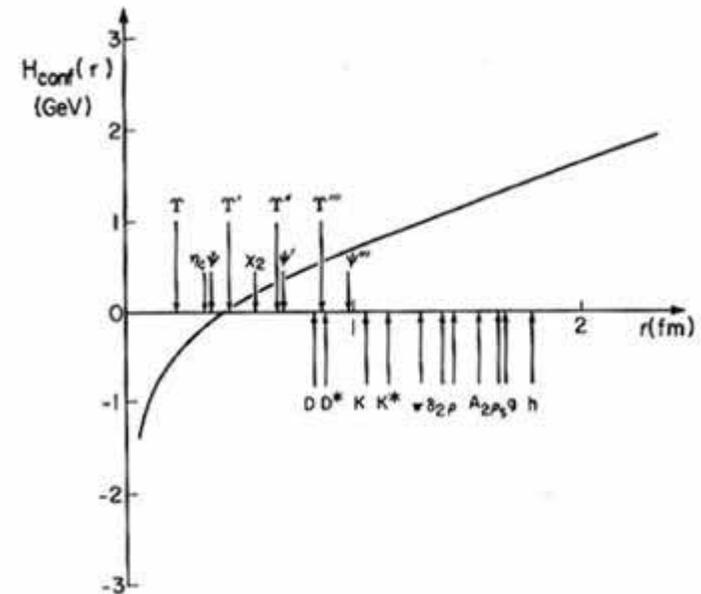
色の閉じ込め クォーク間ポテンシャル

- $Q^2 \rightarrow 2_{\text{QCD}}^2$ で、 $g^2 \rightarrow \dots$ 色の閉じ込め
クォーク間ポテンシャル

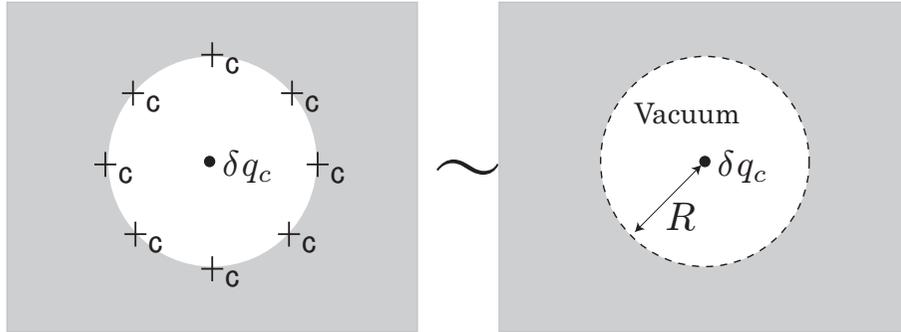
$$V(r) \approx -\frac{g_{\text{eff}}^2(r)}{r} + \sigma r$$

漸近的自由性 閉じ込め

Regge trajectory ($J \sim M^2$) を再現できる



QCD 真空と閉じ込め



inside	outside	エネルギー
$D = E = \frac{\delta q}{4\pi r^2}$	$D = \frac{\delta q}{4\pi r^2}, E = \frac{\delta q}{4\pi \epsilon r^2}$	$W = \frac{1}{2} D \cdot E$

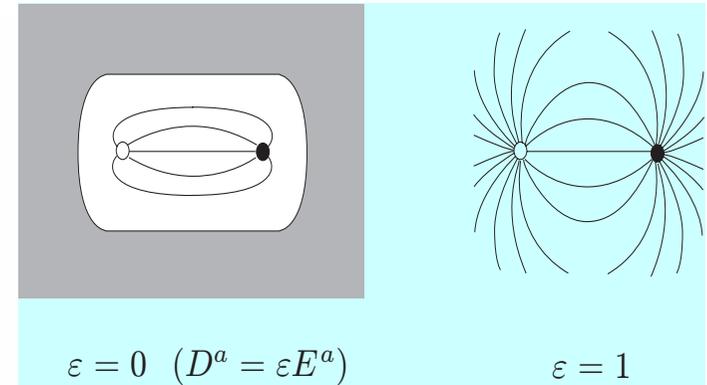
Medium

W_{el} = (真空からはかったエネルギー)

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(\delta q)^2}{\epsilon} - (\delta q)^2 \right] \int_R^\infty \frac{d^3 r}{(4\pi)^2 r^4} = \frac{1}{2} (\delta q)^2 \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \cdot \frac{1}{4\pi}$$

W_{hol} = (hole が出来たことによるエネルギー loss)

$$= \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right) B + (4\pi r^2) \sigma + \dots$$



$$W_{total} \sim \frac{(\delta q)^2}{8\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{R} + \frac{4\pi}{3} R^3 B + \dots$$

- Bag Picture

カイラル対称性

- カイラル変換 (軽いクォーク u, d で考えよう)

$$\psi(x) = \psi_L(x) + \psi_R(x) \quad \psi_{L/R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \psi \quad (\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)$$

QCD Lagrangian でクォークが入っているところは、

$$\begin{aligned} \bar{q}i\gamma(\partial - igA)q &= \bar{q}_L i\gamma(\partial - igA)q_L + \bar{q}_R i\gamma(\partial - igA)q_R \\ m\bar{q}q &= m(\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L) \end{aligned}$$

- 次の変換を考える

$$V : \psi(x) \rightarrow \exp\left(i\frac{\tau^a}{2}\theta^a\right)\psi(x) \quad A : \psi(x) \rightarrow \exp\left(i\frac{\tau^a}{2}\theta^a\gamma_5\right)\psi(x)$$

$\bar{\psi}\psi$ は A のもとで不変でない。

QCD Lagrangian に質量項がなければ、 V, A の変換で QCD Lagrangian は不変である。 …カイラル対称性を持つ

しかし… QCD真空は、真空はカイラル変換のもとで不変でない。

カイラル対称性の自発的破れ $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$

何が問題か？

- QCDの相構造

- 動的相転移・・・QGP相転移

カイラル相転移 時空発展を伴う非平衡過程

高エネルギー重イオン衝突の物理

高密度星の物理

カイラル相転移

- 低温・低密度で・・・カイラル対称性の自発的破れ (NG phase)
- 高温・高密度で・・・カイラル対称性の回復 (Wigner phase)

カイラル相転移の存在

初期宇宙で経験

高エネルギー重イオン衝突実験で再現

第2講: QCDの低エネルギー有効模型

QCD like theory

- K.Higashijima, Phys.Rev.D29 (1984)1228
- V.A.Miransky, Sov.J.Nucl.Phys.38 (1983) 280
- K.-I.Aoki, M.Bando, T.Kugo, M.G.Mitchard and H.Nakatani, Prog. Theor. Phys. 84 (1990)683
- K.Higashijima, Prog. Theor. Phys. Suppl. 104 (1991)
- Dynamical Symmetry Breaking (ed. K.Yamawaki) p.35 (T.Kugo)

NJL model

- Y. Nambu and G.Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345; 124 (1961) 246
- T.Kunihiro and T.Hatsuda, Prog.Theor. Phys. 71 (1984) 1332
T.Hatsuda and T.Kunihiro, Prog.Theor.Phys. 74 (1985) 765
- T.Hatsuda and T.Kunihiro, Phys.rep. 247 (1994) 221
- S.P.Klevansky, Rev.Mod. Phys. 63 (1992) 649
- M.Asakawa and K.Yazaki, Nucl.Phys. A504 (1989) 668

Linear sigma model

- M. Gell-Mann and M. Levy, Nuovo Cimento 16 (1960) 705

DCC

- J.D.Bjorken, K.L.Kowalski, C.C.Taylor, SLAC Rep.No.SLAC-PUB-6109(1993)
- A.A.Anselm and M.G.Ryskin, Phys.Lett.B266 (1991) 482
- J.P.Blaizot and A.Krzywicki, Phys.Rev.D46 (1992) 246
- K.Rajagopal and F. Wilczek, Nucl.Phys. B404 (1993) 577, B399 (1992) 395
- S.Gavin and B.Müller, Phys.Lett.B329 (1994) 486
- D.Boyanovsky, H.J.de Vega and R.Holman, Phys.Rev.D51 (1995) 734
- D.Boyanovsky, H.J.de Vega, R.Holman, D.S.Lee and A.singh, Phys.Rev.D51 (1995) 4419
- F.Cooper, Y.Kluger, E.Mottola and J.Paz, Phys.Rev.D51 (1995) 2377
- M.Asakawa, Z.Huang and X.-N.Wang, Phys.Rev.Lett.74 (1995) 3126

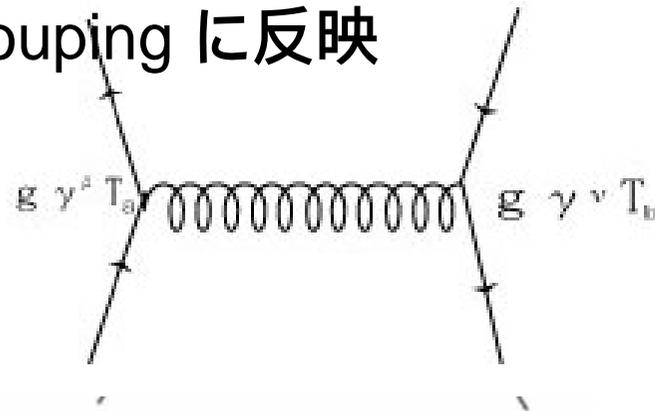
カイラル対称性を持つQCDの有効模型 (I)

