1998年 三者若手 夏の学校

於 信州

素粒子論パート 弦理論

String/Duality/CFT 入門

講師 松尾 泰(東京大学)

文責:
大阪大学
横野貴志 荒金康人
須山孝夫 松尾俊寛
木原裕充
堀内誠志 乙井研二

おはようございます。今日は、アドバンストなことを話すという予定だったのですけれども、考えてみればこれは基研の研究会でもないし、audience も大体 string 理論を志す M1 の人が多いだろうとことで、できるだけ基本的な事をやることにしました。従ってタイトルが非常に変わりましてまあこんな感じにしようとおもいます。

1 An Introduction to String/Duality/CFT

主に今日は弦理論のできるだけ基本的なことをお話したいと思います。明日は若干アドバンストな内容に入る予定です。

弦理論というのはだいたい 1960 年頃に主にハドロンの物理として出発したわけですが、有名な南部先生の仕事とかそういうのがありまして一気に盛り上がった時代がありました。ところがこの辺 (1) で critical dimension

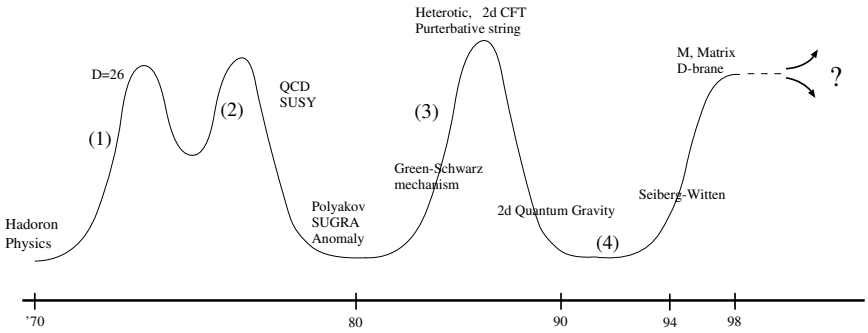


図 1: 歴史

が２６次元あるいは１０次元とかいうことが見つかってこれは現実の物理とは違うじゃないかと言うことで一瞬こう 下向きになったのですが、そのうち弦理論というのが重力を含む理論であってそれで アインシュタイン gravity の量子効果を与えるのではないかと、そういうのでこう (2) また盛り上がってきたわけです。そのうち弦理論の進展に関連して

supersymmetry というのがみつかりました。あと Non-abelian ゲージ理論が繰り込み可能であるということがわかりました。それでなにも別にハドロンの記述として dual-theory にこだわる必要も無くなり、単に場の理論をやっていけばいいのではないかということで、いったんこの動きはほとんど死にました。で、まあ 死んだわけですけども、ここ (2) に例えば Polyakov による経路積分の定式化であるとか、supergravity であるとか、Anomaly であると弦理論を示唆する多くの結果が出てきました。そう言う諸々の発展のあと決定的な結果として Green-Schwartz による Anomaly の相殺、あるいは無限大の相殺の発見が出て、一気にまたここ (3) で盛りかえしたわけです。この時代に非常に大きなピークを迎えまして、この時期素粒子の論文のほとんどが string の論文だったのではないかと、そういう時代がしばらく続きました。実際その時代に heterotic string の発見、conformal field theory の発展などで、弦理論の摂動論はある意味で完成されたわけです。ところが摂動論が完成したのは良かったのですが、弦理論の古典解というか真空が無限に多くの可能性があることがわかってきました。つまり世代数の数が 3 の理論も作れるけれども、それより大きな数の理論もいかようにもつくれることです。この意味で弦理論には予言能力が無いということになり、(これはある程度最初から分かっていたことだとは思うのですけが、) ここで一気に沈んでしまったわけです。で、また沈んだのですけども、この間 (4) にいわゆる Matrix-model、が出てきて量子重力が時空の次元が 1 より小さいところでは解けるのではないかという発展がありました。その後は数年大きな動きが無い時代に入っていきました。

この状況が変わったのは９４年ごろの有名な Seiberg-Witten の論文、これは $N = 2$ の Yang-Mills 理論がある程度厳密に解けるのではないかというものですが、まさに革命的な仕事が出ました。これを期にして非摂動的、あるいは duality という言葉が時代の大きなキーワードになりました。

これに伴い弦理論も duality や非摂動論的性質が大々的に研究される事となり、また新しいアイディアが次々と出る時代に入っていきました。そ

の後、M-theoryの発見、D-braneの発見、新しいMatrix-theoryの発見など、大きな発展が続き、今でもそれが続いているわけです。

こうしてみると弦理論はかれこれ３０年近く理論物理屋の頭を楽しませつづけてくれている学問であると言うことがわかります。まあとにかく難しい学問ですので、なかなか進展は遅いのですがこうやってみてみると徐々にではありますが新しい方向に向かっている感触がえられます。これがまた死んでしまうのか、またしばらく盛り上がるのかは現段階ではよくわかりませんが、８０年代にWittenは弦理論というのは５０年は続くであろうと言ったといわれてますので、しばらくのあいだ、２１世紀の前半ぐらいまでは弦理論というのは非常におもしろいアイデアを提供し続けてくれるのではないかと思います。

今回の講義で力点を置きたいことは、次の点です。弦理論と言うのはもちろん重力の理論ですが、実はこれは例えばSeiberg-Wittenの理論を見ても明らかなように、Yang-Millsの理論の構造を関連が非常に強いわけです。量子重力理論と言うのはみなさんよく御存じのように繰り込みができない理論で短距離での定式化が難しい理論です。一方、Yang-Millsの理論というのは逆に漸近的に自由であるという性質を持っており、ある意味で短距離の振る舞いは良く理解されています。重力理論というものを理解するのにDualityというアイデアを介在してこの二つの理論は結合するのではないかと考えらているわけです。

こういう対応関係みたいなものを皆さんが自然に思われるようになっていただけると私の講義は目標が達せられたという事になると思います。目次ですけども、今のが簡単なintroductionで

2 Duality

3 CFT(Introduction)

4 String Perturbation

5 Recent Topics

section2では、簡単に場の理論におけるDualityについての解説を行いま

す。section3では、弦理論の摂動論の理解に欠かせない2次元のconformal field theoryの解説を行います。現在の弦理論の非摂動論的な議論においてもやはり必要なものであると考えております。この準備の後、次のセクションでは弦理論の摂動論の骨格を解説致します。

その後、非摂動的な性質の解説に入りますが,まず2次元の自由場、conformal field theoryを使ってある理解できる、D-braneeの関係の話を行います。最後のセクションで最近の話題ということで、S-duality、U-duality、Matrix theoryの話題などをまとめていきたいと思います。

以上のようにこの講義ではかなり初歩的な話題を扱うことにいたしますので上級生の方は退屈されると思います。済みませんが我慢してください、というか我慢のならない方はどこか遊びにいってて下さい(笑)。

2 Duality

まずいろんな物理に出てくるdualityについて見てみたいと思います。

2.1 Harmonic Oscillator

ちょっと簡単すぎるかもしれませんが、いろんなことに関連してくるので調和振動子の系をまず考えてみたいと思います。皆さんも量子力学で勉強されているよう調和振動子というのは次のようなものです。

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2}+\frac{1}{2}\omega^2 x^2 \\ &= \omega(a^\dagger a+\frac{1}{2}), \qquad a=\sqrt{\frac{\omega}{2}}x+\sqrt{\frac{1}{2\omega}}\partial_x \end{aligned} \tag{1}$$

こういう系にも非常に簡単なdualityがあります。つまり、Dという変換を

$$\begin{aligned} D: \quad x &\to p/\omega \\ p &\to -\omega x \end{aligned} \tag{2}$$

と定義してやります。この変換を 2 回行うと

$$D^2 = P(\text{parity 変換 }) \tag{3}$$

です。この系は、あきらかに変換によって不変に保たれます。例えば基底状態は x で書くと $\exp(-\frac{1}{2}\omega x^2)$, p で書くと $\exp(-\frac{1}{2\omega}p^2)$ で波動関数の広がりをあらわす量が $\omega \leftrightarrow 1/\omega$ と反転していることが分かります。

2.2 Sine-Gordon model と Massive Thirring

2 番目に簡単なモデルとして取り上げるのは、2 次元系の Sine-Gordon 方程式と Massive Thirring 模型の間の双対性です。Sine-Gordon 方程式の作用は

$$= \int d^2x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{2\pi}{\beta^2}(\cos\beta\phi - 1) \tag{4}$$

であたえられます。ポテンシャルの格好がどうなっているかといいますと、図 2 のようになっています。

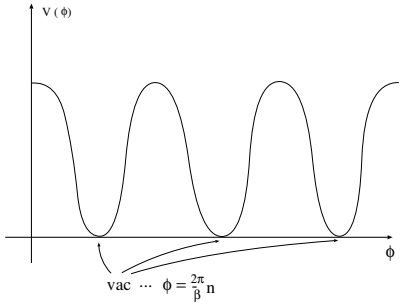


図 2: Sine-Gordon 方程式のポテンシャル

こういう無限に同じ深さの谷を持っているポテンシャルです。ϕ の期待値として谷にあたる値をとっておくと、基底状態あるいは真空を定義します。

$$\phi = \frac{2\pi}{\beta}m \tag{5}$$

この理論でソリトンとは何かという問題を考えてみましょう。上の式は真空が整数 n でもって parametrize されていることを意味します。ですから ϕ のグラフを書きますと図 3 のようになっています。

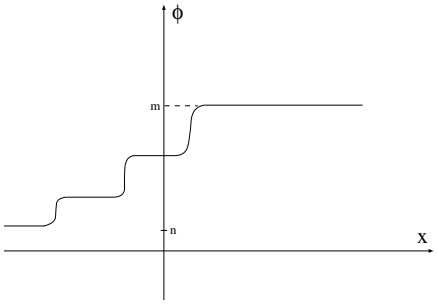


図 3: ソリトン解

無限遠ではポテンシャル ϕ は minimal にいかなくてはならないという要請がありますので、エネルギーを有限にするためには、ある点から先では適当な真空に相当する値を持っている必要があります。こちらはマイナス無限大ですけれども、プラス無限大では別の n の値を持つこともできます。左から右に移るときに一つだけ値のずれる配位をソリトンと呼びます。(図 4)

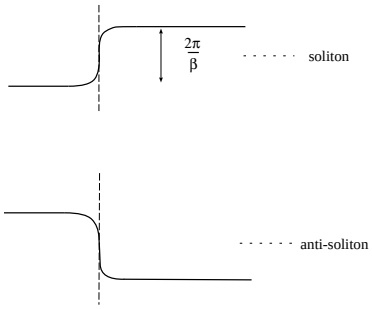


図 4: ソリトンとアンチソリトン

逆に、右に下がるものはソリトンと組み合わせると無くなってしまうので、アンチソリトンと呼びます。(図 4)

つまり Sine-Gordon のソリトンは 1 つ上がるか、下がるかで粒子数に相当する「ソリトン数」を定義することが可能になります。特にくびれ

“kink” の場所を x_0 としますとソリトンという粒子があたかも x_0 に存在するように見えてきます。つまり Sine-Gordon 方程式のソリトンは非常に粒子的に見えてきます。

$$soliton \sim \text{粒子?} \tag{6}$$

では本当の粒子という描像で理論を作ることは可能でしょうか。実際それはできるわけでして、この場合は Massive Thiring Model という 2 次元のフェルミオン系に帰着することが分かっています。作用は

$$S_T = \int d^2x(\bar{\psi} i\gamma_\mu \partial^\mu \psi + m\bar{\psi}\psi - \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) \tag{7}$$

Sine-Gordon model のソリトンは、Massive Thirring Model の基本励起のフェルミオンに同一視できます 。

もちろん Sine-Gordon 系には ϕ 自体の励起 (以下 meson と呼ぶ) があります。これは ϕ の値を少し揺らすような変分からくるわけですが、見方を変えると一旦ソリトンを励起させた後、ソリトンをまた消す変分で実現することもできます。このように Sine-Gordon 系の meson は Massive Thirring 系から見るとフェルミオンとアンチフェルミオンのペア、あるいは束縛状態という考え方によって構成できることが分かります。もうちょっと詳しいことも言えます。例えば Fermion の相互作用の係数 g と Sine-Gordon の相互作用の定数 β^2 の関連は次のように与えられます。

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 + g/\pi} \tag{8}$$

β、つまり Sine-Gordon model の coupling が非常に大きいところでは、二つの結合定数はほぼ逆数の関係ですのでフェルミオンの理論の方では結合定数が非常に小さくなります。逆にフェルミオンの結合定数が非常に大きいところでは β という結合自体は小さくなります。

Sine-Gordon 方程式の方で弱結合領域では Meson の Fock 空間を使って摂動論を行えば良いのですが、強結合の部分はソリトンが系を支配して理論の構造が良く分からなくなります。ただしその結合領域ではそれと等価な Thiring model による記述を用いることができます。つまり Thiring の

立場から見ると結合定数が小さくなっているので、フェルミオンの Fock 空間を用いた記述で摂動論を行うことができます。

こういうように双対な理論があると、理論の全ての結合定数の領域をおおい尽くすことができるようになり、一つの理論の全ての結合定数における大局的な振る舞いが分かるようになってきます。

（質）Sine-Gordon のほうで coupling が逆数の形で入っているというのは？

（答え）相互作用項の形ですが、ϕ という場の cosine で与えられいます。超越関数で書かれていても例えば Feynmann 図は書けませんので、どうするかというと、

$$\cos(\beta\phi) = 1 - \frac{1}{2}(\beta\phi)^2 + \frac{1}{6}(\beta\phi)^4 - \cdots \tag{9}$$

と展開してやります。実はこのように相互作用項が無限個ある系を考えていることになっています。第 1 項はキャンセルして、第 2 項は mass term を与えます。第 3 項からが相互作用を与えていますがそこから β^2 が出てきます。

（質）$1/g$ ではなくて $1/1+g$ になっているのは？

（答え）ボゾンとフェルミオン対応を具体的に計算するとわかります。なぜ 1 だけずれているかですが、meson が fermion の bound state であるといいましたが、場としての対応はこのようになります。

$$\partial_\mu \phi = \bar{\psi}\gamma^\nu \psi \epsilon_{\mu\nu} \tag{10}$$

Thirring 模型の相互作用項は、実はこの対応を用いてやると ϕ に関して 2 次の項になります。それで結合定数とと kinetic term を組み合わせると kinematic 項から 1 が相互作用項から g がでて併せると 1 ずれた形が出ます。

ここで注目したいのは 2 次元のボゾンとフェルミオンが実は等価であるという事実で、次の section の conformal field theory のところで、もうちょっと丁寧にやろうと思います。自由ボゾンの理解は D-brane を理解する上でも本質的ですので、これに時間を費やすのは無駄ではないでしょう。

今のところよろしいですか？簡単すぎるかな？

2.3 Electro-Magnertic duality

Maxwell 方程式 というのは皆さんが学部で習われたとおり

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \rho_e \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} &= \vec{j}_e \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

この方程式にも Duality があります。

$$\begin{aligned} D: \quad \vec{E} &\to \vec{B} \\ \vec{B} &\to -\vec{E} \end{aligned} \tag{12}$$

この変換を施してやると ρ、あるいは j が 0 のときこの二つの方程式は完全に同じものになります。これは調和振動子の時と同じように考えてやると

$$D^2: \qquad (\vec{E},\vec{B}) \to (-\vec{E},-\vec{B}) \tag{13}$$

これは charge conjugation になっています。4 次元の記号に移って

$$F^{0i} = E^i, \qquad F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B_k \tag{14}$$

F をこう定義すると Maxwell 方程式は次の形に書けます。

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j_e^\nu, \qquad \partial_\mu(*F^{\mu\nu}) = 0 \tag{15}$$

Hodge dual の定義は

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}{}_{\lambda\rho}F^{\lambda\rho} \tag{16}$$

あとで Dirac モノポールの量子化条件を書きたいのでこの電場が物質場にどう実際結び付いているのかというのを見てやります。例えば Shrodinger 方程式ですが

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} - e\vec{A})^2\psi + V\psi \tag{17}$$

この理論でいわゆる gauge 変換がどう書けるのかといいますと、

$$\psi \to e^{ie\xi}, \qquad \vec{A} \to \vec{A} - \vec{\nabla}\xi \tag{18}$$

ゲージ変換で移れるものは同じ系であるというふうに考えられます。普通は電荷のあるものしか考えないわけですけれども、この Maxwell 方程式をよくにらんでやりますとモノポールを構成できることがわかります。実はこれが有名な Dirac の方法です。

2.4 Dirac Monopole

モノポール解は磁場に対して source を与えてくれるような項ですから、次のような形に書けるはずです。

$$\vec{B} = \frac{g\vec{r}}{4\pi r^3} \tag{19}$$

これを与えるようなゲージポテンシャルというのは全空間で大局的に値を定義することができません。ただし空間の一部で部分的定義される解はもちろんあるわけでして

$$\vec{A}_N = \frac{g}{4\pi r^2}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\vec{e}_\phi \tag{20}$$

これは極座標なんですけども、こういう解を考える時に、極座標の公式を書いておくと

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} \tag{21}$$

となります。これを公式に代入してやりますと元の解をあたえます。ただしこの解というのは $\theta = \pi$ で特異点があります。つまり 2 次元球面というのを上と下にわけてやりますと、この $\vec{A}_N$ というのが南極を除いて

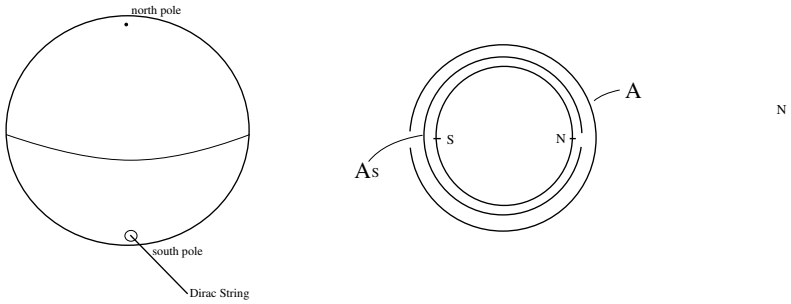


図 5: Dirac string

すべての空間で定義できるようなゲージポテンシャルになっているわけです。(図 5) $\theta = \pi$ の特異点は Dirac string と呼ばれています。もちろんその部分に特異点をもたないようなゲージポテンシャルを考えることも可能です。

$$\vec{A}_S = -\frac{g}{4\pi r^2}\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}\vec{e}_\phi \tag{22}$$

この解は南極には特異点が無い代わりに、$\theta = 0$、つまり北極で特異点を持つことになります。以上のように、2 つのゲージポテンシャルがあるわけですが、ともに同じ磁場を出すように構成せれていますので、二つの解が重なっている部分、つまり南極と北極を除くこの部分では、二つのゲージポテンシャルがゲージ変換で繋がっていることになります。それでその差を計算しますと

$$\vec{A}_N - \vec{A}_S = \frac{g}{2\pi r}\frac{\vec{e}_\phi}{\sin\theta} = -\vec{\nabla}\chi \tag{23}$$

という形になりますので

$$\chi = -\frac{g}{2\pi}\phi \tag{24}$$

こういうゲージ変換を行えば二つの解を結ぶことができます。ただしこのゲージ変換のため波動関数の一価性が一般には崩れてしまいます。例えば ϕ を 0 から 2π まで動かす時にゲージ変換の形自身が一価になっていません。しかし実際にはそれが定義する波動関数の phase が 1 価であればよろしい訳ですので、先ほどの Schrödinger 方程式にゲージ変換を作用させてみます。波動関数の phase がフェルミオンを赤道にそって一周まわ

