2000年 三者若手夏の学校 講義録
於 ： パノラマランド木島平

素粒子論パート 弦理論

「超弦理論とゲージ理論」
（AdS/CFT 対応入門）

講師 : 国友 浩 氏 （基研）

2000年 7月 25(火) 〜 26日 (水)

講義録作成 : 新潟大学

村田 享香　石掛 真人　澤中 英之

0　はじめに

おはようございます。基研から来ました国友と言います。世話人の方から依頼を受けたお話は「超弦理論とゲージ理論」というタイトルですが、中身は、いわゆる AdS/CFT 対応というある種の duality についての入門です。AdS/CFT と世間で呼ばれているものがどういうものかということを理解することを最終目的としたいと思います。

それで、どういうレベルの人を対象にやったらいいかということを自分が夏の学校に来ていた頃のことを思い出しながらつらつら考えたのですが、M1 の人にもわかるような易しい話をしようと思います。最後まであまり新しい話は出てこないと思いますので、その辺のことを良く知っているドクターコースとか PD の人は寝ててもらって結構です。

referance

- review　[1] Aharang, Gubser, Maldacena, Ooguri, Oz, hep-th/9905111
- original　[2] Maldacena, hep-th/9711200
  [3] Gubser, Klebahov, Polylakov, hep-th/9802109
  [4] Witten, hep-th/9802150

まず、話の中に入る前に referance を挙げておきます。referance は順不同でいろいろ途中にも入りますが、この AdS/CFT 対応に関して非常に詳しい Reveiw があります [1]。1 年くらい前のやつなんですが、その当時のことに関しては非常に詳しく書いてある。読みやすいです。興味のある人は是非読んでみてください。ただし、1 年くらい前ですからその後多少進展があるので、それに関してはもしこの講義の最後に触れることができればやりたいと思います。これは非常に長い論文で、ページ数にして 261 ページある。これを読むのは大変だという人は、いくつか短い、いろんな人が summer school やら winter school やら workshop やらで話したものがあるので、もし興味のある方はあとで聞きに来てください。一応 original で挙げておかなければいけない論文もいくつか挙げておきます。最初にこういうことを言い出したのは Maldacena [2]、もう 3 年前、97 年の 11 月ですね。これは、まぁ対応がありそうだということを言ったのですが、それからその直後に 2 つ出て、これはもうちょっと具体的な話をした [3] , [4]。だいたいこれくらいで、各 subject 毎にいろいろ reference はあるので、それは気が付いたところで入れていきたいと思います。

それで、M1 の夏というと前提になる知識が少ないので、どんなふうに話そうかと思ったのですが、一応、方向性は見失わないように最初に講義の目次を書いておきます。

Contents

§ 1.　Introduction
§ 2.　D-brane と Black-brane
§ 3.　$\mathrm{AdS}_5/\mathrm{CFT}_4$ 対応
§ 4.　共形対称性と AdS 空間の isometry
§ 5.　$\mathcal{N} < 4$ への試み
§ 6.　Maldacena limit を越えて

§1. 一応まず、背景というか Introduction。

§2. それから、AdS/CFT 対応というのは最初 string の duality だとか D-brane だとか、そういう発展の流れから発見されたのですが、この話をするためにはどうしても D-brane とは何かということを知らないとだめなので、それについてちょっとお話をします。それとある種の dual になっている Black-brane、dual というか、違う parameter 領域というか、違う記述の仕方。

§3. それからやっと AdS/CFT 対応。AdS/CFT 対応というのは本当はもうちょっと一般的な話なんですが、今回は我々に非常になじみ深い 4 次元の場の理論に関係した 4 次元の CFT、CFT というのはこの場合は gauge 理論のことなんですが、4 次元の gauge 理論と 5 次元の string 理論との関係についてお話ししたいと思います。

§4. それから、4 次元の conformal 対称性だとか、5 次元の anti-de Sitter(AdS) 空間と呼ばれているものをもうちょっと具体的にわかりやすく解説します。ここでは、conformal 対称性と AdS 空間について少し見ることにして、対応がどういうふうに出てくるかというお話をします。実は、対応というのは対称性どうしの対応ということで、4 次元の conformal symmetry と 5 次元の AdS 空間の isometry の対応です。isometry というのは、metric を変えないような対称性ですね。普通の Euclid 空間で言えば rotation だとか並進対称性。あるいは球面でいえば回転対称性に対応する、そういう AdS 空間のもつ対称性について議論します。

§5. それから、この辺の話はいわゆる conformal field theory というか、対称性の非常に高い、4 次元の $\mathcal{N}=4$ の super Yang-Mills theory に関係しているんですが、我々の世界は超対称性というのは破れているわけで、そういうのに実際に具体的に近づけていくためにはどういう試みがあるかというのをちょっと紹介したいと思います。

§6. それから、もうこれは書いておくだけにしますが、もし明日講義がここまで進めば意味はそのときにお話ししたいと思います。

ノートが結構あるのでちょっと心配してるんですが、あんまりスピードアップしてわからない講義になるよりは、途中までで終わってしまってもしょうがないから、わかるように話していきたいと思います。

1 Introduction

いきなり string と言い出すと、まだ M1 の人にはピンとこない部分もあると思いますが、string というのは非常に歴史は長くて、最初はいわゆる強い相互作用の理論として出てきたんです。強い相互作用を記述する string のことを例えばここでは QCD string と呼ぶことにします。つまりこれは非常に古い、今の superstring の一世代前の理論と言うべきですが、古い duality の実現の一つ。どこまで実現と呼べるかはこれから議論したいのですが、それはどういう意味かというのをちょっと考えてみます。

QCD string

QCD というのは、標準理論では gauge 理論として記述されることが今ではわかっている。但し、gauge 理論というのは (少なくとも我々の知識では) 非常に良くわかっているのは weak coupling の描像なんです。もちろん strong coupling でも lattice gauge theory などを通じてある程度の構造はわかるんですが、いわゆる粒子が相互作用している描像というのは weak coupling の描像になってる。通常の QCD の場合は coupling というのは constant ではなくて energy scale によって変わりますから、weak coupling というのは実際の QCD の現象でいうと非常に energy の高い領域の話。つまり例えば加速器なんかで非常に高エネルギーで粒子をぶつけると、実際の elementary な相互作用が weak coupling で起こる。それで、weak coupling ではいわゆる perturbative な QCD というのがいい描像になっている。perturbative な QCD では quark とか gluon が elementary な自由度になっています。

それで、良く知られている Feynman graph なんかを使って elementary な process が計算される。例えば (図 1) のようなものです。

ところが、これは coupling constant による展開になっていますから、coupling constant が非常に大きくなってくると、こういう展開では近似が悪くなってくるわけですね。近似が悪くなってくるというのは、quark が単体で飛んでいて、それに gluon が couple して、とかいう描像はもはや成り立たなくなっているということ。もうこの辺に gluon がぐちゃぐちゃっと飛んで、quark なんていうのは単体では取り出せなくなって、そういう quark を fundamental とする particle picture が破綻をきたしてくるわけです。coupling が大きくなったところでは quark とか gluon を基本的と思った計算ができないとなると、じゃあどうしたらいいか。もちろん、lattice QCD だとか具体的に計算する方法は編み出されたわけですが、それ以外に古くから、いわゆる duality という考え方がありました。そういう coupling が強い領域では quark とか gluon とかを fundamental な自由度とするのではなくて、例えば meson だとか baryon だとか、そう言うものを fundamental な自由度として perturbation をやり直しましょう、という発想です。ここではもうちょっと、その dual な picture というのが何者かというのを考えたいんですが、't Hooft という人が、実は strong coupling では string が fundamental な自由度になってるということを言いました。ここで strong coupling の領域というのは、QCD でいくと非常に低エネルギーです。

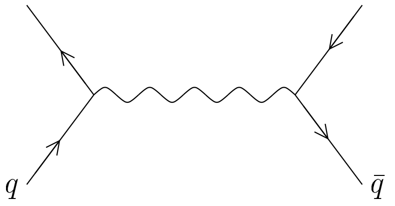


図 1:

high energy とか low energy とか言うときには何に比べてと言わないといけないんですが、QCD にもあるスケールが dynamical に出てきまして、それが 100 Mev くらいです。だから、100 Mev に比べて非常に energy が高いか低いかで話は変わってきます。

QCD string　～　an old duality

- weak coupling　$g_{\mathrm{YM}}^2 \ll 1$　(High Energy)

$$\begin{cases}\text{perturbative QCD} \\ \text{自由度: quark、gluon}\end{cases}$$

$\Updownarrow$ dual picture

- strong coupling　$g_{\mathrm{YM}}^2 \gg 1$　(Low Energy)

自由度: (QCD) string

この QCD string というのは、普通の QCD の場合は、例えば Wilson loop という形で抽出されると思っています。これはだいたい gauge 理論の operator で書くと、ある空間の中の c という path の汎関数で、具体的には gauge 場を path に沿って path ordering して exponentiate したものを最終的に trace をとる、そんな operetor です。

$$\text{Wilson loop}_{\ (c)} \sim \mathrm{tr}\, P \exp\left(i \oint_c A_\mu dx^\mu\right)$$

これがちょっとピンとこない人は、良くブルーバックスなんかにも書かれているような picture を想像してもらっても結構です。quark と anti-quark があって、その間に gluon のひもがあって、ギュッと flux が絞られている。これが相対してひもみたいな自由度になっていると。

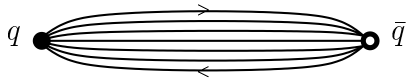


図 2: quark と anti-quark の間の gluon flux

実際そういう描像は、QCD の meson の振る舞い、spectrum が Regge 構造と呼ばれる mass と spin の間の線形の構造を良く再現するということが知られています (ここではあまり詳しい証明とかはできないんですが)。しかし、string 理論は anomaly と呼ばれるある種の量子論的な異常が起きて、実は 26 次元だとか 10 次元だとか、高次元でないと定義できないということが出てきて、あるところから先へは進めなくなってしまいました。ただし、copling が強いところでは quark、gluon が基本的な自由度ではなくて、string みたいなひも的なものが基本的だという発想はある程度まで正当化されます。しかしそれは後でやるような string 理論ではない。

more concrete realization: Large N gauge theory

実は、こういった発想をきちんと定式化した人がします。それが 't Hooft さんで、去年ノーベル賞をもらいましたが、それについてもうちょっと詳しく考えてみます。それが実は後の話につながっていくので、具体的に見てみましょう。

もうちょっと詳しい具体的な実現というのは、Large N gauge theory です。これは gauge 群が $U(N)$ ($SU(N)$ でもいいですが、簡単のために $U(N)$ にしておいて) の Yang-Mills 理論で、matter もあってもいいんですが、一応ここでは matter は全部 adjoint 表現とします。後で僕の講義の中心となる $\mathcal{N}=4$ の supersymmetry をもった Yang-Mills 理論というのは matter は 全て adjoint 表現で入っているので、この範疇に入っています。

$$U(N) \text{ Yang-Mills 理論} \quad (\text{ with adjoint matter })$$

基本的なアイデアは、 gauge 群の $U(N)$ (実際の QCD は $SU(3)$ ですが) の N を一般にしておいて大きくしましょう、という発想です。実は Yang-Mills 理論の場合は coupling constant は energy とともに running してしまいます。言い換えると coupling constant がちゃんとした展開係数、いわゆる dimensionless のうまい展開係数になっていません。dimensionless の coupling は Λ_{QCD} という dimension をもった scale に焼き直されてしまうので、なんかうまい展開係数はないかっていうのが問題でした。ここでは $U(N)$ というのは単なる数字をもってきて、この N でもって展開してやります。それで N を大きくとりたいんですが、ただ単に N を大きくとるといっただけでは、理論はあまり定義されていなくて、どのように大きくとるか、というのが問題になります。どのようにというのは、何を固定して N を無限大にとるか。それについてちょっと考えたいと思います。

$$\text{どのように(何を fix して)} \ N \to \infty \ ?$$

今言ったように QCD の特徴というのは coupling constant が energy とともに変化する、あるいは scale とともに変化するということですが、そういう性質を保持したまま N 無限大をとりたいわけです。それには、QCD の 1-loop の β 関数を考えます。これは scale によって Yang-Mills の coupling がどういうふうに変化していくか、というのを決める方程式なんですが、こういう形になります

$$\mu \frac{dg_{\text{YM}}}{d\mu} = -\frac{11}{3} N \frac{g_{\text{YM}}^3}{16\pi^2} \qquad (\text{pure Yang-Mills}) \ . \tag{1}$$

これプラス coupling の higher order の項がありますが、それは無視して、N というのはここに出てきます。これはいわゆる gauge 群の 2 次の Casimir operetor から来ているので、matter に adjoint が入っていても Casimir operetor は N ですから、係数が多少変るだけで N depencence については本質的には変りません。この式が、Yang-Mills の coupling constant が energy μ にしたがってどういうふうに変化しているかというのを決めているわけですから、この scaling を変えないように large N をとればいい。そうすれば、すぐにわかりますが、単に N を無限大にとるんじゃなくって $\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N$ を fix して N を無限大にとればいいということがわかります。

$$\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N \quad \text{を fix して} \ N \to \infty$$

(1) 式の左辺はだいたい g の 1 次で、両辺を g で割るようなことを考えると、$Ng_{\rm YM}^2$ が出てきますから、そいつを固定して N を無限大にする。要するに bare な、N をかけない coupling constant g を 0 の方 (高 energy 側へ) scale させているわけです。こういう極限をとらなくちゃいけないことがわかります。このことを 't Hooft さんにちなんで 't Hooft coupling と呼ぶことにします。

$$\text{'t Hooft coupling :} \qquad \lambda \equiv g_{\rm YM}^2 N$$

それで、perturbative な領域 (coupling が弱いところ) で、この λ dependence がどういうふうに出てくるかというのを count してみることにします。't Hooft coupling が非常に小さくて、但し N は非常に大きい、そういう領域で perturbative な展開を考えます ($\lambda \ll 1\ ,\ N \gg 1$)。だいたい Lagrangian を schematic に書くと

$$\mathcal{L} \sim {\rm Tr}\,(\Phi_i\Phi_i) + g_{\rm YM}c^{ijk}{\rm Tr}\,(\Phi_i\Phi_j\Phi_k) + g_{\rm YM}^2 d^{ijkl}{\rm Tr}\,(\Phi_i\Phi_j\Phi_k\Phi_l)\ .$$

ここで、Φ と書いたら、gauge 場だとか、adjoint の matter、scalar だとか、fermion だとか、いろんな場をすべてひっくるめて書いたものだと思ってください。1 項目はだいたい kinetic term のつもりです。微分があったり、mass がかかっていたり、そういうところ。今見たいのは coupling constant dependence ですから、2 次の項の係数を 1 に normalize しておくと、3 次の項が Yang-Mills coupling の 1 乗に比例していて c_{ijk} は適当な定数です。それから Yang-Mills coupling の 2 乗の項がある。重要なのは Yang-Mills 理論で gauge 場と adjoint の matter だけが入っているような場合は、だいたい場の 2 次のところを kinetic term として係数 1 に normalize しておくと、必ず 3 次のところが Yang-Mills coupling の 1 乗に比例していて、4 次のところは Yang-Mills coupling の 2 乗に比例するということ。gauge 不変性からそういう要請が決まってしまうということが重要です。しかしこれだとこれからの count がやりにくいので、coupling constant に比例する分だけちょっと rescale してやります。

$$\text{rescale :} \quad \tilde{\Phi}_i = g_{\rm YM}\Phi_i$$

そうすると、ちょうど Yang-Mills の coupling constant を全体にくくり出して、

$$\mathcal{L} \sim \frac{1}{g_{\rm YM}^2}\Big[{\rm Tr}\,(\Phi_i\Phi_i) + c^{ijk}{\rm Tr}\,(\Phi_i\Phi_j\Phi_k) + d^{ijkl}{\rm Tr}\,(\Phi_i\Phi_j\Phi_k\Phi_l)\Big] \tag{2}$$

と書けます。さっき言ったように、$g_{\rm YM}$ に N を掛けた λ という 't Hooft coupling と N をパラメータと思いたいですから、この coupling を $1/g_{\rm YM}^2 = N/\lambda$ と書いておきます。

それで、これからいろいろな Feynman グラフの λ-dependence とか N-dependence についてちょっと考えてみます。但し、ちゃんとした Feynman rule を書くのは大変ですから、λ-dependence とか N-dependence だけに注目して、後の具体的な $1/p^2$ とかいう形の propagator は無視するとします (あるいは、(2) 式でいわゆる 0 volume limit というのをとってもいいんですが)。

Feynmann rule を schematic に書くと、次のようになります。

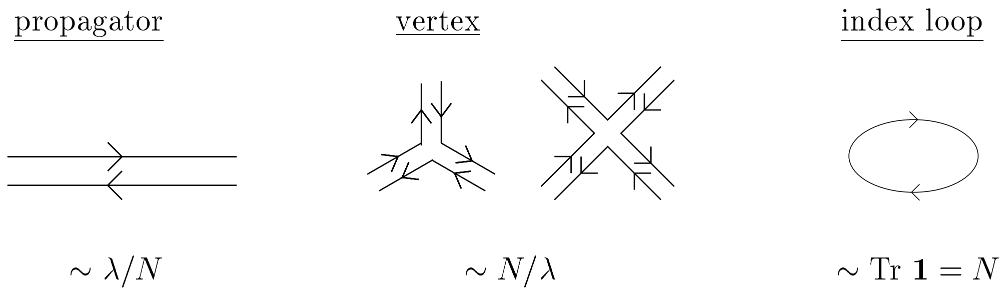


図 3: Feynmann rule

propagator はこういう二重線で表わされます。これは $U(N)$ の行列になっていて、2 本足ですから、そのひとつひとつの足を 2 本の線で書くとします。それから propagator は Lagrangian の 2 次の項の inverse ですから、coupling dependence はこれ分の 1 ですね。だから λ/N。それから vertex には 3 次の相互作用と 4 次の相互作用があって、order は係数がそのまま出てきますから、coupling dependence は N/λ。それから、二重線は matrix の足がどのようにつぶされていくかを記述しているんですが、これが一周して loop をつくると、それは最終的には $\mathbf{1}$ の trace になってきますから、これは $U(N)$ の行列ですと N となります。

これでちょっといろんなグラフの coupling dependence を estimate してみましょう。簡単のために vacuum グラフを考えます。vertex の数が V、propagator の数が E、index loop の数が F とします。

$$\text{vacuum `Feynman' graph} \quad \text{with} \begin{cases} \#\ \text{vertex} = \mathrm{V} \\ \#\ \text{propagator} = \mathrm{E} \\ \#\ \text{loop} = \mathrm{F} \end{cases}$$

これはこういう dependence

$$\sim \left(\frac{N}{\lambda}\right)^V \left(\frac{\lambda}{N}\right)^E N^F \;=\; N^{V-E+F}\lambda^{E-V} \tag{3}$$

をもちます。これをえいやって見てやると、N の次数の部分 $V-E+F$ は、グラフの Euler 数になっています。Euler 数というのは、「頂点の数」引く「辺の数」足す「面の数」。

$$\text{Euler 数} : \quad \chi \equiv V - E + F$$

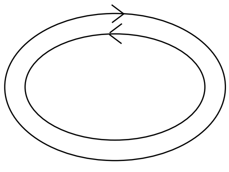


図 4: loop graph

これから、もうちょっと具体的に絵を描いて考えます。N の dependence は Euler 数を巾にしたようなもので、それに coupling の correction がつく。例えば、こんなループグラフ (図 4) を考えると、この絵を見ただけだと propagator を使っているように見えるんですが、実は propagator は使ってなくて、loop の数は 2 個。だからこいつの dependence は N^2。それで、2 というのが Euler

数だといいましたが、Euler 数はどう見るかというと、このグラフは球面の上にこう張り付いている。といいますか、loop の内側にシャボン玉で膜を張るとこれは球面に張り付く (図 5:a,b)。球面の Euler 数は 2 ですから、そういう関係です。

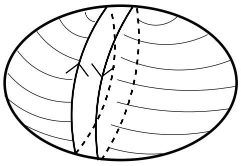


図 5: a

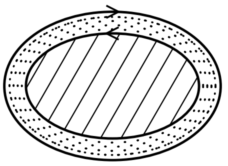


図 5: b

それから、もうちょっと普通のグラフを書いてやると、例えば (図 6) のグラフでは vertex を 2 回使っている。それから propagator は 3 個、loop も (F というのは face という意味) 3 個。そうすると、こいつの dependence は $N^2\lambda$ 。これもみて分かるように球面の上にかぶせられるわけですね。あるいは loop の間に膜を張ってやると、できる曲面は球面になる。それから例えば図 7 もつらつらと count してやると $N^2\lambda$。あるいは図 8。これは $N^2\lambda^2$。ここまでは全部 loop の間に膜を張ると球面になっているようなものです。こういうグラフを planar グラフといいます。これは Euler 数が一番大きい 2 のやつで、N を無限大にとばしてやると、こういうグラフだけが生き残ります。だから、こういうグラフが $1/N$ 展開の leading order になっています。

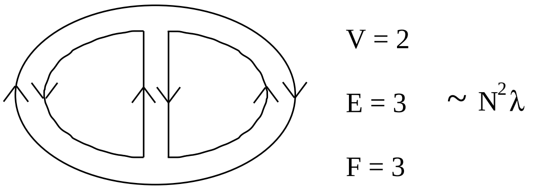


図 6: 3-loop graph a

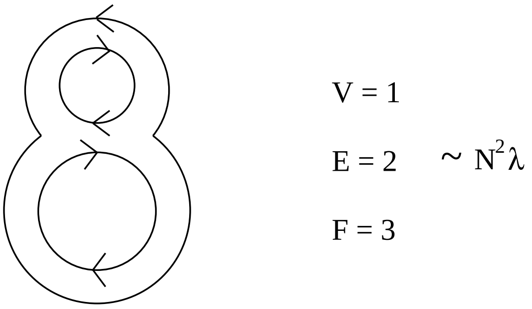


図 7: 3-loop graph b

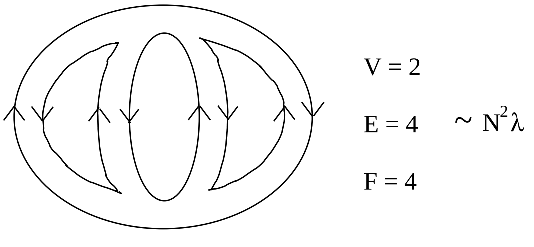


図 8: 4-loop graph

それから non-planar の例をいくつか書いておきます。図 9-a は propagator が 3 個、vertex は 2 個、但し index loop の数は捻れたりしているのでちょっと変わっていて、実は loop は一筆書で全部書けるので 1 個になっています。するとこれは N の 0 乗。これは見て分かるように、dependence が N^2 のときは N を大きくしたら非常に大きくなるのに比べて、こっちは N^0 だから N を大きくしても constant のまま。だから leading に比べてちょっと小さい寄与になっています。それからもう一つ、例えば図 9-b のようなグラフもつらつら計算してやると、N の 0 乗ですね。

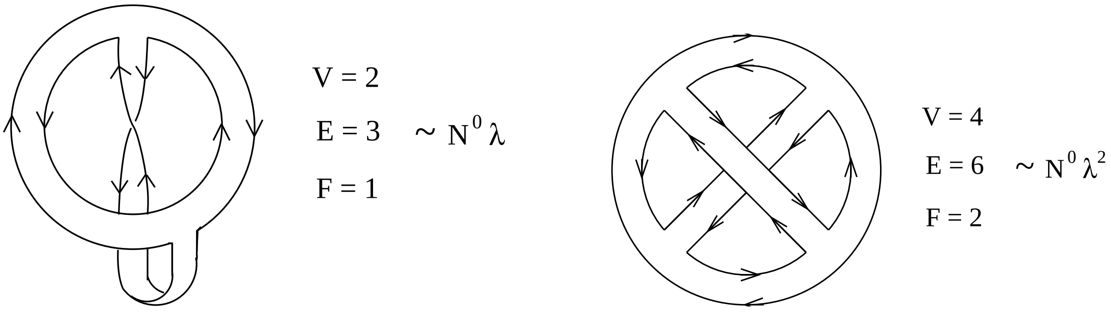


図 9-a 図 9-b

図 9: non-planar graph

本当はもちろんこれに momentum dependence やら何やらありますから、それほど単純な話ではないですが、この coupling constant dependece に関してはこういうふうに estimate してやることができる。つまり N 無限大の極限を考えるときは、planer グラフのみを評価してやれば良いことになります。

もっと一般のグラフ、例えば amplitude や partition function などは、こういうのの展開したものを全部足しあげたやつで、double expansion になっている。例えば partition function は、

$$Z \sim \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} \sum_{n=0}^{\infty} C_{g,n} \lambda^n \left(= \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} f_g(\lambda) \right) . \tag{4}$$

partition function だと外線がありませんから、これは今までやってきたような閉じた Feynmann グラフが対応するんですが、それは Euler 数の言葉で言うと閉じた閉曲面、あ、閉じた閉曲面だと「雪なだれ」ですが・・・、閉曲面の Euler 数になっていて、それは良く知られているように 2 づつ減っていきます。穴の数を g と置くと、例えば球面っていうのは穴のないやつで g が 0 に対応しています。Euler 数が 2。