• QCD-like 理論 $\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu(\partial^\mu - igA_a^\mu t^a) - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\nu^a)^2$

– 自己相互作用を無視してゲージ場を積分

– ただし、自己相互作用はrunning coupling に反映

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \rightarrow \mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x) - \frac{1}{2}$$



$$\int d^4x \tilde{\mathcal{L}} = \int_p \bar{\psi}(p)(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(p) - \frac{1}{2} \int_{pqk} \psi_\alpha(p - q/2) \bar{\psi}_\beta(-p - q/2) K^{\alpha\beta,\gamma\delta}(p, k) \psi_\gamma(-k - q/2) \bar{\psi}_\delta(k - q/2),$$

where $\int_p \equiv \int d^4p/(2\pi)^4$ and

$$K^{\alpha\beta,\gamma\delta}(p, k) \equiv g^2 (\gamma_\mu T^a)^{\delta\alpha} (\gamma_\nu T^b)^{\beta\gamma} \cdot \frac{g^{\mu\nu} - (p-k)^\mu (p-k)^\nu / (p-k)^2}{(p-k)^2}$$

QCD-like 理論 (2)

— bilocal な補助場を導入

$$\chi_{\alpha\beta}(p, q) = \int K^{\alpha\beta, \gamma\delta}(p, k) \psi_{\gamma}(k - q/2) \bar{\psi}_{\delta}(-k - q/2)$$

— Dynamical Chiral Symmetry Breaking

… が真空期待値を持つ

$$\langle \chi_{\alpha\beta} \rangle = \Sigma_{\alpha\beta}(p) (2\pi)^4 \delta^4(q)$$

— 有効ポテンシャル

$$V[\Sigma] = -\frac{1}{2} \int_{pk} \Sigma(p) K^{-1}(p, k) \Sigma(k) + i \int_p \text{tr} \ln (\gamma^{\mu} p_{\mu} - m - \Sigma(p))$$

— Stationary Condition $\frac{\delta V[\Sigma]}{\delta \Sigma} = 0$

QCD-like 理論 (3)

Schwinger-Dyson Equation

$$\Sigma_{\alpha\beta}(p) = -i \int_k K^{\alpha\beta,\gamma\delta}(p,k) \left(\frac{1}{\gamma^\mu k_\mu - m - \Sigma(k)} \right)_{\gamma\delta}$$

$\Sigma[p] = \frac{g\gamma_\mu T^a \quad g\gamma_\nu T^b}{\frac{1}{\gamma \cdot k - m - \Sigma(k)}} \leftarrow p$

—quark condensate

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\Lambda = - \int_k \text{tr} \left(\frac{1}{\gamma^\mu k_\mu - m - \Sigma(k)} \right)$$

—pion decay constant

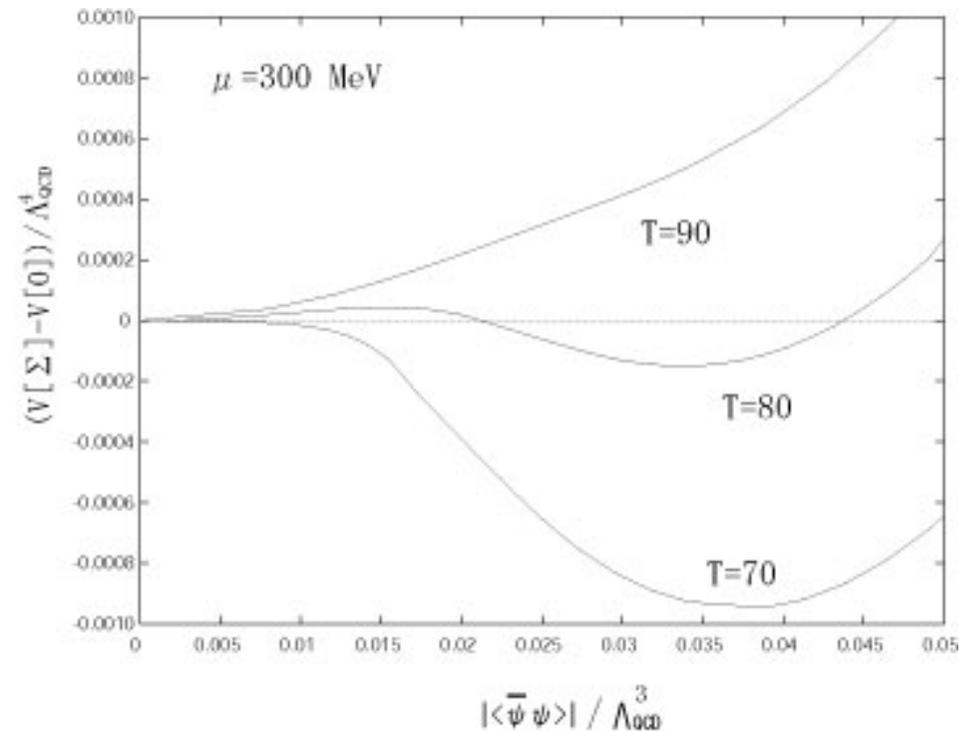
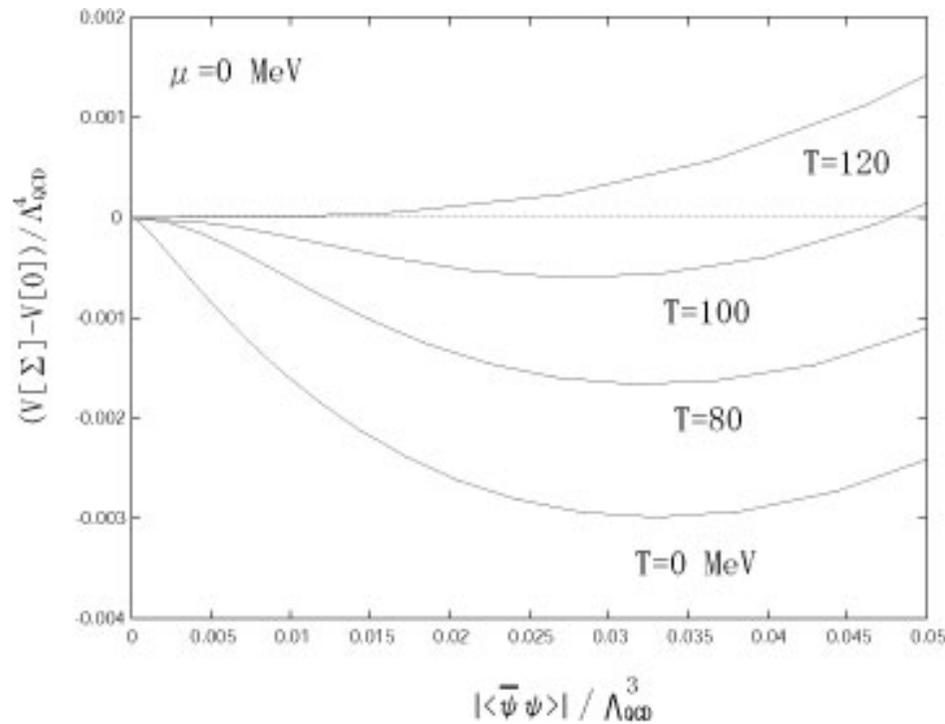
$$f_\pi^2 = N_c \int_0^\infty \frac{ds}{(4\pi)^2} \frac{s\Sigma(s)[\Sigma(s) - s\Sigma'(s)/2]}{[s + \Sigma(s)^2]^2}$$