してやると一価になることを要請する式は次のようになります。

$$e^{-ie\chi(2\pi)} = e^{-ie\chi(0)} \tag{25}$$

この条件から次の良く知られた公式が導かれます。

$$eg = 2\pi n \qquad (\text{Dirac の量子化条件}) \tag{26}$$

が得られます。g はモノポールのの磁価です。

次に唐突ですけども τ という複素パラメーターを導入します。

$$\tau = \frac{\theta}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2} \qquad \theta : \theta \quad \text{angle} \tag{27}$$

θ は θ angle と呼ばれる量で非可換ゲージ理論を取り扱うときにはこのような相互作用項が必ず出てきます。Yang-Mills 理論の作用は

$$\begin{aligned} \frac{1}{32\pi} \quad & Im \quad \int \tau(F + i * F)^2 \\ = \quad & \frac{1}{4g^2}\int d^4x F^2 + \frac{1}{16\pi}\frac{\theta}{2\pi}\int d^4x \frac{1}{4i}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F^{\mu\nu}F^{\rho\lambda} \end{aligned} \tag{28}$$

第 2 項は θ angle に結合する項で御存じのように全微分の形に書けているので一見単にゼロになりそうですが実際には topological charge を与えます。Field strength を

$$F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A_{\nu]} \tag{29}$$

で定義します。V_D という補助場を導入して次の項を加えます。

$$S' = \frac{1}{8\pi}\int V_{D\mu}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\partial_\nu F_{\rho\lambda} \tag{30}$$

ここで Field strength F を基本変数だと思って V_D を積分してしまうと, もとの運動方程式に帰ります。もちろんそれでは意味が無いので V_D で積分する変わりに F で積分してやります。そうするやると V_D に関する Lagrangian が得られます。

$$S_D = \frac{1}{32\pi} Im \int \frac{-1}{\tau}(F_D + i * F_D)^2 \tag{31}$$

一見 trivial な手続きを経て得られたものは何かと考えてやりますと、もともと τ であった結合定数が積分した後では $-\frac{1}{\tau}$ に化けています。

$$\tau \to -\frac{1}{\tau} \tag{32}$$

このときに基本変数が同時に変換されて

$$A \to V_D \tag{33}$$

この τ というパラメーターを逆数にする変換は今後何度も出てきますが、S 変換と呼ばれるものです。後もう一つ系には trivial な対称性があって

$$\theta \to \theta + 2\pi \tag{34}$$

という対称性があります。これを T 変換と呼びます。

S 変換と T 変換を組み合わせると、一般の変換は、次の形で定義されます。

$$\tau \to \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \qquad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z} \tag{35}$$

とくに、S,T はその特別な場合になっていて

$$\begin{aligned} S: &\qquad b = -c = 1,\ a - d = 0 \\ T: &\qquad a = b = d = 1,\ c = 0 \end{aligned} \tag{36}$$

この変換 ($SL(2, Z)$ 変換と呼ばれるもの) は今回の講議のなかで最も基本的なもので、いろんな場所で手を替え品を替え出てくることになります。

(質) S 変換とか T 変換とかいうのはなんの略なんですか？

(答え) 知らないです。(笑)

(質) なんか思い付くものはないんですか？

(答え) なんでこう呼ばれるかですか？T は Translation でしょうね。S は Strong-Weak でしょうか。

3　CFT入門

2次元の自由ボゾンは非常に簡単なんだけども大事な構造をたくさん持っています。この自由度が弦理論の基本変数になっているわけで、自由ボゾンというのをある程度知っておくあるいは確認しておきたいと思い、Conformal Field Theory入門のトピックスとして取り上げたいと思います。

$$S = \frac{1}{2}\int d^2\sigma \partial_a \phi \partial_a \phi \tag{37}$$

2次元時空ですがWick rotationしましてEuclidian空間にします。これ以上簡単な場の理論はありません。運動方程式は

$$(\partial_0^2 + \partial_1^2)\phi \;\; = \;\; 0 \tag{38}$$

ですが、複素変数を使ってやると

$$\leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\phi \;\; = \;\; 0 \qquad (z = x^0 - ix^1) \tag{39}$$

2次元の自由場で有名なことはこれが右向きモードと左向きモードに別れてくれることで

$$\phi = \phi_L(z) + \phi_R(\bar{z}) \tag{40}$$

と書けます。次にTime orderingするわけですがEuclidean空間でTime orderingに相当するのがRadial orderingというもので、

$$z = e^{\sigma^0 + i\sigma^1}, \quad \bar{z} = e^{\sigma^0 - i\sigma^1} \tag{41}$$

こういうふうに変換するとσ^0という時間変数についての過去から未来へと言う時間の流れが、zの変数で考えてやると半径の順番にならぶことになります。つまり原点が時間マイナス無限大の過去で無限遠が時間無限大の未来になるわけです。これをRadial orderingといいます。(図6)

ここで先ほどのϕというfieldのmode展開を考えてやります。

$$\phi = \phi_L(z) + \phi_R(\bar{z}) \tag{42}$$

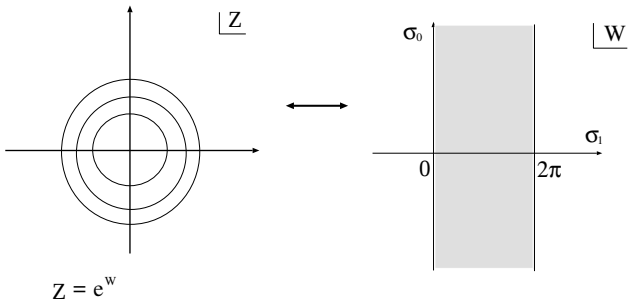


図 6: Radial ordering

$$\phi_L(z) = \frac{x}{2} - i\frac{p}{2}\ln z + i\sum \frac{a_n}{n} z^{-n}$$
$$\phi_R(z) = \frac{x}{2} + i\frac{p}{2}\ln \bar{z} + i\sum \frac{\bar{a}_n}{n} \bar{z}^{-n} \tag{43}$$

各モードに関する交換関係は

$$[x,p] = i, \quad [a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}, \quad [\bar{a}_n, \bar{a}_m] = n\delta_{n+m,0} \tag{44}$$

となりますがこれをもう少し見なれた格好で書きかえます。いわゆるOPEを用いた計算法です。

$$\phi_L(z)\phi_L(w) \sim -\log(z-w) \tag{45}$$

これは普通、場の理論の教科書では

$$[\partial_1\phi(\sigma^0\sigma^1), \partial_1\phi(\sigma^0\sigma'^1)] = \delta(\sigma^1 - \sigma'^1) \tag{46}$$

と書かれているものです。この notation のほうが皆さんよく御存知かと思います。なんでこれとこれが同じなのかといいますと、この $\phi(z)$ のほうの展開をよく見てやりますと

$$\frac{ia_n}{n} = \frac{1}{2\pi i}\oint dz z^{n-1}\partial_z\phi_L(z) \tag{47}$$

と展開されます。そのときにたとえば $[a_n, a_m]$ を計算してみましょう。これはもちろん

$$[a_n, a_m] \;=\; a_n a_m - a_m a_n \tag{48}$$

ですが、いまRadial orderingですので原点に近い方を右に持ってきます。ですからこれはどう書けるかというと

$$\begin{aligned} &= (\frac{1}{2\pi i})^2 \oint_c dz \oint_{c'} dw \underset{|z|\geq|w|}{} \partial\phi(z)\partial\phi(w) z^n w^m \\ &- (\frac{1}{2\pi i})^2 \oint_c dz \oint_{c'} dw \underset{|z|\leq|w|}{} \partial\phi(z)\partial\phi(w) z^n w^m \end{aligned} \tag{49}$$

それからこんどは逆向きになるわけですからですから上の公式イコール

$$\begin{aligned} &= (\frac{1}{2\pi i})^2 \oint_c dz \oint_{c'} dw \partial\phi(z)\partial\phi(w) z^n w^m \frac{-1}{(z-w)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c dw n w^{n-1} w^m \\ &= -n\delta_{n+m,0} \end{aligned} \tag{50}$$

となります。なんでこんな煩わしいことをやるのかというのは、以下Energy-momentum tensorとか他の諸々の量を計算していく上ではこういう方法を使った方が見通しが良いというわけだからです。

3.1 エネルギー運動量テンソル

いわゆるEnergy-Momentum Tensorというのは次のように定義されます。

$$\begin{aligned} T(z) &= -\frac{1}{2} : (\partial\phi)^2 : \\ &= \sum_{n\in\mathbf{z}} L_n z^{-n-2} \end{aligned} \tag{51}$$

ここで

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \tag{52}$$

この$T(z)$の交換関係自体は

$$T(z)T(w) \sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(z)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} \tag{53}$$

となります。これは先ほど導いた自由ボゾンの OPE をみてやりますと

$$\partial\phi(z)\partial\phi(w) \sim -\frac{1}{(z-w)^2} \tag{54}$$

となって、

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{1}{4} : \partial\phi(z)\partial\phi(z) : : \partial\phi(w)\partial\phi(w) : \\ &= \frac{2}{4}\frac{1}{(z-w)^4} + \frac{4}{4}\frac{: \partial\phi(z)\partial\phi(w) :}{(z-w)^2} \end{aligned} \tag{55}$$

となります。ここで

$$: \partial\phi(z)\partial\phi(w) :=: (\partial\phi(w))^2 : +(z-w) : \partial^2\phi(w)\partial\phi(w) : \tag{56}$$

です。
（質）$c = 1$ とかかれたところをもうすこし説明していただきたいのですが。
（答え）c というのは大ざっぱに言って物資場の個数をあらわしています。ボゾンの場合は c = 1 でフェルミオンの場合は $c = 1/2$ となります。

3.2 $T(z)$ の物理的意味

この OPE は何を意味するのかということを考えます。いま conformal gauge で議論しています。metric の関係を崩さないような変換をいわゆる Conformal 変換というのですが、一般的には

$$\begin{aligned} \delta z &= \epsilon(z) \\ \delta \bar{z} &= \bar{\epsilon}(\bar{z}) \end{aligned} \tag{57}$$

例えば

$$\delta\Phi(z) = \epsilon\Phi(z) + h(\partial\epsilon)\Phi(z) \tag{58}$$

となりまして、後ろの重みの部分からは spin が出てくるという構造になります。実は Energy momentum tensor の OPE には深い意味がありまし

て、この primary field に対する OPE というのを考えると

$$T(z)\Phi(w) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w) + \frac{\partial\Phi}{z-w} \tag{59}$$

となるのですが、これと Energy momentum tensor の OPE を見比べてやりますと Energy-Momentum tensor 自体は大ざっぱに言って spin 2 であるということがわかります。

座標変換はエネルギー運動量テンソルで生成されます。

$$\delta_\epsilon = \oint_c \frac{dz}{2\pi i} T(z)\epsilon(z) \tag{60}$$

例えば primary field の変換は次のように計算できます。

$$\begin{aligned}
\delta_\epsilon\Phi(w) &= (\int_{c_1} - \int_{c_2})\frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)T(z)\Phi(w) \\
&= \int_{c_w} \frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)T(z)\Phi(w) \\
&= \int_{c_w} \frac{dz}{2\pi i}\epsilon(z)(\frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w) + \frac{\partial\Phi(w)}{z-w}) \\
&= \epsilon\Phi(z) + h(\partial\epsilon)\Phi(z)
\end{aligned} \tag{61}$$

Energy-Momentum tensor 自体は spin2 の変換をしなくて少しおつりが出てしまいます。これは大事な物理的な帰結を引き起こしてしまいます。T の変換を書いてやりますと

$$T(z)(dz)^2 = T(w)(dw)^2 + \frac{c}{12}S(w,z) \tag{62}$$

というわけでだいたい 2 階の tensor として変換するのだけれどもちょっとおつりが出ます。これを conformal anomaly というのですがそのおかげで座標変換を少ししたときにやはりおつりが出ます。

$$S(w,z) = \frac{\partial_z w\partial_z^3 w - \frac{1}{2}(\partial_z^2 w)^2}{(\partial_z w)^2} \tag{63}$$

それで例えば球面上の座標からシリンダーの座標系に移った時 $(z = e^w)$ には

$$\begin{aligned}
T_{cyl}(w) &= z^2T(z) - \frac{c}{24} \\
\rightarrow (L_0)_{cyl} &= (L_0)_{plane} - \frac{c}{24}
\end{aligned} \tag{64}$$

という変換が行われます。ここで右辺に現れる $c/24$ という項は真空の持つエネルギーと解釈できるもので、Casimir 効果などで大事な役割を果たすことになります。

それで、このへんで休憩にしようと思います。

L_0 は、ハミルトニアンです。もともと CFT を complex plane 上で定義していたわけですが、plane 上では、無限に広がった空間だから真空のエネルギーをゼロとしますれに対し、cylinder 上では空間方向が有限ですから、その分の補正がつくのです。

(質問)　表示を変えたら、真空のエネルギーも変わるのですか？

(答え)　cylinder 上の場の理論での真空のエネルギーが plane 上での場合からずれているということは、例えば格子の可解系でも同じような例が知られています。その時の補正は上の結果と一致しています。上で説明したことは、この補正のような力学的な性質が、geometric な性質だけで導けるということです。

以下では、最初に Sine-Gordon 方程式の説明で出てきた、soliton について見ていこうと思います。

(質問)　真空エネルギーの補正の string theory との関連は？

(答え) 例えば bosonic string の場合を考えます。bosonic string は、transverse の方向に自由度を持っています。

$$X^i \quad (i = 1, \cdots, 24) \tag{65}$$

ですから、このときの真空のエネルギーは、c=24 なので−1 になります。すると、string theory における mass formula は次のようになります。

$$M^2 = N - 1 \tag{66}$$

$N = 0$ とすると tachyon が現れることが分かります。つまり真空のエネルギーがあるということは、bosonic string では tachyon が現れるという

物理的な帰結に結び付きます。superstring の場合には、X^i が 8 個、ψ^i という fermion が 8 個あって、この場合の補正は $-\frac{1}{2}$ となります。これは、NS-sector の基底状態が tachyon であるということを表しています。しかしこの状態は GSO projection によって落ちるので、次の励起状態である massless mode が真の基底状態になっています。このように、真空エネルギーの補正項は、string theory に出てくる微妙な factor をうまく表現しています。

補正項を別の方法で計算することも可能です。今考えているのは無限個の harmonic oscillator の系です。ハミルトニアンは

$$L_0 = \sum_n a_{-n} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \tag{67}$$

という形になっています。右辺第 2 項は真空のエネルギーで、各 oscillator a_n に対し $\frac{n}{2}$ ずつ加わります。この項は 1 から無限大までの和なので、当然発散します。そこで ζ 関数正則化によって発散を取り除きます。ζ function を

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \tag{68}$$

と定義すると、これは $z > 1$ のときには正則な関数です。これを $z = -1$ まで解析接続すると、ζ 関数は $\mathrm{Re} z < 0$ では正則ですので

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \tag{69}$$

となり、幾何学的な導出からの結果と一致します。この説明では、無限大を適当に処理すると補正項が出るという説明になり、あまり好ましくないので、上では anomaly という立場から説明しました。

(質問)　ζ 関数正則化を用いる根拠は？

(答え) これで一致するからです (笑)。とりあえずこれしか思い浮かばなかったからということでしょう。

3.3 Soliton

Sine-Gordon 方程式を議論したときに soliton とが出てきましたが、これは ϕ をある点で 2π だけずらすという解でした。この解に対応する作用素は何かを考えてみます。天下り的ですが、vertex operator というものを考えます。

$$: e^{ia\phi(z)} : \tag{70}$$

: :は normal ordering を表しています。これと先ほどの boson との OPE をとってみますと、結果は次のようになります。

$$\partial_z \phi(z) e^{ia\phi(w)} \sim \frac{ia}{z-w} : e^{ia\phi(w)} : \tag{71}$$

これが何を意味しているのかを見るために、w のまわりで z について積分してみます。すると左辺は全微分で、右辺は residue を拾いますので、

$$\begin{aligned} \oint_{C_w} dz \partial_z \phi(z) e^{ia\phi(w)} &= (\phi(we^{2\pi i}) - \phi(w)) e^{ia\phi(w)} \\ &= 2\pi a \; ia\phi(w)) \end{aligned} \tag{72}$$

つまり、

$$\phi(ze^{2\pi i}) - \phi(z) = 2\pi a \tag{73}$$

となります (以下では、normal ordering の記号は省略します)。つまり、vertex operator があると、$z = w$ で branch point が生じ、このまわりで ϕ という field が 1 価にならなくなります。ですから、ϕ を $2\pi a$ だけずらす作用素 (70) がソリトンの vertex operator ということになります。ちなみにこの vertex operator と energy-momentum tensor との OPE をとってみますと、

$$T(z) e^{ia\phi(w)} \sim \frac{\frac{a^2}{2}}{(z-w)^2} e^{ia\phi(w)} + \frac{1}{z-w} \partial_w e^{ia\phi(w)} \tag{74}$$

となります。つまり (70) は次元 $\frac{a^2}{2}$ の場です。この性質を使いますと、例えば fermion がどう書き表されるのかがわかります。

3.4 Free fermion

2 次元の場合には、$\gamma^\mu\partial_\mu$ というoperatorが対角化できますので、fermion の上成分と下成分が独立になります。実際に action を書いてみると、

$$S = \int d^2\sigma(\overline{\psi}_L\bar{\partial}\psi_L + \overline{\psi}_R\partial\psi_R) \tag{75}$$

となります。この action から導かれる fermion の OPE は、

$$\psi_L(z)\overline{\psi}_L(w) \sim \frac{1}{z-w} \tag{76}$$

$$\psi_R(\bar{z})\overline{\psi}_R(\bar{w}) \sim \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \tag{77}$$

ここで ψ_L の運動方程式が $\overline{\partial}\psi_L = 0$ ですから、ψ_L は z だけの関数としています。ψ_R も同様です。

ご存知のように fermion は空間回転に対して 1 価性を持っていません。2 次元の場合も同様で、回転に対して符号だけの不定性があります。そこで、これに対応して境界条件を周期的にとるか反周期的にとるかで fermion の mode 展開は 2 通りあります。ひとつは半整数 moding で mode 展開するやり方で、これを NS-sector と呼びます。

$$\psi_L(z) = \sum_{r\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}} \psi_r z^{-r+\frac{1}{2}} \tag{78}$$

もうひとつは整数 moding で mode 展開するやり方で、こちらを R-sector と呼びます。

$$\psi_L(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \psi_n z^{-n+\frac{1}{2}} \tag{79}$$

ここで、z のべきにある $\frac{1}{2}$ は fermion の次元を表しています。これより、NS-sector は z を $ze^{2\pi i}$ にしても符号が変わらないのに対し、R-sector は符号が変わるということがわかります。

普通、mode 展開を議論するときは $\frac{1}{2}$ を入れないので、今の場合とは符号の出方が逆になります。OPE(76) に対応する交換関係は次のようになります。

$$\{\psi_r, \psi_s\} = \delta_{r+s,0} \tag{80}$$

fermion の energy-momentum tensor は次のようになります。

$$T_F(z) = \frac{1}{2}\overline{\psi}_L(z)\partial_z\psi_L(z) \tag{81}$$

$T_F(z)$ は $c = 1$ の OPE を満たします。Dirac fermion は、Majorana fermion の 2 倍の自由度を持っていますが、Dirac fermion の場合が $c = 1$ ですので、Majorana fermion の場合は $c = \frac{1}{2}$ になります。つまり、central charge を見るときは free boson 1 個と Dirac fermion 1 個 (または Majorana fermion 2 個) は同等ということになります。(以下では特に ψ_L のみを考え、L や R は省略します)