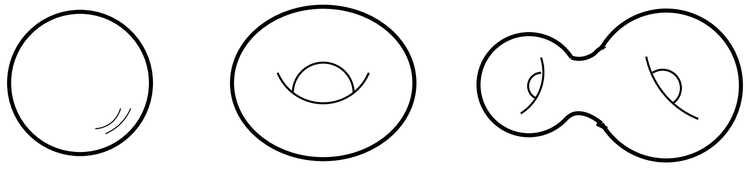
$$\text{閉曲面の Euler 数 :} \quad \begin{aligned} &\chi = 2 - 2g \\ &g = \# \text{ genus} \end{aligned}$$

図 9-a の場合は、こいつのループに膜を張ってやると、実はトーラスになっています。これは浮き輪で穴が 1 個ありますから g が 1 で、Euler 数は 0。更にここには出てきませんでしたが、穴が 2 個あると g が 2 だから Euler 数が -2、・・・。ですから N の展開は、その g の数、つまり Euler 数の代りに g を書いて g が 0 から無限大まで足す。それから、この weak coupling の region では、λ の正巾の展開ですね。n は巾乗です。なんか index みたいなやつかな。ここで、本当に N を無限大に持っていくと、はじめの sum では g が 0 のところだけが残りますが、残りの部分がある種の関数 $f(\lambda)$ になったとします[*]。つまり、この関数を $\lambda = 0$ の周りで Taylor 展開したものの各巾毎の係数 $C_{g,n}$ が摂動論から計

---

[*] これが足し上がるかというが微妙な問題で、実際には足し上がらなかったり、或は足し上がっても、何か変なことが起きたりするんですが、まぁまぁあんまり 細かいことは気にしないことにして・・・

算される、そういうふうに期待します。逆に言うと、これがこういっぺん足し上がってしまうと、λ が無限大の周りで展開することもできるかもしれない。その無限大の周りで展開した係数を計算するにはどうしたらいいか、というのが、dual な picture とは何か、という問題なわけです。もちろん実際に摂動論でこれを計算しようと思ったら n が 0 から無限大の、無限個の $C_{g,n}$ を求めてやらないと決まらないわけですから、とてもそんなことはできないわけですね。そのために、そういう dual な picture、λ を無限大の周りで展開した係数をいっきに求める方法が知りたいわけです。



$g = 0\ ,\chi = 2$　　$g = 1\ ,\chi = 0$　　$g = 2\ ,\chi = -2$

図 10: 閉曲面における Euler 数の例

それで、naive な期待はどうなるか。例えば、前に見た図 6 を考えると、その展開は Euler 数と coupling の巾で決まってた。そこで λ を大きくとると、この展開の n の非常に大きなところが効いてくるわけですね。λ の n 乗っていったとき、n の非常に大きいところはどういうグラフかというのを考えましょう。まずこのループに面を張ったときにできるトポロジーを決めておく、例えば球面にしておく。λ の次数は $n = E - V$ でしたから、n がでかくなるというのは propagator をなるべくたくさん使うということです。つまり、グラフが非常に複雑になっていくということですから、結局、こうなんか球面をきれいに張っているような、そう言うのが残る。つまり、$1/N$ で展開して strong coupling を考えると、きれいに張られた閉曲面による展開になるだろう、これが naive な期待です。

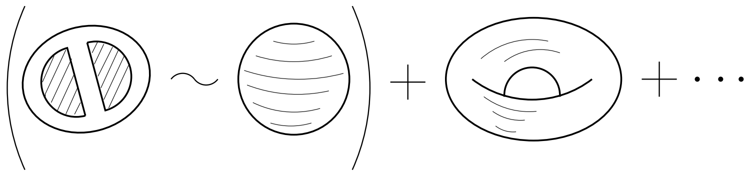


図 11: $1/N$ 展開での strong coupling の naive な期待

それで実は、こういう面の足し挙げを考えるというのは、まさに string 理論になってるわけです。即ち、perturbative string theory。これが string 理論だというのは、図 12 は実は string の vacuum Feynman グラフと呼ぶんですが、例えば球面 (A) では、一点から closed string がぽよんとできて、propagate して、それがまたぽよんと消える。あるいはトーラス (B) だと、string と anti-string がこう pair production してぐるっとまわって、またここで pair-annihilation する。そういう string の Feynman グラフです。さっきからいってるいわゆる Feynman グラフの string 版だと思ってください。そういうふうに読み直してやると、実はこれは string 理論と解釈できて、large N の gauge 理論の strong coupling というのは、stirng で記述されるんじゃないか、と言うことを 't Hooft さんが言ったわけです。これが古い古い gauge 理論と string 理論の duality という考え方の出発点。

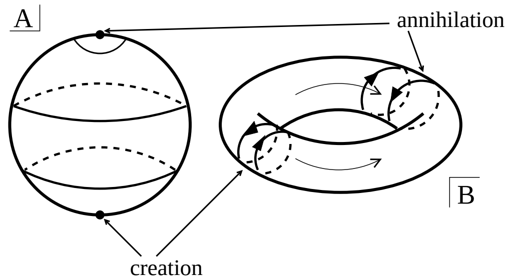


図 12: “vacuum” Feynmann graph

gauge/string duality

ところが、我々の良く知っている QCD の場合は実は物事はそう単純ではなくて、いわゆる簡単な fundamental string 理論では記述できない、ということが今では知られています。実際の QCD では こういう 't Hooft さんのアイデアはうまく働かなかったんですが、それが非常にきれいに見える例が最近わかってきました。それが AdS/CFT 対応、超弦理論とゲージ理論の間に存在する duality で、それをやるのがこの講義の目的です。

この 't Hooft さんの duality を標語的に gauge/string duality としますか。これは結局どういうことかというと、例えば $U(N)$ のゲージ理論を考えて、但し N は非常に大きいとしましょう。もちろん、 't Hooft coupling が小さいときには普通の摂動論ですから、これは perturbative な Yang-Mills、ということは要するに、quark が飛んできて gluon と interaction して、うにゃうにゃうにゃ $\cdots$ という、そういう particle picture になっています。しかし、我々が知りたいのは、低 energy、つまり λ が非常に大きいところで、ここは quark とか gluon とかを出発点にして、えっちらおっちら摂動計算してたんでは全然到達できない。そこで、何かこれの dual な理論を考えることにする。λ がでかいときには、quark とか gluon に代る基本的な自由度は string であると。これを gauge/string duality と呼ぶことにします。

繰り返しになりますが、我々は perturbarive な gauge 理論は standerd model を始めとして実験的にも理論的にも良くわかっている。ところが、string 理論の中で知られているのは非常に限られた理論だけです。いわゆる、良くわかっている string 理論は実際の QCD の dual にはなってなかったんですけれども、ある特殊な gauge 理論との dual な関係になっているのが最近わかってきて、それのことを AdS/CFT 対応と言います。そこに行くには、単なる Yang-Mills 理論と単なる string 理論ではなくて、もう一段階発想を飛躍させる必要があって、超対称性が必要で、$\mathcal{N}=4$ の super Yang-Mills (SYM) なんてのを考えなきゃいけない。あるいは、単なる string 理論じゃなくて、曲がった空間の superstring theory (SST)、非常にへんてこりんな空間を考えなければいけない。しかも我々は 4 次元の gauge 理論の dual 理論を考えてたんですが、それは実は 5 次元の空間で定義された string 理論となっていて、非常に fancy というか不思議な関係になっています。

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\lambda \ll 1} \arrow[rr, leftrightarrow, "N \gg 1", "\text{`gauge/string' duality}"'] & & \boxed{\lambda \gg 1} \\
\text{perturbative Yang-Mills 理論 (quark, gluon)} & & \text{perturbative string 理論 (string)} \\
& \Updownarrow & \\
\boxed{\mathcal{N}=4\text{ , SYM}} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{AdS/CFT}"'] & & \boxed{\text{SST on AdS}_5\text{ 空間}}
\end{tikzcd}$$

そういうことを、明日の昼までにはモヤモヤっとした感じでいいですから、理解して帰ってもらえればありがたいかな、と言うのがこの講義の目的です。

(質問)
「あのー、ゲージ理論の方で AdS/CFT 対応では string の方が 1 次元上がるっていうのがありましたけど、古い話では 1 次元上がるって言うのは出てこないんですか?」

(解答)
「えーと、AdS/CFT 対応の見方で言うと、上がった 1 次元というのは何か energy scale みたいな話ですよね。そういう見方でもういっぺん見直すと何か見えてくるのかも知れませんけど、ま、昔はそういうことは全然発想がなかったので、多分そういうことはあまり考えていなかったんだと思います。」

2 D-brane と Black-brane

まず D-brane というのは、90 年代になってから、非摂動的な string の定義とか、string 理論の duality みたいな話で新たに出てきた概念なんですが、そこへいく前に、一応 string 理論をちょっと簡単にやりたいと思います。

2.1 string 理論 (簡単な review)

string 理論に関しては今や教科書がいくつも出ていまして、ちょっと前までは Green-Schwarz-Witten が唯一の教科書でしたが、最近では Polchinski の教科書も出てる。これの方がもうちょっとアップデートというか、モダンな感じです。細かいことはこういう text book を読んでください。

2.1.1 量子力学の復習

なるべく直感的に済ませたいので、まず量子力学の復習から考えます。量子力学は既知のものとします。量子力学が思い出せない人はもう一度学部に戻ってやり直してください。例えば今、古典 Hamilton 力学の 1 粒子系を考えます。1 粒子系では力学変数って言うのは、

$$\text{力学変数}: (\ x^i(t), p^i(t)\ ) \qquad i = 1 \sim 3$$

ある時刻での粒子の位置と、ある時刻での粒子の運動量で、これが決まると粒子の運動は全部決まる。通常は p は $\dot{p}$ におおむね同じだったりします。あるいは相互作用があったりすると、外場が入ってたりとかいろいろずれてきたりします。Hamilton 力学で言うと、x と p、phase space でのある時刻の点が粒子の運動を決定している。それで、量子力学に行くには、canonical な comutation relation、正準交換関係を設定すればよろしい。

$$\text{正準交換関係}: [x^i(t), p^j(t)] = i\hbar\delta^{ij}$$

これは同時刻での x と p の交換関係。それともちろんこれに Hamiltonian があれば力学系の運動は決定される。Hamiltonian を具体的に書くのはやめます。もし必要ならば、Schrödinger picture に移ることもできる (これはちょっと蛇足ですが、Schrödinger picture では x_i は単なる数と言うか演算子になって、p_i は微分演算子になって、これに波動関数が出てくる。$x^i,\ \ p_i = -i\hbar\partial_i,\ \ \Phi(x)$)。

相対論化

string にいく前に、量子力学というのは特殊相対論と match してませんから、特殊相対論と match するように拡張したい。その方が string に拡張しやすいので、いっぺん相対論的な拡張をしておきます。量子力学が特殊相対論と match してないのは何でかと言うと、まず空間的な粒子の位置と時間というのは全然立場が違うわけですよね。量子力学では時間というのは parameter で、時間を決めると粒子の位置が確率的に決まる、つまり時間と空間というのは非常に違う役割を果たしているわけです。ところが相対論では、時間と空

間は Lorentz 変換で移り変わりますから、それらを対等なものに格上げしてやらないといけない。それが相対論化。それにはどうするかというと、x^μ というのを持ってきて、但しこの argument にはもう t は使えませんから、parameter の時間をもってくる。μ は今度は時間まで含めた 4 次元ベクトルで、τ は parameter 時間。あるいは proper time。

$$
\begin{aligned}
&\text{相対論化：} \quad x^i \text{ と } t = x^0 \text{ を対等に扱う} \\
&x^\mu(\tau) \quad , \quad \mu = 0 \sim 3 \quad , \quad \tau = \text{`parameter (peoper) time'}
\end{aligned}
$$

この $x^\mu(\tau)$ という関数が時空の中の粒子の trajectory を決めています。時空の中に 1 次元的な path がある。これが $x^\mu(\tau)$ というこの関数の値ですね。この 1 次元的な path は paremeter 時間 τ で記述されている (図 13)。

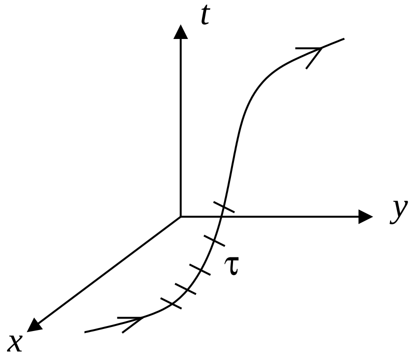


図 13: 粒子の trajectory

それで、自由で mass がないようなものに対応する粒子の運動方程式は、x^μ の proper time dependece がこうなってる;

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \ .$$

これが粒子の運動方程式です。これで一見落着かというとそうではなくて、拡張しては見たんですが、なんか自由度の数が多いですよね。(本当は $p^\mu(\tau)$ も書かなくちゃいけないですよね。いつのまにか Hamilton 形式から Lagrange 形式に移ってしまったからなんですが$\cdots$。) 量子力学では、力学変数、phase space が 6 次元、あるいは配位空間、x の空間が 3 次元なんですが、相対論化でそれを 4 次元に拡張してしまったので、本来の量子力学より自由度が増えてしまった。余分な自由度を 1 つ消してやらないときちんと対応してないですよね。つまり、光速無限大にして非相対論的な極限をとると量子力学にいかないといけないわけですが、このままではいかない。何が隠れているかというと、実は reparametrization 不変性というのが隠れている。実際の量子力学との対応はこの不変性を通じて出てきます。

では、この reparametrization 不変性というのは何かというのを見てみましょう。力学として実際重要なのは、時空に書かれた粒子の trajectory、この path の形なんです。だから、この上を我々がどういう τ で parametrize するかというのは勝手なはずですね。ある人はここら辺を原点にとって、ここを 100 秒と呼ぶかも知れないし、ある人はここを 100/60 分と呼ぶかも知れないし$\cdots$。でも、どんな人から見てもこの ptah の形自体は一緒なわけで、どういうふうに言っても時間の測り方を翻訳し直しさえすれば同じ物理を見ているのがわかるはず。そういう parametrize の自由度があるはずなんです。つまり、reparametrization 不変性というのは、parameter time をどうとっても物理 (trajectory の形) は不変ということです。τ が新たな τ' という τ の任意関数 (ただし単調増加) であるときに、$x^\mu(\tau)$ を $x'^\mu(\tau' = f(\tau))$ に変換することに対して物理は不変でないといけない。

$$\boxed{\text{reparametrization 不変性}} \rightarrow \begin{array}{l}\text{物理的に不変なのは ‘path の形’}\\ \text{parameter } \tau \text{ はどうとっても物理は不変}\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccll}\tau & \rightarrow & \tau' = f(\tau) & \text{単調増加}\\ x^\mu(\tau) & \rightarrow & x'^\mu(f(\tau)) & \end{array}\right.$$

そうすると、これは関数 1 個分の自由度がありますから、この 1 個分の自由度を使って、4 つある関数のうち 1 個を勝手な数にもっていくことができる。これを physical gauge と呼ぶことにしますと、physical gauge というのは、trajectory の parameter τ をその点の x^0 の値にとりなさい、τ という parameter 時間を x^0 そのものにとりなさい、そういう gauge です (図 14)。

$$\begin{array}{ll} & \text{physical gauge : } x^0(t) = \tau \\ \Rightarrow & \text{parameter time } \tau \text{ を実際の時間 } x^0 \text{ と等しくとる}\end{array}$$

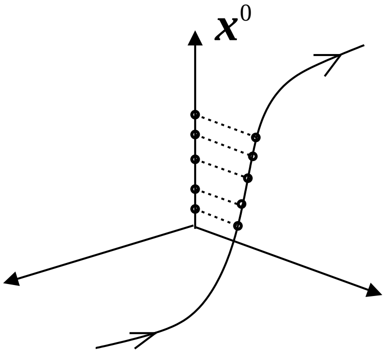


図 14: physical gauge

parameter time τ を実際の時間 x^0 と等しくとると、この x^0 はもはや力学変数ではなくなってしまうわけですから、残った力学変数は x_i です。これは、もともと parameter time τ の関数だったんですが、今 τ を x^0 と等しくとりましたから x^0 の関数だと思ってよろしい。

$$\text{力学変数 : } x^i(x^0 = \tau) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \ .$$

これで量子力学と対応しました。なんかいつのまにかまた Lagrange 形式に戻ってしまいましたが $\cdots$。運動方程式は

$$\ddot{x}^i(\tau) = 0 \qquad (\ddot{} = \frac{d^2}{d\tau^2})$$

となって、これを解くと、(これは 2 階微分したら 0 ですから) 定数の部分と τ の 1 次の部分とで

$$x^i(\tau) = x_0^i + p_0^i \tau \tag{5}$$

となる。自由度は x^i と p^i です。これでちゃんと量子力学の自由度と match しました。

2.1.2 bosonic string 理論

ここまでが大まかな粒子の量子力学だったんですが、これを string、ひもに拡張します。

まず、いわゆる bosonic string 理論というやつについてお話しします。ひもというのは、時空の中である時刻に粒子があってそれが時間的に発展していく、それを world line といいますが、そういう時空の中の粒子の軌跡のことです。例えば open string だったら、こんなものが時間とともにこう発展していく (図 15(A))。あるいは、closed string だったらこんなものが時間とともに発展していく (図 15(B))。open string というのは端をもった string。

closed string というのは輪っかになった string。ある時刻を切るとひもなんですが、ひもというのは 1 次元的に広がってますから、それを関数で表すために parameter σ をつけておきます。open string は σ を 0 から π。closed string は σ は 0 から 2π で一周ぐつると parametrize しておくことにします。それで、さっきはこの world line は $x^\mu(\tau)$ という parameter 時間の関数で、parameter 空間から 4 次元 Minkowski 空間への写像

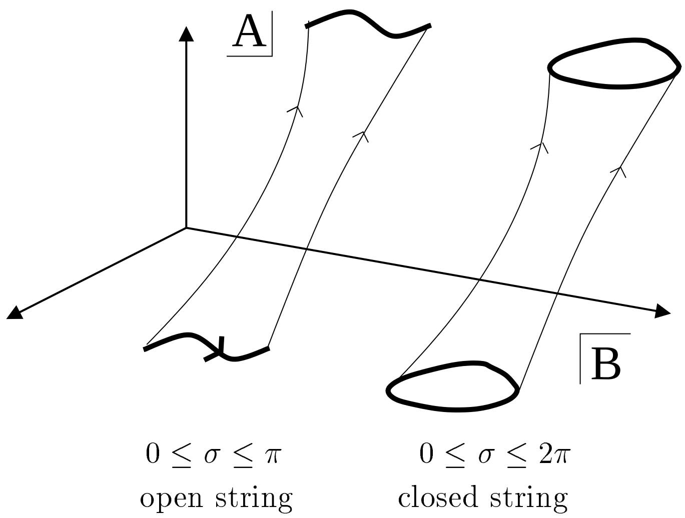


図 15: world sheet

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{3,1}$$
$$\left(\tau \longrightarrow \mathbf{M}^{3,1}\right)$$

で記述されていたんですが、今度は 2 次元的な面になっていますから、2 次元的な parameter 空間 $(\tau\ ,\sigma)$ という空間から時空への写像になっています。それで、

$$X^\mu(\tau,\sigma)$$

が world line に対応する時空の中の string の軌跡ということで “world sheet” と呼ばれるものです。後の都合上 μ という次元も拡張しておきます。

$$\mu = 0, 1, \cdots, d-1$$

空間は $(d-1)$ 次元、時空は全部で d 次元だとします。さっきは τ という parameter time を導入しましたが、今度はひもの広がりの方向も parameter を使わないと表せないので、2 次元的な parameter 座標、τ(parameter 時間) と σ(parameter 空間) を導入することになります。そういう意味で string 理論というのは 2 次元の場の理論になっています。

それで、運動方程式はこういう形です

$$\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} = 0\ .$$

厳密に言うと嘘がいっぱいありますが、これは 2 次元の波動方程式です。これをさっきやったように適当に gauge を置いて解きたいんですが、粒子の場合は量子力学でしたから、2 階の方程式に対して (5) 式のような初期条件をおいて解きました。この 2 つの積分定数の意味というのは、τ が 0 での位置と運動量でした。今度は 2 次元の場の理論ですから、初期条件を決めるだけじゃなくて境界条件が必要になります。そのとり方がいろいろ出てくるというのがミソなんですが、それは後で考えます。

次に、粒子のときには reparametrization 不変性がありましたが、string はどうなっているかを考えましょう。string の場合も物理的なのは時空の上に sweep したひもの軌跡です

が、我々は、それを記述するのに必ず座標をつけます。この座標の取り方はさっきと同じで勝手に取っていいはずですね。だから今度の場合も、この座標の取替えの自由度というものが必ず存在します。それは今度は 2 次元的な一般座標変換

$$\begin{aligned}\tau' &= \tau'(\tau,\sigma)\\ \sigma' &= \sigma'(\tau,\sigma)\end{aligned}$$

となっていて、新しい時間 τ' とか新しい空間座標 σ' を勝手な関数で取り直してよろしい。今度はこれだけの自由度があります。2 変数関数の 2 つの自由度。そうすると、実はさっきよりもう 1 つ次元が上がって X^μ のうち時間だけじゃなくて空間座標の 1 個も固定することができます。関数 2 個分の自由度が ありますから 2 つ固定する。それには通常 light-cone gauge という gauge をとります。light-cone gauge というのは x^0 を時間と思うのではなくて、light-cone 方向、斜め 45 度にもち上がったような

$$x^+ = x^0 + x^{d-1}$$

を時間と思います。この方向の string 座標を、粒子の自由度だけ残してこういうふうに置いてしまう

$$\begin{aligned}X^+(\tau,\sigma) &= X^0(\tau,\sigma) + X^{d-1}(\tau,\sigma)\\ &= x^+ + p^+\tau\ .\end{aligned}$$

そうして運動量は、

$$P^+(\tau,\sigma) = p^+$$

こういうふうに置く。さっき言ったように、関数 2 つ分の自由度があるので、X^+ だけじゃなくて、実は X^- も決まってしまって、その辺は constraint があってそれを解くとか、gauge 不変性の議論とか、もうちょっとややこしい議論をしないといけないんですが、結果だけを書くと、

$$\begin{aligned}P^-(\tau,\sigma) &= \frac{1}{2p^+}((P^i)^2 + (X^i)'^2) \qquad (i = 1,\cdots,d-2)\\ X^-(\tau,\sigma) &= \int^\tau P^-(\tau',\sigma)\,d\tau' = x^- + \cdots\ .\end{aligned}$$

ここでの i は、さっきの i と違って 1 から $(d-2)$ までというのが重要です。いわゆる transverse dimension と呼ばれるもの。例えば、4 次元だったら粒子の座標は 1 から 3 でしたが、今度は 1 と 2 だけになっています。10 次元だったら 1 から 8、26 次元だったら 1 から 24。空間の次元引く 1 だけ走ることになります。それで、独立な力学変数は

$$X^i(\tau,\sigma) \qquad i = 1,\cdots,d-2\ .$$

それと zero mode の部分もちょっと残っていまして

$$x^+ = \tau,\quad p^+\ .$$

ただしこれは parameter のようになってしまう。それから、運動方程式は

$$\ddot{X}^i - (X^i)'' = 0 \qquad (\ \ddot{} = \frac{d^2}{d\tau^2} \quad , \quad '' = \frac{d^2}{d\sigma^2})$$

となっていて、こいつの一般解は、よく知られているように任意関数の自由度があって、

$$X^i(\tau,\sigma) = f^i(\tau-\sigma) + g^i(\tau+\sigma) \ .$$

ただし、f^i とか g^i というのは任意の 1 変数関数。つまり、もともと 2 変数関数があったんですが、運動方程式を解いてやると、実は 1 変数関数分の自由度だけ決まらない。これが一般解になっています。それで、この関数をどうやって決めるかというと、境界条件をつけて決めることになります。

境界条件

closed string まず 1 番簡単なのは closed string。closed string は、さっき言ったように絵で書けばこういう輪っかで、1 周回ってくれば元の点に戻ってくるわけですから、$X(\tau,\sigma)$ も周期的、0 から 2π 進んだら元の点に戻って来てくれないと困りますね。だから、こういう物理的なひもに対応する X は周期的境界条件を満たさないといけない。これに対応するのは、

$$\text{周期境界条件:} \quad X^i(\tau,\sigma) = X^i(\tau,\sigma+2\pi) \quad , \quad 0 \le \sigma < 2\pi \ . \tag{6}$$

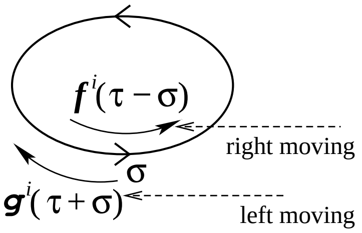


図 16: closed string

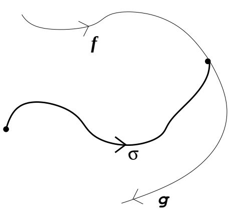


図 17: open string

あるいは、f とか g だと意味がもうちょっとわかって、実は f とか g というのはこのひもの上を進む進行波ですね。例えば $f(\tau-\sigma)$ だと、τ が進んだところで元の位置と同じ値なのは σ が進んだところですから、なんかこの辺に山があったら τ がちょっと進むと、この山の位置は σ でちょっと進む。あるいは、g というのは f とは逆向きの進行波を記述している。従って f というのは右回りに回りますから right-moving な進行波、g というのを left-moving な進行波と呼ぶことにします。もちろんこの条件 (6) というのは、(f,g) の条件に焼きなおすことができる。これも周期的ということになるわけですが、closed string の場合はこういう周期的な境界条件。独立な自由度としては、右に回る自由度も左に回る自由度も 2 種類存在する。f も g も周期的な独立な関数となります。

open string 今度は open string です (図 17)。右向きに σ という parameter をとると、同じように f というのは右へ進む波で、g というのは左へ進む波なんですが、今度は端がありますから、この波は端にぶつかって返ってきます。跳ね返って向きを変える。だから、f と g というのは何かの関係がついているはずです。つまり、波はこの境界で反射してし

まうので f と g は独立でない、ということがすぐ分かります。あとは、波が反射するときに、どれだけ phase shift というか時間の遅れが起こるか、そういう問題になります。それで、その遅れ方によって一般に 2 種類の境界条件があって、それを次に見ていきます。

(1)Neumann 型

1 つは Neumann 型で (図 18)、これは string の端で σ 微分が 0

$$X^{'}(\tau,\sigma=0,\pi)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{f}^i(\tau)=\dot{g}^i(\tau)\ .$$

これは物理的には自由端 free boundary を記述している。自由端というのは端が自由に動けるようになっている boundary condition。

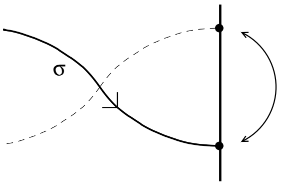


図 18: free end

(2)Dirichlet 型

もう 1 つは Dirichlet 型で (図 19)、これは端で時間微分が 0

$$\dot{X}(\tau,\sigma=0,\pi)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{f}^i=-\dot{g}^i(\tau)\ \ .$$

f と g とで位相が半分 π だけずれている。これは固定端の条件になっています。固定端というのは、端をどっかにピン留め しておくようなもの。

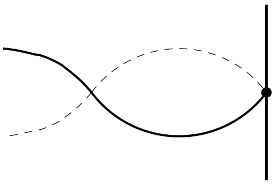


図 19: fixed end

このように境界条件を 2 つとる取り方というのは物理数学の一般論であるんですが、最近の D-brane が出てくる前、'80 に僕らが学生のころやっていた perturbative な string 理論を考えるときは Neumann 条件の方しか考えませんでした。何故かというと、Dirichlet 条件というのは見て分かるように、空間に対する並進不変性を壊します。これは当たり前ですね。何で当たり前かというと、端をどっかに固定するわけですから、どこにピン留めしておくかっていうのを決めてやらないといけないわけで、そういう意味で並進不変性を壊します。実は、D-brane というのはこの並進不変性を回復するための object である、というのが最近の解釈ですが、そういうことを昔は考えなかったので、境界条件で並進不変性を壊すのがいやだということで、Neumann 条件のみを考えていました。以下 D-brane が出てくるまでとりあえずは、open string は Neumann 条件をとるものとします。

この辺で休憩にしましょうか。

（休憩）

review

"Large N Field Theorise , String Theory and Gravity"
Ahavany, Guvsev, Maldancena, Ooguri and Oz, hep-th/9905111.