—dynamical quark mass

$$\Sigma(s = xM^2) = M$$

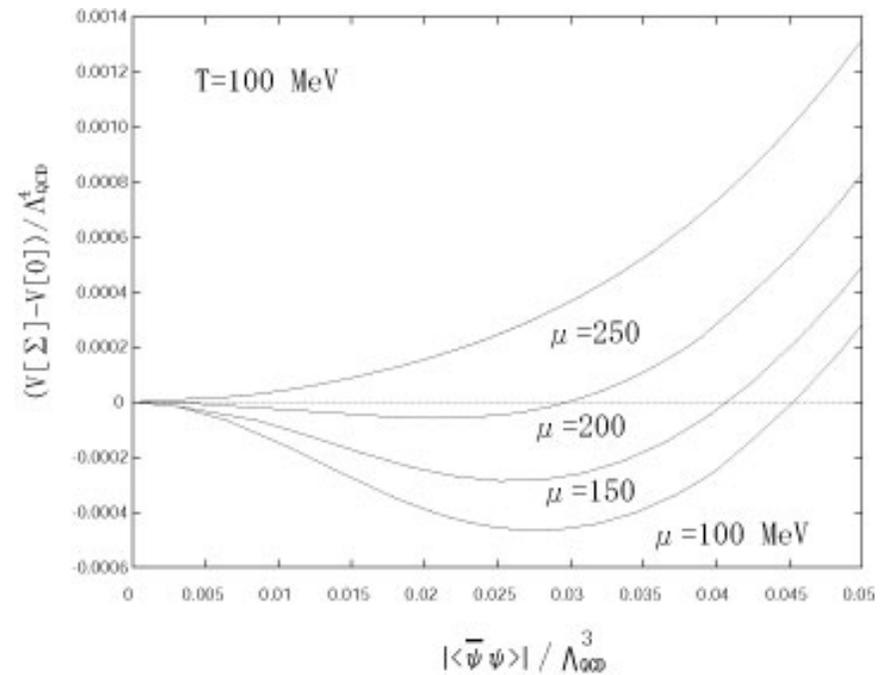
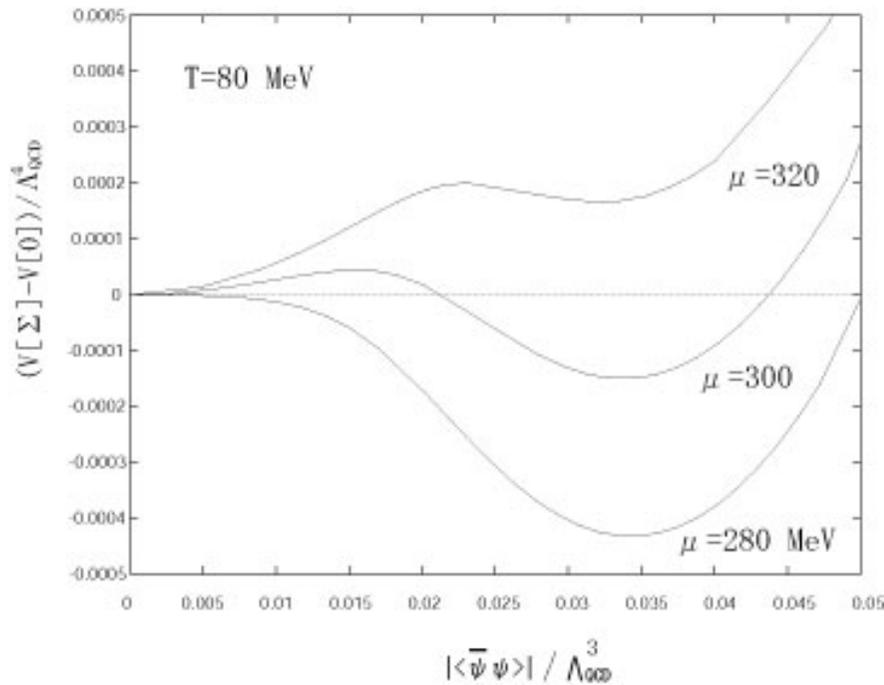
QCD-like 理論に基づくカイラル相転移

- 有効ポテンシャル



QCD-like 理論に基づくカイラル相転移

- 有効ポテンシャル



カイラル対称性を持つQCDの有効模型(II)

- Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model
 - gluon の質量無限大と思おう！
 - クォークの4点相互作用になる
 - カイラル変換のもとで不変になるようにする

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m)\psi + g \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \right]$$

カイラル対称性を持つQCDの有効模型(III)

- 線形シグマ模型

- ハドロンの世界

クォーク・グルオンではなく、シグマ・パイメソンの自由度で記述する

$$\pi^a \approx \bar{\psi} i \gamma_5 \tau^a \psi \quad \sigma \approx \bar{\psi} \psi$$

- カイラル変換のもとで不変になるようにする

$$\mathcal{L}_{\text{sigma}} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_a \partial_\mu \varphi_a - V(\varphi_a \varphi_a) \quad (\varphi_a = (\sigma, \vec{\pi}))$$

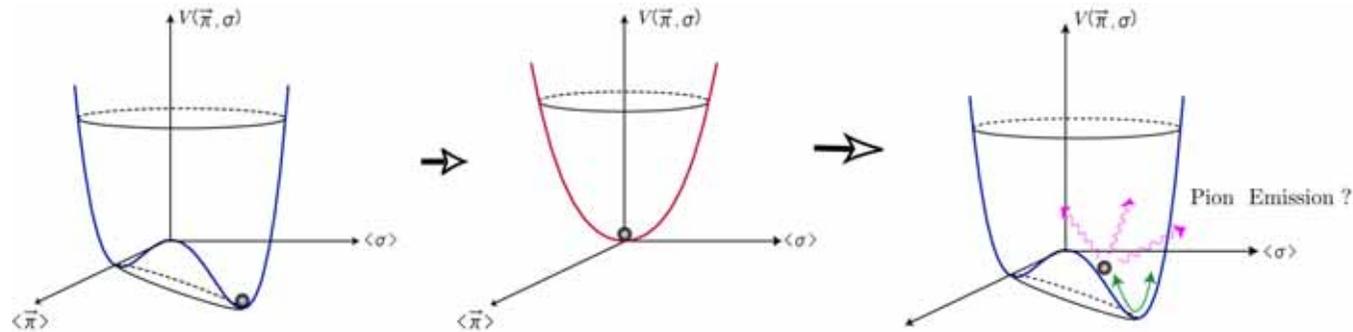
$$V(\varphi_a \varphi_a) = \frac{1}{2} m^2 \varphi_a \varphi_a + \frac{\lambda}{4!} (\varphi_a \varphi_a)^2 = \frac{\lambda}{4!} (\varphi_a \varphi_a - v^2)^2$$

- $= v + \dots$ ($v = \langle \sigma \rangle$)として、場の2次を見ると

$$m_\sigma^2 = \frac{\lambda v^2}{3}, \quad m_\pi^2 = 0$$

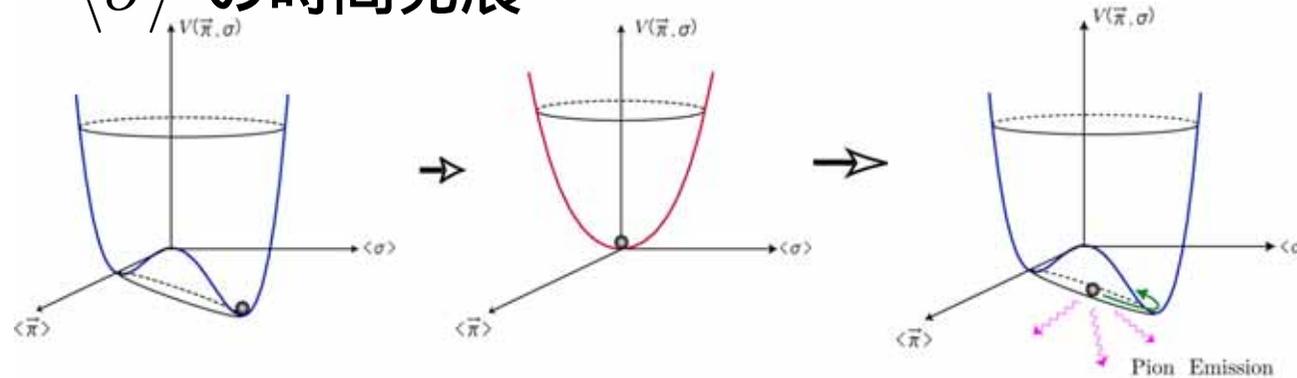
線形シグマモデルでのカイラル相転移

- 秩序変数 $\langle \sigma \rangle$



- 動的カイラル相転移

… $\langle \sigma \rangle$ の時間発展



準安定な状態として、 方向にも凝縮体が成長する (DCC)

Disoriented Chiral Condensate (DCC)

- DCCの生成・崩壊過程

量子揺らぎの中を凝縮体が時間発展する。

量子揺らぎは必ずしも「小さく」ない

…揺らぎの成長

量子揺らぎを適切に取り入れて系の時間発展を取り扱う手法の
必要性

第3講：量子場理論における時間依存変分法

Functional Schrödinger picture in quantum theory

- R.Jackiw and A.Kerman, Phys.Lett.71A (1979) 158
- R.Balian and M.Vènéroni, Phys.Rev.Lett. 47 (1981) 1353, 1765
- O.Eboli, R.Jackiw and S.-Y.Pi, Phys.Rev. D37 (1988) 3557
- R.Jackiw, Physica A158 (1989) 269

Coherent state and squeezed state

- W.-M.Zhang, D.H.Feng and R.Gilmore, Rev.Mod.Phys.62 (1990) 867

TDVA with squeezed state in quantum mechanics

- Y.T., Y.Fujiwara, A.Kuriyama and M.Yamamura, Prog.Theor.Phys.85 (1991) 693
- Y.T. and Y.Fujiwara, Prog.Theor.Phys.86 (1991) 443
- Y.T. Prog.Theor.Phys.88 (1992) 911

TDVA with squeezed state in scalar field theory

- Y.T. and Y.Fujiwara, Prog.Theor.Phys.86 (1991) 469

Application to scalar field theory

- S.-Y.Pi and M.Samiullah, Phys.Rev. D36 (1987) 3128
- F.Cooper and E.Mottola, Phys.Rev. D36 (1987) 3114
- D.Vautherin and T.Matsui, Phys.Rev. D55 (1997) 4492
- Y.T., D.Vautherin and T.Matsui, Prog.Theor.Phys.102 (1999) 313

Application to gauge field theory

- A.Kerman and D.Vautherin, Ann. Phys. 192 (1989) 408
- C.Heinemann, E.Iancu, C.Martin and D. Vautherin, Phys.Rev.D61 (2000) 116008

Functional Schroedinger picture in Quantum theory

- 作用原理

$$\delta S = \delta \int \langle \Phi(t) | i\hbar \partial_t - \hat{H} | \Phi(t) \rangle dt = 0$$

- 任意の状態 $|\Phi(t)\rangle$ に対して成り立つなら、Schroedinger eq. が得られる。
- 近似的な状態 $|\Phi(t)\rangle$ を得るために、「変分空間」を制限する。
.....時間依存変分法.....