$T_F(z)$ と $\psi(z)$ の OPE をとると、

$$T_F(z)\psi(w) \sim \frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^2}\psi(w) + \frac{\partial\psi(w)}{z-w} \tag{82}$$

となります。つまり、$\psi(z)$ は次元 $\frac{1}{2}$ の field です。(74) と (82) を比較すると、$a = 1$ とすると vertex operator と fermion が対応していることがわかります。更に、vertex operator 同士の OPE をとってみますと、

$$e^{i\phi(z)}e^{-i\phi(w)} \sim \frac{1}{z-w} \tag{83}$$

となり、(76) と全く同じものになります。このように、fermion が boson で表せてしまうというのが boson-fermion 対応です。ここで、物理的自由度まで boson の系と fermion の系で一致しているのかということが問題になりますが、それを考えるために、以下では分配関数を考えてみます。

(質問)　もともと考えていた Sine-Gordon の場合は相互作用があったが、boson-fermion 対応で相互作用はどうなるのですか？

(答え)　これまでの議論は free field の場合でした。例えば Sine-Gordon の場合では、相互作用項を

$$\cos\beta\phi = \frac{e^{i\beta\phi} + e^{-i\beta\phi}}{2} \tag{84}$$

と書き換えてみると fermion に見えてきます。このような書き換えで、energy-momentum tensor の対応を見ることもできます。

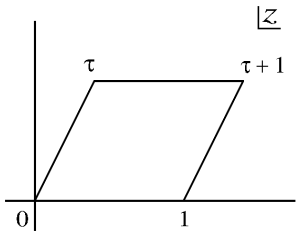


図 7:

ボソンについての分配関数を議論するために時間方向を周期的にしますが、そのやり方にはいろいろな可能性があります。そのそれぞれは、図 7 のような平行四辺形の上で場の理論を考えることに対応しています。この時の分配関数は、

$$\begin{aligned} Z(\tau) &\equiv Tr(e^{2\pi i\tau L_0 - 2\pi i\bar{\tau}\overline{L}_0}) \\ &= Tr(e^{2\pi(\tau_2(L_0+\overline{L}_0)+i\tau_1(L_0-\overline{L}_0))}) \\ &\quad \tau = \tau_1 + i\tau_2 \end{aligned} \tag{85}$$

となります。これは、string state を τ_2 だけ時間発展させ、τ_1 だけ空間方向へ並進した後、足しあげることを意味しています。これまで右向きモードと左向きモードの区別を忘れていましたが、その両方を用いた $L_0 + \overline{L}_0$ が全体のハミルトニアン、$i(L_0 - \overline{L}_0)$ が運動量になります。ここで出てきた L_0 と $\overline{L}_0$ は cylinder 上のものです。これを plane 上のものに書き換えると、

$$Z(\tau) = (q\bar{q})^{-\frac{c}{24}} Trq^{L_0}\ Tr\bar{q}^{\overline{L}_0} \quad (q = e^{2\pi i\tau})$$

となり、右向きと左向きで独立な形になっています。これから左向きの部分の計算を説明しますが、右向きについても全く同様に計算できます。最終的な計算結果は次のようになります。

$$Trq^{L_0} = \frac{\sum_{r\in \mathbf{Z}} q^{\frac{r^2}{2}}}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)} \tag{86}$$

まず、boson の Fock space のうち a_{-1} で作られる state の寄与を見てみます。

$$L_0(a_{-1})^m|0\rangle = m(a_{-1})^m|0\rangle \tag{87}$$

より、partition function への寄与は

$$1 + q + q^2 + \cdots = \frac{1}{1-q} \tag{88}$$

a_{-n} の寄与も同様にして、

$$1 + q^n + q^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-q^n} \tag{89}$$

となります。これより、(86) の分母は oscillator の寄与だということが分かります。

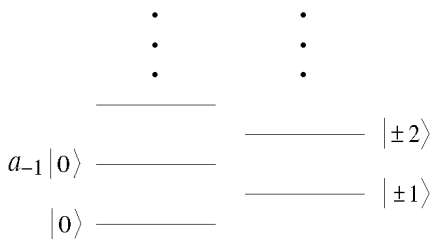


図 8:

一方、(86) の分子は先ほど説明した soliton sector の寄与を表しています。上で説明した "meson" の fock space には soliton が入っていません。vertex operator $e^{\pm i\phi}$ は次元が $\frac{1}{2}$ だったので、$|0\rangle$ と $a_{-1}|0\rangle$ の間に soliton state $|\pm 1\rangle$ が入ってきます (図 8)。これが $q^{\frac{1}{2}}$ の寄与を与えます。soliton sector は $|\pm 2\rangle, |\pm 3\rangle, \cdots$ と続くわけですが、それぞれは次元 $\frac{n^2}{2}$ なので $q^{\frac{n^2}{2}}$ の寄与を与え、分子の無限和の部分を出してくるようになっています。つまり、(86) は meson だけでなく soliton もすべて足した結果になっています。

次に fermion の partition function を考えます。NS-sector について考えると

$$Trq^{L_0} = \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (1+q^r)^2 \tag{90}$$

となります。fermion には $\psi_r, \overline{\psi}_r$ の 2 種類があって、r はそれぞれ半整数をとっています。fermion は 2 回かけるとゼロになりますので、例えば $\psi_{-\frac{1}{2}}$ の寄与は

$$1 + q^{\frac{1}{2}} \tag{91}$$

$\overline{\psi}_{-\frac{1}{2}}$ も同様です。他の oscillator の寄与も入れると (90) のようになります。

(質問)　boson の partition function のところで meson という言い方をした意味は?

(答え)　meson と言ったのは boson の oscillator に対応する状態です。まあ、boson だから meson と言うわけですが (笑)。ただの fock space だと思ってください。

(86) と (90) は、無限和と無限積というように見た目は全く違うものですが、Jacobi の 3 重積公式

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} q^{\frac{r^2}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^{n-\frac{1}{2}})^2 \tag{92}$$

から、ふたつが同じものだということが分かります。具体的に fock space で見ると、fermion での $\psi_{-\frac{1}{2}}|0\rangle, \overline{\psi}_{-\frac{1}{2}}|0\rangle$ が soliton $|\pm 1\rangle$ に対応しています。また、次の level にある $\psi_{-\frac{1}{2}}\overline{\psi}_{-\frac{1}{2}}|0\rangle$ が $a_{-1}|0\rangle$ に対応しています。このように、soliton を含んだ boson の Hilbert space と fermion の Hilbert space は完全に一致しています。

これまで、kink の幅が $2\pi a$ で、$a=\pm 1$ の場合を議論してきました。これは fermion に対応していましたが、元々の action(75) には $\phi\to\phi+a$ の対称性があるので、この幅は何でもかまいません。そこで、a が他の値の場合を考えてみます。

まず、$a=\sqrt{2}$ の場合です。このとき、

$$J^{\pm}(z) = e^{\pm i\sqrt{2}\phi(z)} \tag{93}$$

$$J^{3}(z) = \frac{1}{i\sqrt{2}}\partial_z\phi(z) \tag{94}$$

を考えます。$J^{\pm}(z)$ は $a=\sqrt{2}$ のときの vertex operator(70) です。これらの OPE をとってみますと、

$$J^3(z)J^{\pm}(w) \sim \pm\frac{J^{\pm}(w)}{z-w} \tag{95}$$

$$J^+(z)J^-(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{2J^3(w)}{z-w} \tag{96}$$

となります。これは $SU(2)$ の current algebra になっています。$J^a(z)$ を

$$J^a(z) = \sum_n J^a_n z^{-n-1} \tag{97}$$

と mode 展開すると、(95)(96) は次のように書けます。

$$[J^a_n, J^b_m] = i\epsilon^{abc} J^c_{n+m} + kn\delta_{n+m,0} \tag{98}$$

となります。これは有名な Kac-Moody 代数というもので、今の場合は $k = 1$ です。このように、boson から non-Abelian gauge 群の構造が作れます。これは Heterotic string の構成において重要になります。Heterotic string では左向きと右向きで非対称に boson と fermion を入れる系です。左向きは bosonic string(24 個の boson), 右向きは superstring(boson,fermion それぞれ 8 個) となっています。ここで左向きの boson が 16 個余っていますが、これらから上のようにして時空の gauge 対称性を作ります。上では boson 1 個で rank 1 の gauge 群 $SU(2)$ が作れましたが、Heterotic string の場合には rank 16 の gauge 群が作れます。後で議論できるかもしれませんが、consistent な rank 16 の gauge 群としては、$E_8 \times E_8$ と SO(32) の 2 種類しかないということが分かっています。

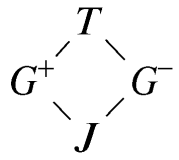


図 9:

boson 1 個で fermion が作れるわけですから、超対称性を持った系も作れます。それが $a = \sqrt{3}$ の場合です。

$$T(z) = \frac{1}{2}(\partial\phi(z))^2 \tag{99}$$

$$G^{\pm}(z) = e^{\pm i\sqrt{3}\phi(z)} \tag{100}$$

$$J(z) = \partial_z\phi(z) \tag{101}$$

$G^{\pm}(z)$ は $a = \sqrt{3}$ なので次元 $\frac{3}{2}$ の field で、これは gravitino に対応する Vertex operator です。energy-momentum tensor$T(z)$ は graviton に対応して、次元は 2 です。そして次元 1 の $J(z)$ を加えると、図 9 のような構造ができます。これは 2 次元の $N = 2$ superconformal field theory になります。

以上のように、parameter a を導入するといろいろと遊べることがわかります。これに関連して、後で出てくる T-duality をここで導入したいと思います。

3.5 T-duality

まず、parameter a の意味を考えてみます。先ほど、soliton があると

$$\phi(ze^{2\pi i}) - \phi(z) = 2\pi a \tag{102}$$

となることを示しました。つまり、ϕ は 2 価である (branch cut がある) ということです。これは、ϕ が

$$S^1 = \mathbf{R}/2\pi a\mathbf{Z} \tag{103}$$

に値をとることを意味しています。つまり、target space(boson が値をとる空間) が実は $\mathbf{R}$ ではなく S^1 に compact 化されているということです。boson の mode 展開を思い出してみると、

$$\begin{aligned} \phi(z,\bar{z}) &= \phi_L(z) + \phi_R(\bar{z}) \\ &= x - ip_L \log z - ip_R \log \bar{z} + i\sum_{n\neq 0}(\frac{a_n}{n}z^{-n} + \frac{\bar{a}_n}{n}\bar{z}^{-n}) \end{aligned} \tag{104}$$

でした。ここで、$z \to ze^{2\pi i}$ とすると、log の部分から $2\pi i$ が余分に出るので、

$$\phi(ze^{2\pi i}) - \phi(z) = 2\pi(p_L - p_R) \tag{105}$$

となります。今、target space が半径 R で compact 化されているとすると、これは

$$\phi \sim \phi + 2\pi R \tag{106}$$

という同一視をすることに対応していますので、$2\pi(p_L - p_R)$ が $2\pi R$ の整数倍であればよいことがわかります。つまり、

$$p_L - p_R = wR \tag{107}$$

となります。w は winding number と呼ばれる整数です。一方、ひもの重心座標 x に対する momentum p は、target space が compact 化されているので量子化されます。波動関数 e^{ipx} が x について periodic であるという要請から、

$$p = p_L + p_R = \frac{n}{R} \tag{108}$$

となります。(107) と (108) から p_L と p_R について解くことができます。これを使ってエネルギーを考えてみます。エネルギーは L_0 の固有値ですので、

$$\begin{aligned} energy &= \frac{1}{2}p_L^2 + \frac{1}{2}p_R^2 + (oscillator\ part) \\ &= \frac{1}{4}((Rw)^2 + (\frac{n}{R})^2) + (oscillator\ part) \end{aligned} \tag{109}$$

という格好になります。有名な話ですが、これは吉川さんや坂井さんが発見されたＴ変換

$$n \leftrightarrow w\ ,\ R \leftrightarrow \frac{1}{R} \tag{110}$$

に対して不変になっています。つまり、boson の立場から見ると target space の半径が R であろうと $\frac{1}{R}$ であろうと関係ないということです。一方、これを ϕ_L と ϕ_R についての変換だとも考えられます。(110) は p_L と p_R について $p_L \leftrightarrow p_L$、$p_R \leftrightarrow -p_R$ という変換に対応するので

$$\phi_L \leftrightarrow \phi_L \tag{111}$$

$$\phi_R \leftrightarrow -\phi_R \tag{112}$$

という変換をしていることになります。つまり右向き mode と左向き mode で反対向きの変換をするのです。これがＴ-dual 変換です。

次に、高次元の target space での T-duality について説明します。target space が d 次元というのは、boson が d 個ある場合のことです。

$$\phi^i \quad (i = 1, \cdots, d) \tag{113}$$

これをベクトル記法を用いて次のように書きます。

$$\vec{\phi} = \sum_{i=1}^{d} \phi^i \vec{e}_i \tag{114}$$

ここで $\vec{e}_i$ は d 次元空間の 1 次独立な基底です。boson が 1 個の場合は ϕ を $\phi + 2\pi R$ と同一視しましたが、d 次元の場合は

$$\vec{\phi} \sim \vec{\phi} + \sum_{i=1}^{d} n^i \vec{e}_i \quad (n^i \in \mathbf{Z}) \tag{115}$$

という同一視をします。右辺第 2 項は $\vec{e}_i$ で定義される lattice 上の点を表しています。つまりこの式は、z を 2π 回転させたときに $\vec{\phi}$ の値がいくらかずれるのですが、この lattice 上の点の分だけのずれは無視するということを意味しています。これより、d 次元での winding number は

$$\vec{p}_L - \vec{p}_R = \sum_i n^i \vec{e}_i \tag{116}$$

となります。一方、重心座標の momentum は、

$$\vec{p}_L + \vec{p}_R = \sum_i m_i \vec{e}^{\,i} \tag{117}$$

となります。ここで $\vec{e}^{\,i}$ は $\vec{e}_i$ の dual basis と呼ばれるもので、

$$(\vec{e}^{\,i}, \vec{e}_j) = \delta^i_j \tag{118}$$

を満たすものです。つまり、momentum は dual lattice に値をとるということを意味しています。(116)(117) から、先ほどのようにエネルギーの zero mode を計算すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}((\vec{p}_L - \vec{p}_R)^2 + (\vec{p}_L + \vec{p}_R)^2) \\ = \; & \frac{1}{4}(n^i(\vec{e}_i, \vec{e}_j)n^j + m_i(\vec{e}^{\,i}, \vec{e}^{\,j})m_j) \\ = \; & \frac{1}{4}(n^i, m_i)M \begin{pmatrix} n^j \\ m_j \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{119}$$

のように 2 次形式で書けます。ここで M という行列は次のようなものです。

$$M = \begin{pmatrix} (\vec{e}_i, \vec{e}_j) & 0 \\ 0 & (\vec{e}^{\,i}, \vec{e}^{\,j}) \end{pmatrix} = \Omega {}^t\Omega \tag{120}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & {}^t e^{-1} \end{pmatrix} \qquad e)_{ij} = (e_i)_j \tag{121}$$

ここで出てきた行列 Ω は次式を満たします。

$$\Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {}^t\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{122}$$

つまり、Ω は $O(d,d)$ の元です。

(119) は次の変換で不変になってます。

$$(n, m) \quad \to \quad (n, m) g \tag{123}$$

$$\Omega \quad \to \quad g^{-1} \Omega \tag{124}$$

ここで g は $O(d,d)$ の元です。ただし、n, m は整数なので、変換後も整数になるためには

$$g \in O(d, d : \mathbf{Z}) \tag{125}$$

でなければなりません。この群 $O(d, d : \mathbf{Z})$ が、target space が d 次元 torus T^d の時の T-dual 変換です。

$d =$ 1 の場合には parameter として R がありましたが、d $>$ 1 でそれに対応するのは Ω です。しかし、物理的に意味があるのは Ω ではなく M なので、

$$\Omega \to \Omega h \ , \ h \in O(d) \times O(d) \tag{126}$$

という変換で移り合うもの同士は物理的に同等です。これより、d 次元 torus compact 化の moduli space は次の有名な coset space の構造を持っていることがわかります。

$$O(d, d : \mathbf{Z}) \backslash O(d, d) / O(d) \times O(d) \tag{127}$$

(質問)　$O(d,d:\mathbf{Z})$ とは?

(答え)　(124) のように左から整数行列をかけるという変換を考えましたが、これで移り合うものは物理的に同じものなので商をとっています。ただし左からかけるという意味で左側に書いています。これに対し $O($ d $) \times O($ d $)$ は (126) のように右からかかっているので右側に書いているのです。

ひとつ注意点がありますが、これまで考えてきた M は対角部分のみの行列なので、Ω は一般の $O(d,d)$ の元ではありません。この問題は antisymmetrictensor B_{ij} を入れることによって解決します。このときの Ω は、

$$\Omega = \Omega_B \Omega_e \tag{128}$$

$$\Omega_B = exp \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{129}$$

となります。$\Omega_e L$ は B_{ij} がないときのもの (121) です。

(質問)　moduli space の定義とは?