前半では、string というのは transverse 方向が物理的自由度であって、運動方程式はいろいろな境界条件のもとで解いてやる必要がある、ということをやりました。次に、境界条件のもとで実際に解いた一般解がどうなっているかというのを考えます。string の場合、それには Fourier 展開して各 mode に展開するということを良くやります。

mode 展開

closed string まず closed string ですが、これは周期的境界条件を課しましたから、周期的な関数で展開されます。特に物理的意味まで含めると zero mode の部分がまずあって、これはさっきの粒子のときと同じで、ひもの重心運動に対応します。

$$X^i(\tau,\sigma) \;=\; \underset{\text{重心運動}}{x^i + \ell_s^2 p^i \tau}$$

これは、closed string がうにゃうにゃと振動しながらピューと飛んでいくんですが、このピューと飛んでいくほうの自由度ですね。プラス、その場でうにうにと振動している自由度があって、

$$+ \quad \underset{\text{振動}}{\frac{i}{\sqrt{2}}\ell_s \sum_{n\neq 0}\left\{\frac{\alpha_n^i}{n}e^{-in(\tau-\sigma)} + \frac{\tilde{\alpha}_n^i}{n}e^{-in(\tau+\sigma)}\right\}} \tag{7}$$

ここで、ℓ_s というのは長さの次元をもった string の基本的な定数です。

$$[\ell_s] = L$$

それで、(7) 式の 1 項目はさっき言った $\tau-\sigma$ の関数で、周期関数という境界条件によってこういう形で Fourier 展開されて、自由度は各係数になります。これを right-moving と呼ぶ。それから 2 項目、$\tau+\sigma$ の関数の方は left-moving。どっちを left というかは人によって違うんですが、たまたま最初に書いた絵がそうだったのでここではこういうふうに呼んでおきます。この両者が string の振動の自由度です。zero mode と合わせると、物理的な力学変数は $x^i, p^i, \alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^i$ です。

openstring それから open string。oepn string といったら Neumann 型の境界条件を課した string という意味と言いましたが、これもやっぱりひもがうにうにと振動しながらピューっと飛んでいきますから、ピューっと飛んでいく部分は同じなんですが、振動の部分は半分しかないわけですね。

$$X^i(\tau,\sigma) = \quad \underset{\text{重心}}{x^i + \ell_s^2 p^i \tau} \quad + \quad \underset{\text{振動}}{\sqrt{2}\ell_s i \sum_{n\neq 0}\left\{\frac{\alpha_n^i}{n}e^{-in\tau}\cos(n\sigma)\right\}}$$

それで、σ で微分したら端 $(\sigma=0,\pi)$ で 0 としましたから、$\cos(n\sigma)$ で展開します。1、2 項目が重心運動で、3 項目が振動。open string の場合は自由端の条件を課しましたので、こいつは定常波になっている。こっちの場合の自由度は x^i, p^i, α_n^i。

量子化

次に、量子化はどうなるかというと、まず Hermite 係数の条件

$$(\alpha^i_n)^\dagger = \alpha^i_{-n} \qquad \left((\tilde{\alpha}^i_n)^\dagger = \tilde{\alpha}^i_{-n}\right)$$

が課されます。X^i というのは space-time 上の関数でしたから実関数ですね。それを複素数的な関数で展開しましたから、これが real な関数であるために条件が必要です。それがこの条件です。それで、単なる関数の場合は complex conjugate ですが、今量子化したと思っているので $\dagger$ になります。closed string に関しては $\tilde{\alpha}$ に関しても同じ条件を課します。この下で、x^i と p^j にはさっきの粒子と同じこういう条件を課します。

$$[\, x^i, p^j\,] = i\delta^{ij} \quad \to \quad \text{重心運動（粒子的）}$$

ただし、注意しておかなければならないのですが、i は 1 個少ないということが重要。
それから oscillator に関しては、$n, m \in \mathbf{Z}$ として

$$[\alpha^i_m, \alpha^j_n] = m\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \ ,$$

$$[\tilde{\alpha}^i_m, \tilde{\alpha}^j_n] = m\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \ .$$

なお、~の自由度は適宜 closed string の場合は 2 倍にして考えるとして、以下あまり考えないようにします。便宜上 string のときはこういう oscillator 変数を使いますが、次のような scaling をしてみればすぐ分かるように、こいつらは振動を記述します。この n とか m というのは整数全部を走ります。正も負も。例えば m を正だけに限って α^i_m ,α^i_{-m} を rescale して、

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\alpha^i_m = a^i_m \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{m}}\alpha^i_{-m} = a^{\dagger i}_m \quad .$$

これは m を 1 以上にしてやると、調和振動子の交換関係

$$[a_n, a^\dagger_m] = \delta_{n,m}$$

を満たします。しかも、m という自然数で parametrize されている無限個の調和振動子になっています。これは場の理論の典型ですよね。string 理論というのは 2 次元の場の理論といいましたが、場の理論というのは mode 展開してやると無限個の調和振動子に分解できると。

状態（波動関数）

今度は、状態、波動関数の部分を考えたいんですが、今、string の運動の自由度は重心運動と振動がありましたので、波動関数も重心運動と振動の直積、tensor 積になります。

$$\begin{array}{ccc} \text{（振動）} & \otimes & \text{（重心運動）} \\ \text{無限個の h.o.} & & \tilde{f}(p^i) \end{array}$$

重心運動の部分は普通の粒子と一緒でしたから、なんか p_i の関数、振動子の方は無限個のharmonic oscillator でしたが、それは今、生成消滅型の記述をしていますので、ある種の基底状態 (oscillator vacuume) $|0\rangle$ に作用して

$$\alpha_n^i\,|0\rangle = 0 \quad , \quad n > 0 \quad .$$

この辺は量子力学でやったと思いますが、n が正の部分は annihilation operator ですから、annihilation operatpr で消えるような状態を基底状態として持ってくると、一般の状態というのは、それに creation operator を適宜かけた

$$\mathcal{H} = \left\{ \alpha_{-n_1}^{i_1} \cdots \alpha_{-n_k}^{i_k} \widetilde{\alpha}_{-m_1}^{j_1} \cdots \widetilde{\alpha}_{-m_k}^{j_k} \ \ |0\rangle \right\}$$

で表されます。こういう型の一般の状態が振動の部分を表す波動関数になっている。記号の簡略化のために、この振動子の基底状態と重心運動の波動関数の tensor 積の部分を

$$|0\rangle \ \ \otimes \ \ \widetilde{f}(p^i) = |p\rangle$$

と書くことにする。そうすると一般の状態は

$$\left\{ \alpha_{-n_1}^{i_1} \cdots \alpha_{-n_k}^{i_k} \widetilde{\alpha}_{-m_1}^{j_1} \cdots \widetilde{\alpha}_{-m_k}^{j_k} \ \ |p\rangle \right\}$$

ということになります。

on-shell 条件

いくつか以下の必要のために、この波動関数が満たす性質を見ておきたいんですが、その 1 つが on-shell 条件。今、light-cone gauge で考えてますが、前に見たように運動量には関係式がありました。マイナス方向の運動の zero mode を小文字の p^- と書くと

$$p^- = \int_0^{2\pi} d\sigma\ P^-(\tau, \sigma)$$

ですが、これの被積分関数の間に成り立つ関係式で、$P^-(\tau, \sigma)$ というのは独立変数でなく他の自由度で書けてました。どういう形で書けてたかというと、

$$\int d\sigma\ P^-(\tau, \sigma) = \frac{1}{2p^+} \int_0^{2\pi} d\sigma\ (P^2 + X'^2) \quad . \tag{8}$$

p^+ は σ の積分に依らないので積分の外に出しました。この積分を実行すると、zero mode は

$$p^- = \frac{1}{2p^+}(p_i^2 + \widehat{M}^2) \tag{9}$$

となります。 $\widehat{M}^2$ というのは後にいうような operator なんですが、今はそのまま置いておきます。(9) 式は各状態が次のような on-shell 条件を満たしていることをいっています。(9) 式を整理してやると、signeture を $(-, +, +, \cdots)$ として、

$$-(p^\mu)^2 = 2p^+p^- - p_i^2 = \widehat{M}^2 \tag{10}$$

ここで、$\widehat{M}^2$ という operator は

$$\widehat{M}^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{l_s^2}(N+\widetilde{N}\underline{-2}) & \text{for}\quad\text{closed} \\ \dfrac{1}{l_s^2}(N\underline{-1}) & \text{for}\quad\text{open} \end{cases} \qquad\qquad \underline{\qquad}\text{は零点振動}$$

で、N 、$\widetilde{N}$ は、

$$\begin{aligned} N &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^i_{-n}\alpha^i_n \ , \\ \widetilde{N} &= \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}^i_{-n}\widetilde{\alpha}^i_n \ . \qquad \text{（振動子の energy）} \end{aligned}$$

これは各無限個の harmonic oscillator で、定数の部分は零点 energy です。無限個の自由度がありますから零点 energy も本来無限になっているのですが、これを適当に正則化して意味のある部分を引っ張り出してやることができて、それがこれだけ。後で実際 superstring を考えますと、零点 energy というのは適当に有限に well-difine に定義されます。bosonic string の場合は本当は無限大なので、有限な部分を引き出すのに正則関数を使ってある種の正則性を引き出してやらなければいけない。だから数学的な正当性に疑問が残ったりしますが、superstring の場合は適当に cancel して有限の値が残るようになっています。

また closed string のときは、更に次のような条件があります。それは次のような状態のみ物理的であるということ;

$$\text{level matching 条件} \quad : \quad N - \widetilde{N} = 0 \ .$$

これを満たさない状態というのは、さっき、~の oscillator と ~のない oscillator が勝手に excite したような状態を書きましたが、実は、mode number というか振動 energy が等しくなっているものだけが物理的になっています。これは通常、level matching 条件と呼ばれているんですが、物理的には、σ 方向の大局的並進不変性、要するに reparametrization 不変性の一部です。σ を勝手にとっていいといいましたが、string が閉じている場合には、勝手に取る以前にどっかに原点をとって $0 \sim 2\pi$ と parametrize するんですが、どこを 0 として parameter づけしても物理は同じ。だから reparametrization 不変性の一部です。その一部が解ききれずに残ったもの。これを条件として余分に課す必要があります。

結局ここまで来て分かったことは、(10) 式を見てほしいんですが、これはちょうど相対論的粒子の on-shell 条件の形をしています。p^2 がなんか $\widehat{M}^2$。ところがこの $\widehat{M}^2$ の部分が string の振動 energy の Hamiltonian みたいな形をしていたわけで、これは物理的に何を意味しているかというと、結局 string というのは、細かく見ると何かうにうに振動してピューっと飛んでいるといいましたけど、遠くから見るとこのうにうにがぐにぐにっと小さく見えるでしょう。だから十分遠くから見ればぐにぐに振動しているのが見えなくて、ある種の内部 energy みたいに解釈される。その内部 energy に対応した質量を持つ無限個の粒子の集合を一本の string で記述しているようになっている。

質量 $\widehat{M}^2$ を持つ粒子（無限種）

だから振動のおとなしい粒子を十分遠くから見ると、軽い、内部 energy の小さい粒子に見えて、ものすごい振動しているような粒子を十分遠くから見ると、非常に重たい粒子が飛んでいるように見える。そういう意味で、この各振動 energy 状態によって、いろんな mass をもった無限種類の粒子みたいなものを一緒くたに記述しているものが string。そういうふうに考えることもできる。

また、十分遠くから、というのはどのくらい遠くかというと、長さという次元を持っていますから何かと比べないといけないわけですが、実はさっきのstring length というものと比べます。十分 excite するとこの広がり自身もでかくなってきて、どっかで遠くから見ることができなくなるんで、こういう描像はあるところまでしか成り立たないんですが、おおむねこういう形でみなすことができる。

粒子状態の例

ちょっと一般的にやりすぎたので例を考えます。各energy 状態は、粒子に見えると言ったんで、粒子状態の例を考えます。

closed string 一番 energy が低いのは基底状態、ocsillator が基底状態にある場合ですね。

$$|p\rangle \ : \ N = \widetilde{N} = 0$$

振動に関してはこういうことになっていて、さっきの on-shell 条件でいうと、mass は実は negative 。零点 energy が negative だったからですね。だからこれは tachyon 。

$$M^2 = \frac{-2}{\ell_s^2} \qquad \text{tachyon}$$

bosonic string 理論には、こういった tachyon 、光速より速く飛んでしまう粒子が出てしまうので、実は普通の flat な空間の上では不安定な mode になっているんですが、実際に考えたいのは superstring 理論で、superstring にいくとこの tachyon というのはなくなります。$|p\rangle$ は Lorentz の index については何も持っていませんから scalar 。

次はこの振動 energy がちょっと励起したところで、

$$\alpha^i_{-1}\widetilde{\alpha}^j_{-1}\,|p\rangle \ : \ N = \widetilde{N} = 1 \quad , \qquad M^2 = 0$$

こういう状態が次に出てきます。これはさっきの零点 energy が非常に効いていて massless。Lorentz の足については、α 、$\widetilde{\alpha}$ は独立ですから、i と j という 2 本の勝手な足を持っています。Lorentz 群の中の $SO(d-2)$ の足、vector の足ですから、これに関して既約分解してやると、

$$i,j\text{について} \quad \longrightarrow \begin{cases} \text{symmetric traceless} & g_{ij} & :\text{graviton} \\ \text{antisymmetric} & B_{ij} & :2\text{階反対称 tensor} \\ \text{trace} & \phi & :\text{dilaton} \end{cases}$$

symmetric で traceless なのが gravity。spin 2 の部分[†] 。symmetric traceless な部分は、一般に graviton 。それから antisymmetric の部分 B_{ij} 、これは 2 階の反対称 tensor になって

[†] spin 2 という言い方は $SO(3)$ の既約分解の言葉なので、次元が高くなるとあんまりそう言わない。

います。それから trace の部分、これは trace ですから足を持っていなくて scalar。dilaton と言います。これだけ massless 粒子が出てくる。

あとは、

$$N = \widetilde{N} = 2, 3, 4, \cdots, \qquad \text{massive} \quad M^2 = \frac{2n}{{\ell_s}^2}\ ,\ n = 1, 2, \cdots$$

と出てくるんですが、よくいわれる重要な部分は、この massless の部分ですね。普通 superstring では、この mass というのは、ℓ_s という string scale をだいたい Planck 長さくらいにとりますけど、そうすると excited state は何か Planck mass 位の mass を持った粒子に見えます。だから、そういうのを無視すると、bosnic な場合はさらに tachyon も忘れると、実際に low energy というか我々の物理に効いてくるのはこの massless の部分だけで、graviton、重力の理論となる。graviton の理論といってもいわゆる Eeinstein gravity ではなくて、scalar ϕ が couple したようなもので、2 階反対称 tensor B_{ij}、これは matter というか gauge 場 みたいなもんですが、そういうものが加わったちょっと拡張された重力理論になっている。これが perturbative な string の特徴です。だから標語的に言うと、closed string からは graviton が出てくる。

open string それから open string ですが、これは closed string に比べて振動の自由度が半分しかありませんでした。一番下は

$$|p\rangle \ :\ N = \widetilde{N} = 0 \quad , \quad M^2 = \frac{-1}{{\ell_s}^2} \quad \text{tachyon}$$

次は massless で、i の足を一個だけ持っていますから vector で、単純には $U(1)$ の gauge 場 になっています。

$$a^i_{-1}\,|p\rangle \ :\ N = 1 \quad , \quad M^2 = 0 \quad \text{vector} \quad A^i : U(1)\ \text{gauge 場}$$

更に上は、

$$N \geq 2 \qquad\qquad \text{massive tower}$$

となっています。

ここで、一番最初に言った QCD string の話を思い出せば、それは open string の端に q とか $\bar{q}$ が引っ付いているようなものでした。$N = 1$ のところで出てくる $U(1)$ gauge 場は vector の足以外なにも量子数を持っていないんですが、端っこに量子数を asign することによって、この $U(1)$ gauge 場を non-Abelian の gauge 場に拡張することもできます。それが昔は Chan-Paton factor と呼ばれていたものです。ここで言っておきたいのは、$U(1)$ gauge 場が出てきましたが、これを non-Abelian の $U(N)$ に拡張するのはそれほど難しくない。もちろん単なる open string というのは anomaly があって $U(N)$ ではダメだとかなんかごちゃごちゃした話がありますが、少なくとも古典的には $U(N)$ に拡張するのは難しくない。あとは string に関していくつか補足をしておいて brane の話に行きたいと思います。

低エネルギー極限

ちょっと言葉でいろいろ先走って言ってしまいますが、低エネルギー極限とは、energy scale として、だいたいこれくらいです、

$$E \ll \frac{1}{\ell_s} \sim \text{弦の振動の励起 energy} .$$

この $1/\ell_s$ というのは、string 理論の弦の振動の励起を特徴づける energy scale。それより十分小さい energy scale を考えるということは、ほとんど弦の振動は無視する、つまり弦がぜんぜん振動していない状態を考えるわけですね。$1/\ell_s$ がある有限の値だと、これは運動量の適当なところに cut off を入れたりして面倒くさい。そういうのを安直にみるためには、ℓ_s を 0 にもっていく極限を考えてやります。そうすると $1/\ell_s$ は無限大になってどんな energy を考えても弦の振動が無視できるようになる。だから対応する極限というのは、

$$\ell_s \ \rightarrow \ 0 \ .$$

こういう極限をとると massive な mode というのは全部 mass 無限大になって、理論から decouple してしまいます。

$$\text{massive mode} \quad M^2 \longrightarrow \infty$$

それで massless mode だけ残る。もちろん tachyon はマイナス無限大になりますが、それは superstring では存在しないものとして、あまり考えないものとします。そうすると、今書いた closed string の massless の部分から、g_{ij} と B_{ij} と ϕ という boson 場が残って scalar tensor 理論、scalar 重力理論ですかね、dilaton が存在するような重力理論ができる。

$$\text{closed} \quad : \quad (g_{ij}, B_{ij}, \phi) \quad \rightarrow \quad \text{(scalar) 重力理論}$$

こういうことを最初に言った人は、今、東大駒場の米谷さん、それから、Scherk とか Schwarz とかこういう人たち。g_{ij} を graviton と identify することによって string 理論を統一理論として使いましょう、という話になります。また open string の場合は、

$$\text{open} \quad : \quad A^i \quad \rightarrow \quad \text{gauge 理論 (Neveu-Schwartz)}$$

臨界次元 (critical dimension)

それから、string 理論のもう 1 つ重要な性質として、臨界次元というものがあります。実際に 4 次元の QCD と dual な string 理論を作るときには、今までやってきたような余分な自由度が乗っていないひもが飛んでいるという単純な picture では、QCD を記述できなかったわけですが、その大きな理由が臨界次元というものでした。例えば今、light-cone gauge を使って string 理論を考えていますが、この gauge をとったことによって相対論的な不変性というのが壊れています。Lorentz 共変性が自明ではない。復習しておくと、最初は粒子の相対論的に不変な理論から出発したんですが、例えば粒子のときだったら、physical gauge をとることによって parameter time を実際の時間ととることで普通の量子力学になりましたし、string では light-cone 時間を parameter 時間と identify してしまいました。もちろんこれは我々が十分賢くなかったせいで、十分賢い人が Lorentz 共変な

gauge をとれば Lorentz 共変性は manifest なはずですね。ですから、たとえ計算の途中では Lorentz 共変性はなくなっているように見えても、最終的に物理量を計算したら Lorentz 共変性は回復しているはずです。物理的に意味のある散乱振幅とか、そういう量を計算したら、Lorentz 共変になっているはずです。

ところがですね、量子論的な特異性、発散が出てくるからといってもいいんですが、場の理論には往々にして anomaly というのが存在します。実際、量子論的には $(d-26)$ に比例する anomaly がある。 anomaly というのは一言でいうと、壊れてしまった Lorentz 共変性。もちろん、これは変な gauge をとったために壊れたんで、古典的には回復しているはずなんですが、実際に計算してやると $(d-26)$ に比例するくらい Lorentz 共変性が壊れてしまっている。それは計算が途中で発散を含むから適当な正則化をしなくてはいけないとか、無限大に絡んで出てくるんですが、これくらい Lorentz 共変性が壊れてしまう。我々は Lorentz 共変性というのは金科玉条として欲しいので、結局 space-time の次元は 26 にとらないといけない。 26 次元にとったときに限りこの anomaly はなくなっていて、きちんと理論が Lorentz 共変になっている。それが臨界次元という意味です。

$$\text{bosonic string} \quad d=26 \text{ に限り} \quad \text{well-defined}$$

従って、最初に言った 4 次元の QCD の場合には、そのまま dual に考えるのはできない。

2.1.3 superstring 理論（GS 形式）

superstring 理論というのは、supersymmetry をもつような string 理論です。今までの理論というのは bosonic string 理論で、例えば closed string には重力が出てきましたが fermion は全然出てきませんでした。superstring 理論というのは、それを超対称性を持つように拡張したような理論で、例えばさっきの closed string から出てくる gravity は、今度は supergravity に拡張されます。あるいは、gauge 理論は supersymmetric な gauge 理論に拡張されます。それで特に、今日やる形式は Green-Schwarz (GS) 形式と呼ばれています[‡]。これは space-time の supersymmetry が manifest になるような形式のことです。ただし、covariance を保ったまま量子化するのは難しい。これはどういう理論かというと、今までやってきた bosonic string の framework では時空の中の string の trajectory を考えましたけど、この時空を超時空に拡張します。

$$\text{時空} \longrightarrow \quad \text{超時空} \;\; \text{superspace} \;\; (x^{\mu}, \theta^{\bullet})$$

超時空というのは superspace、superfield は superspace 上の関数ですね。この $\theta^{\bullet}$ は Grassmann 数で適当な spinor の足を持っています。4 次元 の場合は、なんか適当な $SL(2,\mathbf{C})$ の spinor の足ですが、これからやるのはちょっと次元が違うのでここを $\bullet$ にしておきます。すぐ次に考えます。それで、一応言っておくと、この GS 形式に対して、parameter space (τ,σ) を superspace にする formulation というのがありまして、それが NSR 形式。

$$\text{parameter space } (\tau,\sigma) \;\; \longrightarrow \;\; \text{superspace} \;\; \text{NSR 形式}$$