量子力学系 $\hat{H} = \frac{1}{2} \hat{P}^2 + V(\hat{Q})$

- Coherent State

…量子力学系の古典対応を与える。

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^+), \quad \hat{P} = -i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^+)$$

$$|\Phi(t)\rangle = \exp(\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a}) |0\rangle$$

$$= \exp\left(\frac{i}{\hbar} (p(t)\hat{Q} - q(t)\hat{P})\right) |0\rangle \quad \langle Q|0\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega Q^2\right)$$

- 期待値

$$\langle \Phi(t) | \hat{Q} | \Phi(t) \rangle = q(t), \quad \langle \Phi(t) | \hat{P} | \Phi(t) \rangle = p(t)$$

$$\langle \Phi(t) | \hat{Q}^2 | \Phi(t) \rangle = q(t)^2 + \frac{\hbar}{2\omega}, \quad \langle \Phi(t) | \hat{P}^2 | \Phi(t) \rangle = p(t)^2 + \frac{\hbar\omega}{2}$$

- 不確定関係

$$(\Delta q)^2 = \langle \Phi(t) | (\hat{Q} - q(t))^2 | \Phi(t) \rangle = \frac{1}{2\omega} \hbar, \quad (\Delta p)^2 = \langle \Phi(t) | (\hat{P} - p(t))^2 | \Phi(t) \rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

…量子揺らぎは固定されている…

$$(\Delta q)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}$$

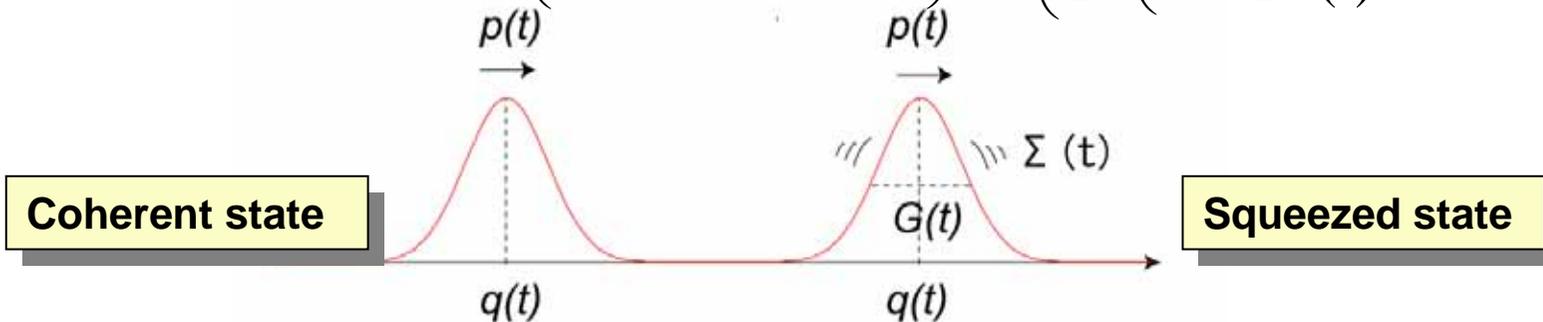
Squeezed State

- いかにして「量子効果」を適切に取り込むか？
 - 状態の拡張

Squeezed State

$$|\Phi(t)\rangle = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \exp\left(\frac{1}{2}(B \hat{a}^{+2} - B^* \hat{a}^2)\right) |0\rangle$$

$$= (2G)^{-1/4} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p(t)\hat{Q} - q(t)\hat{P})\right) \exp\left(\frac{1}{2\hbar}\left(\omega - \frac{1}{2G(t)} + i2\Sigma(t)\right)\hat{Q}^2\right) |0\rangle$$



- 期待値

$$\langle \Phi(t) | \hat{Q} | \Phi(t) \rangle = q(t), \quad \langle \Phi(t) | \hat{P} | \Phi(t) \rangle = p(t)$$

$$\langle \Phi(t) | \hat{Q}^2 | \Phi(t) \rangle = q(t)^2 + \hbar G(t), \quad \langle \Phi(t) | \hat{P}^2 | \Phi(t) \rangle = p(t)^2 + \hbar \left(\frac{1}{4G} + 4G(t)\Sigma(t)^2 \right)$$

Squeezed State

不確定関係

$$(\Delta q)^2 = \langle \Phi(t) | (\hat{Q} - q(t))^2 | \Phi(t) \rangle = \hbar G(t),$$

$$(\Delta p)^2 = \langle \Phi(t) | (\hat{P} - p(t))^2 | \Phi(t) \rangle = \hbar \left(\frac{1}{4G} + 4G(t)\Sigma(t)^2 \right)$$

…量子揺らぎは変分法により適切に取り込まれ得る…

$$(\Delta q)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2} \sqrt{1 + (4G(t)\Sigma(t))^2}$$

時間依存変分法

$$\delta S = \delta \int \langle \Phi(t) | i\hbar \partial_t - \hat{H} | \Phi(t) \rangle dt = 0$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \hbar \dot{G} = \frac{\partial H}{\partial \Sigma}, \quad \hbar \dot{\Sigma} = -\frac{\partial H}{\partial G}$$

- G , Σ は \hbar とともに現れる

…量子揺らぎのダイナミクスを記述する

場の理論における時間依存変分法

- 量子力学系での
時間依存変分法 + Squeezed State の手法を、スカラー場の理論に
拡張する。

汎関数シュレーディンガー描像にもとづく Gaussian wavefunctional
approach

- スカラー場の理論におけるスクイーズ状態

$$|\Phi(t)\rangle = \exp(S(t))\exp(T(t))|0\rangle$$

$$S(t) = i \int d^3x \left[\pi_a(\vec{x}, t) \hat{\phi}_a(\vec{x}) - \varphi_a(\vec{x}, t) \hat{\pi}_a(\vec{x}) \right]$$

$$T(t) = \int \int d^3x d^3y \hat{\phi}_a(\vec{x}) \left[\frac{1}{4} \left[G_{ab}^{(0)-1}(\vec{x}, \vec{y}) - G_{ab}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}, t) \right] + i \Sigma_{ab}(\vec{x}, \vec{y}, t) \right] \hat{\phi}_b(\vec{y})$$

Squeezed State Gaussian wave functional

- 汎関数Schroedinger描像

$$\Psi[\varphi(\vec{x})] = \langle \varphi | \Phi(t) \rangle$$

$$= N \exp \left\{ i \int d\vec{x} \bar{\pi}_a(\vec{x}, t) \hat{\varphi}_a(\vec{x}, t) \right\}$$

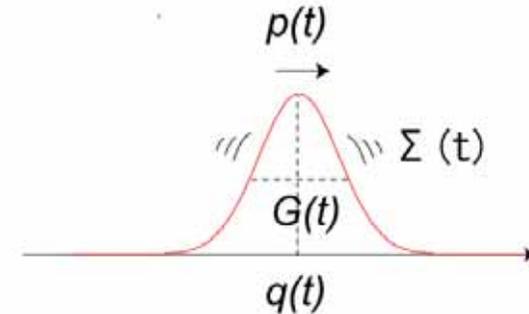
$$\times \exp \left\{ \iint d\vec{x} d\vec{y} \hat{\varphi}_a(\vec{x}, t) \left(\frac{1}{4} G_{ab}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}, t) - i \Sigma_{ab}(\vec{x}, \vec{y}, t) \right) \hat{\varphi}_b(\vec{y}, t) \right\}$$

$$\hat{\varphi}_a(\vec{x}, t) \equiv \varphi_a(\vec{x}) - \bar{\varphi}_a(\vec{x}, t)$$

ガウス型波動汎関数・・・dynamical “variables”

・・・中心 $\bar{\varphi}(\vec{x}, t)$ 、その速度 $\bar{\pi}(\vec{x}, t)$

・・・ガウスの幅 $G(\vec{x}, \vec{y}, t)$ 、その速度 $2(G\Sigma + \Sigma G)(\vec{x}, \vec{y}, t)$



Gaussian wavefunctional

- 期待値

$$\langle \Phi(t) | \varphi_a(\vec{x}) | \Phi(t) \rangle = \bar{\varphi}_a(\vec{x}, t), \quad \langle \Phi(t) | \pi_a(\vec{x}) | \Phi(t) \rangle = \bar{\pi}_a(\vec{x}, t)$$

$$\langle \Phi(t) | \hat{\varphi}_a(\vec{x}, t) \hat{\varphi}_b(\vec{y}, t) | \Phi(t) \rangle = G_{ab}(\vec{x}, \vec{y}, t)$$

$$\langle \Phi(t) | \hat{\pi}_a(\vec{x}, t) \hat{\pi}_b(\vec{y}, t) | \Phi(t) \rangle = \frac{1}{4} G_{ab}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}, t) + 4\Sigma G \Sigma_{ab}(\vec{x}, \vec{y}, t)$$

$$(\hat{\varphi}_a(\vec{x}, t) \equiv \varphi_a(\vec{x}) - \bar{\varphi}_a(\vec{x}, t) \quad , \quad \hat{\pi}_a(\vec{x}, t) \equiv \pi_a(\vec{x}) - \bar{\pi}_a(\vec{x}, t))$$

- 時間依存変分法

$$\delta S = \delta \int \langle \Phi(t) | i\hbar \partial_t - \hat{H} | \Phi(t) \rangle dt = 0$$