(答え)　d $=$ 1 の場合には boson に対して $\phi \to \phi + 2\pi R$ という同一視をしましたが、この R が違えば別の理論になっていました。例えば $R =$ 1 のときは fermion、$R = \sqrt{2}$ のときは currnt 代数の系、$R = \sqrt{3}$ では supersymmetric な系でした。つまり、理論が R によって parametrize されているのです。このように、理論を決める parameter の空間を moduli space といいます。

3.6 Orbifold

boson を compact 化する空間として orbifold というものがあります。これについて説明します。

これまでは、target space が S^1 や T^d といった regular な空間の場合を議論してきましたが、target space が singular な場合も考えることも可能です。ここでは boson が $\mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$ に住んでいる場合を考えます。後でＫ３空間への compact 化を議論しますが、このときも似たような orbifold を考えます。

target space が $\mathbf{R}/\mathbf{Z}_2$ というのは、boson に対して次のような同一視をすることに対応しています。

$$\phi \sim -\phi \tag{130}$$

つまり、もともと１次元空間だったものを、原点について対称な点を同一視した空間が target space になっています。

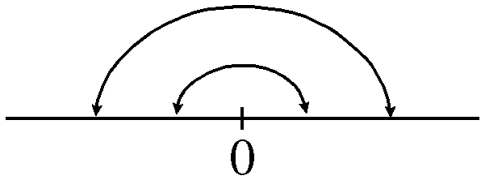


図 10:

これは具体的には原点を端点とした線分です。この場合には、boson の境界条件として次のふたつが考えられます。

$$\phi(ze^{2\pi i}) = \phi(z) \tag{131}$$

$$\phi(ze^{2\pi i}) = -\phi(z) \tag{132}$$

２π 回転で符号が出ない方を untwisted sector、符号が出る方を twisted sector と呼びます。これより、twisted sector では次のような mode 展開になります。

$$\phi(z) = \sum_{r\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}} \frac{a_r}{r} z^{-r} \tag{133}$$

このように、fermion の R-sector と同じような展開になります。

後で議論するＫ３空間は非常に複雑なものですが、特殊な moduli をとることによって $T^4/\mathbf{Z}$ と表すことができます。これは、まず T^4 へ compact 化した後に

$$(z_1, z_2) \sim (-z_1, -z_2) \quad z_1, z_2 \in \mathbf{C} \tag{134}$$

という同一視をしたものです。z_1, z_2 は T^4 の座標を複素数に組んだものです。この空間には全部で１６個の特異点があります。ここで特異点とは、反転 (134) に対する fixed point のことです。

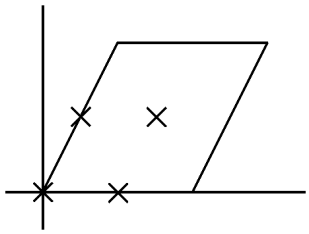


図 11:

簡単のために $T^2/\mathbf{Z}$ を考えると、図のように４個の singular point があります。原点以外の点でも、反転によって移った点が torus 上では同じ点である場合があり、それが他の３個の singular point になっています。Ｋ３空間についても同様にして１６個の singular point が現れます。この場合については後で議論します。

4 Stringの摂動論

4.1 World sheetの modular不変性

午前中の講義で、target space の moduli 変換というか T 変換について講義しました。string 理論と言いますと、world sheet の方にも modular 不変性があります。そういった話ですので、world sheet の取り扱い方もおさらいしておきます。

考える例として、一番シンプルな系ということで、Majorana fermion のいろいろな分配関数を考えてみましょう。先程も言いましたように、Fermion に対しては二種類の境界条件があります。Ramond 型 と Neveu-Schwarz 型の境界条件です。それぞれの分配関数を書き下してみます。

まず Ramond 型の分配関数は、二種類考えられます。即ち、状態和をとるときに、単に重みとして q^{L_0} をとるものと、Fermion に対する交代和 $\mathrm{Tr}(-1)^F q^{L_0}$ をとるものとです。ただし、ここで F は fermion 数のことです。

経路積分を考えるときに、時間方向と空間方向の周期性が重要になります。Fermion に対する交代和をとることは時間方向に対して周期的境界条件をとることに対応します。逆にそれが無い時は時間方向に対する反周期的境界条件ということになります。

空間方向に対する境界条件を決めている Ramond と Neveu-Schwarz との二つの sector に対してそれぞれ時間方向にも周期的と反周期的の二種類の境界条件が考えられますので、全部で四種類の分配関数があります。

まず Ramond sector は、

$$(\mathrm{P},\mathrm{P}) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \tag{135}$$

$$(\mathrm{P},\mathrm{A}) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) \tag{136}$$

また、Neveu-Schwarz sector は、

$$(\mathrm{A},\mathrm{A}) = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n+\frac{1}{2}}) \tag{137}$$

$$(\mathrm{A},\mathrm{P}) = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-\frac{1}{2}}) \tag{138}$$

ここで P、A は、それぞれ periodic、anti-periodic を指しています。一番目の P(or A) は空間方向の周期性、二番目の P(or A) は時間方向の 周期性を表しています。例えば Ramond sector は空間的に周期的であるた

め整数で moding されています。逆に NS sector は半奇数 moding です。つまり空間方向の周期性は moding によって表現されています。次に時間方向の周期性の表示を考えます。fermion の分配関数には、分子に $(1+q^n)$ の無限積が出ます。これが反周期境界条件に対応します。逆に fermion 数からの寄与 $(-1)^F$ があると fermion が一個くるごとに、符号がひっくり返るので、q^n の前の符号が minus になります。

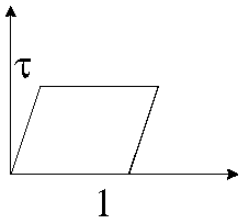


図 12: 基本領域の平行四辺形

さて q を $q = e^{2\pi i\tau}$ というパラメーターとします。world sheet 上の modular 変換とは次の様な変換を指します。まず S 変換ですが

$$\tau \longmapsto -\frac{1}{\tau} \tag{139}$$

と定義します。この変換の元で Fermion の分配関数のは次のようにお互いに移り変わります。$\tilde{q}$ を、

$$\tilde{q} = e^{-2\pi i/\tau} \tag{140}$$

と定義すると、

$$f_1(\tilde{q}) = f_1(q), \quad f_3(\tilde{q}) = f_3(q), \quad -f_2(\tilde{q}) = f_4(q) \tag{141}$$

このとき、τ を $-1/\tau$ に変換するという事はどういう幾何学的意味を持つか説明します。まず始めに、τ で定まる平行四辺形を考えます (図 12)。

この平行四辺形の $0-\tau$ の辺を実軸に、$0-1$ の辺を上半平面に入るように適当に反転及び、回転してやります。そして、もともとの $0-\tau$ の辺

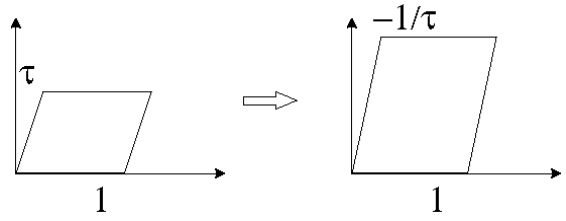


図 13: S 変換による基本領域の変形

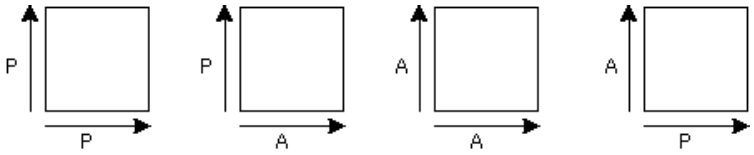


図 14: 周期性

の長さが 1 になるように scale します [図 13]。そうすると変換した平行四辺形の moduli は、$-1/\tau$ になります。

今、平行四辺形の横軸には空間方向の境界条件を、縦軸には時間方向の境界条件をとっておきます (図 14)。そのとき、S 変換に対しては縦横 2 つの方向に関して同じ境界条件を持つものは境界条件の変更がありません。一方 A と P が交ざっているものに関しては、(A,P) $\leftrightarrow$ (P,A) という入れ替わりが起こります。

無限積に対するこのような変換性は、非常に non-trivial です。公式自体が、どうやって導かれるのか説明します。例えば、f_1 から f_4 の関数は、Jacobi の ϑ 関数と Dedekind の η 関数を用いて、

$$f_2 = \sqrt{\frac{\vartheta_2}{\eta}}, \quad f_3 = \sqrt{\frac{\vartheta_3}{\eta}}, \quad f_4 = \sqrt{\frac{\vartheta_4}{\eta}} \tag{142}$$

と表すことができます。ここで、η は Dedekind の η 関数、ϑ は Jacobi の ϑ 関数で、この ϑ 関数自体は無限和で次の様に表すことができます。

$$\vartheta_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}}, \quad \vartheta_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2}, \quad \vartheta_4 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} \tag{143}$$

したがって、Jacobi の ϑ 関数に対して modular 変換性を証明すれば良いことになります。その証明は Poisson の resummation formula を用いて

行うことができます。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nr) = \frac{1}{r}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}\left(\frac{m}{r}\right) \tag{144}$$

$$\tilde{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2\pi i x y} f(x) \tag{145}$$

$\tilde{f}(y)$ とは、f の Fourier 変換のことです。

この公式は、この講義の一番最初に出てきた、Gauss 分布が Fourier 変換でその形を変えない、という性質と非常に似ています。つまり ϑ 関数は Gauss 分布みたいなものであり、ただ積分が和になっています。Gauss 分布の例では、ω と $1/\omega$ とが移り合っていたわけですが、今の場合は τ が $-1/\tau$ に変わる変換になっています。

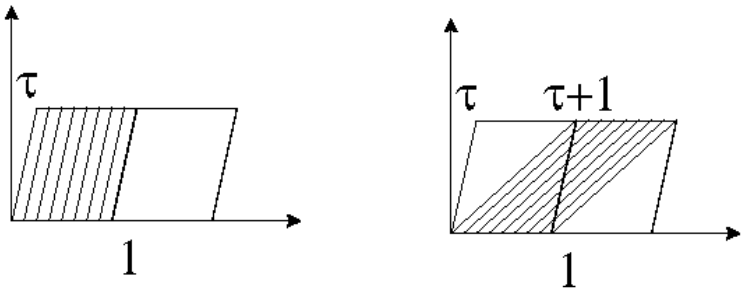


図 15: T 変換による基本領域の変形

同様に、T 変換は、図 12 のように同一視を定義していた平行四辺形を、図 15 のようにひしゃげた平行四辺形に取り替える変換です。この変換は同一視の行い方を変えているだけですので場の理論は変わりません。

T 変換のもとでは、f_3 と f_4 が入れかわります。これはどうしてかと言いますと、辺 $0-1$ を、例えば、anti-periodic、$0-\tau$ を periodic とします。すると、変換後の縦軸の境界条件を決めなくてはならないわけですが、0 から τ にいくと periodic、さらに、τ から $\tau+1$ にいくと anti-periodic ですから、$0-(1+\tau)$ の境界条件は合成して anti-periodic になります。すなわち Neveu-Schwarz sector に関して、時間方向の境界条件が入れ替わります。

これまでの講義で 3 種類の $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換を見てきました。

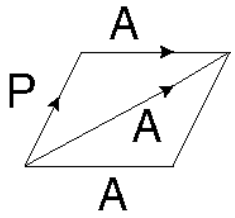


図 16: T 変換による周期性の変化

1. world sheet の modular 不変性
2. target space の T-duality
3. Yang-Mills 理論の coupling constant, $\tau = \theta/2\pi + 4\pi i/g^2$ に対する duality

これらはよく考えると全然違うところに働いている変換性です。しかし、全て対称性が $SL(2,\mathbf{Z})$ であるという共通点があります。色々な所に普遍的にこの modular 不変性は現れるわけですけれども、なぜそういう構造があるのか、これを理解することが、ある程度弦理論の非摂動論的な性質を理解することにつながると思われます。

4.2 弦理論の摂動論

次に、弦理論の摂動論とは何か、ということを復習しておきたいと思います。これは必要でないかもしれませんけれども、皆さんは弦理論の非摂動的性質の研究をやろうというわけですから、その前に、摂動論とは何かを、簡単におさらいしておくことは悪いことではないでしょう。

まず、弦に行く前に粒子の運動について少し復習しましょう。世界線の微小な長さを ds と書きます (線素)。m は質量でとすると作用は、次のようにに書けます。

$$S = m \int ds$$

この粒子に Yang-Mills 場、例えば $U(1)$ のゲージ場が結合しているとす

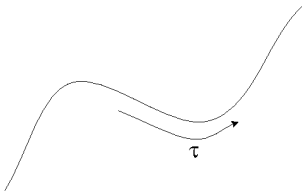


図 17: 粒子の世界線

ると、その相互作用項は、

$$e\int A_\mu dx^\mu$$

となります。全体としては、

$$S = m\int ds + e\int A_\mu dx^\mu \tag{146}$$

となります。この作用には、一種のゲージ対称性があります。つまり、道すじに沿うパラメーターを t としますと、このパラメーターの再定義に対して理論は変わりません。つまり、gauge 変換は $t' \to f(t)$ です。

例えばこの理論で Green 関数などを計算しようとしますと、ある点 x から x' までのすべての path に関して和を取れば良い訳です。

$$G(x,x') = \sum_{(\mathrm{path})} \exp\left(-m\int_\tau^{\tau'} ds\right) \tag{147}$$

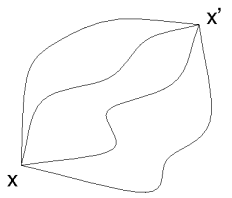


図 18: 経路積分の path

これが、点粒子の場合の説明ですが、弦理論の場合にはそれを 2 次元に拡張します。つまり適当に境界をとっておいて、(始点と終点に相当しているのが境界になるわけです。)、この境界の輪っかに関する相関関数というものを考えます。つまりこれらの境界を待つような 2 次元面につ

いて全て和をとるわけです。

$$G(c) = \sum_{(\mathrm{Sc})} \exp\left(-T \int_{\partial\bar{\Sigma}=c} dA\right) \tag{148}$$

ここで T と書いたものが string tension と呼ばれるもので、粒子の場合の質量に相当しているパラメーターです。また dA は微小面積要素です。そして、運動方程式は、点粒子のものを一般化した南部-後藤作用から導かれて、

$$\partial_a(\overline{\partial_b} h^{ab} \partial_\nu X^\mu) = 0 \tag{149}$$

となります。この h は world sheet 上の induced metric で、

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \tag{150}$$

実は、これは面積最小の面を決める式すなわち極小曲面の方程式に他なりません。ところで、弦の経路積分というのは全ての曲面について足し上げるということを行うわけですが、この方程式自体は h の表示に X の 2 乗が入っているので非線形です。したがって工夫が必要となります。そこをうまくやったのが、Polyakov の経路積分で、補助場 g_{ab} をいれて Lagrangian を書き換えます。

$$W = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X_\mu \partial_b X^\mu d^2\xi \tag{151}$$

$$T = \frac{1}{4\pi\alpha'} \tag{152}$$

もともとは全ての、X に関する和だけを考えていたわけですが、今度は全ての 2 次元面の計量と X に関して和をとることになります。計量に対する和をとる場の理論は量子重力に他なりません。

作用 (152) から導かれる運動方程式として、計量 g_{ab} の変分に関する方程式を考えてみます。

$$\partial_a(\sqrt{g} g^{ab} \partial_b X^\mu) = 0 \tag{153}$$

g_{ab} というのは、world sheet 上の計量ですので、world sheet 上の energy momentum tensor と結合しています。

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X_\mu \partial_d X^\mu = 0 \tag{154}$$

これから逆に g を解くことができます。これを式 (153) に代入すると元々補助場の理論でしたから南部-後藤の式にもどるわけです。しかし、その代わりに g に関する積分を実行することが可能である事を証明したのが Polyakov の仕事です。このことは、2 次元上の metric g_{ab} に関する 2 次元の量子重力を実際に解いてしまうことを意味しており非常に大変な仕事です。

このときの gauge 対称性は 2 次元面上の一般座標変換になります。

$$\delta\xi^\mu = f^\mu(\xi) \quad (\mu = 0, 1) \tag{155}$$

ここでゲージ自由度は 2 つあります。もともと計量は独立な自由度が 3 個でゲージ対称性が 2 つ自由度を持っていますので、1 つ自由度が余ります。それを用いて計量をゲージ固定するわけですけども、残った自由度の表示として普通用いるのは、$ds^2 = g_{ab} d\sigma^a d\sigma^b = e^\phi dz d\bar{z}$ で conformal 計量と呼ばれます。ϕ は Liouville 場の自由度と呼ばれています。

いったんゲージ固定してしまうとゲージ変換の自由度はもはや残らないと考えられますが、この場合さらに conformal 計量を変えない変換が存在しており (residual gauge symmetry と呼びます)、Virasoro 対称性になっています。つまり $w = f(z)$ という形の座標変換です。

Liouvill 場の ϕ ですが、$\det g = e^{2\phi}$ を代入すると、Lagrangian から完全に消えるようになっています。これは古典論としては正しいわけですが、量子論的に考えてやりますと、conformal anomaly のために ϕ が消えないということが分かります。これが有名な Polyakov の仕事です。その Liouville part の action が

$$S = \frac{26 - D}{48\pi} \int \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \mu^2 e^\phi \right)$$

これは bosonic string の場合です。この ϕ の自由度が残っていると相互作用が非線型ということもありまして、取り扱うのが難しいのですが、$D = 26$

の時にはこの項は消えてしまいます。この次元を critical dimension といいます。

superstring の場合には 2 次元上の超重力理論で考えることになります。この理論を量子論的に取り扱うと同様にして超対称化された Liouville 場の作用が出てきて、今度は $D = 10$ で消えます。

弦理論の摂動論というのは、どういう構造になっているかというと、各 loop で 1 個ずつ diagram があります。これを tree、1-loop、... と足したものが全体の振幅になります。(図 19) ループの数が摂動の次数に対応しています。

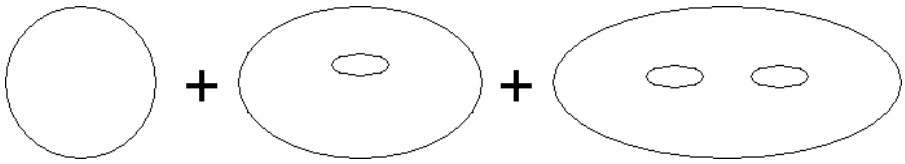


図 19: tree+1-loop+...

80 年代に一応完成された弦の摂動理論とはどういう事をするかといいますと、まず、

1. 各 Riemann 面上で 2 次元の CFT を解きます。
2. 各 order 各 genus で moduli に関する積分を行います。
3. 最後に、各 topology をたしあげるわけです。

という 3 段ステップで構成されます。これをいちいち実行すれば弦理論は解ける、ということになります。しかし、ここで弦理論の摂動論の致命的な問題が浮かび上がってきます。

critical dimension は cenrtal charge でいえば、bosonic string で $c = 26$、superstring では、$c = 10$ となります。このような central charge を持っている conformal field theory であればすべてこの process をへて、摂動展開を定義できる事になります。先程 $c = 1$ の場合に説明しましたように、c を固定した CFT というのは、target space moduli についての連続的な自由度があります。また、ここでは toroidal compact 化を説明しただけ

でしたが、もっと複雑な Calabi-Yau compact 化とかそういうものに関しても無限に多くの CFT があります。つまり真空が決まらないということになります。

実は、素粒子の世代が 3 世代と言う事が摂動論で決まるのか、というと CFT を見るかぎり、3 世代のものも作れるし、4 世代のものも作れるし、5 世代のものも作れる、というわけでどれが良いのか決められません。また、たとえば 10 次元から我々の 4 次元を切り出してくる時に、6 次元の compact 化という作業を行うわけですが、なぜ 4 次元が選ばれて、ほかの次元じゃまずいのかと言う事がわかりません。この意味では、弦理論とはこれらの問題についての予言能力が無いということになります。時空の次元や素粒子の世代数などは最も基本的な理論のパラメーターでありそれらが決まらないという点では弦理論の摂動論は理論として完全でないという事を意味しています。

(質問) μ って何ですか?

(答え) 宇宙項に相当する自由度で、量子補正で出てくると考えられる因子です。Einstein 方程式と同じで、あってもなくても構いません。ですからこれ無しで理論を考える事も可能で、そうすると自由場になりますので取り扱い可能な量子論を作ることができます。この場合には $c = 26$ でなくては駄目だということにはなりません。80 年代後半に、target space の次元が 1 次元より小さい場合 ($c < 1$) は理論が解ける、という事が理解されてきたのですけが、それは Liouville 理論が解けたということを意味しています。そのような模型では central charge c が臨界次元 26 であるといった必要が無くなります。ですから

(質問) どういう parameter で展開しているのですか?