[‡] 実は、最近主にやられている Neveu-Schwarz (NS) 形式というのが一番古くて、僕らが学生の頃は GS 形式というのは新しくて new superstring と呼ばれていたんですが、最近はまた NS 形式をやっているので、これは一見 old と呼ばれていたりします。

適当な projection をするとどちらも同じ理論を記述します。こう言うと、じゃあ parameter space も target space も両方 superspace にしたらどうか、と考えたくなるんですが、そういうやり方もあります。それは最近、Berkowitz という今サンパウロにいる人が中心になってやっている formulation で、いろいろ面白いんですが、そういう話をしている暇はないので、今日は時空を superspace にする formulation を考えます。

それで、ちょっとここは説明なしに認めて欲しいんですが、こういう拡張をしますと、さっき 26 次元といっていた臨界次元が 10 次元になります。

$$\text{臨界次元} \quad d = 10$$

さっきの 26 というのも何も説明してないんですけど、今度の 10 というのも説明抜きに認めてもらうことにします。何でこれを認めて欲しかったというと、spinor の足というのは次元がいくつかに非常に依っていますので、もう最初から 10 次元というのを仮定したかった。こうすると transverse 次元 $d-2$ というのは 8 ですから、だいたい物事は $SO(8)$ の表現で進む。それに対して、X^i というのは superspace だから、$\theta^{\bullet}$ というのが出てきて、これは $SO(8)$ の spinor だから 2 種類必要で、

$$\begin{array}{rcllll} X^i & : & i = 1, \cdots, 8 & SO(8) & \text{vector} & 8_V \\ \theta^a\ ,\ \tilde{\theta}^{a'} & : & a, a' = 1, \cdots, 8 & & \text{spinor} & 8_S \quad \text{or} \quad 8_C \end{array}$$

もうちょっと言っておくと $SO(8)$ には triality がある (図 20)。$SO(8)$ の Dynkin diagram は対称性の高い形をしているので、どこかに 8_V 表現を asign すると 8_C と 8_S がきまる。

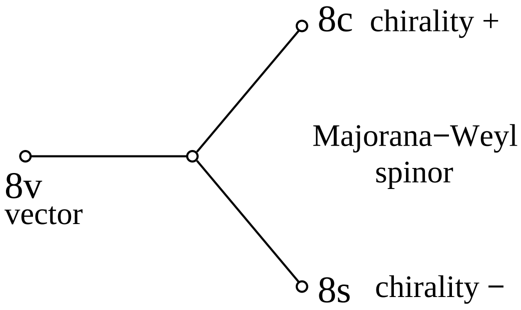


図 20: $SO(8)$ の triality

120 度ずつ回転すると重なりますので、この 3 つはいろいろと関係している。意味は、8_V は vector、8_C と 8_S は Majorana-Weyl spinor で、片方が chirality + だったら、もう片方は − 。それぞれ既約表現です。それで、boson の方はさっきの bosonic string とまったく一緒ですので、最後のほうでまた復活させるだけにして今は忘れます。そうして、新しく加えた spinor 座標、Grassmann 座標に関して運動方程式を考えたいんですが、これは boson と違って実は 1 階の微分方程式を満たします

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\theta^a = \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\tilde{\theta}^a = 0 \quad .$$

これは何を意味しているかというと、θ^a の方は任意の $(\tau - \sigma)$ の関数、$\tilde{\theta}^a$ は任意の $(\tau + \sigma)$ の関数。だから left-moving と right-moving が fermion になって分かれています。つまり、X^i は 1 個の中に left-moving と right-moving とを両方含んでいるので、X^i が 1 個と、θ^a 、$\tilde{\theta}^a$ が 2 個で自由度としては同じ。自由度の数勘定は合うようになっている。

closed string まず、closed string の方は

$$(\alpha_n^i,\ \alpha_n^i) \oplus (\theta_n^a, \tilde{\theta}_n^{a'}) \quad , \quad \left\{\theta_n^a\ ,\ \theta_m^b\right\} = \left\{\tilde{\theta}_n^a\ ,\ \tilde{\theta}_m^b\right\} = \delta^{ab}\delta_{n+m,0}$$

となって、θ は α と同じで fermionic な調和振動子になります。この zero mode、n, m が 0 の所だけちょっと特殊ですね。この新しく足した自由度は

$$\begin{gathered}(\text{fermionic な harmonic oscillator}) \ \oplus\ (\text{zero mode}) \\ \text{zero mode:} \quad \left\{\theta_0^a\ ,\ \theta_0^b\right\} = \delta^{ab}\end{gathered}$$

それで、closed string の場合は θ_n^a が right-moving で、$\tilde{\theta}_n^a$ が left-moving の mode と言いましたけど、fermionic な方の境界条件までとっても、単に θ 、$\tilde{\theta}$ に独立に periodic というのが境界条件ですね。だから独立な自由度は 2 つ出てきます。ですから、spinor 表現と言いましたが、left-moving と right-moving を 8_S にするか 8_C にするかは勝手に取ることができます。但し、8_S と 8_C は空間の parity 変換で繋がってますから、全体として 8_S と 8_C をごそっと取り替える自由度は物理的には trivial で名前を付け替えただけとなるので、本質的に違う理論というのは 2 通りになります。a 、a' のとり方によって、2 通りの理論があって

$$\begin{aligned}\theta^{\bar{a}} : 8_C\ (8_S)\ ,\ \tilde{\theta}^{a} : 8_S\ (8_C) \qquad &\longrightarrow \qquad \text{type IIA}\ \ \mathcal{N} = (1,1) \\ \theta^{\bar{a}} : 8_C\ (8_S)\ ,\ \tilde{\theta}^{\bar{a}} : 8_C\ (8_S) \qquad &\longrightarrow \qquad \text{type IIB}\ \ \mathcal{N} = (2,0)\end{aligned}$$

上のように、θ と $\tilde{\theta}$ とで違う表現にとった場合を type IIA 、両方同じ表現にとった場合 type IIB といいます。type II の II というのは、supersymmetry の数で、θ 、$\tilde{\theta}$ があるということに対応しています。10 次元の言葉で言うと supersymmetry が 2 なんですけど、$\mathcal{N} = (1,1)$ というのは、8_S の SUSY と 8_C の SUSY が 1 個ずつある。type IIB というのは、ある種 chiral な理論で $\mathcal{N} = (2,0)$ の SUSY。II というのは 10 次元の意味で勘定した SUSY の数。

ちょっとスピードアップしてるんで疑問があったら質問してください。

open string それから、open string の場合は right-mover θ と left-mover $\tilde{\theta}$ が境界条件で関係付きます。従って、今度は θ と $\tilde{\theta}$ を違う表現にとってると、境界条件で結びついたとき Lorentz 共変性がおかしくなってしまいますから、同じ表現にとっておかなければならない。従って、

$$\theta^a\ ,\ \tilde{\theta}^a : 8_C\ (\text{ or } 8_S)$$

と、とらなければならない。(もちろん parity 変換したら 8_S ですから両方 8_S ととってもよい。) あとは、closed string の半分の自由度だけ考えるという意味では bosonic の場合と一緒です。

状態

spectrum や何かも bosonic な場合と同じで、fermionic な oscillator も含まれて、fermionic な振動の自由度も入ってくるというだけなんですが、ちょっと non-trivial なのは θ の zero mode の部分です。

$$\begin{array}{cccc} \text{状態}\ : & (\text{振動}) & \otimes & (\text{重心})\ . \\ & \uparrow & & \uparrow \\ & \alpha, \tilde{\alpha} & & p^i, \theta_0^a, (\tilde{\theta}_0^a) \\ & \theta, \tilde{\theta} & & \{\theta_0^a, \theta_0^b\} = \delta^{ab} \end{array}$$

振動のところは θ や $\tilde{\theta}$ という fermionic な振動の自由度が含まれてくるだけで何も問題ないですね。ただ vacuum に creation operator をかけていけばよいのですから、 creation operator が bosonic だったり、fermionic だったりするだけで、統計性が変わるだけです。問題は重心の方で、こっちは単に p の回数だけでなくて θ の zero mode があるんですが、これが全部可換なら重心はこれらの関数になっていて superfield みたいになっているんですが、問題なのは θ_0 同士が反可換だということ。だから、そのまま全部関数にすることができないですね。どうすればいいかというと簡単で、この中から可換なものだけ半分に切り出してきてやる。

$$\begin{aligned} SO(8) &\supset SO(6) \otimes SO(2) \\ &\simeq SU(4) \otimes U(1)\ . \end{aligned}$$

θ^a というのは 8 次元の既約表現ですから、これを適当に半分にしたいんですが、半分にするためには $SO(8)$ の covariance を壊さざるを得ないですよね。$SO(8)$ をあきらめて $SU(4) \otimes U(1)$ の covariance だけ考えます。新しい oscillator として、

$$\left\{ \begin{aligned} S^{\dagger A} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\theta_0^{\bar{a}} + i \theta_0^{\overline{a+4}} \right) \\ S_A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\theta_0^{\bar{a}} - i \theta_0^{\overline{a+4}} \right) \end{aligned} \right. , \quad \{S^{\dagger A}, S_B\} = \delta^A{}_B\ , \quad A = 1, \cdots, 4$$

こういう 4 つの oscillator のペア。そうするとこれは fermionic な生成消滅演算子になっていて、これらの oscillator を $SU(4) \otimes U(1)$ の言葉で言うと、

$$\left\{ \begin{array}{lcccl} S^{\dagger A} & : & 4_{-1} & \rightarrow & 4\ \text{表現}\quad U(1)\ \text{charge}\ -1 \\ S_A & : & \bar{4}_{+1} & \rightarrow & \bar{4}\ \text{表現}\quad U(1)\ \text{charge}\ +1 \end{array} \right.$$

という表現になっている。 $SO(8)$ を諦めたおかげで生成消滅演算子を組めましたから、あとは普通の生成消滅演算子のように空間を作ればよい。基底状態は $S_A \left|0\right\rangle = 0$ から張っていけばよくて、これは fermionic な oscillator ですから有限次元表現で閉じます。

$\left\|0\right\rangle$	$S^{\dagger A}\left\|0\right\rangle$	$S^{\dagger A}S^{\dagger B}\left\|0\right\rangle$	$(S^\dagger)^3\left\|0\right\rangle$	$(S^\dagger)^4\left\|0\right\rangle$
●	□	□ □	□ □ □	●
1_{+2}	4_{+1}	6_0	$\bar{4}_{-1}$	1_{-2}

A は 4 種類しかありませんから、4 乗で終わりですね。5 つ掛けるとどこか必ず同じ index になって消えてしまう。これに $SU(4)\otimes U(1)$ のどういう表現が出てきているかということを見てみましょう。$|0\rangle$ は $SU(4)$ singlet で $U(1)$ charge +2 、$S^{\dagger A}|0\rangle$ は、$S^\dagger$ が 4 表現でしたから、4 表現は Young tableau 箱 1 個で表すとすると、$|0\rangle$ に比べて $U(1)$ charge 1 個下がりますから +1 。今度は $S^{\dagger A}S^{\dagger B}|0\rangle$ ですが、S と S は反可換ですが、A と B も反可換でなくてはいけなくて、反可換表現になって 6_0 、$(S^\dagger)^3|0\rangle$ は 3 個反対称で、$\bar{4}_{-1}$ 、$(S^\dagger)^4$ はもう 1 個 singlet に戻って 1_{-2} 。多分疑問を持つ人がいると思うので $U(1)$ charge がどういうふうに決まったかというと、

$$J=-\frac{1}{2}(S^{\dagger A}S_A-S_AS^{\dagger A})\ ,$$

もとをひっくり返してしまったのでマイナスがでてしまいましたが、対称表現はこういう自然な定義から出てきます。これを normal order の順番に直してやると、

$$J=S^{\dagger A}S_A+2\quad .$$

だから ground state に掛かけると +2 がでてくる。もちろんこれで決まるわけではないですけれども +2 というのは自然だということが分かります。それでこの S というのは、fermionic な mode でしたから、例えば $|0\rangle$ を bosonic なものにしたら、bosonic に fermionic なものが掛かっていますから $S^{\dagger A}|0\rangle$ は fermionic ですね。すると $|0\rangle$、$S^{\dagger A}S^{\dagger B}|0\rangle$、$(S^\dagger)^4|0\rangle$ が boson で、$(S^\dagger)^3|0\rangle$、$S^{\dagger A}|0\rangle$ が fermion ですね。また zero mode の表現をするために $SO(8)$ の covariance を諦めて $SU(4)\otimes U(1)$ に落っことしちゃいましたが、実際は $SO(8)$ の表現に組み直すことができて、

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{ll}(1_{+2},6_0,1_{-2}) & \rightarrow 8_V\\ (4_{+1},\bar{4}_{-1}) & \rightarrow 8_S\end{array}\right.\ \leftarrow\ \begin{array}{lllll}SO(8) & \supset & SO(6)\otimes SO(2) & \text{——} & (a)\\ & \simeq & SU(4)\otimes U(1) & \text{——} & (b)\end{array}$$

上 (a) は非常に分かりやすくて、$SU(4)\otimes U(1)$ というのは $SO(8)$ を $SO(6)$ と $SO(2)$ に分解したときの、$SO(6)$ が $SU(4)$ で、$SO(2)$ が $U(1)$ だったわけです。これは 8 次元の空間を、なんか 6 次元の空間と 2 次元の空間に分解して、6 次元の空間でどういうふうに変換するかというのを見てやろう、ということでした。これはまさにそういう形で、vector というのは i が今 1 から 8 まであったわけですが、i が 1 から 6、つまり 6 次元の部分を走るのはこの空間で 6 次元表現、i が 7 と 8 というのはこの 6 次元空間では scalar ですから、ちょうど 6 次元表現 (6_0) と scalar 2 個 $(1_{+2},1_{-2})$ で 8 次元表現ができます。下の場合 (b) は、$SO(6)$ を 2 次元 dimensional reduction することによって 2 つの spinor に分かれていて、4 とか $\bar{4}$ というのは $SO(6)$ の chirality を拾っているんですが、全体の chirality が $SO(6)$ の chirality と $SO(2)$ の chirality の掛け算ですから、$U(1)$ charge が +1 のほうはプラスの chirality で、-1 のほうはマイナスの chirality をとってやると $(4_{+1},\bar{4}_{-1})$ という spinor ができる、そういう形になっています。

open string 状態は結局どうなったかというと、superstring の open string の場合、

$$|\psi>=\{\alpha^i_n\cdots\theta^{\bar{a}}_{-m}\cdots|0\rangle\}_\alpha\otimes\ \begin{array}{ccc}\{A^i_\alpha(p) & \oplus & \lambda^i_\alpha(p)\}\\ \text{gauge 場} & & \text{gaugino}\\ 8_V & & 8_S\ \text{or}\ 8_C\end{array}$$

それで on-shell 条件は bosonic な場合とほとんど一緒で

$$-(p^\mu)^2 = M^2 = \frac{N}{\ell_s^2}\ . \tag{11}$$

ただし今度は N という mass の operator がちょっと違う。 bosonic な operator だけでなく、fermionic な operator もありましたから

$$N = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha^i_{-n}\alpha^i_n + n\theta^{\bar{a}}_{-n}\theta^{\bar{a}}_n \quad + 0 \ \right)\ .$$

重要なのは零点には何にもないということ。これは boson からくる部分と、fermion からくる部分がちょうど cancel しているという所からきています。また、(11) 式の右辺に係数が何もないことから、一番下、oscillator の ground state というのは

$$N = 0 \longrightarrow\ M^2 = 0 \ \ \text{massless}$$

となっていて tachyon が出てこない。さっき言ったように spectrum は、gauge 場と gaugino が 10 次元 vector multiplet を組んでいて、(A^i, λ^a)。もちろん $N \geq 1$ は massive tower。つまり tachyon は出てこない。No tachyon !!。

closed string それから closed string ですが、これは、量子数、spectrum だけを考える分には open string の tensor 積の 2 乗ですから

$$\text{closed string} \ \sim\ (\text{open string}) \otimes (\text{open string})\ .$$

以下、massless spectrum だけ考えます。さっきと一緒で tachyon は無くて、一番下は massless なんですが、その量子数は tensor 積から分かります。それで closed の場合は type IIA、type IIB の 2 種類ありましたから、各々の量子数を考えておきます。

まず、 type IIA は、

$$(8_V \oplus 8_S) \quad \otimes \quad (8_V \oplus 8_C) \quad .$$

さっき $8_V \oplus 8_S$ というのは open string といいましたが、これは 1 個の θ^a_0 (zero mode) の表現を考えますと、8_V と 8_S が出てきた。type IIA というのは、一方を 8_C ととったら、もう一方を 8_S と取りなさいっていうものでした。$_S$ と $_C$ が丁度ひっくり返って vector like な場合になっている。これの spectrum を考えるには、tensor 積を取っていけばよい。tensor 積ももちろん分配法則が成り立ちますから、えいやっ、と分けていきますと、4 種類の表現があるということが分かります。それぞれの tensor 積を作ってやりますと、結局、

$$(8_V \oplus 8_S) \otimes (8_V \oplus 8_C) = \begin{bmatrix} & (8_V \otimes 8_V) \\ & \\ \oplus & (8_S \otimes 8_C) \\ & \\ \oplus & (8_V \otimes 8_C) \\ & \\ \oplus & (8_S \otimes 8_V) \\ & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35_V \oplus 28_V \oplus 1 & \leftarrow & (\mathrm{NS}-\mathrm{NS}) \\ \quad (g_{ij} \oplus B_{ij} \oplus \phi) & & \\ 8_V \oplus 56_V & \leftarrow & (\mathrm{R}-\mathrm{R}) \\ \quad (A_i, A_{ijk}) & & \\ 8_C \oplus 56_C & \leftarrow & (\mathrm{NS}-\mathrm{R}) \\ \quad (\lambda^{\bar{a}}, \psi^{\bar{a}}_i) & & \\ 8_S \oplus 56_S & \leftarrow & (\mathrm{R}-\mathrm{NS}) \\ \quad (\lambda^a, \psi^a_i) & & \end{bmatrix}$$

こういう表現に分解されます。$8_V \otimes 8_V$ はちょうど symmetric traceless g_{ij} , antisymmetric B_{ij} , dilaton ϕ になります。 Green-Schwarz 形式でやると manifest にはわからないんですが、実は Neveu-Schwarz 形式 でやると、 NS-NS という sector から出てくるので、この部分を NS-NS と呼ぶことにします。要するに vector の足が 2 つあるということですね。vector の足を 2 つ持った場で、それの symmetric traceless の部分と antisymmetric の部分と trace の部分。$8_S \otimes 8_C$ は、 spinor の足を 2 つ持った、ただし chirality の違う、 2 つの bispinor みたいな表現で、8_V と 56_V 。これは vector と 3 階の反対称 tensor で、 D-brane とかを考えるとき重要になってくる R-R 場。それからあとは fermion で、$8_V \otimes 8_C$ の部分は $8_C \oplus 56_C$ で、gaugino と gravitino。$8_S \otimes 8_V$ は $8_S \oplus 56_S$ 、これは 上とは chirality をひっくり返した gaugino と gravitino。それで重要なことは、bosonic string の spectrum というのは NS-NS だけでしたよね。それを supersymmetric にするには fermion を足すだけじゃなくて、実は boson もちょっと足しておかないといけない。それが R-R の部分、(A_i, A_{ijk}) です。これは 1 階の普通の vector と 3 階の反対称 tensor のなんか gauge 場みたいなもの。

それで type IIB の方も考えると、bosonic な理論を super にするために加えておかなければならなっかた bosonic 場、つまり R-R 場に、IIA と IIB とで variation があるというのがわかります。 type IIB の場合には、$8_V \oplus 8_S$ と同じものを tensor 積します。今度は θ と $\tilde{\theta}$ を同じ chilarity にとってあったので、出てくる表現も同じ chilarity です。これはやっぱり同様に考えていくと、

$$(8_V \oplus 8_S) \otimes (8_V \oplus 8_S) = \begin{bmatrix} 8_V \otimes 8_V \\ 8_S \otimes 8_S \\ \\ 8_V \otimes 8_S \\ 8_S \otimes 8_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35_V \oplus 28_V \oplus 1 & \leftarrow & (\mathrm{NS-NS}) \\ 1 \oplus 28_S \oplus 35_S & \leftarrow & (\mathrm{R-R}) \\ \quad (\chi, A_{ij}, A^+_{ijkl}) & & \\ 8_S \oplus 56_S & \leftarrow & (\mathrm{NS-R}) \\ 8_S \oplus 56_S & \leftarrow & (\mathrm{R-NS}) \end{bmatrix} .$$

NS-NS の $35_V \oplus 28_V \oplus 1$ は IIA と一緒ですが、R-R が違っていて $1 \oplus 28_S \oplus 35_S$ 。もともと bosonic な理論は NS-NS だったんですから、その部分は共通で super 化する時に 2 通りのやり方があるということです。付け加える boson がちょっと違っている。IIB は scalar と 2 階の反対称tensor 場と 4 階の反対称 tensor 場。但し self-dual part を取ります。それと、2 種類同じ $8_S \oplus 56_S$ が 出てくる。だから結局、IIA と IIB 2 種類の違いは、NS-NS 部分は一緒で、それに足す boson が違ってて、fermion は gravitino と gaugino の 2 種類出てくるんですが、それは 2 種類が違う chirality 、つまり vector-like に出てくるか、同じ chirality で chiral に出てくるか、そういう違いになります。あとで重要になるのが R-R 場。

それでこの 4 階反対称 tensor の + は、今は 10 次元の理論なんですが、そのとき 4 階反対称 tensor 場の field strength というのは、 5 階の反対称tensor

$${}^*H_{(5)} = H_{(5)} = dA_{(4)}$$

となっていて、 5 階の反対称 tensor は 10 次元では中間次元を持っていますから、これの Hodge star はやっぱり 5-form で、これが self-dual と anti self-dual に既約分解できる。それの self-dual part だけ持ってきなさいというのがこの + の意味です。ここで切ります。

(1 日目 終了)

(2 日目)

2.2 D-brane (type II theory)

それでは、2 日目の講義を始めたいと思います。ちょっとペースをゆっくりやりすぎたので、準備したのを全部やりきれないと思いますけれども、AdS/CFT というのはどういうものかがわかるぐらいのところまでは進みたい思います。

昨日は、まず最初に 't Hooft が考えた gauge 理論と string の duality ということをお話ししました。彼が考えたことは非常に直感的に分かりやすいことだったんですけれども、gauge 理論というのは非常に相互作用が強い領域では string みたいなものを基本的な自由度として記述出来るのではないかということでした。 AdS/CFT 対応というのは、それをもうちょっと具体的にいわゆる fundamental string として dual な理論が実現されるようなそういう例を与えるということを見ていきました。それで、昨日はその fundamental string、superstring の review で終わってしまったのですが、それに続いて今日はいよいよ D-brane のお話をしたいと思います。

2.2.1 D-brane の直感的理解

D-brane というのは、type I の理論なんかにもあるんですけれども、ここでは type II の理論に存在する D-brane に話を限ります。 typeII 理論というのは昨日やりましたけれども closed string の理論です。

それで昨日 string 理論の復習をするときに、open string に関して Neumann タイプと Dirichlet タイプと 2 種類の境界条件が存在すると言いました。ところが Dirichlet タイプの境界条件というのは、時空の並進対称性を壊してしまうので、 Neumann タイプに限って考えました。しかしながらですね、その何年か前に Polchinski という人が思いついたアイディアに基づいているんですけれども、最近は Dirichlet タイプの条件というのも実は存在していいのではないかと言われています。この Dirichlet タイプの境界条件というのはどういうことを物理的に表しているのかというのをちょっと話を一般的にするために、2 種類の境界条件を混ぜて考えます。

$$\begin{cases} X'^i(\tau,\sigma=0,\pi)=0 & i=2,\cdots,p \qquad \text{(Neumann)} \\[2ex] \dot{X}^i(\tau,\sigma=0,\pi)=0 & i=p+1,\cdots,9 \qquad \text{(Dirichlet)} \end{cases}$$

まず i が 2 から p までは Neumann 条件を考えます。それから、i が $p+1$ から $d-1$、今 10 次元ですので具体的にもう 9 としてしまいますが、9 までは Dirichlet 条件。ただし昨日やりましたようにいま light-cone gauge をとっていて、昨日は light-cone gauge x^+ っていう方向を 0 と 9 の方向でとっていたんですが、ちょっと都合により以下の話では light cone $x^\pm$ というのは x^0 と x^1 の方向でとることにします。従って transverse 座標というのは i が $2,\cdots,9$ という方向にとることにします。

$$x^\pm = x^0 \pm x^1\,, \qquad x^i \quad (i=2,\cdots,9)$$

この境界条件をもとに昨日の mode 展開をやり直してやります。そうすると Neumann の方向に関しては昨日と同じで、こういう mode 展開を持つ。

$$X^i = x^i + {\ell_s}^2 p^i \tau + \sqrt{2}\ell_s\, i \sum_{n\neq 0} \frac{{\alpha_n}^i}{n} e^{-in\tau}\cos(n\sigma) \qquad\qquad i = 2,\cdots,p$$