- 変分関数 $\bar{\varphi}(\vec{x}, t)$ $\bar{\pi}(\vec{x}, t)$

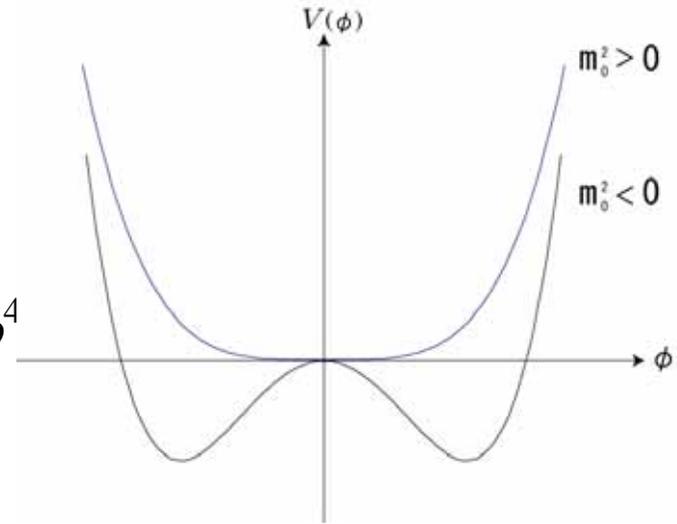
$$G(\vec{x}, \vec{y}, t) \quad \Sigma(\vec{x}, \vec{y}, t)$$

quantum mechanics	scalar field theory
\hat{Q}, \hat{P}	$\varphi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x})$
ω^2	$m_0^2 - \nabla^2$ (or $m_0^2 + \mathbf{k}^2$)
$q(t), p(t)$	$\bar{\varphi}(\mathbf{x}, t), \bar{\pi}(\mathbf{x}, t)$
$G(t), \Sigma(t)$	$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$

4 模型

- ハミルトニアン密度

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2} \pi^2(\vec{x}) + \frac{1}{2} (\nabla \varphi(\vec{x}))^2 + \frac{m_0^2}{2} \varphi^2(\vec{x}) + \frac{\lambda}{24} \varphi^4$$



- 運動方程式

$$\dot{\bar{\varphi}} = \bar{\pi} \quad , \quad \dot{\bar{\pi}} = - \left(-\nabla^2 + m_0^2 + \frac{\lambda}{6} \bar{\varphi}^2(\vec{x}) + \frac{\lambda}{2} G(\vec{x}, \vec{x}) \right) \bar{\varphi}$$

$$\dot{G} = 2(G\Sigma + \Sigma G), \quad \dot{\Sigma} = \frac{1}{8} G^{-2} - 2\Sigma^2 - \frac{1}{2} \left(-\nabla^2 + m_0^2 + \frac{\lambda}{6} \bar{\varphi}^2(\vec{x}) + \frac{\lambda}{2} G(\vec{x}, \vec{x}) \right)$$

- Static solutions $\dot{\bar{\varphi}} = 0$, $\dot{G} = 0 \Rightarrow \bar{\pi} = 0$, $\Sigma = 0$

$$\bar{\varphi} \neq 0 \Rightarrow m_0^2 + \frac{\lambda}{2} G_0(0) + \frac{\lambda}{6} \varphi_0^2 = 0$$

$$G(\vec{x}, \vec{y}, t) = G_0(\vec{x} - \vec{y}) = \int d\vec{k} \frac{e^{i(\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{k}}}{2\sqrt{\mu^2 + k^2}} \quad \mu^2 \equiv m_0^2 + \frac{\lambda}{2} G_0(0) + \frac{\lambda}{2} \varphi_0^2 = \frac{\lambda \varphi_0^2}{3}$$

Reformulation for fluctuations

- Hartree-Bogoliubov form like Nuclear Many-Body Physics ··· Introduction fo Reduced Density Matrix

$$M_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; t) = \begin{pmatrix} i\langle \hat{\phi}_a(\vec{x}, t) \hat{\pi}_b(\vec{y}, t) \rangle & \langle \hat{\phi}_a(\vec{x}, t) \hat{\phi}_b(\vec{y}, t) \rangle \\ \langle \hat{\pi}_a(\vec{x}, t) \hat{\pi}_b(\vec{y}, t) \rangle & -i\langle \hat{\pi}_a(\vec{x}, t) \hat{\phi}_b(\vec{y}, t) \rangle \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

- Eq. of Motion ··· Liouville equation

$$i\dot{M} = [H, M]$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = -\nabla^2 + m_0^2 + \dots$$

Gauge Field Dynamics

- su(2) Yang-Mills Field A_μ^a : $A_0^a = 0$ gauge

- Hamiltonian density

$$H = \frac{g^2}{2} \vec{E}^a \vec{E}^a + \frac{1}{2g^2} \vec{B}^a \vec{B}^a$$

$$\vec{E}^a(x) = -i \frac{\delta}{\delta \vec{A}^a(x)} , \quad \vec{B}^a(x) = \vec{\nabla} \times \vec{A}^a(x) + \frac{1}{2} f^{abc} \vec{A}^b(x) \times \vec{A}^c(x)$$

- Extra gauge degrees of freedom removed by the Gauss Law

$$G^a(x) |\psi\rangle = 0 \quad \text{for physical state}$$

$$G^a(x) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a(x) + f^{abc} \vec{A}^b(x) \cdot \vec{E}^c(x)$$

- Projection to Color Singlet State – Like GCM

$$|\psi_0\rangle = \int \mathcal{D}[\theta^a] \exp\left(i \int dx \theta^a(x) G^a(x)\right) |\psi\rangle$$

$|\psi\rangle \dots$ Gaussian Wavefunctional

- • • Difficult to calculate practically

Gauge Field Dynamics

- Approximate projection ··· Thouless-Valatin method
cf. Nuclear Rotation

$$\left(\hat{H} - \omega \hat{J}_x\right) |\psi_\omega\rangle = E_\omega |\psi_\omega\rangle \quad , \quad \hat{H} = \hat{H}_{\text{int}} + \frac{J^2}{2I}$$

— Moment of Inertia

$$I = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\langle \psi_\omega | \hat{J}_x | \psi_\omega \rangle}{\omega}$$

- In QED

$$H_\omega = H - \int d^3x \omega(x) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x) \quad , \quad E = \langle H \rangle - \Delta E_{TV}$$

$$\Delta E_{TV} = \frac{1}{2} \int dx dy \langle \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(y) \rangle |^{-1}(x, y)$$

$$|^{-1}(x, y) = \frac{1}{4\pi |x - y|} \quad : \quad \textit{Coulomb Int.}$$

Gauge Field Dynamics

- In QCD $H_\omega = H - \int d^3x \omega^a(x) G^a(x)$, $|^{ab}(x, y) = \left. \frac{\delta \langle G^a(x) \rangle_\omega}{\delta \omega} \right|_{\omega=0}$

$$E_{QCD} = \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\langle G^a(x) G^b(y) \rangle_c}{|^{ab}(x, y)}$$

$$= \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\langle G^a(x) \rangle_c \langle G^b(y) \rangle_c}{|^{ab}(x, y)} + \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\langle \hat{G}^a(x) \hat{G}^b(y) \rangle_c}{|^{ab}(x, y)}$$

- Screening and antiscreening

$$|^{ab}(\vec{q}) = \frac{\delta^{ab}}{2} q^2 (1 + \alpha) \quad , \quad \langle G^a(x) \rangle_c = \rho_{ext}^a (1 + \delta)$$

$$\boxed{\text{Screening}} \quad \alpha = \frac{g^2 C_N}{48\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \quad , \quad \delta = \frac{g^2 C_N}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \quad \boxed{\text{Anti-screening}}$$

- Thus,

$$E_{QCD} = \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\langle G^a(x) G^b(y) \rangle}{|^{ab}(x, y)}$$

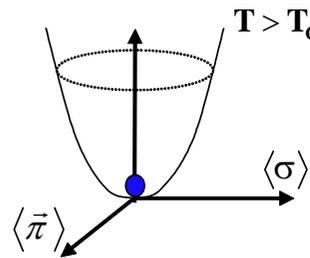
$$\approx g^2 \frac{1+3\delta}{1+\alpha} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \rho_{ext}^a(\vec{q}) \rho_{ext}^b(-\vec{q}) \frac{1}{2\vec{q}^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{g_R^2(\mu)} \equiv \frac{1}{g^2} \frac{1+\alpha}{1+3\delta} = \frac{1}{g^2} - \frac{11C_N}{48\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2}}$$

第4講: Time-Dependent Variational Approach with Gaussian wavefunctional in O(4) Linear Sigma Model associated with DCC

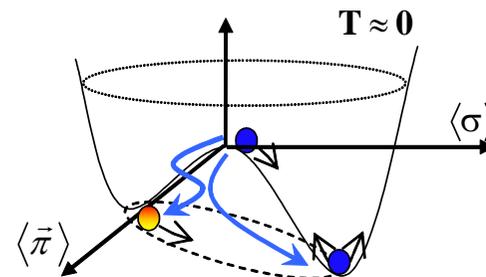
- N.Ikezi, M.Asakawa and Y.T., Phys.Rev. C69 (2004) 032202(R)
- D.Vautherin and T.Matsui, Phys.Lett. B437 (1998) 137
- Y.T., D.Vautherin and T.Matsui, Prog.Theor.Phys.102 (1999) 313
- Y.T., D.Vautherin and T.Matsui, Phys.Rev. D61 (2000) 076006