(答え) world sheet の Riemann 面の穴の数 (=種数 g) が場の理論の Feynmann 図の loop 数に対応します。後で dilaton という自由度が出てきますが、それは 2 次元の scalar 曲率と、$\frac{1}{2\pi}\int \Phi R^{(2)} d^2\sigma$ という形で結合しています。Φ を真空期待値 (定数) Φ_0 で置き換えると $\Phi_0 \int R^{(2)} d^2\sigma$ となりま

す。$\frac{1}{2\pi}\int R^{(2)}d^2\sigma = 2-2g$ ですので丁度 action のこの項から Loop 展開の展開係数のようなものが見えてきます。つまり、$e^{-2\Phi_0}$ というものを結合定数とした展開となります。

4.3 moduli space の積分について

弦理論の Loop 展開の各次の計算ですが、最終的には Riemann 面の moduli 空間に関する積分を行うことになります。これについてもう少し詳しく述べます。

もともと弦理論というは 2 次元重力すなわち全ての Riemann 面のたしあげを行っている理論です。つまりもともとの経路積分の自由度は計量だったわけです。

元々の自由度： dg

一方で今積分したい自由度は Liouville の自由度と、(gauge 固定してしまうので事実上積分しないわけですが、) 座標変換の自由度とがあります。

積分したい自由度： $d\phi, d\xi^1, d\xi^2$

dg には実はこれらの他に有限自由度の寄与があります。

$$dg_{ab} = d\phi g_{ab} + \nabla_{ba}(d\xi_{bj}) + \sum dm' g'_{ab} \tag{156}$$

dg の変分の中で、$\nabla_{ba}(d\xi_{bj})$ という項は座標変換の自由度であり 分配関数をゲージ体積について割るときに消えます。$d\phi g_{ab}$ の部分は Liouville 場の自由度であり、臨界次元では消えます。最後に残っている $\sum dm' g'_{ab}$ は有限次元の積分を与えます。これが moduli space です。

1-loop では world sheet は torus ですから、図 12 のように τ という parameter がありましたが、moduli の自由度はこの場合には τ の自由度そのものです。この τ を変える変分は、たとえば座標変換で実現しようとすると linear な変換

$$\delta z = \mu\bar{z} \tag{157}$$

で与えられます。個々で問題になるのはこの座標変換の関数自体が torus 上で周期的な関数なっていない点です。つまり一見 moduli の変分も座標変換の変分に入っているように見えますがそうなっていません。この場合の自由度の個数は

$$(\tau, \bar{\tau}) \tag{158}$$

ということで、実数で数えると 2 parameter になります。一般に種数 g の moduli 空間は実数で数えて $6g-6$ $(g \geq 2)$ の次元を持つことになります。

それでこの parameter は場の理論では何になっているのか、場の理論との対応関係を考えてみます。

場の理論での図 20 のような tree graph の計算を考えてみます。propagator

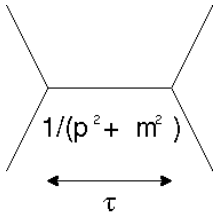


図 20: 場の理論における tree graph

$1/(p^2+m^2)$ というものを入れて Feynman parameter の積分を書いてみると、

$$\frac{1}{p^2+m^2} = \int_0^\infty dt e^{-t(p^2+m^2)} \tag{159}$$

だいたい図 20 の真中の線の長さが t です。場の理論の紫外発散は, この t が 0 のところで現れる発散のことを指しています。

$$\tau \sim 0 \quad \text{紫外発散} \tag{160}$$

一方 弦理論の場合、propagator の線の部分が図 21 のような面に化けます。

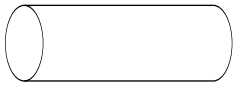


図 21: string amplitude

propagator は $1/L_0$ でこれを次のように書き換えます。

$$\frac{1}{L_0} = \int d\tau e^{-\tau L_0} \tag{161}$$

$$\tag{162}$$

ここに出てくる τ は式 (159) の τ と他なりません。この様に 粒子の場の理論の Feynman parameter が 弦理論の moduli τ に対応しているという関係がわかります。

この対応でいくと、 場の理論の紫外発散に対応する部分 $\mathrm{Im}\tau \sim 0$ のところで発散が生じるように思えます。先程言いましたように弦理論では world sheet の modular 不変性があるので状況は大きく違います。ここで modular 変換を

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{163}$$

と書きます。τ の取り得る値は complex plane の上では図 22 左上の様な上半平面になります。式 (161) はこの領域の τ に関して 2 重積分したものです。

ところが $\tau \to \tau'$ の変換によって τ の変更によって被積分関数は変化しませんから、分配関数の積分は同じ積分を何度も繰り返すことになり redundant です。したがって有限の値を出すためには積分領域を modular 変換の自由度について割ってやらなくては行けません。この割って得ら

れる空間を基本領域と呼びます。1-loop の場合基本領域は図 22 右の様な領域なることがわかります。

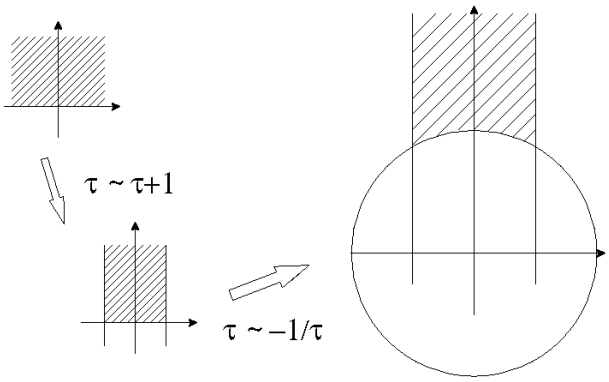


図 22: torus moduli の基本領域

先ほど紫外発散が生じるといったのは $\mathrm{Im}\tau \sim 0$ の所ですが、最終的な積分領域を見てやりますと、この部分が外されています。つまり弦理論はこのような紫外発散が無い理論であるということがわかります。つまり図 23 のように紫外領域の非常に幅の短いような振幅を計算しようとすると、moduli 変換によって、赤外領域の方に持っていかれるわけです。

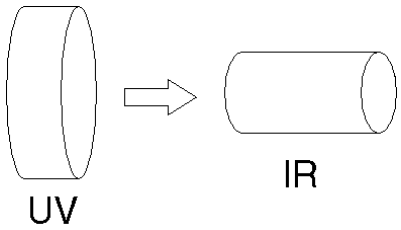


図 23: $SL(2,\mathbf{Z})$ 変換による string amplitude の間の関係

80 年代には弦理論の非摂動的な方法はほぼ一つしかありませんでした。いわゆる String Field Theory です。図 24 をみてください。

場の理論は基本的に vertex と propagator を組み合わせて全て出来るわけですが、String Field Theory というのは、同じような考え方で、string の propagator と vertex、これはパンツみたいなものですが、これらを組み合わせていくことで、string の相互作用を書くことができるという考

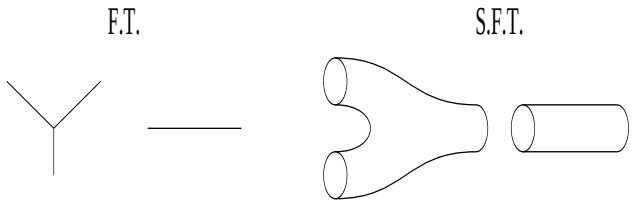


図 24: vertex と propagator

え方です。例えば図 25 のような面であれば、ここが propagator、ここが vertex、というように分けることが出来ます。

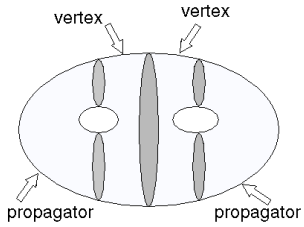


図 25: vertex と propagator による world sheet の分割

点粒子の場の理論の場合、式 (161) のような parameter 積分は一旦 Lagrangian さえ与えてしまえば Fenymann 図を書くことにより自動的に与えてしまうことができます。つまり点粒子の理論では場の理論をいったん構成してしまえば、その理論は摂動論の全ての情報をある意味で内在することができることなります。また、off-shell の情報も含むという事から、さらに進んで非摂動論的な性質まで議論できるようになります。同じようなことを弦理論でも行えるようにすることが弦の場の理論の目標です。もしそれができれば弦理論の非摂動論的な性質もそこから出てくるはずです。ところが、今までのところこの方向での研究は完全には成功していません。つまり先程の moduli 空間の積分の最後のステップで基本領域に積分領域を制限する必要性を述べましたが、弦の場の理論からはこのような制限を出すことが難しいことが知られています。

粒子の理論の場合 Feynman parameter の領域というのは 2 種類図 26 ですので、parameter に関して $0 \sim \infty$ で積分してやればそれでおしまいで

す。(図 26)

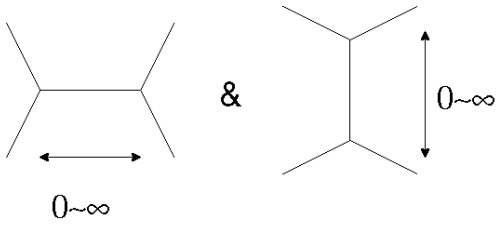


図 26: 場の理論の 4 点相互作用

一方で同様のことを string でやろうとしますと、これに相当する diagram は図 27 のようになるわけです。

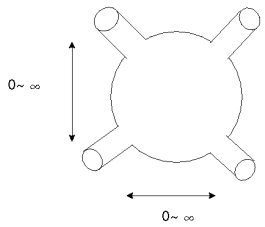


図 27: string の 4 点相互作用

縦の部分を $0 \sim \infty$ にするとかあるいは横の部分を $0 \sim \infty$ にするとかいうことはこの 2 次元的な図ではあまり意味がありません。つまり方向というものがあるため、なんだか渾然として一体としていて、どのように分割すれば良いのか一意的ではありません。

80 年代の終りには弦理論では非摂動論的性質は分からないし、一方摂動論自体も限界が見えてきたということで非常に沈滞してしまいました。

最近になって、この難しいと思われていた弦理論の非摂動論的な励起が D-brane という形で自然に弦を用いて記述することが分かり状況が大きく変わってきました。この新しい展開について明日述べたいと思います。

5 String Spectrum と ソリトン

5.1 bosonic closed string

今日の講義の前半は、String 理論の Spectrum やソリトンや D-brane を主に講義して、後半にはいくつかの duality の例について講義します。Duality の例はいくつもあるのですが、広く浅くより一つの例を詳しく調べたいと思います。

まず、簡単な例, Bosonic string を考えます。この場合の mass shell 条件というのは昨日定義した Virasoro operator を使って

$$\begin{aligned} M^2 &= -p^\mu p_\mu \\ &= \frac{1}{\alpha'}(\sum_{m=1}^{\infty}(mN_m^L + mN_m^R) - 2) \end{aligned} \tag{164}$$

と定義できます。Spectrum と言ってるときは、飛んでいる String の輪がきゅっと縮まって、粒子の様に見えるときの質量を意味しています。つまり 26 次元時空に現れてくる粒子の質量 spectrum です。上の式の N_m^L や N_m^R は m 番目の状態の数で、-2 の寄与は、真空のエネルギーからの寄与です。

Physical state はどういうものがあるかというと、oscillator からの寄与が何も無い場合、

$$|p>: \quad M^2 = -\frac{2}{\alpha'} \tag{165}$$

で、これが tachyon です。次に、massless 状態は

$$N_{ij}(p) \equiv \alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |p>: \quad M^2 = 0 \tag{166}$$

です。ここでは、light cone gauge の transverse の方向を見ていますので $i = 1, \ldots, 24$ です。つまり、26 から 2 だけ引いた次元で見ています。 この state を N_{ij} と書くと、24^2 個の自由度がありますが、次の 3 つの部分に分けることができます。

$$N_{ij} = G_{ij} + B_{ij} + \Phi \tag{167}$$

ここで、G_{ij} は対称でトレースレス, B_{ij} は反対称、Φ は scalor です。自由度を勘定すると、

$$(26-2)^2 = \left(\frac{24\cdot 25}{2} - 1\right) + \left(\frac{24\cdot 23}{2}\right) + 1 \tag{168}$$

となり各々Gravito, anti-symmetric tensor, dilaton の自由度を記述します。自由度の勘定ですが例えば Graviton については次のようになります。26 次元では対称テンソルの自由度は $\frac{26\cdot 27}{2} - 1$ です。ただし物理的自由度と言うときは、graviton の gauge 対称性の自由度を引きます。gauge 自由度が 1 つあると、それにともなって、場の物理的な自由度は 2 つ減ります。この場合 $\frac{26\cdot 27}{2} - 2\cdot 26$ が物理的自由度ですが Lightcone gauge で出た値 $\frac{24\cdot 25}{2} - 1$ と一致します。

(質問)gauge 自由度で物理的自由度の数が落ちるとはどういうことですか?

(答え) 他の例で述べますと、QED では ゲージ固定条件 $div\mathbf{A} = 0$ で一個自由度が減り、 さらにそれに対する「 運動量 」の自由度がさらに減って、合計 2 つの自由度が減ります。QED の場合はご存じのように元々のゲージ場は 4 つ自由度を持っていますが物理的な自由度である横波モードは自由度 2 です。

5.2 Bosonic open string

次に、open string を調べてみます。 open string の action は、

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_M d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial_a X_\mu \qquad 0 \le \sigma^1 \le \pi \tag{169}$$

となっています。 ここで、σ^1 は開いている弦を座標付けしています。この action の変分を取ってみると、bulk の部分と境界の部分の和になります。

$$\delta S = \text{bulk} + \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_{\partial M} d\sigma \delta X^\mu \partial_n X_\mu \tag{170}$$

ここで、∂_n と書いたのは、open string の world sheet の境界における法線方向の微分です。

(質問) bulk とはなんですか?

(答え)bulk とは境界以外の world sheet の残り全体の寄与のことです。上の積分の変分では $\propto \int d^2\sigma \delta X^\mu \partial^2 X_\mu$ となります。

この変分の式から open string の境界に対する条件は 2 種類あるということがわかります。つまり、時空の Poincare 不変性を保つ Neumann 境界条件 (b.c.)

$$\partial_n X_\mu = 0 \quad : \text{Neumann} \quad \mu = 0, \ldots, p \tag{171}$$

と、もう一つの可能性としては、X_μ の変分自体が 0 であるという

$$\delta X_\mu = 0 \quad : \text{Dirichlet} \quad \mu = p+1, \ldots, 25 \tag{172}$$

があります。これは、Dirichlet b.c. です。1980 年代までは Open string の境界条件に Poincare 不変性を課す場合のみを考えていたため、 唯一の解は Neumann b.c. でした。 つまり Dirichlet b.c. を考えるという動機があまりなかったのです。ところが、string の理論のソリトンを議論するときは Dirichlet b.c. を考える十分な動機付けをありますので、最近は Dirichlet b.c. も普通に考えられています。今我々が考えているのは、Fig 28 という状況になっています。

(質問) δX^μ とは何ですか?

(答え) X^μ の変分です。上の例では、$X^\mu = 0$ が固定端を表します。つまり、

$$\delta X_\mu = 0 \Leftrightarrow \partial_t X_\mu = 0 \tag{173}$$

ここで、∂_t は open string に対して平行な方向への微分です。

では、Neumann b.c. の場合を議論しましょう。昨日定義した

$$z = e^{\sigma^0 + i\sigma^1}, \quad 0 \leq \sigma^1 \leq \pi \tag{174}$$

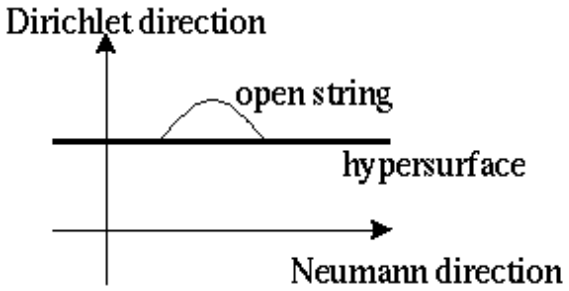


図 28: Open string の端点が fixed hypersurface に固定されている。

という座標をとります。Closed string の場合は $0 \leq \sigma^1 \leq 2\pi$ としていたのですが、open string の場合は その半分 $0 \leq \sigma^1 \leq \pi$ とします。つまり、 open string の場合は、複素上半平面で理論を構成します。特に、time ordering は上半面だけでとることになります。

この座標を使った mode 展開は

$$X^\mu(z,\bar{z}) = x^\mu - i\alpha' \ln(z\bar{z}) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m\neq 0} \frac{\alpha_m^\mu}{m}(z^{-m} + \bar{z}^{-m}) \tag{175}$$

となります。これは、closed string の場合の展開で $\tilde{\alpha} \to \alpha$ とした場合に相当します。Mass shell condition は

$$M^2 = -p^\mu p_\mu = \frac{1}{\alpha'}\left(\sum_{m=1}^{\infty} m N_m - 1\right) \tag{176}$$

のようになります。spectrum を書きだしてやると、一番下の状態は、(165) で p と書いていたのを k と書いて、

$$\text{tachyon} \qquad |k> \quad : \quad M^2 = -\frac{1}{\alpha'} \tag{177}$$

となります。次に massless は

$$\text{photon} \qquad \alpha_{-1}^\mu |k> \quad : \quad M^2 = 0 \tag{178}$$

となります。従って、open string の理論には tachyon とゲージ場が存在しています。簡単に言うと、closed string は重力の理論、open string は Yang-Mills 理論を定義します。こう書きますと、$U(1)$ しか記述できない

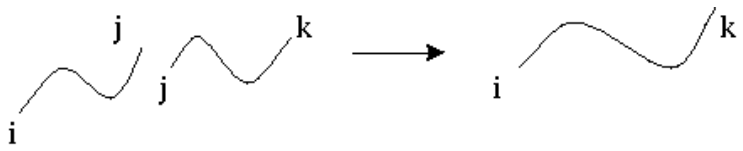


図 29: Open string の相互作用。

ように見えますが、open string の境界に color をくっつけることによって、non-abelian の理論を記述することができます。この open string の端につける color を (i, j) と書きますが、Chan-Paton factor と呼ばれるものです。

5.2.1 Chan-Paton factor

Chan-Paton factor のついた状態をケットで書くと

$$|k; a >= \sum_{i,j=1}^{N} |k; ij > \lambda_{ij}^{a} \tag{179}$$

のようになります。つまり端に色をつけた状態で展開しています。Open string の相互作用は、2 つの open string が 1 つになるときは、Fig 29 のように、j の color を足しあげる必要があります。つまり波動関数 λ の言葉で書いてやると

$$\sum_{j} \lambda_{ij}^{a} \lambda_{jk}^{b} = \lambda_{ik}^{c} \tag{180}$$

となります。突然 color という自由度が出てきたので、混乱するかもしれませんが、後で D-brane という見方をするとこれは自然に理解できます。Chan-Paton factor があるとゲージ群を $U(1)$ から $U(N)$ に持ちあげることができます。つまり、

$$\lambda_{ij}^{a} \to (U \lambda^{a} U^{-1})_{ij} \tag{181}$$

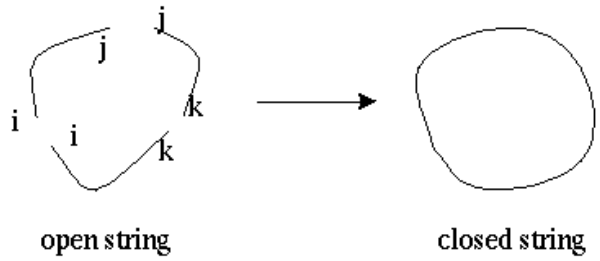


図 30: Open string × 3 → closed string。

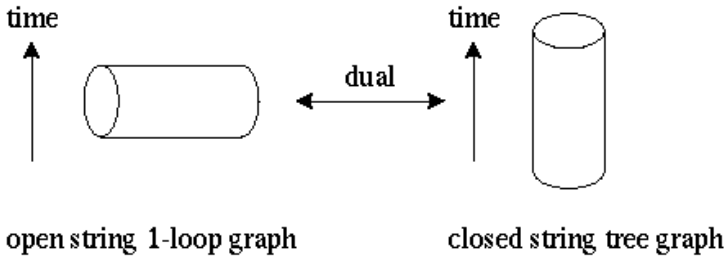


図 31: Cylinder = open string 1 loop ⇔ (dual) closed string tree 。

のように、端点の color を変更する対称性を定義できます。この変換の下で (180) は不変となっています。まとめると、

$$\begin{array}{ccc} \text{CP なし} & \longrightarrow & \text{CP あり} \\ A_\mu & & (A_\mu)_{ij} \\ U(1) & & U(N) \end{array} \tag{182}$$

となります。

5.2.2 Effective action for open string

open string を単にゲージ場のみの理論と考えるのは間違いです。open string はそれだけだけでは閉じた系をつくることができず、Closed string を自然に含んでしまいます。例えば、Fig 30 や Fig 31 のような状況を考えます。 このように、いくつかの open string がまとまる場合や、loop amlitude を考えると、open string がそれだけで閉じないで、closed string が spectrum に入る事になります。これから、open string の有効作用を考

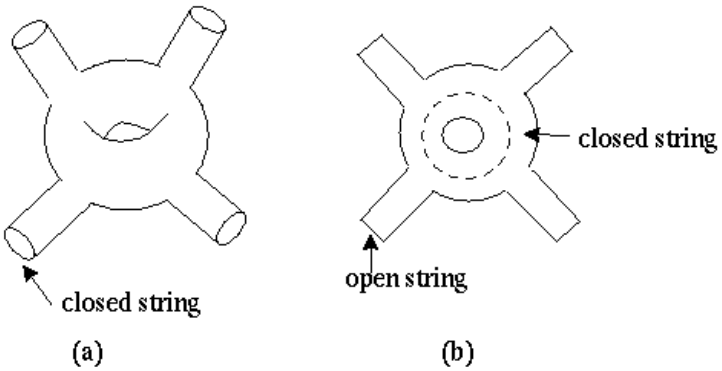


図 32: (a) closed string のみで閉じている。 (b) open string は、自然と closed string を含む。

える場合には、closed string spectrum も含めないと、無矛盾な理論になりません。

(質問) なぜ closed string だけだったら、閉じることができるんですか?