微分をして端で 0 ですから cos 型の展開をもつ。かたや Dirichlet 型の方ですが、これは boundary condition がかわっていますから、こういう形で sin 型の展開になります。

$$X^i = x^i + \sqrt{2}\ell_s \sum_{n\neq 0} \frac{{\alpha_n}^i}{n} e^{-in\tau}\sin(n\sigma) \qquad\qquad i = p+1,\cdots,9$$

振動の mode ついては cos 型と sin 型が違いますが、どちらも基本的に同じ自由度になります。だから違うのはこの zero mode の部分で、昨日はこれを位置と運動量と言いましたが、Dilrichlet 型の方は境界条件のおかげでここに運動量の項が出られなくなります。あるいは言い換えれば、transeverse 方向に関しては運動量は恒等的に 0 でないといけない。これは結局どういうことをいってるかというと、固定端の境界条件になっている。つまり絵を描くと (図 21) こういう $(p+1)$ 次元の超曲面があって、string の端っこというのはこの超曲面の上に固定されている。超曲面というのは $i = 2,\cdots,p$ の方向と $x^{\pm}$ を含めた $(p+1)$ 次元で張られているんですが、これと直交する方向が Dirichlet 条件をとっている方向ですね。それで、昨日言ったように Neumann 条件 というのは自由端の条件でしたから string の端はこの面内では自由に動くことができる。ところが Dirichlet 条件というのは固定端の条件でしたから Dirichlet 方向にはもうピン止めされて動けなくなっている。従って、重心運動の運動量が 0 に制限されている、そういう構造になっています。

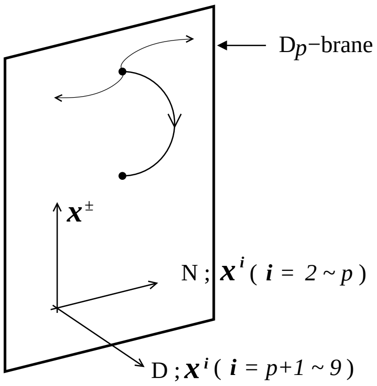


図 21: D-brane

それでこの $(p+1)$ 次元超曲面のことを Dp-brane と呼びます。D は Dirichlet 条件の D で、p というのは $p+1$ 次元に広がった (1 は時間) 膜を一般化したものであるという意味で Dp-brane と呼んでいます。あるいは、p を指定せずに一般的に、あるいはいろんな p をひっくるめて、D-brane というふうに呼んでいます。

実はこの条件というのはこれだけじゃなくて、もうちょっと一般的な配位も記述していて、例えば brane が何枚かあって図 22 の様に 0 の端と π の端が何か違う D-brane の上にのっているような配位もこの境界条件は許しています。あるいは、open string の両端が同じ brane に乗っかっているものとか。

ちょっとペースアップしていきたいんですが、D-brane というのは要するにこういう超曲面上に string の端がのっかっちゃっているような brane を表している。

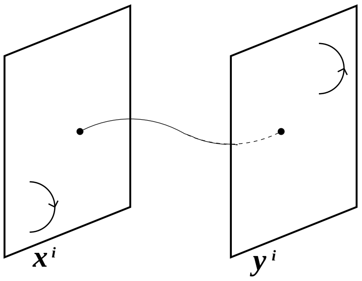


図 22: 配位の例

それでミソはですね、こういう open string を導入すると、実はこの D-brane というのは、type II において closed string の source になっているということが分かります (図 23)。

source になっているという意味は、何か closed string を emit することができる。これはいわゆる string のあの古い意味での duality、s-channel と t-channel の duality、あるいは string の最近の perturbative の言葉で言うと modular 変換によって保証されています。

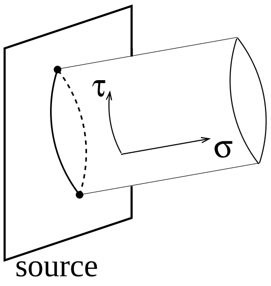


図 23: closed string の source

何をいっているかというと、例えば brane に乗っている端だけに注目しますが、こうずーっとのびてる open string があるわけですね。この延びている方向を σ、それに対して時間発展方向を τ とすると、これは時間的に pair creation を起こしてもう一回 pair annihilation を起こすという 1-loop のグラフです。そういうグラフは、実は string ではこの τ と σ をひっくり返して解釈しても同じグラフになります。あるいは昨日の言葉でいうと、τ と σ に関して勝手に reparameterization してもいいわけですから τ と σ を逆にしても同じプロセスが存在するはずです。その場合このグラフがどう見えるかというと、brane から closed string がポンと出てきてシューッと飛んでいくと。これは何を意味しているかというと、D-brane という超曲面が closed string の source になっている、何か charge をもっていると、そういうことを意味しています。

それで、通常はこれが string 理論の soliton だとか、非摂動的な励起だというような言い方をしますが、あんまりその辺の厳密なところはよく分からないですね。実際にこれから見ますけれどもこういう brane に対応するような古典解みたいなのを作ってやっても、決してそういうもんにはなってなくて、何か singularity をもった、source を入れたような解になっています。本当にそういうふうに soliton みたいな解釈ができるかどうかっていうのはよく分かりませんが、少なくとも今のところこういう string を非摂動的に定義するためには perturbative な string だけではなくて、こういう D-brane みたいなものもひっくるめて、ひとつの理論を構成しなければならないと考えられています。

もうひとつ Polchinski の発見したミソといいますかね、重要なことがあります。それは、こういう Dirichlet 条件を満たす open string の sector を理論に導入してこの string を量子化すると、実は brane のゆらぎを量子化するということと等価であるということです。これもうちょっと説明しますが、string を量子化するというのは昨日やったように、展開した mode に対して交換関係を設定して、波動関数を作ってやるということですね。一方、brane のゆらぎを量子化するというのはどういうことかというと、今 background に超曲面がありますが、この超曲面に何かぶつけてやると、その辺りに波がフワフワっと起きますが、その微小なゆらぎに関して量子化するという意味です。実は brane のゆらぎを量子化するというのと、string を量子化するというのは実は等価であるということを彼は発見しました。この対応は何を意味しているかというと、ここで量子化する open string の spectrum の中に実は D-brane の fluctuation が含まれている、正確にはそういうことです。

ちょっと詳しく説明しておく時間がないので直観的な説明しかできないんですけれども、これといま比較して理解してもらいたいと思うのは、通常の closed string の量子化というのは時空を量子化したことになる。何か時空の中に飛んでる closed string を量子化していたつもりが、いつの間にかそれは時空の量子化を記述している。これは何を意味している

かというと、closed string の spectrum の中に graviton が含まれている。これは昨日やりましたが、graviton を量子化することは取りも直さず何かある background のまわりの時空の fluctuation を量子化していることに他なりませんから、実は closed string を量子化すると、実はその入れ物だと思っていた時空のゆらぎに関して量子化してしまうことになっている。

string というのはこういう何か非常に fancy な性質を持っているわけですけれども、Dirichlet 条件をもつ open string を量子化すると、本来固定端を表していた平面のゆらぎまで量子化してしまうことになる、これが D-brane です。

2.2.2 D-brane の具体的な考察

もうちょっと具体的に見てやります。closed string の massless spectrum に graviton が含まれていることから、時空の量子化になっていることが分かったわけですから、それに対応して open string の massless spectrum がどういうものかというのを考えてみます。昨日やった open string は Neumann の場合でしたが、一般に Neumann であろうと Dirichlet であろうと基本的には同じことで、open string の massless spectrum からは 10 次元の super Yang-Mills 理論が出てきます。

gauge 場を A_M $(M = 0, \cdots, 9)$ とします。これに対応して何か fermion、gaugino が出てきますが、それはちょっとおいときます。今度 Dirichlet 条件を課すわけで、そうすると今言ったように、brane と垂直な方向には動かなくなります。運動量が 0 に制限されます。これは結局何を意味しているかというと、いわゆる通常の dimensional reduction のプロセスをしているのと同じことが起きます。dimensional reduction の場合は、通常は transvers 方向に関しては半径 R のトーラスにコンパクト化してやるわけですが、この時もその方向の運動量は N/R で量子化されています。dimensional reduction というのは R を 最終的に 0 にもっていってしまうのですが、R を 0 にもっていくと、transverse 方向に運動量を持っている mode というのは全部 decouple して zero mode だけが生き残るわけで、ちょうど Dirichlet 条件を課したのと同じ効果を引き起こします。結局、Dirichlet 条件を課した open string の zero mode は brane 上に制限された $(p+1)$ 次元の super Yang-Mills 理論になります。ただし with 何かプラスアルファ、何かはこれから書きます。今は 10 次元の vector を考えていたんですが、dimensional reduction すると 10 次元の座標に依らなくなって、$(p+1)$ 次元の座標にしか依らなくなるので、場の成分に関しても 0 から p の方向と $p+1$ から 9 方向に関してはちょっと別扱いします。

$$\begin{array}{ccl} A_\mu(x^\mu) & \longrightarrow & (\ A_\mu(x^\mu)\ ,\ X^i(x^\mu)\ ) \\ & & \mu = 0, \cdots, p \quad , \quad i = p+1, \cdots, 9\ (1, \cdots, 9-p) \end{array}$$

A^i というのを X^i と書きました。あるいはもう $p+1$ から始めるのは何か変だから 1 から $9-p$ と書くことにする。

それで、物理的に何を意味しているのかというと、これは $(p+1)$ 次元の Yang-Mills 理論で $A_\mu(x^\mu)$ は $(p+1)$ 次元の gauge 場、X^i は $(p+1)$ 次元の scalar 場なんですが、これは実は brane の fluctuation を記述している、あるいは brane の座標を記述している。も

うちょっとちゃんと書くと、x^μ というのはこの brane の座標だったのですが、$X^i(x^\mu)$ は brane 上の関数でこの垂直方向の座標になっている。ちょうど string の場合に $X^i(\tau,\sigma)$ が何か worldsheet を記述していたように、$X^i(x^\mu)$ によって何かの worldvolume が記述されています。あとプラス fermion 。

あと supersymmetry ですが、D-brane が無い場合、即ち bulk の理論は type II closed string で、10 次元 $\mathcal{N}$=2 supersymmetry を持っています。これに対して D_p-brane は open string ですから 10 次元 $\mathcal{N}$=1 理論、正確にはそれを $d=p+1$ 次元に dimensional reduction した理論になっています。両者が統合した系には当然 $\mathcal{N}$=1 supersymmetry しか存在しませんから、これをもって D-brane が存在すると supersymmetry が半分壊れるという言い方をしたりします。$\mathcal{N}=1$ とか 2 とかいう言い方は次元によっていろいろ既約な spinor の成分の数が違いますので、通常次元に渡ってこういうことを議論する時には成分の数で議論します。10 次元の $\mathcal{N}=1$ というのは Majorana Weyl spinor 1 コ分という意味で 16 成分、従って “$\mathcal{N}=16$” という言い方をしたりします 。“$\mathcal{N}=16$” と呼んでおくと次元を下げた時にも議論ができて、例えばこの意味で $(p+1)$ 次元の “$\mathcal{N}=16$” の super Yang-Mills 理論と言ったりもします。例えばあとでやる (3+1) 次元の場合は、1 コの Majorana spinor は成分 4 つもってますから、“$\mathcal{N}=16$” というのは普通にいっている $\mathcal{N}=4$ の super Yang-Mills 理論になっています。

昨日は Dirichlet 条件というのは並進対称性を壊してしまって嫌なので open string に関しては Neumann 条件だけをとりましたが、今日は Dirichlet 条件の方を考えました。それでは、並進対称性がどうなっているかと言うと、実はこの X^i が並進対称性の破れに対する南部-Goldstone mode になっている。X^i が南部-Goldstone mode になっているというのはどういうことかというと、こういうふうに何か brane をおくことによって、破れてしまった並進対称性を、この brane の位置に関しても全体に渡って path integral して足しあげてやることによって、並進対称性を最終的に回復させてやりましょう、そういうことです。

あるいはもうちょっと対称性の言葉の言い方をすると、実は並進対称性というのは linear な表現から non-linear な表現になっている、ま、それぐらいの説明にしておきます。あんまりこまかくやっていると、時間がなくなってしまうので。

2.2.3 D-brane を記述する low energy effective theory

D-brane が 1 枚のとき $\cdots$ ($U(1)$ gauge $\oplus$ scalar X^i)

D-brane を記述する low energy effective theory(LEET) はどうなっているかというと、D-brane が 1 枚の時は、$U(1)$ の gauge 理論とプラス scalar X^i、scalar X^i というのは brane 座標だった、こういう理論です。それで、low energy effective theory という言い方は、厳密に言うとあんまり何も定義していなくて、重力が decouple する極限を同時にとっているんですが、それについてはもうちょっと後で具体的にやります。effective action は、

$$\mathcal{S}=T_p\int dx^{p+1}\left(-\frac{1}{4}{F_{\mu\nu}}^2-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu X^i\right)^2+\text{fermions}\right)$$

なんかこんな形。$U(1)$ の gauge 場、field strength の部分と、scalar X^i の kinetic term、そ

れで、X^i が南部-Goldstone mode だったということから分かりますが、いわゆる mass term みたいなのはでてきません。massless な mode になっています。fermion は、“$\mathcal{N}=16$” になるようなものです。T_p は Dp-brane の tension。ここまでは昨日やった open string の単純な拡張のような形になっています。

D-brane が N 枚のとき $\cdots$ ($U(N)$ YM $\oplus$ adj Higgs X^i)

ところが、D-brane が 2 枚以上あるときは、昨日の open string の話からもうちょっと拡張されます。一般に何か N 枚のときは実は、$U(N)$ の Yang-Mills 理論プラス adjoint の scalar、まあ Higgs、こういう系になります。T_p は、$U(1)$ の場合完全に free ですので Yang-Mills coupling もなにもないですが、non-Abelian になると Yang-Mills coupling の 2 乗分の 1 に比例しているということがわかります。kinetic term に関しては微分をうまく covariant derivative に、あと potential がついてきて、全体の 2 乗のプラス fermion。

$$\mathcal{S}=\frac{1}{g_{YM}^2}\int dx^{p+1}\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}{}^2-\frac{1}{2}\left(D_\mu X^i\right)^2-\frac{1}{2}\left[X^i,X^j\right]^2+\mathrm{fermions}\right) \tag{12}$$

それで、何の説明もなく N 枚あると $U(N)$ の非可換 gauge 理論になると言いましたが、それについてもうちょっと具体的に見るために $N=2$ の場合について考えてみましょう。

(ex) $N=2$ (2 枚の brane) (図 24)

この brane を記述する low energy effective theory の真空というのは brane の基底状態に対応する。これは、low energy effective theory の excitation がこの D-brane の excitation を記述する理論になっていると言いましたが、逆にいうと、場の理論の真空というのは brane の基底状態を記述していることになります。真空と基底状態が対応していると言いましたが、一般にこういう supersymmetry が高い場合の真空というのは縮退していまして、その縮退している方向を何か moduli 空間と言います。その moduli 空間というのは、ちょうど D-brane の基底状態がそのまま平行移動したり回転したり、そういう運動する配位空間みたいなものと対応することになります。それを見るために今真空がどういうものかをもうちょっと具体的に考えてみます。場の理論の真空ですから当然 vector のような足をもったものは 0 ($A_\mu\equiv 0$)。それから、scalar に対しても時空に関しては constant ($\partial_\mu X^i\equiv 0\Rightarrow X^i=\mathrm{const.}$)。こういう配位が当然一番 energy が低いわけですね。kinetic energy だとか $F^{\mu\nu}$ みたいなものを 0 にしたければ、0 にとればいい。

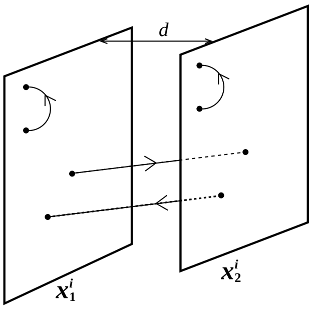


図 24: 2 枚の brane

$$\begin{aligned}&\text{LEET の真空} \iff \text{D-brane の基底状態}\\&\hookrightarrow (A_\mu\equiv 0,\ \ \partial_\mu X^i\equiv 0)\end{aligned}$$

それでさらにこの potential があって、potential の minimum が基底状態、真空を表すわけですが、supersymmetry がある場合は、potential の minimum が 0 になるところが真空に対応していて、これを解いてやると

$$V=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[X^i,X^j\right]^2\equiv 0 \quad \Rightarrow X^i=\left(\begin{array}{cc} x_1^i & 0 \\ 0 & x_2^i \end{array}\right) \quad .$$

X^i というのは何かこういう対角でないといけない、あるいは対角であれば、この x_1^i や x_2^i がなんであっても V が 0 であるということが分かります。

この low energy effective theory の真空は、ちょうど D-brane の transverse 空間の中での位置を記述しています。そういう意味で low energy effective theory の真空と D-brane の基底状態というのは対応している。あるいは逆に言うと、この D-brane が 2 枚の時に effective theory が $U(2)$ の Yang-Mills 理論になるということを正当化しているわけです。さらに、基底状態はそういう意味で D-brane の位置、x_1^i は D-brane-1 の位置、x_2^i は D-brane-2 の位置というふうに対応しているということが分かりました。

それでは次にこの background 上の fluctuation について比較してみます。fluctuation に関しては 4 つ成分があるはずですね。今 x^i に関する fluctuation に限って、gauge 場の方はちょっと忘れます。

$$X^i=\langle X^i\rangle+Y^i=\left(\begin{array}{cc} x_i & \\ & x_i \end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{array}\right)$$

X^i を真空期待値プラス fluctuation と考えて、この fluctuation に関して量子化するわけです。これを見て分かるように fluctuation に関しては対角と非対角と区別して考える必要があって、対角成分の fluctuation に関しては、ちょうど同じ brane に両端をもつ string の一番低い energy の fluctuation に対応していて、それは massless になります。これは逆に言うと、各々の brane に対する南部-Goldstone mode です。それから非対角成分に関しては、D-brane-1 と D-brane-2 にまたがるような string で type II string の場合は向きがついていますから二通りありますが、それは y_{12}, y_{21} に対応していて、実は、それは対角成分がこういう真空期待値をもっていることから、Higgs mechanism をつかって、massive になります。その mass は string scale を使ってこういう形に書けます。

- 対角成分 : massless $\sim$ (NG mode)
- 非対角成分 : $\text{mass}\sim\frac{1}{{\ell_s}^2}\left\|x_1^i-x_2^i\right\|\sim T_{st}d$

$\|x_1^i-x_2^i\|$ は brane 間の垂直距離 d です。string の tension というのは $1/{\ell_s}^2$ のことですから、mass は string の tension × d となります。

両端が同じ brane にある open string というのは tension がありますから、基底状態は普通の string と同じで、プチッとつぶれた完全に energy を持たない状態、massless の状態です。しかし 2 枚に張られているとピンと張った string は、これ以上縮むことはできませんから、massless になることは出来なくて、だいたいこの string の tension × 距離 d くらいの最低 energy をもっているわけです。ちょうど非対角成分の fluctuation というのがそれと同じオーダーの mass をもっているということから、fluctuation に関しても、うまいこと gauge 理論と D-brane の理論とが対応しているということが分かります。

また、特に興味深いのはこの 2 枚の brane が重なるときですね。2 枚の brane が重なるときは、この真空期待値の部分が x_1 と x_2 が等しくなるということですから、これは行

列として単位行列に比例してしまうわけで、その場合は非対角成分も massless になります。あるいはこれは何を意味しているというと、gauge 理論の言葉で言うと、$U(2)$ だった gauge 群が $U(1) \times U(1)$ に spontaneous breaking を起こした、そういう形になっています。

$$U(2) \longrightarrow U(1) \times U(1)$$

そういう意味で gauge 理論と D-brane の基底状態というのは完全に等価だというふうにみなすことができる。これぐらいでなんか、N 枚ある場合は $U(N)$ の gauge 理論で記述されるということを理解したことにします。

あ、すいません、あんまり進み具合いがはやくなかったので今日は少しスピードアップしているので、ついていけなくなったらドンドン質問して下さいね、そうしないとドンドン進みます。

もういっぺん言うと、N 枚の D-brane を記述する effective theory というのは、$U(N)$ の gauge 理論で記述される。もうちょっと直観的に言っておくと、brane を記述するというのは、string の理論をそのまま拡張すると、brane 座標 $X^i(x^\mu)$ があれば十分のような気がしますが、実は D-brane というのはもうちょっと構造をもっていて、これに何か gauge 場もないといけない。何かそれに gauge 場を couple させてはじめて D-brane の effective theory が作れる、そういう構造になっています。それと、brane が N 枚あると単純にこれを N コもってくるんじゃなくて、何か $U(N)$ の gauge 理論、要するに X^i が $N \times N$ の行列、Hermite 行列に拡張されると、そういう 2 つのことを理解しておけばいいんじゃないかと思います。

2.2.4 いくつかの性質

それから、もう D-brane に関してはこれ以上あまり深入りはしないですが、いくつか触れておかないといけないことがあるので、まずいくつかの性質について、あんまり説明なしに列挙しておきます。

Dp-brane tension (Energy/unit vol) ∼ “mass”

$$T_p \sim \frac{1}{g_{\rm st}\,(\ell_s)^{p+1}} \longrightarrow \infty$$

まず tension に関して。tension は別の言葉で言うと、brane がもっている単位体積当りの energy です。だから、これは何か粒子でいうと mass に対応するようなものです。これはちょうど $1/g_{\rm st}$ に比例します。次元が $(p+1)$ 。従って $g_{\rm st}$ を 0 にもっていった時に、無限に固くなりますね。0 にすると無限大ということは、これは non-perturbative な何か励起に対応している。それから、(12) 式で Yang-Mills 理論の effective action を書いたのですが、それと比較することによって、$g_{\rm YM}$ がおおむね $1/g_{\rm st}$ だということがわかります。

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \;&=\; \underline{T_p}\int dx^{p+1}\,\mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}{F_{\mu\nu}}^2+\cdots\right) \\ &\quad\;\downarrow \\ &\quad\;\frac{1}{g_{\rm st}} = \frac{1}{g_{\rm YM}^2} \quad \longrightarrow \quad g_{\rm YM}^2 \sim g_{\rm st} \end{aligned}$$

ⅡA

D_p		RR 場	Field strength
D_0	→	$A_{(1)}$	$F_{(2)}$
D_2	→	$A_{(3)}$	$F_{(4)}$
D_4	→	$\tilde{A}_{(5)}$	$\tilde{F}_{(6)} = {}^*F_{(4)}$
D_6	→	$\tilde{A}_{(7)}$	$\tilde{F}_{(8)} = {}^*F_{(2)}$

ⅡB

D_p		RR 場	Field strength
D_{-1}	→	A	$F_{(1)}$
D_1	→	$A_{(2)}$	$F_{(3)}$
D_3	→	$A^+_{(4)}$	$F_{(5)} = {}^*F_{(5)}$
D_5	→	$\tilde{A}_{(6)}$	$\tilde{F}_{(7)} = {}^*F_{(3)}$
D_7	→	$\tilde{A}_{(8)}$	$\tilde{F}_{(9)} = {}^*F_{(1)}$

表 1: D-brane spectrum と RR 場 ($f_{\mu 1 \cdots \mu p} \equiv f_{(p)}$)

dimension counting をやってやるともうちょっと正確に、$g^2_{\rm YM}$ は

$$g^2_{\rm YM} = g_{\rm st}\,(\ell_s)^{p-3}$$

こういうふうに比例していることが分かります。$p = 3$ のときは、通常の 4 次元の Yang-Mills 理論ですから、$g_{\rm YM}$ というのは次元をもっていない。今 string coupling というのは dimensionless だと定義しています。一般に次元が $(1 + 3)$ 次元以外では、Yang-Mills coupling というのは次元をもっていて、その次元がちょうどこの長さ ℓ_s の $(p - 3)$ ということになっています。

D-brane spectrum と R-R charge

それから次に D-brane の spectrum に関してコメントしておきます。今 D-brane をその Dirichlet boundary condition で定義しましたが、今 boson に関する boundary condition しか議論していませんでした。だからそういう意味で bosonic string には任意の次元、任意の p に関して brane というのが存在するのですが、superstring にいくと、昨日言ったように時空を superspace に拡張した時の Grassmann 座標に対応する変数 θ、string 座標というのがあるので、そいつに関しても boundary condition を課さなくちゃいけない。それはもうここではやりませんが、その boundary condition は、任意の p に対して課すことはできません。実は表 1 のような spectrum が出てきます。

type ⅡA と type ⅡB とで θ という Grasmann 座標の入り方が違っていましたから、brane に関しても ⅡA と ⅡB と違っていまして、type ⅡA に存在できる brane というのは p が偶数の brane になっています。D_0-brane、D_2-brane、D_4-brane それから D_6-brane。原理的には D_8-brane というのも存在できるんですが、D_8-brane というのはあんまり dynamical な自由度をもっていないので、ちょっとここでは除外しておきます。

D-brane というのは closed string の source になっていると言いましたから、それぞれ何かある種の charge をもっているわけですが、それは Ramond-Ramond charge と呼ばれ、R-R 場と couple している。それで、type ⅡA 理論の R-R 場というのは昨日の話を思い出すと、1-form つまり普通の gauge 場と、3-form、3 階反対称 tensor の gauge 場をもっていました。それぞれに関して D_0-brane、D_2-brane というのが couple している。どのように couple しているかというのはすぐ後で説明します。また、1-form gauge 場 $A_{(1)}$ の field strength というのは 2 階反対称 tensor $F_{(2)}$ であって、3-form gauge 場 $A_{(3)}$ に対しては 4 階反対称 tensor $F_{(4)}$ である。また、dual、magnetic な coupling については、5 コ足を持っている potential と couple する。5 コ足を持っている potential の field strength は、4 コ足を持っている field strength の dual から作られます。10 次元ですと、そういう 10 コ足を持った ϵ-tensor があってそれを使って dual になっています。D_6-brane は 7 本足 potential と couple していていて、field strength は 8 本足で $F_{(2)}$ と dual。