Chiral Restoration



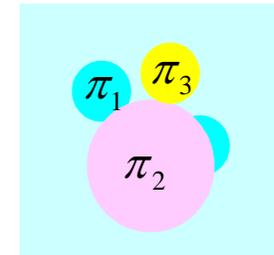
cool down

Chiral Symmetry Breaking



Disoriented Chiral Condensate

Disoriented Chiral Condensate



DCCの生成

- スクイーズ状態

$$|\Phi(t)\rangle = \prod_a |\Phi_a(t)\rangle,$$

- 凝縮体 : $C_a = \langle \phi_a \rangle$

$$|\Phi_a(t)\rangle = \exp(S_a(t)) \cdot N_a(t) \cdot \exp(T_a(t))|0\rangle,$$

- 状態の時間依存性

$$S_a(t) = i \int d\vec{x} [C_a(\vec{x}, t) \phi_a(\vec{x}) - D_a(\vec{x}, t) \pi_a(\vec{x})],$$

$$\delta \int dt \langle \Phi(t) | i \frac{\partial}{\partial t} - H | \Phi(t) \rangle = 0.$$

$$T_a(t) = \int d\vec{x} d\vec{y} \phi_a(\vec{x}) \left[-\frac{1}{4} (G_a^{-1}(\vec{x}, \vec{y}, t) - G_a^{(0)-1}(\vec{x}, \vec{y})) + i \Pi_a(\vec{x}, \vec{y}, t) \right] \phi_a(\vec{y}),$$

- 運動方程式 (運動量表示)

- 初期条件

$$\ddot{C}_a(\vec{k}, t) = -\vec{k}^2 - \mathcal{M}_a^{(1)}(\vec{k}, t),$$

$$\dot{G}_a(\vec{k}, \vec{k}', t) = 2\langle \vec{k} | (G_a(t) \Pi_a(t) + \Pi_a(t) G_a(t)) | \vec{k}' \rangle,$$

$$\dot{\Pi}_a(\vec{k}, \vec{k}', t) = \frac{1}{8} \langle \vec{k} | G_a^{-1}(t) G_a^{-1}(t) | \vec{k}' \rangle - 2\langle \vec{k} | \Pi_a(t) \Pi_a(t) | \vec{k}' \rangle - \vec{k}^2 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') - \frac{1}{2} \mathcal{M}_a^{(2)}(\vec{k} - \vec{k}', t),$$

$$\mathcal{M}_a^{(1)}(\vec{k}, t) = \left[-m^2 + 4\lambda C_a^2(\vec{k}, t) + 12\lambda G_a(\vec{k}, \vec{k}, t) + 4\lambda \sum_{b(\neq a)} (C_b^2(\vec{k}, t) + G_b(\vec{k}, \vec{k}, t)) \right] C_a(\vec{k}, t) - h\delta_{a0},$$

$$\mathcal{M}_a^{(2)}(\vec{k}, t) = -m^2 + 12\lambda C_a^2(\vec{k}, t) + 12\lambda G_a(\vec{k}, \vec{k}, t) + 4\lambda \sum_{b(\neq a)} (C_b^2(\vec{k}, t) + G_b(\vec{k}, \vec{k}, t)), \quad (4)$$

$$\langle C_a(\vec{x}, 0) \rangle = 0,$$

$$\langle C_a(\vec{x}, 0)^2 \rangle - \langle C_a(\vec{x}, 0) \rangle^2 = \delta^2,$$

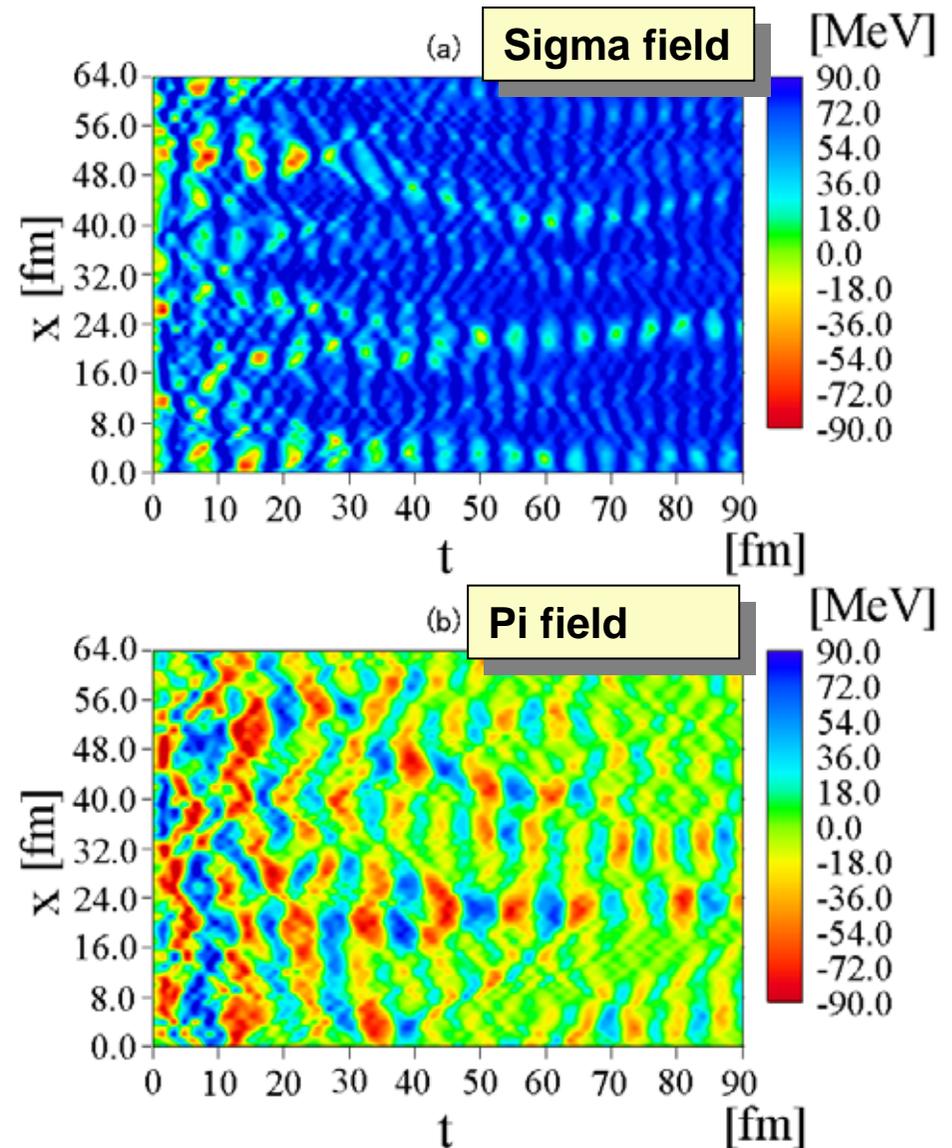
$$\langle D_a(\vec{x}, 0) \rangle = 0,$$

$$\langle D_a(\vec{x}, 0)^2 \rangle - \langle D_a(\vec{x}, 0) \rangle^2 = \frac{D}{d^2} \delta^2,$$

DCCの生成

- 凝縮体の時間発展
 - The expectation value of the sigma field approaches a constant.
 - The expectation value of the pion field oscillates around zero.
 - shows a domain structure with long correlation length.
- This is the formation of DCC domains.
- It is observed that the domain structure continues to grow till as late as $t \sim 40$ fm.

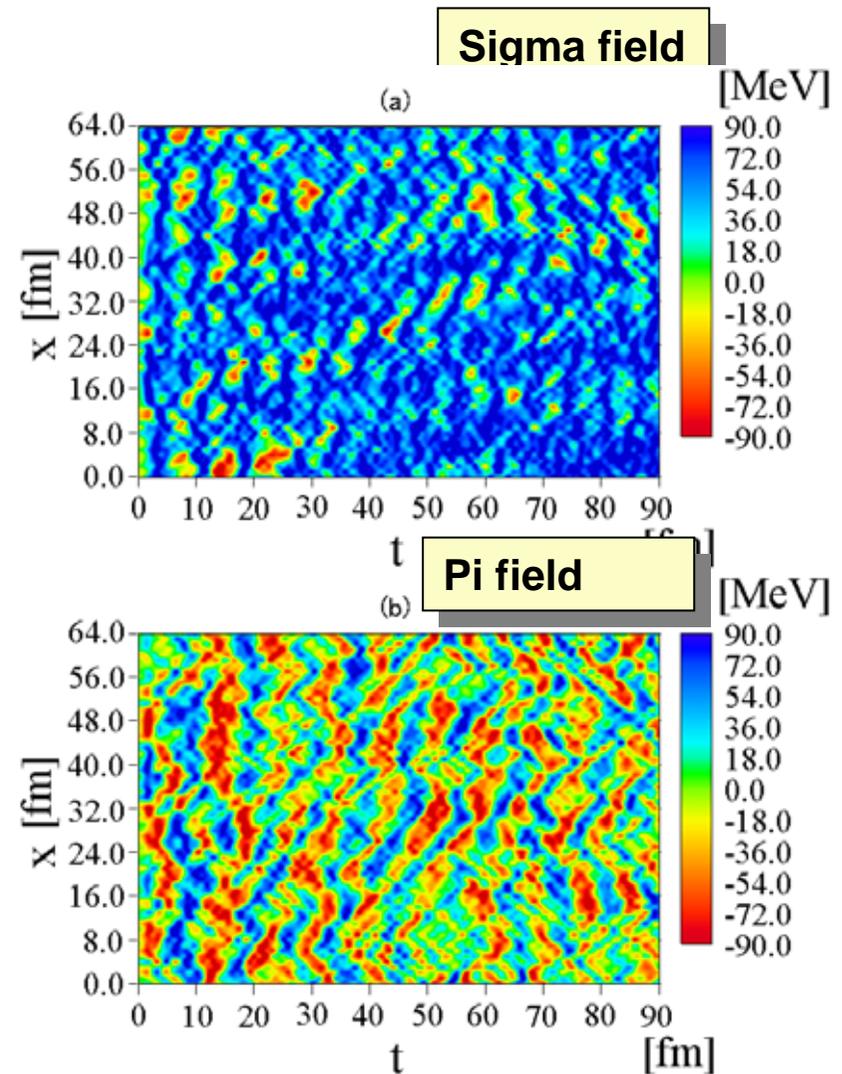
N.Ikezi, M.Asakawa & Y.Tsue,
PRC69(2004)032202