(答え) たとえば、Fig 32 のような状況を考えます。Fig 32(a) の場合は、closed string だけで、open string を考える必要がありません。一方、Fig 32(b) の場合は、open string だけで閉じようと思っても、内部に自然と closed string が現れてしまっています。

Open string の有効作用は

$$S = \int d^{26}x \left\{ \frac{1}{2\kappa_0} e^{-2\phi} (R^{(26)} + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12}(H_{\mu\nu\rho})^2) - \frac{1}{4} e^{-\phi} Tr(F_{\mu\nu})^2 \right\} + O(\alpha') \tag{183}$$

という形になります。ここで、ϕ は dilaton、$H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} B_{\nu\rho]}$ です。この action では tachyon を無視しています。特徴的なのは、$e^{-2\phi}$ と $e^{-\phi}$ の項で、先程導入した dilaton はこのような形で、exponential の肩に入ります。これは、次の様にしても分かります。graviton の部分は線形近似の上では Fig 33(a) の 2 点関数を計算することによって得られます。これは、無限遠から細い closed string が入ってきて、また無限遠に抜けていくという graviton の 2 点関数です。一方、open string つまりゲージ場のとき

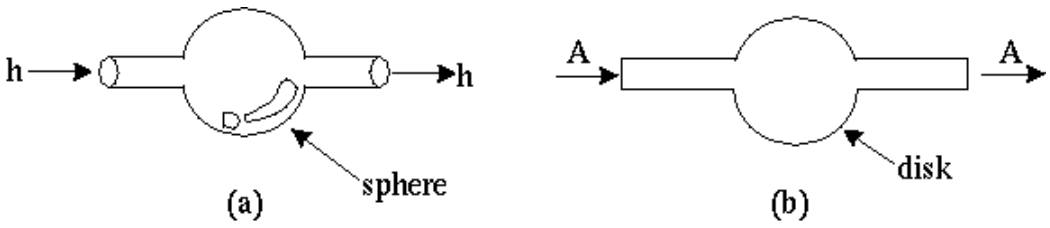


図 33: (a)graviton の 2 点関数。 (b) ゲージ場の 2 点関数

は、次のような Fig 33(b) のような disk amplitude を考えるわけです。昨日議論したように、もともと world sheet action の中に dilaton factor が典型的に

$$S_{dilaton} = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\Phi R^{(2)}(\sigma) \tag{184}$$

のように入って来ています。dilaton を $\Phi = \Phi_0(const) + \text{oscillator}$ とすると、$\int\sqrt{g}R^{(2)}$ はオイラー数 χ を出してきます。graviton のときは sphere のオイラー数 $\chi = 2$、ゲージ場のときは disk のオイラー数 $\chi = 1$ を拾います。先程言った exponetial の肩はこのように説明できます。

(質問) 具体的には、どういう仕組みで現れるのですか?

(答え) 例えば、graviton の方ですが、

$$\int [dX] e^{-(\int G^{\mu\nu}\partial_\alpha X_\mu \partial_\beta X_\nu \eta_{\alpha\beta} + S_{dilaton})} \tag{185}$$

を $G \sim 1 + h, h << 1$ として線形近似をした後に、経路積分を実行することによって h の部分から (183) の中の $\sqrt{g}R^{(26)}$ という項の線形部分が得られます。これとさらに topological term である $e^{-S_{dilaton}}$ のところから、$e^{-\chi\phi}$ が出てきて、$\sqrt{g}R^{(26)}$ にかかっているわけです。

5.3 D-brane

以上は、Neumann b.c. の話でしたが、ここから Dirichlet b.c. を考えます。つまり、今までは $\partial_n X = 0$ を考えていたのですが、ここからは、$\partial_t X = 0$ という境界条件を考えます。(σ^0, σ^1) 微分は、$(z, \bar{z})$ で書いてや

れば、

$$\partial_1 = \partial_z + \partial_{\bar{z}} \tag{186}$$

$$\partial_0 = i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \tag{187}$$

と書けます。$X = X_R(z) + X_L(\bar{z})$ と展開してましたので、これらの要請は

$$\partial_1 \to \partial_z X_R(z) + \partial_{\bar{z}} X_L(\bar{z}) = 0 \quad \text{Neumann} \tag{188}$$

$$\partial_0 \to \quad \partial_z X_r(z) - \partial_{\bar{z}} X_L = 0 \quad \text{Dirichlet} \tag{189}$$

となります。mode 展開はこの境界条件を満たすようにとるわけです。T-duality 変換との関係を考えてみましょう。昨日議論したように、

$$X_R \to X_R$$

$$X_L \to -X_L$$

を T-duality 変換と呼んでいました。これを見てみると、Neumann b.c.(188) は X_L の前の符号がひっくりかえって Dirichlet b.c.(189) になるわけです。これは、Polchinski によって発見されました。T-dulaity 変換は

$$\text{Neumann b.c.} \Leftrightarrow \text{Dirichlet b.c} \tag{190}$$

を引き起こす事が分かります。もともと Neumann b.c. の場合には $U(N)$ ゲージ場が存在していました。diagonal には、$U(1)^N$ が存在していましたから、そこに Wilson line を導入することができます。それは、compact 化したときの S^1 の半径を R と書くと、

$$A_\mu = diag(\theta_1, \ldots, \theta_N)/2\pi R = -i\Lambda^{-1}\partial_\mu \Lambda \tag{191}$$

のように書くことができます。Λ は、

$$\Lambda = diag(e^{iX^\mu \theta_1/2\pi R}, \ldots, e^{iX^\mu \theta_N/2\pi R}) \tag{192}$$

というゲージ変換です。

(質問)Wilson line とは何ですか?

(答え) ある compact 化された空間を一周まわった経路 C に対して、$e^{i\int_C A_\mu dx^\mu}$ と定義されたもので、ゲージ不変量になります。

従って状態に対するゲージ変換は

$$|p=\frac{n}{R};ij>\to e^{iX_\mu(\theta_i-\theta_j)/2\pi R}|p=\frac{n}{R};ij> \tag{193}$$

となります。ここで n は任意の整数です。この表式は位置 X_μ の共変な運動量 p_μ に対する平行移動を表しています。従って、運動量は固有値が $(2\pi n+\theta_i-\theta_j)/2\pi R$ にずれます。今まで運動量の方で議論してきましたが、T-duality というのは境界条件を Dirichlet b.c. に変えて、さらに運動量を winding に変えるということでしたので、winding が fractional に変化するということになります。momentum $(2\pi+\theta_i-\theta_j)/2\pi R$ を T-duality 変換すると、

$$(X')^\mu(\pi)-(X')^\mu(0)=(2\pi n+\theta_i-\theta_j)R' \tag{194}$$

ここで、$'$ は T-duality で移った先の座標を表します。これは、Fig 34 のような状況を表しています。Fig 34(a) をまず説明すると、$X_\mu=\theta_i R$ と $\theta_j R$ のところに何か hypersurface があって open string がその hypersurface をつないでいます。この hypersurface のことを、D(irichlet)-brane といいます。今 compact な空間を考えているので、Fig 34(b) のように、ぐるっと巻いて、D-brane に固定されている open string も存在します。即ち T-duality で不変な理論をつくろうとすると必ず D-brane を登場させないとならないということがわかります。

では、D-brane があるときの string の spectrum を書きます。2 つの部分、momentum part と oscillator part に分かれています。

$$M^2=\left(\frac{2\pi n+(\theta_i-\theta_j)R'}{2\pi\alpha'}\right)^2+\frac{1}{\alpha'}(N-1) \tag{195}$$

右辺の第二項が oscillator part です。第一項は $(\text{momentum})^2$ が T-duality で $(\text{winding})^2$ となっています。一般に 2 つの D-brane が離れていると、

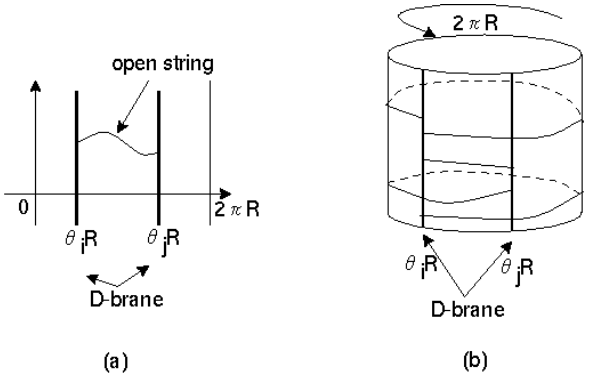


図 34: ある hypersurface に端点を固定された open string。

その分だけ質量が増えます。それは、D-brane をつなぐ string の張力に長さをかけたものとなっています。つまり、一般に D-brane が離れているとその間の string は質量を持つので massless 粒子は出て来ないわけです。これは、元々の $U(N)$ ゲージ群が $U(1)^N$ と破れることの起源となっています。 元々 N 枚の brane が重なっているときは、brane をつなぐすべての string が massless となっていますが、離れていれば、その各 1 枚の上に乗っているもののみが massless として残るからです。

5.4 Unoriented String

5.4.1 unoriented open string

open string を議論するとき、unoriented string の議論をはずすことはできないので、ここで触れておきましょう。まずは open string の境界について考えます。先程議論したように、open string の 1-loop は cylinder になっていて、Fig 35(a) という同一視をしていました。これは、具体的に計算するときには、

$$Tre^{tH} \tag{196}$$

を計算します。H は string のハミルトニアンです。しかし、このように向き付け可能であるとする必要はありません。よって、向き付け可能で

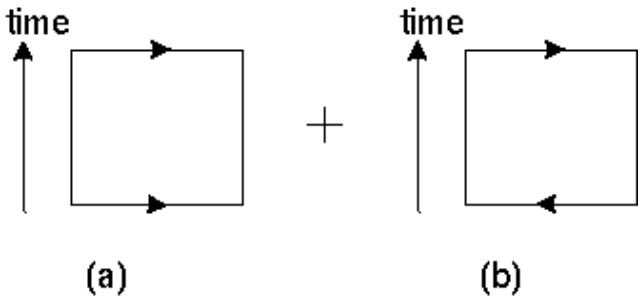


図 35: (a)oriented string のときの境界の同一視。(b)unoriented string のときは、メビウスの輪をつくる同一視もありえる。

ない (unoriented) とすると、Fig 35(a) の cylinder 以外に、Fig 35(b) のメビウスの輪も同様に考える必要があります。これは、式で言うと

$$Tr\Omega e^{tH} \tag{197}$$

が加わることになります。ここで Ω は World Sheet Parity Operator です。従って、unoriented string を考えると言うことは、この 2 つの足し上げの必要があるので物理的状態にある種の projection が働きます。

(質問)Unoriented の意味はなんですか?

(答え) string の world sheet の上にとる座標系の向を無矛盾にとれないということです。ぐるっと一周してきたときに、座標系が反転しているということになっています。

$z = e^{\sigma^0 + i\sigma^1}$ に対して、Ω は

$$\Omega : \sigma^1 \to \pi - \sigma^1, \quad z \to -\bar{z} \tag{198}$$

で定義されます。従って、$X(z, \bar{z})$ で書いてやると、

$$X^\mu(z, \bar{z}) \to X^\mu(-\bar{z}, -z) \tag{199}$$

となっているので、展開式を見てやると

$$x^\mu \quad \to \quad x^\mu \tag{200}$$

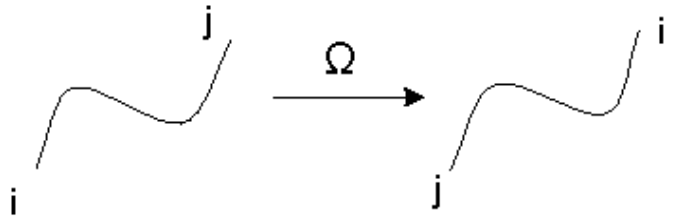


図 36: color への Ω の作用

$$p^\mu \rightarrow p^\mu \tag{201}$$

$$\alpha_m^\mu \rightarrow \alpha_m^\mu (-1)^m \tag{202}$$

としてやることに相当します。

D-brane が一枚の場合を考えてやると tachyon は

$$\text{Tachyon} \quad \Omega|k>=|k> \longrightarrow \text{生存} \tag{203}$$

となりますが、$U(1)$ ゲージ場は、符号が反転して消えます。

$$\text{U(1) ゲージ場} \quad \Omega\alpha_{-1}^\mu = -\alpha_{-1}^\mu|k> \longrightarrow \text{project out} \tag{204}$$

一般にゲージ群が $U(N)$ の場合には端点に (i,j) という color がいたのですが、Ω によって Fig 36 のようにひっくり返ります。波動関数はこの変更を受けて、

$$\Omega\lambda_{ij}|k;ij>=\lambda'_{ij}|k;ij> \tag{205}$$

ここで、

$$\lambda' = M\lambda^t M^{-1} \quad M \in U(N) \tag{206}$$

です。$\Omega^2 = 1$ より、 M は 2 種類しか取れなくて、

$$M = I_N \quad or \quad i\begin{bmatrix} 0 & I_{N/2} \\ -I_{N/2} & 0 \end{bmatrix} \tag{207}$$

となります。 元々のゲージ群 $U(N)$ は project out されて、前者の場合、$O(N)$ となり、後者の場合、$USp(2N)$ となります。無矛盾なゲージ群は bosonic string の場合は $O(8192)$ でないとならないことが知られています。superstring の場合は $O(32)$ で critical dimension を D とすると $O(2^{D/2})$ となります。

5.4.2 Closed string

Closed string に対して Ω という operator がどう作用するかというと、

$$\Omega : \quad \alpha_m^\mu \to \tilde{\alpha}_m^\mu \tag{208}$$

のようになっています。これは、state に対しては、

$$\Omega|k> \quad \to \quad |k> \tag{209}$$

$$\Omega\alpha_{-1}^\mu\tilde{\alpha}_{-1}^\nu|k> \quad \to \quad \tilde{\alpha}_{-1}^\mu\alpha_{-1}^\nu|k> \tag{210}$$

従って、(210) より、(μ,ν) が反対称なものは project out されることがわかります。つまり、graviton と dilaton は生き残りますが、$B_{\mu\nu}$ は死にます。これより、unoriented string は $B_{\mu\nu}$ がない理論を記述していることがわかります。

5.5 Superstring

5.5.1 Open superstring

次に、superstring を考えます。まず、open string の world sheet action は

$$S = \frac{1}{4\pi}\int_M d^2\sigma \left(\frac{1}{\alpha'}\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu\bar{\partial}\psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu\partial\tilde{\psi}_\mu\right) \tag{211}$$

となります。$\psi, \tilde{\psi}$ は X の super partner です。$\psi, \tilde{\psi}$ に対する境界条件は、境界で周期的と反周期的の 2 種類をとることができます。周期的なものは Ramond sector と呼ばれていまして、

$$\begin{aligned} R : \qquad & \psi^\mu(\sigma^0, 0) = \tilde{\psi}^\mu(\sigma^0, 0) \\ & \psi^\mu(\sigma^0, \pi) = \tilde{\psi}^\mu(\sigma^0, \pi) \end{aligned}$$

という条件となっています。反周期的なものは、NS sector と呼ばれていて、

$$\begin{aligned} NS : \qquad & \psi^\mu(\sigma^0, 0) = -\tilde{\psi}^\mu(\sigma^0, 0) \\ & \psi^\mu(\sigma^0, \pi) = \tilde{\psi}^\mu(\sigma^0, \pi) \end{aligned}$$

という形で与えられます。

Superstring の場合はさらに GSO projection という条件を課します。どういうものかというと、偶数のフェルミオン状態のみを取りなさいというものです。つまり、$1+(-1)^F$ で生き残るもののみ残せと言うことですが、これが何を意味するかと言うと、昨日議論した modular 不変性を要請していることに相当しています。NS sector の vacuum energy は $-\frac{1}{24}\times 8-\frac{1}{48}\times 8=-\frac{1}{2}$ となっていて、spectrum は level 0 が

$$|0>\rightarrow M^2=-\frac{1}{2}\alpha' \tag{212}$$

となりますが、実はこの状態はフェルミオン数が奇数なので、この tachyon state は project out されます。このおかげで super string は tachyon がない安定な理論となっています。次に level $1/2$ ですが、massless になります。

$$\psi^{\mu}_{-\frac{1}{2}}|k>\rightarrow \text{massless} \tag{213}$$

これは、10 次元のベクトル場を表しています。

次に、Ramond sector の方は、vacuum energy は 0 になります。この時フェルミオンに zero mode が存在していて、この zero mode をいくら真空にかけても energy は上がらないので真空が縮退していることになります。zero mode の交換関係は次のようになっていて

$$\{\psi^{\mu}_0,\psi^{\nu}_0\}=\eta^{\mu\nu} \tag{214}$$

これは、SO(1,9)Lorentz 群の Clifford 代数で 16 次元表現になります。即ち 16 コの vacuum がフェルミオンの zero mode の表現空間として縮退していると言うことになります。具体的にこれを確かめるには、フェルミオンの生成消滅演算子を定義します。

$$\begin{aligned} d^{\pm}_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2i}_0 \pm i\psi^{2i+1}_0) \\ d^{\pm}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{1}_0 \pm \psi^{0}_0) \end{aligned}$$