こういうふうに ϵ-tensor を使って足を引っくり返すことを、Hodge star という * の記号を使って記述します。だから 2 階反対称 tensor というのはこの 10 本足の ϵ tensor で足を移してやると 8 本足になって、それの potential というのは 7 本足で、それと D_6-brane が couple しています。

type IIB の方は今度は奇数次元 brane $D_{(-1)}$、D_1、D_3、D_5、D_7 が存在します。この Dp-brane といった時の p というのは、空間的にどれだけひろがっているかを考えてたわけで、例えば D_1-brane というのは空間 1 次元にひろがっているので、何か string みたいなもの。あるいは、D_0-brane というのは空間的にひろがっていないので何か particle だった。D_{-1} というのは、instanton と呼ばれているもので、(-1) というのは空間的にはひろがっていなくて、時間的にも何か localize している、それを (-1) で表しています。これは通常 D-instanton と呼ばれています。これは scalar の R-R 場と couple しています。それで type IIB の R-R 場というのは scalar と、2 階反対称 tensor 場と 4 階反対称 tensor 場の self-dual なパートと言いましたが、それに各々 couple している。それから D_5-brane というのは $\tilde{A}_{(6)}$ と couple して、これの field strength は $\tilde{F}_{(7)}$。それから D_7-brane と couple するのは $\tilde{A}_{(8)}$ で、その field strength は $\tilde{F}_{(9)}$、これは $F_{(1)}$ と Hodge dual。それぞれこういう反対称 tensor 場 potential と couple しています。

charge をもっているというのはどういう意味かというと、D-brane とこの R-R 場がどういうふうに couple しているかというのを指定すればいいわけで、次のような interaction Lagrangian を通じて couple している。

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \mu_p \int_{\Sigma(p+1)} A_{p+1}$$

$\Sigma(p+1)$ というのは $(p+1)$-brane の worldvolume。つまり worldvolume 上の R-R 場の積分で、これは string 座標で書かれていてますが、brane 座標を使うとどう書かれるかというと、

$$\mathcal{S}_{\text{int}} = \mu_p \int_{\text{world vol.}} A_{i_1 \cdots i_{p+1}}(X) \epsilon^{a_1 \cdots a_{p+1}} \partial_{a_1} X^{i_1} \cdots \partial_{a_{p+1}} X^{i_{p+1}} \, dx^{p+1}$$

この X というのが worldvolume の座標です。

これだけ見ても直観的に分からないかも知れないけれども、例として particle の場合、particle が普通の gauge 場と couple するのはどういうふうにしていたかというのを思い出すと、それは $\dot{x}$ と A_μ がその粒子の位置で couple していた;

$$\text{ex. } D_0\text{-brane} \qquad \mathcal{S}_{\text{int}} = \mu_0 \int_{\text{world line}} A_\mu(x^\mu) \frac{dx^\mu}{d\tau} \, d\tau \ .$$

あるいはstringの場合はよく知られているように、2階反対称tensor場と2階反対称tensorを用いて書かれている。それを一般のbraneに拡張したようなものになっています。μ_pと書いてあるのは、R-R電荷と呼ばれるcoupling constant表している。

それで、これはいわゆるHodge dualのcoupling、ふつうの我々の$(3+1)$次元の言葉で言うと、ちょうど電荷と磁荷みたいなものを記述しています。4次元の場合field strengthは2-formで、これはHodge starをとってもやっぱり2-formになっていますから、電荷と磁荷は同じ粒子的なものにcoupleしてたんですが、一般に次元が高くなるといろんな構造があります。例えば10次元の2-form potentialに関しては、ふつうの電荷をもったものはD1-braneといって、1次元的にひろがったstring的なものなんですが、これに対して磁荷を持つobjectは今度はひもではなくて、何か5-braneになっている。だから、電荷と磁荷というのは全然ひろがりの違うobjectにcoupleすることになっています。

Diracの量子化条件

上で言ったような電荷と磁荷をもったものが両方同時に存在した時に、その電荷と磁荷は勝手な値をとれなくて、何かある種の量子化条件を満たさないといけない、電荷と磁荷の間に量子化条件が存在することが知られています。今の場合これを拡張しまして、電荷に対応するのが何かp-brane chargeだとすると、これのdual、磁荷に対応するのは$(6-p)$-brane charge[†]。今言ったように、電荷にcoupleしているものと磁荷にcoupleしているものは、同じ次元のものじゃなくて、p次元的にひろがっているものと$(6-p)$次元的にひろがっているものになっていて、ちょうどdualな関係になっている。従ってDiracの量子化条件もこのμ_pとμ_{6-p}のあいだに設定されて、

$$\mu_p \mu_{6-p} = 2\pi n \ , \ n \in \mathcal{Z}$$

nは整数、こういう量子化条件が出てきます。Dp-braneの場合、Dp-braneというのはさっき言ったように、Dirichlet条件を満たすopen stringを量子化すればできるわけで、そういうのから出発して計算していくと、実はこういうcouplingはもうちょっと基本的なもので書かれてしまいます。従って、そういうopen stringを使った計算から、実は

$$\mu_p{}^2 = 2\pi \left(\frac{4\pi^2}{\ell_s{}^2} \right)^{3-p}$$

こういうp-brane chargeが出てきます。これpが任意の場合にこの$(3-p)$という係数で出てきますから、実際にこのμ_pとμ_{6-p}をかけてみることができて、そうすると$\mu_p \times \mu_{6-p}$は実は2πになっている。従って、一般の場合での$n=1$の場合に対応しているということは、何かelementaryな電荷とelementaryな磁荷とをもったobjectというふうに考えることができる。だから、一般の電荷をもったobjectとか一般の磁荷をもったobjectは、

[†] [編集者注]

N次元の場合 $\cdots$

- p -brane charge $\cdots$ $\begin{cases} \text{potential} & A_{(p+1)} \\ \text{field strength} & F_{(p+2)} \end{cases}$

Hodge dual * $\Downarrow$ $\quad \tilde{F}_{(p+2)} = \dfrac{1}{(N-p-2)!}\, \epsilon^{(N)}\, F_{(N-p-2)} = {}^*F_{(N-p-2)}$

- $(N-4-p)$ -brane charge $\cdots$ $\begin{cases} \text{potential} & {}^*A_{(N-p-3)} \\ \text{field strength} & {}^*F_{(N-p-2)} \end{cases}$

それぞれこういうのが何枚か重なる、あるいは boundstate を作ることによって記述することができるということが分かります。だからこれの意味することは D-brane というのは何か elementary な object であると。

BPS 条件

それから、電荷はこういうふうに表されたように、string tension も係数まで含めて計算してやることができます。さっき string coupling dependencce に関しては $1/g_{\mathrm{st}}$ に比例していると言いましたが、あの数係数まで含めてバッチリ計算してやることができます。それを見てやるとですね、実はこの R-R charge と p-brane tension の間にはこういう等式

$${\mu_p}^2 = 2{T_p}^2$$

が成り立っているということが分かります。これは BPS 条件とか BPS saturated とか呼ばれる条件で、D-brane が BPS object と呼ばれる特殊なものだということを表しています。これはちょうど粒子の場合の $m^2 = Q^2$ に対応している。それで、いわゆる超対称性の表現からいろいろ制約を受けて、何か short multiplet だとか、string の coupling の大きさに依らずに議論できる性質を持っているとか、そういうことが出てきます。

ここではもうこれ以上細かくは触れないことにしますが、この条件の持つ物理的な意味、こういう条件を持つ object が何か非常に特殊だということに関する物理的な picture だけ、簡単に触れて説明を終わりたいと思います。${\mu_p}^2 = 2{T_p}^2$ の持つ物理的な意味は何を表しているかを見るためにまず、右辺と左辺とそれぞれに関する brane tension だとか brane charge とかの意味を考えてみます。brane tension というのはさっき言ったように単位体積当りの energy。単位体積当りの energy ということは、何かこれは重力との coupling を特徴づけています。要するに energy が大きい object は強い重力場の source になっているわけですね。かたや左辺は charge ですから、何か R-R 場に対する結合の強さを表しています。その結合の仕方がこういう等式で結ばれているということは、実は何か特殊な意味があります。特にこういう等式で結ばれているときに、静的な場合ですが、重力というのは常に引力で coupling がだいたい T_p だとします。R-R 力 (R-R tensor 場で媒介される力) は、同種 D-brane どうし (何かある一つの coupling constant μ_p をもったものを D-brane とすれば、それの $-\mu_p$ という coupling constant をもったものは anti-D-brane と呼ぶことにする)、例えば、electron どうしとか positron どうしとか、そういう同種の D-brane に関する R-R 力は一般に斥力です。従ってこの条件は、重力の引力と R-R 力の斥力がちょうど相殺している、そういう条件になっています。つまり何を言っているかというと、これは同種の D-brane 間には力が働かない。従って、さっきから D-brane が何枚かあるときの effective theory と言っているときは、実はこれを知っていて暗黙のうちに使っていました。これは何を意味しているかというと、brane を何枚かもってきて平行にそっと立てておいてやると、この brane 間には力が働かず、安定な配位になっている。しかし、引力が働いていると、スッとおいといたのが安定な配位ではなくて、どんどん近づいてバシッとつぶれたような配位が安定な配位になっているわけですが、この 2 枚の間にそういう static な力が働かなくなっていることによって、2 枚距離をおいて平行に立てておいても安定な配位になっているという状況になっています。

これに対して、最近の話でもあるように、brane と例えば anti-D-brane みたいなものを考えて 2 枚おいておきますと、今度 R-R 力が、positron と electron みたいに引力に反転しますから、引力と引力で非常に強い引力が働く。非常に強い引力が働くということは、これはスッとおいといても安定じゃなくて、だんだん近づいて何かぶつかってどうにかなる。より安定な配位があるということは、こういう配位を考えてその上の string、あるいは fluctuation を量子化すると、何か tachyon 的な mode が出てくるということを意味しています。実際こういう brane anti-brane みたいな配位を string 理論、さっきの boundary condition を使って記述してやると、これは不安定で tachyon mode が存在し、より安定な状態にいくだろうということが予想されます。これは A. Sen という人がこういうことを考え出した。あるいはそれから更にこういうのが安定な配位として何処に落ち着くかをいろいろ調べることによって、何か non-BPS の brane なんていうのを考えることもできます。この辺の話は僕の講義の範疇外なので、これ以上触れないことにします。

同種 brane 間	brane anti-brane 間
重力（引力、T_p）と	R-R 力が引力に反転
R-R 力（斥力、μ_p）が相殺	⇒ 不安定。tachyon mode (A. Sen)。
⇒ 安定。静的な力は働かない	⇒ non BPS brane

2.2.5 D-brane 描像の有効範囲

いろいろ D-brane についてお話してきたんですが、最後にこういう perturbative な string を使った D-brane という記述がどういう場合に正しいか、あるいはどういう場合に有効かっていうことを考えておきます。これは昨日からいろいろお話に出てきていますが、例えば perturbative な Yang-Mills 理論として、その quark とか gluon を fundamental な自由度と思った記述というのは、g_{YM} が非常に小さい時にうまい記述で、coupling constant が大きくなると、何か別の記述がよくなるということを言ってました。では、D-brane 的な記述というのはどういう場合に有効かというのをちょっと考えておきます。

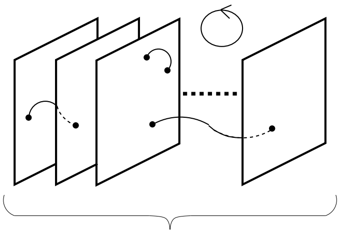


図 25: N 枚の brane

もう一度 effective theory から string の理論に戻って、一般には N 枚の D-brane がある場合を考えます。昨日言ったように、N 枚あるときの LEET は $U(N)$ の gauge theory になっていて、我々が考えたいのはこの N が非常に大きいところ、large N gauge theory ですから、N 枚置いて N を十分大きくすることを考えます。N 枚の D-brane があって、その上に string がいるわけですが、それ以外に bulk に closed string も存在しています (図 25)。もちろんこの closed string と open string も相互作用することができる。これは最近の brane world scenario みたいな、brane の上に我々の宇宙があって、graviton は何か余分な次元も含めて飛ぶことができる。そういう描像に対応しています。closed string というのは graviton ですから全体の世界をとびまわることができて、それに対してこういう gauge 場は brane 上だけを動き回ることができる。それで、さっきの pure な Yang-Mills 理論というのは、実は closed string が decouple するような極限を最

終的には考えていたのですが、それについてはもうちょっと後で考えます。

一般にこういう時の string の amplitude、あるいは partition function $\mathcal{Z}_g$ というのは、証明なしに使わせてもらいますが、$1/g_{\rm st}$ の Euler 数乗 $\times N^b$ です：

$$\mathcal{Z}_g \cong \left(\frac{1}{g_{\rm st}}\right)^{\chi} \times N^b \quad .$$

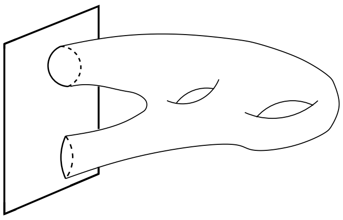


図 26: Riemann 面

string を知っている人に対してちょっと説明しておきますと、一般に brane があるときの string amplitude を計算すると、何か重なった brane があるとして、一般に 図 26の様な Riemann 面を足しあげますよね。あるいは boundary はもっと何コかあってもいい。それで、amplitude は coupling と N に関してどう比例するかというと、$1/g_{\rm st}$ というのは例によって Euler 数に比例します。Euler 数というのは boundary があるときは、

$$\chi = 2 - 2g - b$$

b は boundary の数。図 26の場合では 2 コ boundary がある。それから boundary がありますと、この boundary が N 枚重なった brane のどこに張りついているか、という場合の数が存在しますから、1 コ boundary があると N が出てきます。だから、N の boundary 乗だけ、N-factor が出てくる。これを large N gauge theory の言葉で書き直してやりますと、

$$\mathcal{Z}_g \simeq \left(\frac{1}{N}\right)^{2g-2} \times (g_{\rm st}N)^{2g-2+b} \ .$$

$g_{\rm st}$ は $g_{\rm YM}$ の 2 乗に比例しているということをさっきやりましたから、これがいわゆる 't Hooft coupling に比例していて $1/N$ はちょうど閉曲面の Euler 数に比例している。これを見てやると g が 0 からだんだん大きくなっていくわけで、あるいは boundary の数はだんだん大きくなっていくわけで、これは $g_{\rm st}N$ の正べきの展開になっている。つまり D-brane picture がいいのは 't Hooft coupling が小さいときです。

$$g_{\rm st}N \ll 1$$

これはまあ LEET を考えれば明らかといえば明らかで、これの LEET というのはいわゆる perturbative な Yang-Mills だったわけで、まあ本当はプラス bulk gravity で、これについて decouple させるということが実際に必要ですが、それは後でやります。perturbative な Yang-Mills 理論というのはちょうど 't Hooft coupling が小さいときに有効な picture だった。それを string 的なところまで拡張して見ている。

従って次は、この D-brane picture に対応するものを、't Hooft coupling が非常にでかいときに考えたらどういう記述が出てくるか、そういうことについて考えてみたいと思います。

ということで、ちょっときりがいいので休憩にしましょう。

（休憩）

§2.3 Black p-brane

それでは続きをはじめます。前半の話でどういうことをやったかというと、Yang-Mills 理論と string の duality みたいなのを考えたかったわけですが、それの Yang-Mills side に対応する描像として D-brane というものを考えました。それで、D-brane というものを考えると、何か brane 上に存在する Yang-Mills 理論の一般化みたいなことを考えることができて、ただしそれは、Yang-Mills 理論ですから ’t Hooft coupling が非常に小さいときの描像に対応している。そういうことをやりました。じゃあ、この ’t Hooft coupling の大きいときの描像っていうのはどうやって出てくるかっていうのを次に見てみたいと思います。

D-brane に対応する type Ⅱ 理論の LEET の古典解

それは、black p-brane と呼ばれています。何故 ‘black’ かというのは追々分かると思いますが、まあ p-brane の古典解みたいなものです。今 string 理論として D-brane というのは、何か Dirichlet condition をもつような open string として定義されたわけですが、実はそれに対応する古典解というのが存在して、それについて考えてみたいと思います。古典解の意味については次に見ていくことにしますが、正確にいうと type Ⅱ 理論の low energy effective theory の古典解。もうちょっと正確にいうと black hole 解に似たようなものを考えています。ですからまずこの type Ⅱ 理論の low energy effective theory がどういうものだったかというのを思い出します。それで古典解と言ったときは、long range force みたいなものだけ残りますから、fermion は古典的には存在しないので全部ゼロだと思います。

- type Ⅱ 理論の massless bosons

$$\begin{array}{rcllll} \text{NS-NS} & : & (g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi) & & & \\ \text{R-R} & : & A_{(p+1)} & \longrightarrow & \text{Ⅱ A} & p = 0, 2, (4, 6) \\ & & & & \text{Ⅱ B} & p = -1, 1, 3, (5, 7) \end{array}$$

まず、type Ⅱ 理論の massless spectrum について。NS-NS と呼んでいたものの中に graviton と反対称 tensor 場と dilaton、R-R と呼んでいたものは、$(p+1)$-form gauge 場。こういう $(p+1)$ 階の反対称 tensor 場に形式的に外微分の base を引っ付けたようなものです。type Ⅱ A のときは p は偶数。0、2、あるいはさっきの Hodge dual な potential まで含めると、4、6 まで。type Ⅱ B に関しては p は (-1)、1、3、あるいはこれの magnetic な dual を考えると 5、7。ここまで含まれる。それに対して D-brane に対応する古典解を求めたいんですが、D-brane というのはどういう性質をもっていたかというと、Dp-brane といったときは、その p に対応した $(p+1)$-form $(A_{\tilde{p}+1})$ に対して何か charge を持っている。さらに一般に $B_{\mu\nu}$ は charge を持っていないとします。実は、fundamental string が $B_{\mu\nu}$ と couple しているんですが、ちょっと今それを説明しているヒマがないので、D-brane はこいつとは couple していないということだけ言っておきます。それでもちろん D-brane というのは、何かこう energy が固まっている “もの” ですから重力とは couple しています。それから dilaton とも couple している。ですから D-brane 解を考えるときには最低、重力場と dilaton 場 と p に対応する form を入れておかないといけない。

そのとき low energy effective theory の action は、ちょっと数係数は convention ですが、

$$\mathcal{S}=\frac{1}{(2\pi)^7G_{10}}\int d^{10}x\sqrt{-g}\left(e^{-2\phi}\left(R+4\left(\nabla\phi\right)^2\right)-\frac{2}{(8-p)!}{F_{p+2}}^2\right) \tag{13}$$

こういう action で記述されているということが知られています。これはちょうど、いわゆる scalar tensor 理論になっています。この ϕ がなければ、いわゆる Einstein-Hilbert action に scalar が couple しているんですが、そこの Einstein-Hilbert 項に exponential 型の scalar 場が couple している。こういう coupling をもつのが dilaton の特徴で、そういう何か scalar tensor 理論 みたいなものになっている。それで、G_{10} は 10 次元の Newton constant で、string coupling constant とこういう関係になります

$$G_{10}={g_{\mathrm{st}}}^2{\ell_s}^8\ .$$

10 次元では長さの 8 乗の次元をもっている。それで、この low energy の意味するところは、g_{st} を fix して ℓ_s を限りなく 0 に近づける、完全に 0 にしてしまうと scale がなくなってしまうので、非常に小さい数だと思っておいて下さい[§]

$$G_{10}\ :\ \mathrm{fix}\quad ,\quad \ell_s\ll 1\ .$$

それで、10 次元の Planck 長さというものを導入しておきたいんですが、それはこの 10 次元の Newton constant から定義されるものですから、これをこういうふうに書きます

$$G_{10}={\ell_p}^8\ \ .$$

そうすると Planck 長さは string coupling と string length を使って、

$$\ell_p={g_{\mathrm{st}}}^{1/4}\ell_s$$

と書けます。ちょっとこれだけ導入しておきます。

それで、これの真空解みたいなものを考えるというのは、ちょうど何か Schwarzschild black hole を考えるときに Einstein-Hilbert action の真空解を考えたのと同様の意味です。それで metric に対してこういう ansatz をおきます。

$$ds^2={ds^2}_{10-p}+e^{\alpha(\rho)}\sum_{i=1}^{p}\left(dy^i\right)^2\ . \tag{14}$$

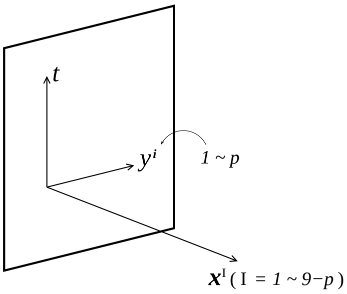


図 27:

これを絵で描くと図 27 のようになります。x^I の I は 1 から $9-p$。y^i の i は 1 から p 。従って時間方向と transverse 方向をあわせて $(10-p)$ 次元。ρ の関数を metric の表式(14) の右辺 2 項目にもってきているんですが、これが ρ だけに依るというのは次のような ansatz をおいたことに対応しています。

今 y に対する metric が $\Sigma(dy^i)^2$ ということは、これは brane の空間的なひろがりの方向に関しては translation invariance で flat。あるいは conformal、全体の factor を除いて flat だということを仮定しています。

[§] 本当は、何かと比べて小さくしていかないといけないのですが、比べるものがないうちはちょっと単に小さい数だとします。

更に transverse 方向に関しては、今 transverse 方向 の dependence を考えたいので、transverse space だけひっぱり出してきて考えてやると、transverse space は x^I、I は1 から $9-p$ で、これは Euclid な $9-p$ 次元空間 $\mathbf{R}^{9-p}$ ですが、これが球対称という ansatz をおきます。これは transverse な $(9-p)$ 次元空間でみると、brane のひろがりの方向と transverse 方向が直交していますから、transverse 方向の中でこの brane というのは原点に存在するようなものですね。つまり、図 28に書いてある 3次元とは完全に直交する方向にひろがっている。この 3次元に限ってみると、何か点に localize しているということはこの空間ではこう球対称に見える。あるいは思い浮かばない人は、何か 3次元の中に 1次元的にひろがっている brane を考えてください。これの直交する空間というのは平面空間ですが、この brane というのは、この平面空間には 1点で交わっています。つまり $\mathbf{R}^6$ 空間での球対称は、この平面空間では回転に対応している。それを何か高次元化したようなものだと思って下さい。$(9-p)$ 次元空間の球対称といってるこの球というのは $(8-p)$ 次元球。それでこの $(8-p)$ 次元球の半径、動径方向のことを ρ と呼んでいます。

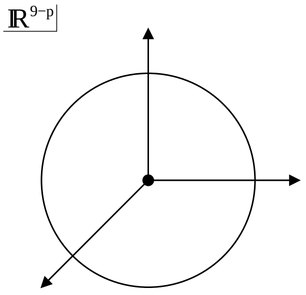


図 28: $\mathbf{R}^{9-p}$

$$\rho = \sum_{I=1}^{9-p} \left(x^I\right)^2 \ .$$

球対称というのは要するに、transevers 空間に対する dependence がこの動径方向 ρ だけに依っている、そういう ansatz です。

さらに R-R charge を持っていると言いましたから、R-R 場に関しても ansatz があって、この brane を囲む $(8-p)$ 次元球に関して、$(p+2)$ 次元 field strength を積分すると、これがちょうど N になるというものです。それで N 枚重なった D-brane に対応する古典解を考えていることになります。

$$\int_{\mathbf{S}^{8-p}} {}^*F_{(p+2)} = N \ .$$

この形の metric と、それからこの $(p+2)$-form の Coulomb 場みたいなものをいっしょくたんにして、Einstein 方程式、さっきの Lagrangian から得られる運動方程式に代入してそれを解いてやる、そういうことを考えます。そうすると実は解があるということが知られていて、その解がいわゆる black p-brane 解と呼ばれています。

これはまあ色々もうちょっと詳しく知っていて疑問に思いそうな人のためのコメントですが、正確に言っておくと、この場合は generic な解で、いわゆる string metric、さっきの dilaton が $e^{-\phi}$ みたいな形で出ているような metric に関する解です。

解の形は、最初に紹介した review なんかを見れば、具体的な式は書いてありますが、一応書いておくと

$$ds^2 = -\frac{f_+(\rho)}{\sqrt{f_-(\rho)}}\, dt^2 + \sqrt{f_-(\rho)} \sum_{i=1}^{p} \left(dy^i\right)^2 + \frac{f_-(\rho)^{-\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}}}{f_+(\rho)} d\rho^2 + \rho^2 f_-(\rho)^{\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2 \ . \quad (15)$$