DCCの生成

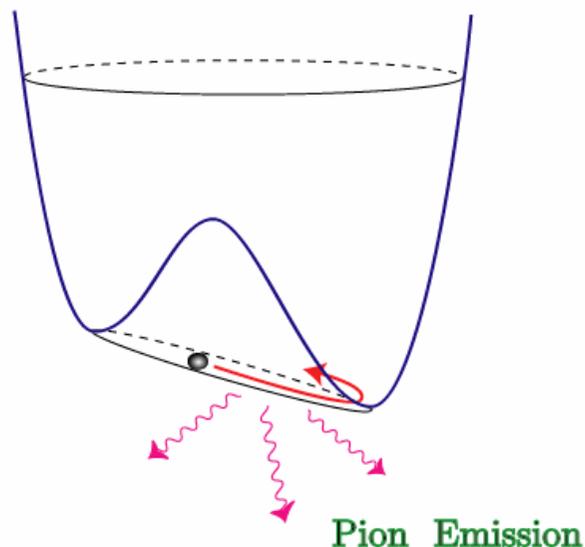
- 凝縮体の時間発展
 - without the off-diagonal components of the Green's functions
 - short range fluctuation is dominant and no long length correlation is observed
 - This tells us that the mode-mode correlation plays a decisive role in the formation of DCC domain.

N.Ikezi, M.Asakawa & Y.Tsue,
PRC69(2004)032202



DCCの崩壊

Collective Isospin Rotation



Collisionless dissipation

- Phase diagram in isospin rotation ?
- Damping mechanism of collective isospin rotation ?
- Damping time ?
- Number of emitted mesons ?

Investigate them in $O(4)$ linear sigma model in time-dependent variational method

Eqs. of motion for condensate

- TDVP $\delta \int dt \langle \Phi(t) | i\hbar \partial_t - \hat{H} | \Phi(t) \rangle = 0$
- Eq. of motion for condensate \dots Klein-Gordon type

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2 + \frac{\lambda}{6} \bar{\varphi}^2(\vec{x}, t) + \left(\frac{\lambda}{6} \text{Tr} G(\vec{x}, \vec{x}) + \frac{\lambda}{3} G(\vec{x}, \vec{x}) \right) \right) \bar{\varphi}(\vec{x}, t) = c1$$

$$G_{ab}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \langle \hat{\varphi}_a(\vec{x}, t) \hat{\varphi}_b(\vec{y}, t) \rangle \quad : \quad \text{Thermal average}$$
- Reduced density matrix and eq. of motion

$$M_{ab}(\vec{x}, \vec{y}; t) = \begin{pmatrix} i \langle \hat{\varphi}_a(\vec{x}, t) \hat{\pi}_b(\vec{y}, t) \rangle & \langle \hat{\varphi}_a(\vec{x}, t) \hat{\varphi}_b(\vec{y}, t) \rangle \\ \langle \hat{\pi}_a(\vec{x}, t) \hat{\pi}_b(\vec{y}, t) \rangle & -i \langle \hat{\pi}_a(\vec{x}, t) \hat{\varphi}_b(\vec{y}, t) \rangle \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$i\dot{M} = [H, M]$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{ab} = \left(-\nabla^2 + m_0^2 + \frac{\lambda}{6} \bar{\varphi}^2 + \frac{\lambda}{6} \langle \hat{\varphi}_c \hat{\varphi}_c \rangle \right) \delta_{ab} + \frac{\lambda}{3} (\bar{\varphi}_a \bar{\varphi}_b + \langle \hat{\varphi}_a \hat{\varphi}_b \rangle)$$

$$= -\nabla^2 + M_a^2 \delta_{ab}$$

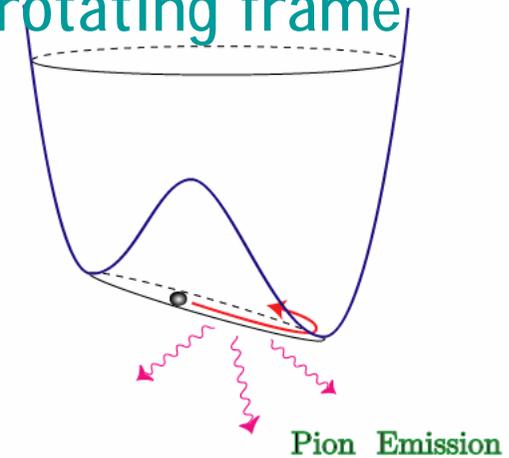
Collective isospin rotation

- Dynamics of isospin rotation where isospin components 0 and 1 are mixed

$$\bar{\varphi}(x) = U(x) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & \dots \\ i & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$U(x) = \exp(iqx\tau_y), \quad q^\mu = (\omega, \vec{q})$$

isospin rotating frame



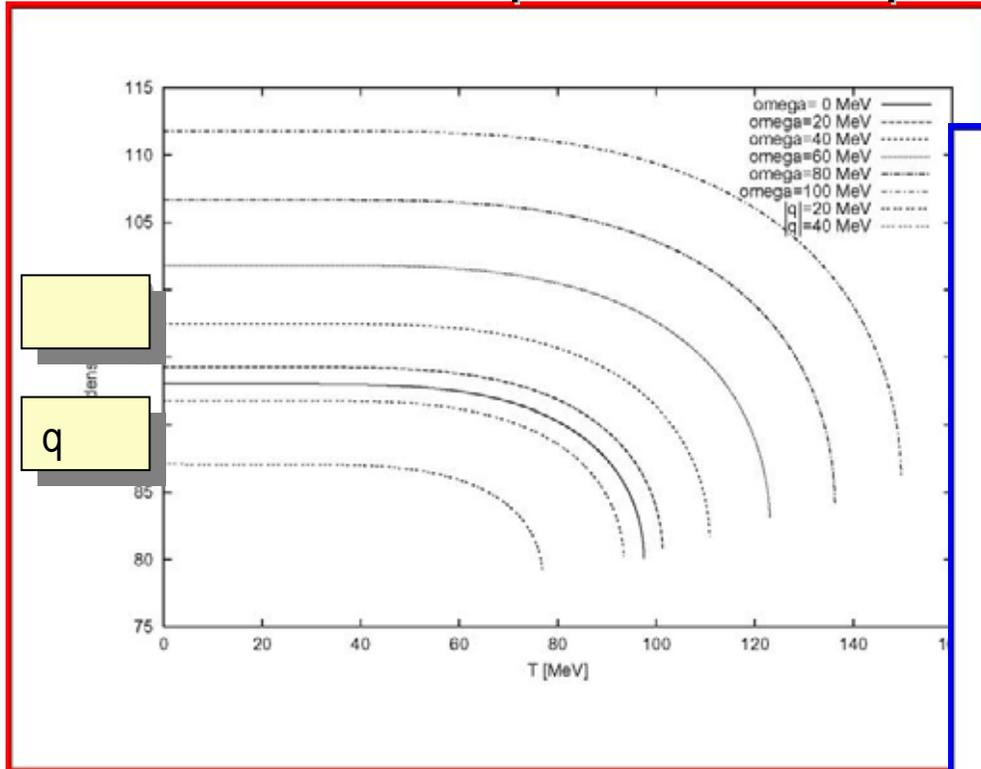
$$\left(-q^2 + m_0^2 + \frac{\lambda}{6} \varphi_0^2 + \frac{\lambda}{6} \sum_{\epsilon=0}^{N-1} \langle \hat{\varphi}_\epsilon(\vec{x}) \hat{\varphi}_\epsilon(\vec{x}) \rangle + \frac{\lambda}{3} \langle \hat{\varphi}_0(\vec{x}) \hat{\varphi}_0(\vec{x}) \rangle \right) \varphi_0 \equiv \mathcal{C} \quad \text{Collisionless dissipation}$$

$$M_r(\vec{x}, \vec{y}, t) = U^+(\vec{x}, t) M(\vec{x}, \vec{y}, t) U(\vec{y}, t)$$