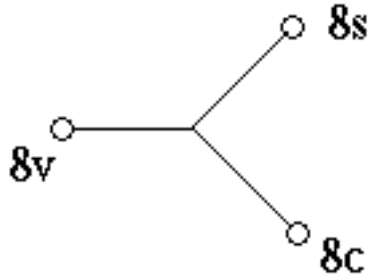


図 37: SO(8) のディンキン図

ここでは、$i, j = 1, \ldots, 4$ です。これらの oscillator はフェルミオンの生成消滅の反交換関係を満たします。

$$\{d_i^+, d_j^-\} = \delta_{ij} \tag{215}$$

ここでは、$i, j = 0, 1, \ldots, 4$ としています。各 i の状態に対して 2 通りの選択肢があるので $2^5 = 32$ コの状態があるということがわかります。

ただし、この 32 表現は、Lorentz 群の既約表現ではありません。Lorentz 変換に対する偶奇で 32 成分のうち半分落ちて、既約表現は 16 表現となります。さらに、実際には物理的な自由度は SO(1,9) ではなく、light cone gauge で transverse な方向の Lorentz 群 SO(8) に落ちます。つまり、physical condition で 16 成分のうち半分が落ちて結局 8 成分が物理的状態ということになります。今議論している transverse 方向の Lorentz 群は SO(8) ですが、これの規約表現は 8 表現が 3 つあって、ディンキン図は Fig 37 となります。NS sector のベクトル場は、8_v 表現に属します。今考えた Ramond sector の ground state の 8 表現は 8_s もしくは 8_c 表現になるというわけです。8_s と 8_c の違いは、32 表現から 16 表現に落とすときの既約表現の取り方の違いにしかすぎません。8_s が偶としたとき、8_c が奇としたときです。

5.5.2 Closed super string

次に closed string を考えます。Closed superstring には 2 種類あって、それぞれ type IIA,IIB と呼ばれています。Open string のときと違って

closed string のときは right mover と left mover の 2 つがありました。それぞれに NS sector と R(amond) sector の表現を取ります。従って、

$$\text{type IIA} \quad (8_v \oplus 8_s) \otimes (8_v \oplus 8_c) \tag{216}$$

$$\text{type IIB} \quad (8_v \oplus 8_s) \otimes (8_v \oplus 8_s) \tag{217}$$

という 2 種類の取り方があるわけです。 R sector を right mover と left mover で異なる chirality をとったものを type IIA、同じ chirality をとったものを type IIB と呼んでいます。

これらの理論に含まれているボゾン場の spectrum を考えます。上で与えられた直積を直和で分解します。NS sector と NS sector から来るものを NS-NS sector と言いますが、そこについては type IIA と IIB で共通で、

$$8_v \otimes 8_v = \begin{array}{ccccc} 1 & \oplus & 28 & \oplus & 35 \\ \phi & & B_{ij} & & G_{ij} \end{array} \tag{218}$$

となります。ϕ は dilaton,B_{ij} は 2 階反対称テンソルと G_{ij} は graviton となっています。ただし、$i, j = 1, \ldots, 8$ です。

次に、R-sector と R-sector からくるものを R-R sector といいます。これは、type IIA のときは

$$\text{type IIA} \quad 8_s \otimes 8_c = \begin{array}{ccc} 8_v & \oplus & 56 \\ A_i & & C_{ijk} \end{array} \tag{219}$$

となります。ここで A_i はベクトル場、C_{ijk} は 3 階反対称テンソルです。type IIB のときには

$$\text{type IIB} \quad 8_s \otimes 8_s = \begin{array}{ccccc} 1 & \oplus & 28 & \oplus & 35 \\ \text{scalar} & & C_{ij} & & C^+_{ijkl} \end{array} \tag{220}$$

となります。ここで、scalar が axion、C_{ij} が 2 階反対称テンソル、C^+_{ijkl} は self dual 4 階反対称テンソルです。4 階の self dual というのは、10 次元空間での Hodge dual を用いて

$$dC_{i_1 \cdots i_5} = \frac{1}{5!} \epsilon_{i_1 \cdots i_{10}} A^{i_6 \cdots i_1 0} \tag{221}$$

で定義されています。

5.5.3 Type I と結合する closed string

次に type I super string を考えます。この理論にも closed super string が存在していますが、type I というときは、string は先程定義した Ω で projection がかけられています。NS-NS sector に関しては、

$$NS-NS \quad 1+28+35 \tag{222}$$

となっていたのですが、2 階反対称テンソルの 28 表現は Ω projection で bosonic のときと同じく追放されます。R-R sector ですが、Ω で割るためには、R sector の chirality が同じでないと割れません。よって、type IIB しか割ることができません。R-R sector は

$$R-R \quad 1+28+35 \tag{223}$$

のうち 1 と 35 が project out されて 28 のみが生き残ります。NS-NS と R-R を合わせると、$1+28+35$ となりこれらは $N=1$ の supergravity の bosonic part と一致します。

(質問)NS-NS sector の 2 階反対称テンソルが無いので、string が無いように見えますが・・?

(答え)RR sector からくる 2 階反対称テンソルに string が結合しています。

まとめると、super string には 5 種類あって (heterotic string はやれませんでしたが) massless の boson 場は以下のようになっています。

IIB	IIA	I	$Het_{E_8\otimes E_8}$	$Het_{SO(32)}$
$1+28+35$	$1+28+35$	$1+28+35$	$1+28+35$	$1+28+35$
$1+28+35$	$8+56$	SO(32) vector	$E_8\otimes E_8$vector	SO(32) vector

(224)

5.6 D-brane

では、各理論にはいったいどういうp-braneが存在するのか考えてみましょう。反対称テンソルがあるとそれに対応するp-brane(p次元空間に広がった物体)が存在するという構造があります。

まずparticleの場合、actionは以前書いたように

$$S = m \int ds + e \int A_\mu dx^\mu \tag{225}$$

となります。つまりベクトル場があるとそれに結合したparticleがあります。これは、particleのworld lineの上にA_μが乗っているという状態です。次にstringの場合

$$S = T \int d(Area) + e \int B_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \tag{226}$$

となっています。つまり、2階反対称テンソルと結合しています。今まで見たように、string理論には2階反対称テンソルが存在していました。逆に言えばstring理論であるなら2階反対称テンソルが存在してなくてはいけないということです。

では、これを一般化してやります。p-braneというのは、(p+1)次元の時空に広がっているわけで、

$$S \sim \int A_{p+1} dX^{\mu_0} \wedge \cdots \wedge dX^{\mu_p} \tag{227}$$

のような結合をします。従って、(p+1)-form((p+1)階反対称テンソル)があるとp-braneが存在することになります。IIB理論を見てやると、0-form、2-form、4-formがあるので、(-1)-brane、1-brane、3-braneがあり、IIA理論には1-form、3-formがあったので、0-brane、2-braneがあることになります。ただし、これはゲージ場に対してelectricに結合している場合です。これらとは別に電磁理論のときのようなmagnetic monopoleのようなものを考えることができます。どのように考えるかというと、p-brane

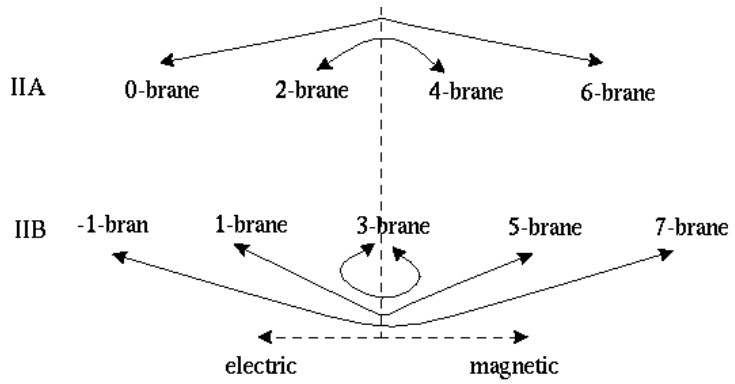


図 38: IIA,IIB に含まれている brane の関係

の結合する (p+1)-form $A^{(p+1)}$ に対して 10 次元時空では、

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{Hodge dual} & & & \\ A^{(p+1)} & \to & F^{(p+2)} = dA^{(p+1)} & \longrightarrow & F_D^{(8-p)} \equiv dA_D^{(7-p)} & \to & A_D^{(7-p)} \\ \text{p-brane} & & & & & & \text{(6-p)-brane} \\ \text{electric} & & & & & & \text{magnetic} \end{array} \tag{228}$$

と magnetic ゲージ場を導くことができて、結局 p-brane に対して (6-p)-brane が存在しているということがわかります。まとめると Fig 38 のようになっています。

5.7 D-brane と RR-charge

先程導入した D-brane は今のこの RR-fields に対する p-brane を与えると言うことを示します。まず Fig 39 のように Y だけ離れた平行な p-brane が 2 枚あるときを考えます。次にこの 2 枚の間に働く力を調べるのですが、この間には 2 つの力が働いています。一つは、NS-NS sector からくる重力で、引力になっています。もう一つは RR sector からくる斥力です。実は、この 2 つはキャンセルして力が働いてないことが知られています。これらの力はどちらも closed string での見方です。つまり、closed string が一方の p-brane から出されて、もう一方に吸収されるということ

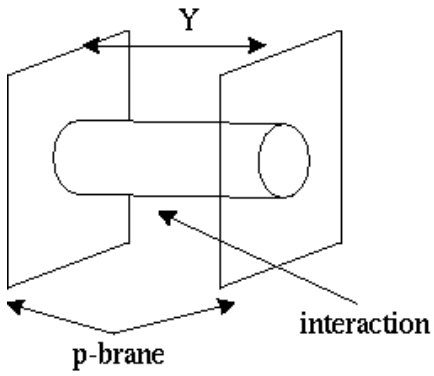


図 39: 距離 Y だけ離れた p-brane とその相互作用

を意味しています。Fig 39 の cylinder を closed string の tree だと思うわけです。一方、D-brane 的見方をすると、この cylinder を open string の 1-loop だと思うこともできます。すると振幅 A が計算できて

$$A = 2V_{p+1}\int \frac{dt}{2t}(8\pi\alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-t\frac{Y^2}{2\pi\alpha'}} \frac{-f_2^8 + f_3^8 - f_4^8}{2f_1^8} \tag{229}$$

となります。ここで $f_{i=1,2,3,4}$ は昨日定義した modular function です $-f_2^8 + f_3^8 - f_4^8 = 0$ という関係式があるので、力が働かないと言うのはこれからわかります。これを closed string の立場からの NS-NS と R-R sector の力のキャンセルという見方をしたいのですが、実は、f_2, f_3 は NS-NS sector から、f_4 は R-R sector からの寄与となっています。これより、$A = A_{NS} + A_R = 0$ と分けることができて、これの low energy limit は結果だけ書くと

$$\begin{aligned} A_{NS} = -A_R &= \frac{1}{2}V_{p+1}\int \frac{dt}{t}(2\pi t)^{-\frac{p+1}{2}}(\frac{t}{4\pi\alpha'})^4 e^{-t\frac{Y^2}{8\pi^2\alpha'}} \\ &= V_{p+1}4\pi(4\pi^2\alpha')^{3-p}G_{9-p}(Y^2) \end{aligned} \tag{230}$$

となります。ここで、G_{9-p} は 9-p 次元の massless propagator です。

結局 D-brane の持つ RR-charge は

$$\mu_p^2 = 2\pi(4\pi^2\alpha')^{3-p} \tag{231}$$

で与えられます。先程 p-brane の magnetic dual は (6-p)-brane であると言いましたが、2 つの charge をかけあわせてやると

$$\mu_p\mu_{6-p} = 2\pi n|_{n=1} \tag{232}$$

となっています。これからD-braneは単位電荷(磁価)を持っている事がわかりました。

(質問)D-braneのchargeはどうやって読み取るのですか?

(答え)(230)はstring理論の計算の結果でしたが、一方でsupergravityの立場からbulkとD-braneのworld volumeのlow energy effective actionを用いてRR sectorのゲージ場の交換による振幅を計算し、(230)と比較することによって得られます。

6 String Duality

5種類のstringがありました。type IIB、type IIA、ヘテロの$E_8 \times E_8$、ヘテロの$SO(32)$、それからtype I。皆さんもご存知のようにこれらの理論というのは実はお互いに密接な関係がある。10次元のレベルで考えらるduality変換としては例えばtype IIBのself-dualityがあります。あとゲージ群が同じで同じ超対称性を持つ二つの理論、type Iとヘテロの$SO(32)$はS双対性でお互いに関連づけられると思われています。

今回あまり議論する暇が無かったのですけども、11次元にMという理論があるということが議論されています。Mが何であるということはあまりよくわからないのですが、M理論には少なくともmembrane、つまり2-braneとそれに対するmagnetic dual、5-braneがある。supermembraneの理論に何か5-braneが入っているようなそういう理論で、これの定式化はちゃんとしたものは無いのですけども、type IIAでcoupling constantを大きくもっていくと、M理論に持ち上がります。

heterotic stringの$E_8 \times E_8$も同じです。これらは結局それぞれ11次元をS^1コンパクト化したものとS^1/Z_2でコンパクト化したものになります。

1個下の次元に行って、つまりS^1コンパクト化して9次元にしますと、T-dualityでもってtype IIAとtype IIBがお互いに移り変わってしまいます。これはT-dualと呼ばれています。2つのheterotic stringも9次元に

行くと同じになりまして、これも T-dual でお互いに移ります。

まとめるとこのような図が書けます。

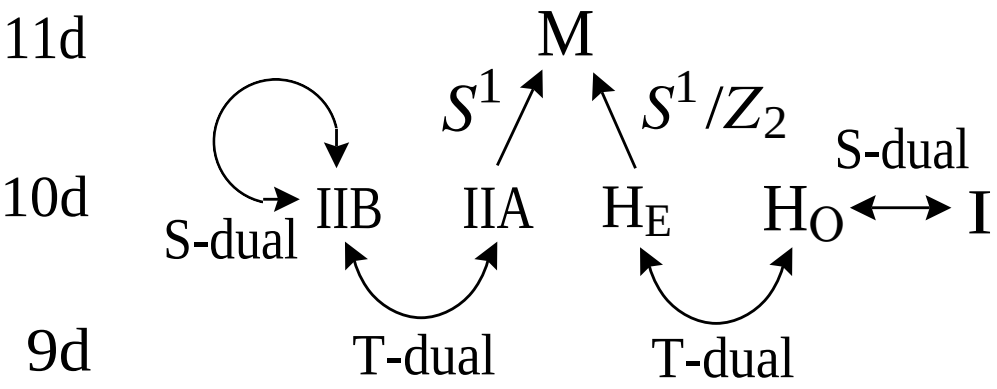


図 40: Duality map

これ有名な絵ですね。いろいろな duality があるのでりますけれども、それぞれいろいろな状況証拠があります。これらはあくまで状況証拠ですがその示すことが数学的に非自明な多くの帰着を生みますので非常に尤もらしいと考えられています。

結局いろいろ多くの string 理論と言われていることがあるわけですがそれらは皆、唯一存在されていると思われる量子重力理論のいろいろな極限で与えられると考えられています。

以下では割と簡単ないくつかの例に絞って、詳しく duality がどのようになっているのかを見ていきたいと思います。

(質問) F とかいうものの名前を聞いたことがあるのですが、どこら辺にいるのですか？

(答え) 今から IIB を議論するのですが、この辺にいます。(と言って Fig. E40 の左上隅に小さく"12　F"と書く。学生たち笑う。) 小さく書いたことに他意はないですけども...。

6.1 S-duality in IIB Superstring

最初の例として、type IIB の U-duality について考えます。type IIB というのは先程も言いましたように、NS-NS にはディラトンとグラヴィトンと $B_{\mu\nu}$ があって、R-R にはもう 1 個スカラーともう 1 個 2 階反対称テンソルと 4 階自己双対なテンソルがある。$B_{\mu\nu}$ が 2 つあって紛らわしいので、区別するために番号をつけておきます。

NS-NS	$\phi \quad G_{\mu\nu} \quad {}^{(1)}B_{\mu\nu}$
R-R	$\chi \quad {}^{(2)}B_{\mu\nu} \quad A_{\mu\nu\lambda\rho}$

今スカラー粒子が 2 個あるわけですが、一つはディラトンで string の coupling constant です。もう 1 個のスカラー場があるわけでが、これは coupling constant と関わっていると考えられます。

これらのスカラーを 1 つの複素場にまとめます。

$$\tau = \chi + ie^{-\phi} \tag{233}$$

このとき記号が示す通りに $SL(2,Z)$ の変換が存在するのではないかと考えられるわけです。つまり、

$$\tau \quad \rightarrow \quad \tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{234}$$

$$\left(\begin{array}{cc} {}^{(1)}B_{\mu\nu} & {}^{(2)}B_{\mu\nu} \end{array} \right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc} {}^{(1)}B_{\mu\nu} & {}^{(1)}B_{\mu\nu} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \tag{235}$$

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \quad \in \quad SL(2,Z) \tag{236}$$

なおこの変換に対して、$G_{\mu\nu}$ と $A_{\mu\nu\rho}$ は不変です。

先程 F とかいう話が出ていましたけども、今スカラー場が理論の中に 2 種類あってそれがあたかも 2 次元トーラスの moduli のような変換性を持っています。つまり 2 次元次元をトーラスを用いて増やしてやり、そのトーラスの moduli を τ と考える事が可能です。この次元を 2 個持ち上げて 12 次元にしてできる理論が F 理論です。M も同様に考えることができ

て、type IIA の理論に関してはスカラー粒子はディラトンしかないので、このディラトンを余分な S^1 の半径を与える moduli パラメーターと考えて 1 つ次元を持ち上げたものが M 理論となります。

今この理論には F(undamental)-string と D-string があったわけですけども、その 2 つを混ぜこぜにすることを考えます。つまり、F-string と D-string を混ぜて (p,q)-string というものを作れます。ここで (p,q) は F-string charge と D-string charge を表す整数です。その magnetic dual で (p,q)-5-brane というものも作れます。同様に (p,q)-(-1)-brane というのもありまし、(p,q)-7-brane というのも作れます。したがって、(-1),1,5,7-brane に対しては、p, q という 2 つの足を持ったソリトンが作れます。ただし 3-brane に関しては、self-dual です。これ自身が electric ですし、magnetic です。

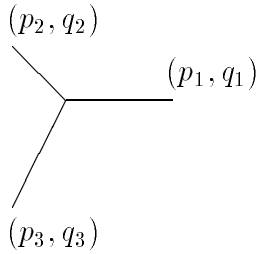
$$\left.\begin{array}{l}\text{F-string}\\ \text{D-string}\end{array}\right\} \to (p,q)\text{-string} \quad \overset{\text{magnetic dual}}{\longleftrightarrow} \quad (p,q)\text{-5-brane}$$

$$(p,q)\text{-(-1)-brane} \quad \longleftrightarrow \quad (p,q)\text{-7-brane}$$

$$(p,q)\text{-3-brane} \quad : \quad \text{self-dual}$$

3 つ又弦

昨日話した新しいオブジェクトである 3 つまた弦について話します。



$$\sum_{i=1}^{3} p_i = \sum_{i=1}^{3} q_i = 0$$

昨日話したようにこれらがそれぞれ 3-brane の上に境界を持っていまして、新しい弦理論の配置になっています。3-brane 上の場の理論として考えると string junction は 4 次元の N=2 超対称性を持つ monopole を一般化した新しいタイプのソリトンを定義していることが知られています。