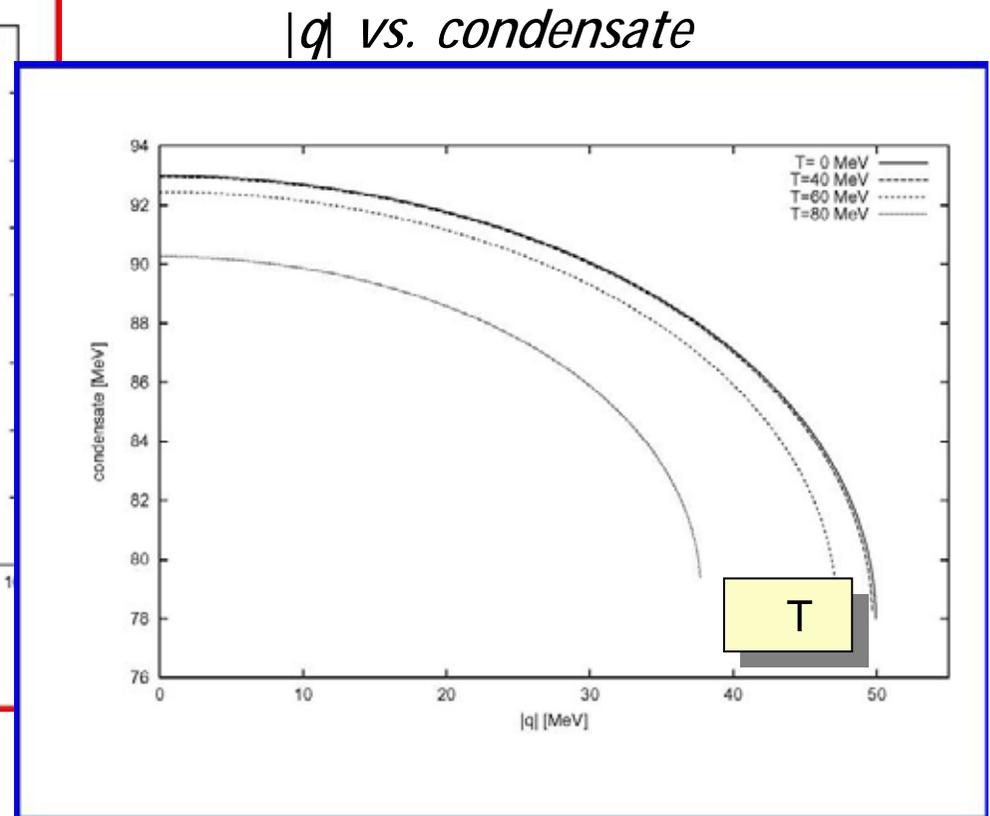
$$H(q) = U^+(x) \left(-i \frac{\partial}{\partial t} + H \right) U(x) = \begin{pmatrix} \omega \tau_y & 1 \\ \Gamma(\vec{q}) & \omega \tau_y \end{pmatrix}$$

Phase diagram

- Time-like isospin rotation : $\mathbf{q} = \mathbf{0} ; q^2 = \omega^2 > 0$
- Space-like isospin rotation : $\omega = 0 ; q^2 = -|\mathbf{q}|^2 < 0$



T vs. condensate



|q| vs. condensate

Y.Tsue, D.Vautherin & T.Matsui, *Prog.Theor.Phys.* 102 (1999) 313

Brief Summary

- $q^2 > 0$...enhancement of chiral symmetry breaking
cf.) centrifugal force
- $q^2 < 0$...existence of critical q
restoration of chiral symmetry

Quantum effects lead to more rapid change of chiral condensate

T (MeV)	0	20	40	60	80
$ q_c $ (MeV)	50.0	49.9	49.7	47.2	37.7

Cf.) Classical case

$$\frac{\lambda}{6} \phi_0^2 = \omega^2 - |\vec{q}^2| - m_0^2$$

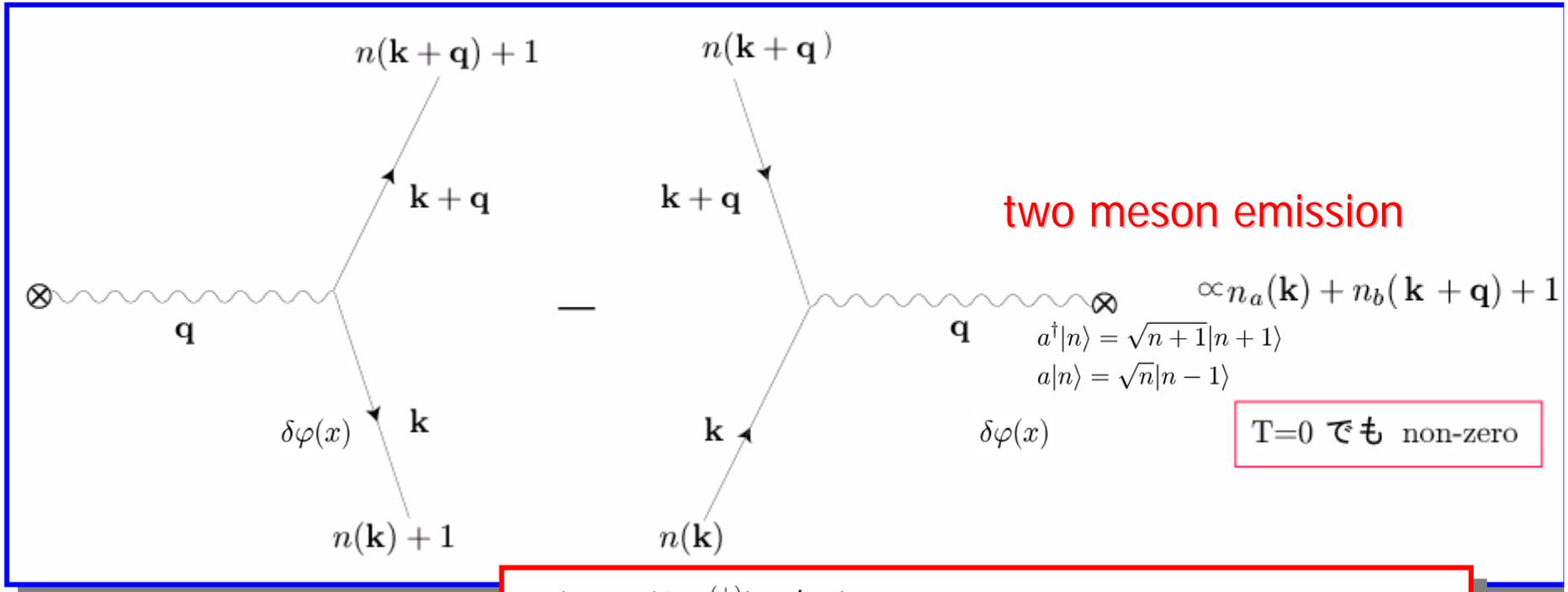
$$|\vec{q}_c^2| = \frac{M_\sigma^2}{2} \approx (354 \text{ MeV})^2 \quad \text{at } T = 0$$

- Quantum fluctuations smear out the effective potential
- Quantum fluctuations make symmetry breaking more difficult to reach

Decay of DCC

Boundary condition

T=0でカイラル凝縮体の集団回転が生成したとする



$$\begin{aligned} & \langle a, \mathbf{k}, \pm | \delta \mathcal{M}^{(\pm)} | b, \mathbf{k}', \mp \rangle \\ & \approx \frac{i}{\sqrt{E_a(\mathbf{k})E_b(\mathbf{k} \pm \mathbf{q})}} \cdot \frac{n_a(\mathbf{k}) + n_b(\mathbf{k} \pm \mathbf{q}) + 1}{\omega - (E_a(\mathbf{k}) + E_b(\mathbf{k} \pm \mathbf{q}))} (X_{ab}^{(\pm)} + \delta \Gamma_{\text{ind}}^{ab(\pm)}) \\ & \times \sin\left(\frac{\omega - (E_a(\mathbf{k}) + E_b(\mathbf{k} \pm \mathbf{q}))}{2} t\right) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} \pm \mathbf{q}) e^{\pm i(\omega + (E_a(\mathbf{k}) + E_b(\mathbf{k} \pm \mathbf{q})))t/2} \end{aligned}$$

Damping time & number of emitted pions

Y.Tsue, D.Vautherin & T.Matsui, *Phys. Rev. D*61 (2000) 076006

- Damping time

$$\tau(q) = \frac{E_0}{\left(\frac{\Delta E}{t}\right)}$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \bar{\pi}_a^2 + \frac{1}{2} (\nabla \bar{\varphi}_a)^2 = \frac{1}{2} \varphi_0^2 (\omega^2 + \vec{q}^2)$$

: Energy density of collective rotating condensate

$$\Delta E = \frac{1}{V} [\text{Tr}(HM) - \text{Tr}(H_0 M_0)] \approx \gamma(q) t$$

: Energy density of two meson excitation

- Number of emitted pions, if classical field configuration occupies volume V :

$$N_\pi = \frac{\frac{\Delta E_{\pi\pi}}{t} \times V}{M_\pi}$$

$$\tau = \tau_{\pi\pi} \approx 40 \text{ fm}/c$$

$$15 / (\text{fm}/c) \text{ for } E_0 \approx (160 \text{ MeV})^4 \text{ and } V \approx (10 \text{ fm})^3$$

Larger than the collision time \sim a few fm/c

$$\frac{1}{2} \varphi_0^2 \omega^2 \approx (160 \text{ MeV})^4 \text{ for } \omega \approx 2\sqrt{2} M_\pi$$

第5講:非相対論的ボーズ多体系への応用

Review articles

- F.Dalfovo, G.Giorgini, L.P.Pitaevskii and S.Stringari, Rev. Mod. Phys. 71 (1999) 463
- A.J.Legget, Rev. Mod. Phys. 73 (2001) 307; Erratum 75 (2003) 1083

Report

- Bose-Einstein Condensation, ed. A.Griffin, D.W.Snoke and S.Stringari (Cambridge 1995)

Text books

- C.J.Pethick and H.Smith, Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases, (Cambridge 2002)
- L.Pitaevskii and S.Stringari, Bose-Einstein Condensation, (Oxford 2003)