6.1.1 U-duality

T^4 コンパクト化した type II string について U-duality 不変性をあからさまに説明します。type IIB と type IIA は T-duality で移り合ってしまいますので、A, B は別に指定する必要はありませんが、スペクトルを具体的に与える予定ですので、以下 IIA を考えます。10 次元ですと self-dual なのは type IIB だけだったのですけども、トーラスコンパクト化してしまうと type IIA ももちろん self-dual になるわけです。トーラスコンパクト化しますと昨日の議論で考えたモジュライ空間がありまして、モジュライは次のような coset で与えられます。

Moduli space	$G_{ij},\ B_{ij}\ (i,j=6,\ldots,9)$
Moduli	$O(4,4;Z)\backslash O(4,4)/O(4)\times O(4)$

昨日の復習をやりますと、

$$M = \Omega\Omega^t \quad (M \text{ は mass matrix}) \tag{237}$$

$$\Omega = \Omega_B\Omega_e \tag{238}$$

$$\Omega_B = \exp\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{239}$$

$$\Omega_e = \exp\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & ({}^te)^{-1} \end{pmatrix} \quad (G = e^te) \tag{240}$$

$$\Omega \in O(4,4) \tag{241}$$

$$\Omega J\Omega^t = J \tag{242}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix} \tag{243}$$

それで、fundamental string のスペクトラムはどうだったかといいますと、

$$\text{Mass}^2 = e^{\Phi}(n_i, m^j)M\begin{pmatrix} n_i \\ m^j \end{pmatrix} \tag{244}$$

だったわけです。今このような T-duality について不変な質量公式があり、さらに type II の理論というのは strong-weak の $SL(2,Z)$ も持っています。

このような理由で、この 2 つの変換に対する不変性があって、これはお互いに非可換ですのでより大きな群に対する不変性に化けます。

$$\left.\begin{array}{l} SL(2,Z) \\ O(4,4;Z) \end{array}\right\} \to O(5,5;Z) \quad : \textbf{U-duality} \tag{245}$$

このことについてもっと具体的に見てみましょう。

(質問) $SL(2,Z)$ はどう見たら良いのでしょうか？

(答え) この質量公式を見ますと、ディラトンが入ってますよね。ディラトンというのは $SL(2,Z)$ で変換するパラメータです。したがってこの mass formula も変換を受けますが、より大きな multiplet を組んだ質量公式を作ると不変性が保たれるという事になります。

Ramond-Ramond フィールドはどうなっているかというと、type IIA ですから、

R-R

$$\underbrace{C^{(0)}, C^{(2)}_{ij}, C^{(4)}_{ijkl}}_{\psi_{\alpha'}\text{: cospinor rep. of } O(4,4)} \to 8 \text{ 個の component} \quad (i,j,k,l = 6,\ldots,9) \tag{246}$$

これは全部で 8 個ある。これらは先ほど書いた Ramond-Ramond フィールドの生成消滅演算子で計算してやればいいのですけども、これは実は $\psi^{\alpha'}$ という cospinor です。

それで、いま enhancement を考えたいので、Ω を $O(5,5)$ の上に埋め込む必要があります。つまり、$\bar{\Omega}$ を先ほど書いた Ramond-Ramond フィールド、ディラトン、反対称テンソル、vielbein、この 4 つの構造を同時に入れる必要があります。今、全体でどれだけのスカラー場があるか数え上げると e と B から 16 個、ディラトンから 1 個、R-R スカラーから 8 個だから、全部で 25 個です。

e, B	$\to$	16	
dilaton	$\to$	1	
R-R scalar	$\to$	8	
$O(5,5)/O(5)\times O(5)$	$\leftarrow$	25	$=5^2$

つまり 5 の 2 乗で、これは $O(5,5)/O(5)\times O(5)$ のモジュライを持つことに対応しています。質量行列 Ω がこれらを用いてどう書けるかというと

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_\Psi \bar{\Omega}_\Phi \bar{\Omega}_B \bar{\Omega}_e \tag{247}$$

ここで dilaton と ψ については

$$\bar{\Omega}_\Phi = \left(\begin{array}{cc|c} e^{\Phi} & & \\ & e^{-\Phi} & 0 \\ \hline & & \\ 0 & & I_8 \\ & & \end{array}\right) \tag{248}$$

$$\bar{\Omega}_\psi = \left(\begin{array}{cc|cccc|cccc} & & -\psi_5 & -\psi_6 & -\psi_7 & -\psi_8 & & & & \\ \hline & & & & & & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \hline -\psi_5 & & & & & & & & & \\ -\psi_6 & & & & & & & & & \\ -\psi_7 & & & & & & & & & \\ -\psi_8 & & & & & & & & & \\ \hline & \psi_1 & & & & & & & & \\ & \psi_2 & & & & & & & & \\ & \psi_3 & & & & & & & & \\ & \psi_4 & & & & & & & & \end{array}\right) \tag{249}$$

$$\bar{\Omega}_{e,B} = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & \\ \hline & \\ & R_c(\Omega_{e,B}) \\ & \end{array}\right) \tag{250}$$

$\bar{\Omega}_{e,B}$ については、8 行 8 列のところに $\Omega_{e,B}$ をそのまま持ってくるのでは駄目で、スピノール表現を直す必要があります。ここでは表現として V、S、C があるのですけども、C を V に回す操作をしています。

チャージがいくつあるかを見てやりますと、

$$G_{i\mu} \leftrightarrow \quad \text{KK momentum} \tag{251}$$

$$B_{i\mu} \leftrightarrow \quad \text{winding number} \tag{252}$$

$$\left.\begin{matrix} C^{(2)}_{i\mu} \\ C^{(4)}_{ijk\mu} \end{matrix}\right\} \quad O(4,4) \text{ の } \mathbf{8}_s \text{ 表現} \tag{253}$$

全部で 16 個あります。これが丁度 $SO(5,5)$ のスピノール表現にはまります。

U-duality 不変な mass formula は

$$M^2 = {}^t\vec{N}(R_s(\Omega^t\Omega))\vec{N} \quad \vec{N}_\mu = \begin{pmatrix} G_\mu \\ B_\mu \\ C^{(2)}_\mu \\ C^{(4)}_\mu \end{pmatrix} \tag{254}$$

$R_s(\Omega^t\Omega)$ は $SO(5,5)$ のスピノール表現です。RR チャージが無ければ、Green-Schwarz の mass formula に一致します。モジュライの構造も全て入っています。ようするにこの mass formula が strong-weak duality、すなわちディラトンの符号をひっくり返しても全体として質量が不変に保たれてしまいます。結局本来は全く同じ系列として考えられなかった RR 場やディラトンが全て一つの multiplet にピッタリ収まってしまうことが言えます。上の公式の証明では spinor 表現をさらに cospinor 表現で書き換えると言った非自明な変換が多く含まれており、全体としてうまく言っていることはかなり大変なことと思われます。一応状況証拠という事ですがこのような非自明性により U-duality は信じられています。

6.2 $K3$ コンパクト化

次に $K3$ を考えたいのですけども、あまり取っつきやすい空間ではありません。$K3$ については、いくつか記述の仕方があって、

(A) orbifold

(B) 代数曲面

(C) elliptic fibration

とあるのですが、ここでは (A) の orbifold についてだけ述べます。

$K3$ を orbifold で記述する方法はいくつかあるのですけども、いずれにしてもモジュライ空間の特殊な点で議論することになります。一つの例は、ひもの理論が 4 次元のトーラスを Z_2 で割ったものの上に住んでいる場合です。つまりトーラスの座標を (z_1, z_2) とすると、

$$Z_2 : (z_1, z_2) \sim (-z_1, -z_2) \tag{255}$$

という同一視をします。fixed point は 16 個あります。CFT を作るときには、昨日議論したように untwisted sector があって、twisted sector が 16 個ある理論を考えます。

$$\text{CFT} \cdots \begin{cases} \text{untwisted sector} \\ \text{twisted sector (16 個)} \end{cases}$$

orbifold というのは、例えば 2 次元面を Z_2 で割るとすると、すなわちこういう空間の対角線を同一視しなさいというわけですから、これを折り曲げれば半分になって、原点でくるっと巻いてしまうことができます。そうすると、とんがった空間ができますが、ここに singularity があるわけです。話を戻せば、そういう点が 16 個あるということです。

特に原点の周りで議論したいのですけども、トーラスの座標は原点の周りでは、Z_2 によって変更を受けますので、Z_2 によって変更を受けない座標に移ったほうが便利です。具体的には次の 3 変数 (u, v, w) を導入するわけですが、u, v, w は独立ではありません。

Z_2 不変な座標系

$$(u, v, w) = (z_1 z_2, {z_1}^2, {z_2}^2) \quad u^2 = vw \tag{256}$$

さらに v, w を次の式を満たすように変換してやり、v', w' を新しい変数

と考えます。

$$u^2 + v'^2 + w'^2 = 0 \tag{257}$$

このように書くと 2 次元球面がつぶれた極限が現れているということがわかります。$K3$ 空間というのはこの singular な部分を blow-up という作業でもって滑らかにするということをすることによって得られます。何をするのかといいますと、このつぶれた球に対して、有限体積を与えてやります。つまり、式 (257) の右辺の 0 を $a^2(a \neq 0)$ で置き換えると、特異点が滑らかになって 2 次元球面が現れます。この場合の特異点を数学の言葉で A_1 型の特異点と呼びます。

一般には Z_N orbifold を考えます。Z_2 の場合を次のように一般化します。

$$\begin{aligned}
z_1 &\rightarrow \omega z_1 && (258)\\
z_2 &\rightarrow \omega^{-1} z_2 && (259)\\
\omega &= e^{\frac{2\pi i}{N}} && (260)\\
&\Rightarrow u^N = vw && (261)\\
&\rightarrow \prod_{i=1}^{N}(u - a_i) = vw = -\tilde{v}^2 - \tilde{w}^2 && (262)
\end{aligned}$$

最後の矢印は blow-up を示しています。その 2 つのパラメーター a_i と a_j が同じ場合には、A_1 型の singularity となります。

一般に z_1, z_2 があって、discrete 群で割ろうとするときには、$SU(2)$ の discrete 部分群なら可能です。この discrete 群というのは、A-D-E で分類されていて、Dynkin 図に対応していることが面白いところです。

discrete subgroup of $SU(2)$	$\leftrightarrow$	singularity の分類	$\leftrightarrow$	Dynkin diagram

これは複素 2 次元の場合だから言えることで、これより空間の次元が大きくなると特異点の分類は良く分かっていません。

$K3$ のコホモロジー群

$K3$ のコホモロジー群というのは、要するに $K3$ 上で定義されている harmonic form のことです。$K3$ の上で考えるのは、難しいのでまずトーラスの上で考えます。そして、トーラス上の harmonic form の中で、Z_2 で割ったときに不変なものをとってくれば良いことがわかります。具体的には、

$$
\begin{aligned}
&1 \\
&dz_1 \wedge dz_2,\ d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2,\ dz_i \wedge d\bar{z}_j (i,j=1,2) \\
&dz_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_2
\end{aligned}
$$

これで話が尽きているわけではなくて、先程の blow-up でも言いましたけども、１６個の特異点のところで 2-cycle が blow-up パラメータを持っていますのでそこからつくられる 2-form があります。

$$
da_i \wedge d\bar{a}_i \quad (i=1,\ldots,16)
$$

これを $K3$ の場合に全部カウントしてやりますと、有名な $K3$ のコホモロジー群が出てきます。

$$
\begin{pmatrix}
 & & 1 & & \\
 & 0 & & 0 & \\
1 & & 20 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & \\
 & & 1 & &
\end{pmatrix}
= \dim
\begin{pmatrix}
 & & H^{00} & & \\
 & H^{10} & & H^{01} & \\
H^{20} & & H^{11} & & H^{02} \\
 & H^{10} & & H^{01} & \\
 & & H^{00} & &
\end{pmatrix}
\qquad (263)
$$

このコホモロジーの意味を duality の立場でもう一度考えてみます。type II 理論でいろいろ brane が出てきましたが、例えばそれらが巻きつくことができる 2 次元球面が何個 $K3$ の中に住んでいるかということをこの図は記述しています。その巻きついている cycle がつぶれると、brane の表面積がゼロになるため、massless 粒子が出てきます。幾何学的には $K3$ のモジュライ空間というのは、

$$
SO(19,3;Z)\backslash SO(19,3)/SO(19)\times SO(3)\times R^{+}
$$

という構造を持っています。これをどういうふうに見るかといいますと、harmonic form が全部で 22 個なので、$H^2(K3,Z)$ が 22 次元 lattice を定義しています。外積を次のように定義できます。

$$< \alpha, \beta >= \int_{K3} \alpha \wedge \beta \tag{264}$$

これは交差数と呼ばれます。SO 群の $(19,3)$ は 19 個が正のノルム、3 個が負のノルムを持っているという状況に対応しています。これを string 理論に対応させようと思うと、実はこれだけでは話が閉じません。string 理論には $B_{\mu\nu}$ という場がありますから、モジュライ空間が

$$SO(20,4;Z)\backslash SO(20,4)/SO(20)\times SO(4)$$

に持ち上がります。

このモジュライ空間は先程の例と少し違っています。というのは、先程は $(5,5$ で) 正負の固有値の数が同じだったのですけども、今度は 16 だけずれています。１６次元の差は実は heterotic string の１６次元の余分なボソンの自由度を記述しています。つまり heterotic string というのは、left mover が bodonic で 26 次元、right mover が supersymmetric で 10 次元で、left の方に次元が 16 個余っています。heterotic string を T^4 コンパクト化しますと、両方から 4 ずつ引き出してくるので、昨日の議論と全く同じで、left mover に関して 20 次元、right mover に関して 4 次元なわけです。したがって、このモジュライ空間というのは heterotic string を T^4 コンパクト化した場合と全く同じになっている。よって、次の duality が成立していると考えられています。

$$\boxed{\mathrm{IIA}/K3 = \mathrm{Het}/T^4}$$

6.3 Hilbert scheme

最後に、Hilbert scheme について述べます。ここで言っている Hilbet scheme というのは、数学的に突っ込まれると困るのですが、ここでは単

に matrix theory のモジュライ空間と考えてください。先ほどからターゲットスペースが 4 次元の場合を考えているのですが、singularity の分類が、4 次元の場合ですと、Dynkin 図による ADE 分類によって数学的に非常によくわかっているということに対応して、matrix theory のモジュライに関してもやはり matrix の住んでいる次元が 4 である場合を考えると非常に好都合な現象が起こります。想定するのは、$p+4$-brane 上に p-brane がばらまかれている状況で、これを記述する matrix model の運動方程式は、

$$[B_1, B_2] = 0 \tag{265}$$

B_1, B_2 は複素行列です。matrix theory というのは、要するに Yang-Mills の理論なので運動方程式 (というよりはそれよりさらにきつい条件を与えている self-dual 方程式ですが) は $F_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}F_{kl}$ です。いま IKKT を 4 次元に reduce したような模型を考えていますので微分が全部落ちています。

(質問)B_1, B_2 の具体的な形は？

(答え) 例えば 4 次元を $X_1 \sim X_4$ で記述した場合、このようになります。

$$B_1 = X_1 + iX_2 \tag{266}$$

$$B_2 = X_3 + iX_4 \tag{267}$$

この complex の行列で、方程式 (265) を満たすときの固有値がどうなっているかと言いますと、B_1, B_2 の固有値が全て異なる場合には、

Jordan 標準形

$$B_1 = \begin{pmatrix} z_1 & & & \\ & z_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_N \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_N \end{pmatrix} \tag{268}$$

(z_i, w_i) は i 番目の p-brane の座標です。これは非常にスタンダードな話で、matrix theory では普通このように話を持っていきます。もっと面白

い例は、いくつかの p-brane が一点につぶれる場合です。特に $(z_i, w_i) = 0$ という場合を考えます。このとき交換する行列の表示は

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & \cdots & a_{N-1} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{269}$$

となり、$a_1 \sim a_{N-1}$ という余計な自由度が入ります。これらのパラメーターは先程 $K3$ の singularity の blow-up の例に出てきた blow up のパラメーターに相当するものです。ここで考えている orbifold は complex 2 次元の空間 $(C^2)^N$ を置換群 S_N で割ったものです。orbifold の特異点は固有値が同じ場合に現れます。つまり固有値が D-brane の位置を表していますので、S_N は D-brane 同士が入れ替わっても変わらないという状況を意味します。二つの点が縮退していると S_N の変換が trivial になり特異点が現れてしまいます。

C^2 の上に 0-brane が入っている場合のモジュライ空間の生成関数は、

$$\oplus_n q^n [(C^2)^n / S_n] \tag{270}$$

これのホモロジー群は Poincaré 多項式を用いてまとめ直してやると、

$$\oplus_n q^n P_w[(C^2)^n / S_n] = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n w^{2n-2}} \quad (\text{Gö}) \tag{271}$$

$$P_w(X) = \sum_n \dim(H_n(X)) w^n \quad (\text{Poincaré 多項式}) \tag{272}$$

今 C^2 という割と trivial な空間を考えていたのですけど、一般の complex 2 次元の場合

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + q^n w^{2n-1})^{b_1} (1 + q^n w^{2n+1})^{b_3}}{(1 - q^n w^{2n-2})^{b_0} (1 - q^n w^{2n})^{b_2} (1 - q^n w^{2n+2})^{b_4}} \tag{273}$$

b_i は complex2 次元多様体の betti 数です。この公式はブラックホールのエントロピーの計算などに本質的に使われています。

自由場の記述で始まった私の夏の学校の講義でしたが、最後に出てきた式も結局自由場の分配関数になってしまいました。最後に出てきた自由

場の解釈はまだ良く分かっていませんが個人的には非常に関心を持っております。

以上で夏の学校の講義終わります。

7　後記

最初私は行列模型についての講義をすることを想定して準備を始めたわけですが、それで本当に主要な聴衆であると思われる M1 の皆さんに分かって戴けるのであろうかという事をいろいろ迷った挙げ句、M2 以上の人はどなたでも知っているような基礎的なものを取り扱う講義にしてしまいました。ただし共形場理論を使う記述を中心に据えてできるだけ見通しの良い説明を与えようとはしたつもりです。この点についてはいろいろ非難もあるかとは思います。個人的な意見としては、もし M1 を対象にするものであれば夏の学校の講義は各専門で一つの講義だけではなく基本的なものを扱う講義とより進んだ話題を扱う講義の数種類がどうしても必要ではないかと感じております。逆に M2 以上を対象とするのであれば今の夏の学校の性格を多少変えた方が良いのではないかとも思えます。

この講義録を LaTeX ファイルにおこして戴いた阪大の学生の皆さんは大変な作業だったと思います。感謝にたえません。

最後にこの講義を組み立てる上で参考にした文献をあげます。この講義は元々非常に基礎的なものを中心にしていますのでどうしてもどこかで見たような記述が出てしまいます。なおこの講義の後、Polchinski の 2 分冊が出ました。今となってはそれを読むのが一番手っ取り早いと思います。

参考文献

[1] J. A. Harvey, "Magnetic monopoles, duality and supersymmetry", hep-th/9603086.

[2] P. Ginsparg, "Applied Conformal Field Theory", Les Houche lecture, 1990

[3] J. Polchinski, "TASI Lectures on D-brane", hep-th/9611050.

[4] C. Vafa, "Lectures on Strings and Dualities", hep-th/9702201.

[5] T. Banks, "Matrix Theory", hep-th/9710231.