この $d\Omega_{8-p}$ はさっきの単位球面の metric で、いわゆる立体角を拡張したようなものです。さっき metric と dilaton と R-R 場を残したと言いましたが、R-R 場はもう具体的には書きません。 charge が N というだけで、transverse 方向に関して適当な Coulomb 的な場になっています。Coulomb 的な場というのは、一般には次元に依っていて ρ のべき乗分の 1 みたいな dependence になっています。それで dilaton に関しては

$$e^{-2\phi} = f_-(\rho)^{-\frac{p-3}{2}} \ . \tag{16}$$

ただし、ここに f_+ とか f_- とかふたつ関数がでてきましたが、

$$f_\pm(\rho) = 1 - \left(\frac{r_\pm}{\rho}\right)^{7-p} \qquad r_\pm : \text{parameter} \ .$$

$r_\pm$ というのは何か積分定数です。だから 2-parameter の解になっている。この parameter は物理的に何に対応しているかというと、この解の持っている tension(mass M) と charge N に関係している。M と N が

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{(7-p)(2\pi)^7 dp \ell_p{}^2}\left\{(8-p)\, r_+{}^{7-p} - r_-{}^{7-p}\right\} \\ N &= \frac{1}{dp\ g_{\rm st}\ \ell_s{}^{7-p}}\left(r_+ r_-\right)^{\frac{7-p}{2}} \ . \end{aligned}$$

ただし、dp というのは

$$dp = 2^{5-p}\pi^{\frac{5-p}{2}}\Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right)$$

で、これは numerical factor で、Γ は Γ 関数、何か数係数です。r_+, r_- は、outer horizon と inner horizon になっているんですが、それの物理的 parameter、mass と charge との関係はこういう形になっています。

それでいくつか注意しておきたいのは、この metric の形についてはまず (16) 式をみてください。string 理論の場合は、dilaton の真空期待値、つまり古典解が string coupling になってました。いま $g_{\rm st}$ というふうに string coupling を書いていますが、これは解が ρ によっている場合はどういう意味をもっているかっていうと、ちょうど ρ を無限遠点で見たときの string coupling constant になっています。

$$e^{-2\phi} = \frac{g_{\rm st}{}^2}{g_{\rm st}{}^2(\rho)} \qquad\qquad g_{\rm st}{}^2(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} g_{\rm st}$$

それで一般に、この e^ϕ、dilaton が定数じゃなくて、何か ρ に依っている場合の物理的な意味は、実は string coupling というのは ρ に依っている、つまり ρ が無限大ではこれが確かに string coupling なんですが、ρ がもっと原点に近くなってくると、実は ρ-dependent になっているということです。ただし $p = 3$ の時だけは特殊で巾乗が 0 になりますから $e^{-\phi}$ が constant になって、conformal な対称性がある場合になっています。

$$p \neq 3 \text{ の場合} \qquad \text{string coupling は } \rho\text{-dep.}$$

一般に ρ-dependent になるとよくわかりませんが、逆に言うと、それで string coupling が running するというような解釈も実はできたりするんですけど、まあ今回はそういうところまではお話できません。後で考えるのは、$p=3$ の場合に限ります。$p=3$ の場合というのは、実は我々の非常によく知りたい $(3+1)$ 次元の理論に対応しているわけで、そういう意味でも何かうまいことできているわけです。

更に metric に関してですが、black p-brane と呼ぶのは実は次のような意味です。これが直接あの black hole みたいな解になっていれば分かりやすいんですけども、ちょっとここは複雑なので、後で冷静に考えて下さい。それで、black p-brane と呼ぶためには 1-step おかなくちゃいけなくて、Einstein frame というのに移ります。実は $p=3$ の場合は、Einstein frame と string frame は一緒になっていて、そういう意味では 3-brane に限っては、black 3-brane になっているんですけども、一般の場合に black p-brane 解に行くには Einstein frame に移ります。

$$\text{Einstein frame}: \qquad g_{\mu\nu}^{(E)} = g_{\mu\nu} e^{-\phi/2}$$

Einstein frame というのは、今この string metric と呼んでいる $g_{\mu\nu}$ に dilaton dependent な分だけ scale 変換しておきます。こういうコンビネーションを何か新しい metric、Einstein metric と呼びます。

そうすると、Einstein action というのは、この metric を使って、(13) 式で couple していた dilaton を全部吸収することができて、重力に関して、こう Einstein-Hilbert action の形に直ります。

$$S_{(E)} = \frac{1}{(2\pi)^2 G_{10}} \int dx^{10} \sqrt{-g^{(E)}} \left(R^{(E)} - \frac{1}{2} \left(\nabla\phi\right)^2 + \cdots \right) .$$

何かこの scalar 場は kinetic term の符号がひっくりかえったりしますが。こういうふうに見たときに、さっきの transverse space の中で球対称な charged black hole になっている。

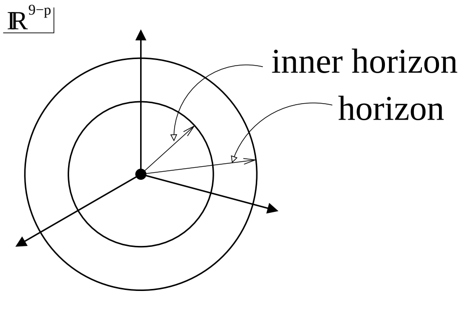


図 29: blackhole 解

この charged black hole 解は、さっきの transverse な $(9-p)$ 次元空間の中で原点にあって、このまわりを何か球面が囲んでいると言いましたが、実はこの $\rho=r_+$ のところに horizon ができます。それで、実際は 10 次元全体をみると、これは 10 次元のうち $(9-p)$ 次元空間をこう切り出してみたときに black hole 解になっていると言いましたけども、実際はこれに対してさらに、空間 p 次元、時間 1 次元方向にこう何か energy のかたまりがひろがっているような解ですから、それを black p-brane 解と呼ぶわけです。 実際はこの $\rho=r_+$ のところに horizon があるんですけれども、もうひとつこの内側に inner horizon と呼ばれる $\rho=r_-$ というところがあるんです。これは、次元によってちょっといろいろ違っていて、$p\leq 6$ のときに、実はここに curvature singularity が出てきて、こっから内側へはいけなくなります。だけどもこれは、horizon より外側に関してはなめらかな解になっている。そういう意味でこの inner horizon というのは、horizon の中に閉じ込められていてほしいわけです。つまりあのいわゆる Cosmic Censorship のような

何かそういう curvature singularity みたいなものが、horizon の中に常に隠れていて下さいというそういう条件がありまして、それは、r_+ が r_- よりも大きい、そういう条件になります。

$$\text{物理的条件} \qquad\qquad r_+ \geq r_-$$

この時に限って、この horizon の外側は regular な解になっていて、どこにも singularity が出てこない。これをさっきの M とか N とか物理的な parameter で書き直してやりますと、

$$M \geq \frac{N}{(2\pi)^p g_{st} {\ell_s}^{p+1}} \qquad\qquad : \text{BPS 条件}$$

これはちょうど mass(tension) が charge よりも大きいっていう条件ですから、いわゆる BPS の条件になっている。

それで、以下考えるのは特にこの bound が saturate しているときです。saturate しているときが D-brane に対応している。さっき D-brane というのは、tension と charge、mass と charge の間に何かある種の等号関係が成り立っていると言いました。それに対応するのは、ちょうどこの bound の等号が満たされているときで、それが BPS 状態に対応していて、ちょうど D-brane を記述している。そういう意味で、この bound saturate している状態を何か extremal 状態と呼んでいて、これが D-brane に対応する場合になっています。

$$\begin{array}{ccc} \text{external case} & \longleftrightarrow & \text{D}p\text{-brane} \\ & r_+ = r_- \ (f_+ = f_-) & \end{array}$$

それでは extremal limit をとってやりたいんですが、extremal limit というのは、$r_+ = r_-$ という場合で、この場合、f_+ は f_- と一緒になってしまうので、以下全部 f_+ しか使いませんが、その場合まず metric は

$$ds^2 = \sqrt{f_+(\rho)}\left(-dt^2 + \sum_{i=1}^{p}\left(dy^i\right)^2\right) + f_+(\rho)^{-\frac{3}{2}+\frac{5-p}{7-p}} d\rho^2 + \rho^2 f_+(\rho)^{\frac{1}{2}-\frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}{}^2 \ .$$

注意してほしいのは、さっき (15) 式でこの時間方向の dependecce と brane のひろがり方向の dependecce というのは何か factor が違ってたんですが、extremal な極限をとると、この factor の係数が共通になってくくり出せて、ちょうど brane 方向に関する Lorentz 不変な形になっている。それを注意して下さい。

それで extremal な場合はこの r_+ と r_- がちょうど重なっているんですけども、そのときに真ん中の方には singularity が出てきて、それがちょうど brane の source に対応してるんですが、今はちょっとそれを忘れてます。それで、brane の外側だけ、つまり horizon の外側だけに注目することにして、horizon の外側だけを張るような座標に移ります。それを r と呼ぶことにすると、

座標変換　(horizon の外側)

$$r^{7-p} \equiv \rho^{7-p} - {r_+}^{7-p} \qquad\qquad \rho \geq r_+ \quad r \geq 0 \ .$$

これだとちょうど ρ が r_+ より大きい、horizon の外側がちょうど r が正のところと対応しています。(ほんとは p が奇数か偶数かによって、何か '−' も許されたりしますが、正だけをとるとします。) ちょうどこの r という座標は horizon の外側だけを記述しているんですが、この metric をとってやると、例えば後にでてくる AdS/CFT の場合の Maldacena の論文なんかにでてくる metric にちょうど対応しています。これを書いてやると、

$$\begin{cases} ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}}\left(-dt^2 + \sum_{i=1}^{p}\left(dy^i\right)^2\right) + \sqrt{H(r)}\left(dr^2 + r^2 d{\Omega_{8-p}}^2\right) \\ \\ e^{\phi} = H(r)^{\frac{3-p}{4}} \end{cases} \tag{17}$$

ただし、$H(r)$ というのは、

$$H(r) = \frac{1}{f_+(\rho)} = 1 + \left(\frac{r_+}{r}\right)^{7-p} .$$

だから r が有限のところは何も singularity がなくて、$r = 0$ のところだけ H 無限大になっていますから、何か singularity がでる可能性がある。そこは実は、horizon に対応しているんですが、その部分に D-brane source みたいもなのが存在している。ただし今の場合、r_+ というのは、

$${r_+}^{7-p} = dp\, g_{\mathrm{st}} N\, {\ell_s}^{7-p}$$

プラスの extremal な場合ですね。後で使いたいのはこの metric です。この metric と e^{ϕ}、どうせ後で $p = 3$ ととるので dilaton に関しては constant になってしまうんですが、metric に関しては何かこういう black-3-brane 解になっている。

さっきどうしてこういう話をはじめたかというのを思い出すと、D-brane というのは open string を使って考えたときは、Yang-Mills の picture に対応する場合で、't Hooft coupling が非常に小さいときに有効であるということが分かった。それでは 't Hooft coupling が大きいときに有効なのはどういう描像なのか、というのを考えはじめてこういうことをやったわけです。この描像というのは、この type II 理論の low energy effective theory、古典的な重力理論を使って、それの古典解として D-brane を記述したわけですから、そういう古典的な gravity を使って系を記述するというのはどういう場合に有効か？ つまり、古典 gravity 近似、あるいは supergravity 近似の有効性について次にちょっと考えてみます。

古典 gravity 近似の有効性

$p \neq 3$ のとき

まず detail にいく前に、p が 3 でない場合はさっき強調しましたように、string coupling constant が transverse 方向に関する動径 dependent になってしまいます。特に r を 0 に近づけたとき、つまり brane にどんどん近づいてったときに、$p < 3$ のとき string coupling は発散し、あるいは $p > 3$ のときは string coupling が 0 になる。いずれにしろ、string coupling が無限大とか 0 になってしまいますと、この近似は破綻してしまいます。それは要するに、gravitational coupling が無限大になったり、あるいは 0 になったりしてしまうからですね。

$$g_{\mathrm{st}}(r) = g_{\mathrm{st}} H(r)^{\frac{3-p}{4}} \longrightarrow \begin{cases} \infty & p < 3 \\ 0 & p > 3 \end{cases}$$

(r の適当な領域でのみ有効)

これは、ある領域ではこの描像はまあいいけれども、主に brane の近くですね、原点の horizon の近くにいったときにこの描像が壊れるとことが一般的に起こります。従って、この場合は r の適当な領域についてのみ有効。だから、何か空間の領域を場合分けして考えないといけない。しかし、そんなことをして何かいえたとしてもあんまり有効とは思えないので、以下 $p = 3$ の場合だけを考えます。$p = 3$ のときに限り、この harmonic function の巾が 0 になりますから、string coupling constant は時空に依らない constant になって、r の領域全体に関して小さいという場合を考えることができるので、以下 $p = 3$ のときを考えます。

$p = 3$ のとき

それで今これが古典解ということは、古典近似あるいは普通の場の理論の言葉でいうと tree 近似を考えているわけですが、この古典近似がいいためにはどうでないといけないかというと、この空間の curvature、曲率半径が非常に大きくないといけないということを意味しています。曲率がどんどん大きくなってくると重力の効果が効いて大きくなりますから、その quantum fluctuation の効果も大きくなって、古典gravity の近似は悪くなって、何か量子論的な補正をどんどん入れていかないといけなくなります。

従って、古典解としてそういう soliton みたいな描像を保つためには、曲率半径が string length に比べて非常に大きくないといけない。今この解に特徴的な scale というのは r_+ でしたから、それがちょうど曲率半径の scale を与えていて、r_+ が string length より非常に大きい、そういう条件が必要になってきます。

$$\begin{array}{cccc} \text{“古典”} & \longrightarrow & \text{曲率半径} & \sim \; r_+ \gg \ell_s \\ & & \text{string coupling} & g_{\mathrm{st}} < 1 \end{array}$$

それからもうひとつ。これも例によって string の摂動、あるいは gravity の摂動をつかって考えていますから、g_{st} はやっぱり小さくないといけない。それで、このふたつの条件を一緒に書くと、こういう条件になります。

$$\ell_p < \ell_s \ll r_+$$

左の不等号は非常に小さくなくてもいいというぐらいにしてあります。ℓ_p というのは、

$$\ell_p = g_{st}^{\frac{1}{4}} \ell_s$$

です。これは物理的にどういうことを表しているかというと、ℓ_s というのはだいたい string のひろがりの order で、ℓ_p というのは Planck length ですよね。Planck length に対して string が十分大きくひろがっている。要するに Planck length みたいなものに対して例えば electron の Compton length くらい広がっているということ。この string length の方が例えば Planck length より小さくなってしまうと、何か string のまわりに horizon がで

きて、black hole みたいになってしまう。そんなことをすると quantum gravity の効果が効いてきて、何をやっているのか分からなくなってしまうので、そういうことのないように Planck length に対して string length の方がでかい、要するに black hole みたいなものを考えずに string が elementary な excitation と考えて、重力の効果は無視してよろしい。そういうのが左側の不等号です。また、曲率半径に対しては、string の近傍だけを見ている限りは、空間はほとんど平らになっている、そういうための条件です。

あるいは、このふたつの条件はもうひとつ別の書き方をするとこういう条件になります。いきなり答えを書いちゃうと面白くないので、ちょっと計算していきましょう。今、string length が

$$\ell_s \ll r_+$$

というこの最初の条件がありましたが、 この両辺を 4 乗すると ${r_+}^4$ というのは、

$${r_+}^4 = 4\pi\, g_{st} N\, {\ell_s}^4$$

となるので、この両辺 ${\ell_s}^4$ で割って、4π なんていうのは無視して不等号のかげに隠してやると、こういう条件がでてきます;

$$1 \ll g_{st} N \quad .$$

さらに、$g_{st} N < 1$ と言ってますから、これを入れると、

$$1 \ll g_{st} N < N \quad .$$

従って、gravity の古典解みたいな形で D-brane を表すという記述は、こういう parameter 領域で有効な記述であるということが分かります。それで、特に注意してほしいのが左側の不等号部分です。't Hooft coupling が実は非常に大きいところで有効な描像になっている。これが AdS/CFT 対応のミソです。だから、そういう古典的な D-brane、重力の古典解としての p-brane を使って表すというのが、ちょうど Yang-Mills 理論の dual な記述を与えている。

さて、じゃあ今 D-brane と black-p-brane というのを各々ふたつ別々な観点からみてきて、どうもそれぞれの picture は 't Hooft coupling が小さいときと大きいときに有効な描像であるということが分かりました。それが最初に言った、't Hooft の duality を具体的に実現するためのキーポイントとなるであろうということはだんだん分かってきたと思います。今度はそれを、もうちょっと explicit に対応をつけてやることにします。

3 $\mathbf{AdS_5/CFT_4}$ 対応

AdS_5 と CFT_4 の対応。reference は最初にもあげましたが Maldacena[2]。最初にこういうことをいったのは Maldacena です。それで、今まである程度 D-brane の場合も Black p-brane の場合も、p を一般的に考えましたが、以下もう $p=3$ にして考えます。まず何を考えるかというと、10 次元の type IIB 理論の gauge 理論側で N 枚の D_3-brane を考えます。$p=3$ の場合というのは type IIB の場合でしたね。だから、type IIB の理論で D_3-brane を N 枚もってきて重ねてやりなさい。

$$\text{type IIB theory} \quad \cdots \quad N \text{ 枚の D3-brane}$$

さっき D-brane のところで言ったように low energy effective theory というのは、まず $(3+1)$ 次元の $\mathcal{N}=4$ 、ゲージ群が $U(N)$ の super Yang-Mills が brane の上に現れまして、それから、bulk 全体の空間 $9+1=10$ 次元、これは type IIB ですから、type IIB の言葉で言うところの chiral な $\mathcal{N}=(2,0)$ の supergravity。こういうのが low energy effective theory になります。

$$\begin{array}{llllll} \text{LEET} & \simeq & d=3+1 & \longrightarrow & \mathcal{N}=4 \quad U(N)\ \text{SYM} & (\text{brane 上}) \\ & & \oplus\ d=9+1 & \longrightarrow & \mathcal{N}=(2,0) \quad \text{SUGRA} & (\text{bulk}) \end{array}$$

さっき、low energy effective theory と言ったとき、この gravity の方を忘れたのは、以下のような極限を暗黙のうちにとっていたからです。

D-brane の zero slope limit

その極限にいく前に、coupling の関係式をみてやります。この super Yang-Mills 理論の g_{YM}^2 というのは g_{st} に比例しています。それから、bulk の方の supergravity の coupling は string coupling の 2 乗に比例している。つまり ℓ_s の 8 乗に比例しています。

$$\begin{cases} g_{\mathrm{YM}}^2 = g_{\mathrm{st}} \\ G_{10} = g_{\mathrm{st}}^2 {\ell_s}^8 \end{cases}$$

4 次元ですから Yang-Mills coupling というのは dimensionless で、string coupling そのものが Yang-Mills coupling の 2 乗。それから、supergravity の coupling は bulk ですから 10 次元ですが、10 次元の Newton constant は p に依らずに string coupling の 2 乗に比例していて、長さの 8 乗の dimension をもっている。この重力を decouple させた Yang-Mills 理論を得るためには、G_{10} が 0 にいって、g_{YM} を有限にする。G_{10} を 0 にもっていけばいいわけですから、g_{st} を fix して、ℓ_s を 0 にもっていきなさい、いわゆる zero slope limit というのをとりなさい、ということになります;

$$g_{\mathrm{YM}}\text{: fix}\ ,\ G_{10} \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g_{\mathrm{st}}\text{: fix}\ ,\ \ell_s \to 0\ .$$

そうすると、この bulk の重力というのはもう Yang-Mills と couple しなくなって、4 次元の Yang-Mills 理論だけを考えればいいということになります。

ここで言っている low energy effective theory というのは何のことだったかというと、重力が decouple するというのに含めて、この open string の massive mode が decouple するというのも暗黙のうちに仮定していたわけですね。実はこの極限っていうのは、確かにこの open string の massive mode を decouple するというのも含んでいます。それは当たり前で、次元をもった量というのは string length しかないので、それを 0 にもっていってしまえば、massive mode は全部 decouple するわけです。例えばそれに関してはこの 3-brane の tension が無限大にとんでいくということからも理解できます。

$$T_3 \simeq \frac{1}{g_{\rm st}\ell_s^4} \longrightarrow \infty$$

string tension が無限大にとんでいくってことは、3-brane は無限に固い。こうトントンとたたいても全然びくともしないような、無限に固い 3-brane になっているということを意味しています。だから、そういう brane 上の波の energy をくうような波は全部 decouple してしまう。だから、いわゆる zero slope limit と呼ばれる極限をとってやると、massive mode や bulk の gravity の mode は全部 decouple して、$d = 3+1$、$\mathcal{N} = 4$、$U(N)$ の super Yang-Mills 理論が出てきます。$\mathcal{N} = 4$ というのは例の 10 次元の supersymmetry から引き継いだ、“$\mathcal{N} = 16$” SUSY というやつですが、4 次元では $\mathcal{N} = 4$ です。

それで、これに関して知られている事実をさらにいくつか加えておくと、この理論は、β 関数が恒等的に 0 だということが知られています。β 関数が 0 ということは何か scale 不変性があるということで、これは 4 次元の conformal field theory であるということが知られている。そういう意味で Yang-Mills サイドは CFT、conformal field theory になっている。ただし何度も言いましたが、この picture は D-brane の picture ですから、この $g_{\rm st}N$、すなわち $g_{\rm YM}^2 N$、あるいは λ と書いた 't Hooft coupling、これが 1 より非常に小さい場合に良い picture になっています。

$$\boxed{d = 3+1\ ,\ \mathcal{N} = 4\ ,\ U(N)\ \text{ SYM 理論}} \implies \beta = 0 \quad \text{i.e.} \quad \text{CFT}_4$$

$$1 \gg g_{\rm st}N = g_{\rm YM}^2 N = \lambda \quad \text{のときに良い picture}$$

これが 't Hooft の duality、gauge/string duality の gauge 理論の側の話。ただし、今の場合非常に都合のいい描像から出発しましたから、単なる $U(N)$ の gauge 理論ではなくって、supersymmetry が非常に大きい、$\mathcal{N} = 4$ という、4 次元の場合 gravity を含めないで可能な一番大きい数字をもっていています。その理論は非常に特殊な性質をもっていて、何か量子論的にも scale が出てこない、β 関数が 0、つまり Yang-Mills の coupling constant が全然 energy scale に依らない、そういう理論になっていて、いわゆる 4 次元の conformal field theory になっている。これが 't Hooft coupling が小さい側の picture です。

Black-p-brane の zero slope limit

じゃあ 't Hooft coupling が大きい側の picture はどうなっているか。さっきの extremal な black-3-brane picture は、同じ D_3-brane を 't Hooft coupling が小さいときと大きいときとで別々の見方で記述したものだと信じられていますから、この black-3-brane で zero slope limit をとったものがさっきの picture の dual と信じることができるわけです。

black-p-brane の節の (17) でも書きましたが、もう一度この場合の metric を書いてやると、

$$\begin{cases} ds^2 = \dfrac{1}{\sqrt{H(r)}}\left(-dt^2 + \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(dy^i\right)^2\right) + \sqrt{H(r)}\left(dr^2 + r^2 d{\Omega_5}^2\right) \\ e^{\phi} = 1 \end{cases}$$

$$H(r) = 1 + \left(\frac{r_+}{r}\right)^4, \qquad {r_+}^4 = 4\pi g_{st} N \ell^4$$

以下ちょっと記号の省略のために、$-dt^2 + \sum_{i=1}^{3}(dy^i)^2$ は $dx_{//}^2$ と書くことにします。dilaton は constant。今 brane と直交する空間を描くと $\mathbf{R}^{(9-p)}$ は今 $\mathbf{R}^6$ ですよね。それで brane と transverse な方向があって、この原点に brane があるっていいましたけれども、実際はこの空間がうにゃうにゃっと曲がっていて、実はこういうこういうスロート型の geometry になっています。

図 30 では、こう $\mathbf{S}^1$ に落っこっちゃっているように見えますが、それはこの $\mathbf{R}^6$ を $\mathbf{R}^2$ みたいに描いているからで、実際はこの平面は $\mathbf{R}^6$ だと思っているので、この $\mathbf{S}^1$ は $\mathbf{S}^5$ です。だから、この輪っかが $\mathbf{S}^5$。要するに原点から等距離の球面は $\mathbf{S}^5$ になっている。さっきの言葉で言うと $\mathbf{S}^{8-p}$ と書いてたかな。それで、動径方向を r として、$\mathbf{R}^6$ 上で horizon を丸く書くと、その horizon 上が $r=0$ で $\rho = r_+$。horizon の内側は何か ρ が r_+ よりも小さいところですが、今この horizon の内側は r という座標では見ないことになっている。あと実際は、これに 3-brane の world volume と parallel な方向があって、それはおおむね topology 的には Minkowski で、4 次元 Minkowski M^4、それとの直積になっている。

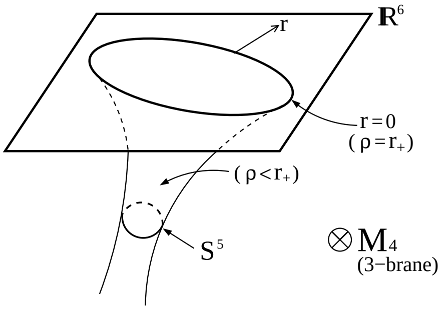


図 30:

それで、D-brane で考えたように、Yang-Mills coupling を fix して ℓ_s を 0 にもっていくような極限を同様に考えてやればいいんですけれども、その時にどういう座標系をとって、極限をとるかというのが重要になります。それで、さっきの 重力が decouple して Yang-Mills 理論だけが残るというのと対応するような極限がこっちの描像でどうなっているかを見ることにします。前半の D-brane の描像のところでお話しした N 枚の D-brane というのが、$U(N)$ の Yang-Mills で記述されているときに次のような対応があるということを言いました。

$$N \text{ 枚の D-brane} \longleftrightarrow U(N)\ \text{SYM} \oplus\ \text{adjoint Higgs}\ \Phi^i (i = 1 \sim 6)$$

$U(N)$ の Yang-Mills $\oplus$ adjoint Higgs といったとき、Higgs 場というのは brane の fluctuation に対応していましたから、6 次元の transverse 方向にひろがっていて、この 1 から 6 の方向の座標に対応して i が $1, \cdots, 6$ 。この Higgs 場を Φ^i と書くことにします。

これはちょうど $\mathcal{N}=4$ に出てくる scalar 場の数と全く一致している。これに fermion を足したものがちょうど $\mathcal{N}=4$ の super Yang-Mills 理論になっています。こいつが対角の

真空期待値をもったときに、あるいはこいつの potential の minimum、基底状態ですが、それはちょうど moduli 空間であるということを言いました。

$$\left\langle \Phi^i \right\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \phi_N^i \end{pmatrix} .$$

それで、この ϕ_α^i $(\alpha = 1, \cdots, N)$ というのは $\mathbf{R}^6$ における N 枚の D-brane の位置を表している。ところが、これはあの natural unit で $\ell_s = 1$ だと思っている非常にラフな議論ですから、実際は次元勘定をして ℓ_s を復活させてやらないといけない。それはどういうことかといいますと Yang-Mills 理論では Higgs 場というものが mass の次元を持っているわけですね。今 Yang-Mills 理論を残したいわけですから、Higgs 場が真空期待値をもつと思いたいわけで、この各真空期待値は mass 次元をもっている、

$$\left[\phi_\alpha^i\right] = M = L^{-1} \quad , \quad \left[x_\alpha^i\right] = L \; .$$

この [ ] は、dimension という意味で、dimension が mass の 1 乗の次元をもっている。これは長さのマイナス 1 乗ですよね。ところが、ϕ_α^i は各 brane の $\mathbf{R}^6$ の中の位置と言いましたが、その位置を x_α^i と書くことにすると、この x_α^i というのは当然長さの次元をもつはずですから、正確にはこういう関係がある

$$\phi_\alpha^i = x_\alpha^i / {\ell_s}^2 \; .$$

今 ℓ_s を 0 にとろうと思っているので、次元を復活させて見るかどうかっていうのは非常に重要なわけですね。それで、ℓ_s を 0 にとりたいんですけれども、この gauge 理論がちゃんと Higgs mechanism を起こして有限の mass をもつという dynamics をキープしたいので、実は最終的に出てくる Higgs を fix して ℓ_s を 0 にしたい、そういうことを考えたいわけです。さっきの limit では、実は暗黙のうちにそういう limit をとっていたわけですね。

従って、これを black-3-brane の場合に翻訳しますと、brane picture では動径方向の座標 r の代わりに u という座標

$$u \equiv r / {\ell_s}^2$$

を使えばいいということがわかります。この r はちょうどさっきの black-3-brane 空間での動径方向ですが、何か brane が重なった場合を考えて、それを動径方向にずらす時に、それを有限にして ℓ_s を 0 にもっていくってことは、結局この r という座標じゃなくて、u という座標をつかってものごとを記述しておいてから、ℓ_s を 0 にもっていきなさい、あるいは逆にいうと、あの u という座標はちょうどこの ϕ の真空期待値に対応している。従って、注意ですが、この u という座標は mass 次元をもっている、何かちょっとかわった座標になっています。それと、これ r っていうのは動径座標で正でしたから、この u は正になる。

$$[u] = M = L^{-1} \quad , \quad u \geq 0$$

もう多分やっている時間がないんですけれども、これは最終的に AdS 空間になるんですが、u を正に限るというのは、何か AdS 空間の半分を考えていることになります。ちょっとそこをやらないので、あんまり言っても理解できないでしょうから、これはコメントとしておいておきます。

結局こういう座標を使って ℓ_s を 0 にするというのはどういうことかというと、もとの座標で見ると ℓ_s を 0 にすると同時に r も非常に 0 に近いところ、要するに horizon の無限小近傍をグァグァグァッと引き延ばして細かく見なさい、そういうことをやっていることになります。そのため、この u を fix して ℓ_s を 0 にする limit というのを near-horizon limit と呼んだりします。もとの座標でみて horizon の無限小近傍を無限に拡大してみることになっています。

あとやることは、さっきの metric をこの u という座標で書き直して、それで ℓ_s を非常に小さくしてやる、ということを考えます。そうすると metric はこういう形になります

$$ds^2 \cong {\ell_s}^2 \left[\underset{\text{anti-de Sitter 空間}}{\sqrt{4\pi g_{st} N}\frac{du^2}{u^2} + \frac{u^2}{\sqrt{4\pi g_{st} N}} {dx_{/\!/}}^2} + \underset{\mathbf{S}^5}{\sqrt{4\pi g_{st} N}\, d{\Omega_5}^2} \right] .$$

（これがどういう空間かっていうのをもうちょっときちんとやりたかったんですけど、どうしようかな、思ったよりちょっと早いので、後でもしかしたらやるかもしれませんが）これは実はこの 1、2 項目の部分が 5 次元の anti-de Sitter 空間になっていて、3 項目は $\mathbf{S}^5$。(18) 式では、この $\mathbf{S}^5$ の前に何か r^2 とかがあったんですけども、それは constant になってしまったので、これはちょうど AdS_5 空間と $\mathbf{S}^5$ 空間の全くの直積になっています。だから結局、Yang-Mills 側の重力が decouple する limit に対応するものを black-3-brane 側でとってやると、こういう near horizon limit をとることになっていて、low energy の super Yang-Mills と dual の関係にある重力解というのは $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5$ になっていることが分かります。

それで AdS_5 とか $\mathbf{S}^5$ なんですが、$\mathbf{S}^5$ の前の係数はちょうどこの 5 次元球の半径になっています。AdS_5 の方も同様に半径を定義することができて、その係数 $\sqrt{4\pi g_{\mathrm{st}} N}$ が AdS 空間の半径みたいなものを表していることになります。だから parameter としては、AdS_5 とか $\mathbf{S}^5$ の曲率半径の大きさといってもいいですが、それが R^2。

$$\mathrm{AdS}_5 \quad : \quad \mathbf{S}^5\text{の半径} \ \sim\ R^2 = \sqrt{4\pi g_{st} N}\,{\ell_s}^2$$

それで、やっぱり 't Hooft coupling が非常にでかいときに、曲率半径が大きくて、古典極限がいいということになっています。従って今のこの picture、 $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5$ 上の supergravity あるいは IIB string というのは、さっき言った 't Hooft coupling がでかくて、 large N、N はさらにでかい、こういうところで良い picture になっている。

$$\mathrm{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5\text{上の SUGRA (II B string)} \quad \Longrightarrow \quad 1 \ll g_{st} N < N \text{ で良い picture}$$

さらに、その古典解からの fluctuation あるいは量子補正がどういう order で出てくるかというのを見てやります。まず string 的な correction、要するに string の massive mode

なんかが効いてくるような order というのは、この空間の scale が R で、それにさらに string のもっている scale の補正が加わるわけですから、

$$\text{string correction} \sim \left(\frac{\ell_s}{R}\right)^{4n} \sim \left(\frac{1}{g_{\rm st}N}\right)^{n} .$$

$4n$ 乗というのはちょうどきりがいいのでこうしたのですが、ここは何か巾乗。これは正巾で、小さい展開係数での係数になっている[¶]。n は整数とは限らないくて、半整数ぐらいだと思ってくれればいいですが、とにかくこの ℓ_s/R に対する $4n$ 乗の巾が、$1/g_{\rm st}N$ の n 乗の巾に対応していて、't Hooft coupling がでかいときには小さい展開係数になっている。

それから、量子重力の correction というのは、もともとの空間の scale が Planck scale で、これの巾乗という形で出てきますが、それがちょうど $1/N$ の正べき。これはもちろん N がでかいとやっぱり小さい展開係数になっている

$$\text{quantum gravity correction} \sim \left(\frac{\ell_p}{R}\right)^{4n} \sim \left(\frac{1}{N}\right)^{n} .$$

Maldacena limit について

さて、ここまでやってきてやっと AdS/CFT 対応が出てきたんですが、AdS/CFT 対応を考えるときには何か色々なレベルの対応を考えることが出来るわけで、Maldacena が最初に言った最も弱い対応というのは、古典 gravity 近似においてのみの対応です。今のところ確実にチェックされているのは、ほとんどの場合がこの最も弱い対応の部分で、gravity 近似を使ってだけチェックされている。そういう対応で、いわゆる Maldacena limit 。要するに、$1/N$ の leading で、't Hooft coupling が無限大、't Hooft coupling の展開に関しても string coupling の leading 。一番弱い対応というのは、$N \to \infty$, $g_{st}N \to \infty$ の leading でのみ成り立っている対応のこと。つまり、こういう極限でのみ duality が成り立つ。実際チェックされているのはこういう場合がほとんど。

- 最も弱い対応 ~ Maldacena limit~

  古典 gravity 近似 $\Longleftrightarrow$ $N \to \infty$, $g_{st}N \to \infty$ の leading

AdS/CFT 対応のまとめ

それで、実は僕も含めてもっと多くの人が信じていると思われるのは、large N、あるいは 't Hooft coupling の展開の意味で exact に duality が成り立つ、という一番強い duality の実現です。それに関して最後にちょっとまとめておきます。

ここで何を言ったかというと、昨日の最初の方で 't Hooft duality についてやったときに書いた図の具体的な実現です。まず large N の理論を考えましょう。そのとき、't Hooft coupling が非常に弱いところで 4 次元の $\mathcal{N}=4$ の $U(N)$ の super Yang-Mills 理論を考えましょう。これは量子論的にも scale invariance があって、4 次元の conformal field theory

---

[¶] 本当はこれ偶数べきで出てきうるんですが、実際この λ の 1/2 乗みたいな correction が出てきたりするんですが、その辺の整数べきにならないことに関するいろんな理由はまあ深い議論がいろいろあるみたいです。

の一種になっている 。これと dual な描像、’t Hooft coupling が非常に大きいときに有効な picture として、type ⅡB の string theory、superstring theory が AdS$_5 \times \mathbf{S}^5$ 上にある、こういう対応があった。それで、これを AdS_5 と CFT$_4$ との duality といういい方をしています。

$$\begin{array}{ccc} & N \gg 1 & \\ \boxed{\lambda = g_{\mathrm{YM}}^2 N \ll 1} & \underset{\text{dual}}{\Longleftrightarrow} & \boxed{\lambda = g_{\mathrm{st}} N \gg 1} \\ d=4\ \mathcal{N}=4\ U(N)\ \mathrm{SYM} & & \text{type ⅡB SST on AdS } \times \mathbf{S}^5 \\ \mathrm{CFT} & \longleftarrow \text{AdS/CFT} \longrightarrow & \mathrm{AdS} \end{array}$$

もう一度最初の duality の話の復習というか、それの有効性みたいなものの復習に戻ってしまいますが、結局 Maldacena さんは何を言ったかというと、両方の理論で同じ 3-brane を λ が小さいときに有効な見方をするか、 λ が大きいときに有効な見方をするか、という別の二つの見方をした、同じものを別の見方をしただけなので、同じものの dual な記述である、そういうふうに思ったわけです。それの何か同じ理論の partition function が、例えばこういう $1/N$ 展開で存在していたとします。

$$\mathcal{Z} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N}\right)^{2g-2} f_g(\lambda) \ ,$$

$$\begin{cases} \mathrm{YM} & \rightarrow \quad f_g(\lambda) = \sum\limits_{i \gg 0} c_{g,i} \lambda^i \\ \mathrm{SST} & \rightarrow \quad f_g(\lambda) = \sum\limits_{i \gg 0} d_{g,i} \left(1/\lambda\right)^i \end{cases}$$

それで、Yang-Mills からは何が求まるか。 求めたいのはこの $f_g(\lambda)$ という関数なわけですが、Yang-Mills 理論を使うとこの $f_g(\lambda)$ の原点の回りで展開した級数形が求まる。もちろんこの各展開係数をすべて求めれば、足しあげることができて、この関数も求められるわけですが、実際はそんなすべてを求めることはできませんから、i が小さいところから途中までで何か近似的に求めることになります。ところが string theory を使うと、この関数の λ が無限大の方からの展開が求まる、というのがミソだった。ただし、この場合 i が整数かどうかとかそういう問題がいろいろありますが、まあこういう展開が求まって、摂動論の有限次元の計算では決して求まらないような量が計算できる。特に、例えば $N \to \infty, \lambda \to \infty$ 両方の leading order は古典的な supergravity で計算できてしまうという、ということが非常な驚きだったわけです。

AdS/CFT 対応のテスト

今まで聞いてきて、まあ納得してくれた人はそれでいいんですけれども、同じものの二つの別の見方といっても何かいろいろ状況証拠はあるけれども本当にそうなのかというのはよく分からない、と思った人もいるかも知れない。実際それはそうで、これは両方で何か coupling constant がどんな大きさでも定義されているような普通の場の理論ですとか、何かもっと大きい摂動論によらない framework があって、それに対して二つの見方をす

るというやり方をやっているわけではないわけです。string 理論というのは常に何かある background からの摂動みたいな描像しか定義することができないので、そういう対応をやっているけれども、この対応がどこまで正しいのかというのは実際はチェックしなくてはいけないものです。それに関してどういうチェックが可能で、どういうチェックが今までされているかそういうなことをちょっと最後に考えてみることにします。

非常に難しいのはですね、dual な picture ですから、これを直接比較することはできないんですよね。例えば Yang-Mills 理論を使って coupling が非常に大きいところを見るには、supersymmetry みたいなのがなければ、lattice gauge theory を使って λ が非常に大きい $1/\lambda$ 展開みたいなことを実際にやって何か物理量を計算することも出来るかもしれない。string の方は $1/\lambda$ 展開みたいなものと対応していますから、それを string の摂動論で計算したものと直接比較することができれば、この対応が正しいかどうかはチェックできるはずですね。しかし、supersymmetry が存在しているとか、あるいはいろんな物理量自身が実際は有限繰り込みみたいなのでどういうふうに対応してるかですとか、実際比較するときにはいろいろと分からないことが多くて、そういう何か同じ量を両方で計算してチェックするというのは一般に非常に難しいです。

$$\text{strong / weak の duality} \longrightarrow \text{直接の比較は難しい}$$

duality というのは strong と weak の duality なので、一般に直接比較するのは難しい。ただ、$\mathcal{N}=4$ というのは vector-like な理論なので、もしかしたら lattice gauge theory みたいなのを使って計算できるのかも知れないですが、僕はその辺はあまり詳しくないので、何か詳しい人は考えてみたら面白いかも知れないです。

global symmetry　じゃあこういう duality のチェックをするときに、どういう量を見比べて対応のチェックに代えているかというと、これは AdS/CFT に限らず、いわゆる string の duality といわれているときも一緒なんですが、そういう coupling constant によらずに比較できる量をうまいこと探してくるわけです。何年か前に YKIS かなんかで Seiberg がやってきて、例の Seiberg の duality みたいな話をさんざんしたときに、そういう coupling の強さに依らずに比較できる対称性というのは何かということを議論した。彼は gauge symmetry はいろんな見方によって、違う local gauge invariance をもった理論が同じにみえたりするので fake な symmetry だと、こういうのはあんまり比較しても意味がないというようなことを言いました。それに対して、global symmetry というのは意味があって、対称性というのは coupling constant によらずに存在する場合は存在しますから、global symmetry を両者で比較するというのは意味がある。

まず CFT_4 の側を見てみましょう。$\mathcal{N}=4$ の super Yang-Mills が実は 4 次元の superconformal field theory (SCFT) になっている。

$$\mathcal{N}=4 \quad \mathrm{SYM} \ \oplus \ \mathrm{conformal} \quad \mathrm{SCFT}$$

$$\begin{array}{cccccc} (\mathrm{P})SU(2,2/4) & \supset & SU(2,2) & \times & SU(4)_R & \\ & {\scriptstyle \mathrm{bosonic}} & \wr\| & & \wr & cf.\ SU(4) \simeq SO(6) \\ & & SO(4,2) & \times & SO(6)_R & \end{array}$$

superconformal 対称性というのは 4 次元では $SU(2,2|4)$ 、なんか $U(1)$ がひとつ減っているんですが、 $SU(2,2|4)$ と呼ばれる対称性になっています。 $SU(2,2|4)$ というのは、 Lie supergroup と呼ばれる supersymmetry (odd な generator) まで含んで拡張したような対称性で、bosonic な subgroup は、 $SU(2,2)$ と $SU(4)$ 。実は $SU(4)$ が $SO(6)$ と local に同型だったんですが、$SU(2,2)$ はそのうち何か negative metric みたいなものを二つ入れたものです。それは 6 次元の中で 2 つ signature を引っくり返したようなものに等価です。比較すると $SU(4)$ は $SO(6)$ とだいたい一緒で、何かちょっと signature を引っくり返したようなもの。それから $SO(4,2)$ は 4 次元の conformal 群です。この中の subgroup の $SO(3,1)$ が 4 次元の Lorentz 対称性で、それに special conformal 変換と dilatation と translation、それを加えてやると実は全体で $SO(4,2)$ の代数を満たしている。$SO(6)_R$ は、4 次元の R-symmetry です。$\mathcal{N}=4$ の R-symmetry 、あるいはその場合 $SO(4)$ といってもいいのかな、4 つの supercharge をグルグル回転させる R-symmetry 。それに super 変換と、conformal super 変換というのは superconformal な場合もありまして、それを足してやると全体として $(P)SU(2,2|4)$ global symmetry をもっている。

それから $\mathrm{AdS}_5\times\mathbf{S}^5$ 空間の持つ対称性も見てやりましょう。AdS 空間というのは Anti-de Sitter 空間といって、inflation universe なんかで出てくる de Sitter 空間の時間と空間をある部分引っくり返したようなへんてこりんな空間です。それがどういう空間かというのはもう時間がないので省略します。その AdS 空間のもつ対称性は次のようになっている。

$$\mathrm{AdS}_5\times\mathbf{S}^5\text{空間の対称性}\Longleftrightarrow\text{“ isometry ”}\longrightarrow\begin{array}{c}SO(4,2)\times SO(6)\\ \mathrm{(P)}SU(2,2|4)\end{array}$$

空間の対称性というのは要するに、その空間の中にいる人がどういうふうに動いたときに空間が不変にみえるか、ということですが、それは実は、isometry、正確には isometric、計量を変えない変換のことです。isometry というのは計算することができて、これがちょうど $SO(4,2)\times SO(6)$ とこっちのこの bosonic の subgroup と同じになっている。これが、この string 理論のもつ global symmetry 。

さらに SUSY は、bosonic な部分で background の上の Killing spinor を求めてやると、ちょうど YM の fermion の部分と同じ分だけ出てきて、global な対称性が $SU(2,2|4)$ になるということが分かります。この辺をもうちょっと 4 章で詳しくやりたかったんですが、すいません時間がなくなったのでこのぐらいでやめておきます。

anomaly と関係した相関関数　今何をやっていたかというと、この対応をチェックするためにどういう量を比較したらいいかということだったんですが、global symmetry 以外に例えば anomaly も考えられます。anomaly というのは、例えば Adler-Bardeen の定理があって、1-loop まで計算するとそれ以上は形とか係数が変わらないとかそういう非常に特殊な性質をもっている。それはどこからきてるかというと、もうちょっと topological な議論があって、藤川の方法などを通じて何か index 定理と関係づいたりしているわけです。そういう非常に topological な議論からバチッと決まってしまうような量、それは coupling constant の大きさに依らずに決まりますので、そういう量を比べて比較することができる。具体的には anomaly そのものは直接みることはできませんが、例えば anomalous な order density と関係したような相関関数、そういうものを計算することはできます。こういうのもいくつか計算されて、確かに対応があるということがチェックされてます。

chiral primary operator の spectrum (BPS spectrum)　それから、Maldacena の話が出でてすぐに Witten なんかがチェックした話として chiral operator の spectrum、あるいは chiral primary、があります。これはちょうど、例えば string duality だとか gauge theory 、Seiberg-Witten の理論だとか、あるいは $\mathcal{N}=4$ の super Yang-Mills なんかでもそうですけれども、そういうときに比較するところの、いわゆる BPS spectrum の比較と同じことです。BPS spectrum というのは、ちょっともう細かい話はできませんでしたが、要するに BPS saturated state あるいは supersymmetry の short multiplet のように、何か supersymmetry の表現論からバチッと性質が決まってしまっているようなもので、それはやっぱり coupling constant の大きさに依らずに表現論だけから決まってしまいますから、両者で比較することができる。

moduli space　あるいはさらに moduli 空間などを考えます。$\mathrm{AdS}_5 \times \mathbf{S}^5$ そのものに関してはもうこれ以上 moduli 空間はないんですが（あ、あるのかな?)、それに対して marginal な変形みたいなことを考える。要するに、ちょっとずつ parameter を変えてやる、何か変形させてやる、そういうことを考えることができて、それぞれのフローに関して moduli 空間が両者で一致するかとか、あるいは、そういう relevant な、あるいは marginal な変形、無限小変形、 AdS_5 とか、 $\mathcal{N}=4$ の superconformal symmetry とか、そういうのからこうちょっとずつ変形をさせていったときに両者の振る舞いが一致するか。そういうのは比較することができます。

これくらいのことが例えば考えられて、実際にそういう AdS と CFT の対応がどの程度信頼できるかということは色々議論されています。今のところは、ここに挙げたようなその実際に直接比較して何か意味のある結論が出せるような比較に関しては、この対応が正しいという結果が常にでてきます。何か否定的な結果というのは今のところ得られていない。ただし、非常に限られたものしかチェックできないわけで、その他にもチェックができないような量、例えば有限温度にしたときの glueball の mass だとか、あるいは、ある種の anomaly と関係しないような相関関数、そういうものは計算することはできるんですが、それはこの対応を信じれば何か strong coupling での gauge theory の相関関数だというふうに信じることはできますが、実際に対応をチェックすることにはなりませんので、そういう場合のチェックというのはまだできていません。また、おおむね実際にやられているのは supergravity 近似に限られた話が多いのですが、唯一、次元が 2 つ落ちて AdS_3 という 3 次元空間になりますと、これがちょうど group manifold と同型になっていて、group manifold 上の string theory というのは Wess-Zumino-Witten theory を使って構成できたりするので、もうちょっと string 的な考察がなされています。

5　$N < 4$ の試み

今後どういう方向に発展していくかということを最後にちょっと考えてみます。まず当然、我々の QCD を最終的に理解する、というのが非常に究極的な目標としてあるわけで、そこへいくために SUSY を 4 から小さくするということを考えたいですよね。そのためには、何か有限温度にするとか、orbifold を考えるとか、$\mathcal{N} = 4$ から変形して $\mathcal{N}$ が小さい方へのフローを考えるだとか、いろんな方法が考えられています。

Polchinski-Strassler　これまでは、だいたい conformal 対称性がある場合を考えていましたが、そういう場合には $\mathcal{N}$ を小さくしても、何か matter multiplet が適当に入っていて全体として β 関数が cancel して conformal になるような場合が多かったんです。conformal な理論というのは対称性が大きいですから、縛りが非常にきつくてきれいにいろんな性質が決まっていて、それは非常に面白いんですけど、逆に dynamics としてはあまり面白くない。要するに、scale invariance がありますから、通常の QCD のような Λ_{QCD} みたいな dimensional transmutation が起こる場合と違って、dynamical な scale が何もない理論になっている。dynamical な scale が何もない理論ていうことはどういうことかというと、例えば quark anti-quark の間の poteitial を考えても何か次元に応じた Coulomb の scaling しかしないわけですね。だから、閉じ込めみたいなものは決して起きない。string tension みたいな次元のある量が dynamical には出てこない理論になっている。そういう意味で、dynamics は QCD と非常に違っていてあんまり面白くない。要するに、次元の勘定だとかだけでほとんど振る舞いが決まってしまう理論だったんです。

これに対して、最近僕が面白いと思ったのは、Polchinski-Strassler という仕事です (Polchinski, Strassler, hep-th/0003136)。これは $\mathcal{N} = 4$ の Super Yang-Mills からのある種の変形を考えて、$\mathcal{N} = 1^*$ と彼らの呼んでいる理論、 SUSY が 1 の理論に落としてやる。$\mathcal{N} = 1$ の理論というのは supersymmetry があるので、何か縛りがわりとあって dynamics が制御可能になっているにもかかわらず、閉じ込めだとか chiral symmetry breaking だとか、そういう物理的にも面白い dynamics をもっている、どっちの性質もちょっとずついいところをもっているような、何か非常に面白い理論になっている。だから、そういう理論にもっていくことによってはじめて、そういう confinement が起きるような gauge theory の dual を見つけた、というようなことを主張をしています、あるいは解析しています。これは最近の非常に面白い発展だと思います。

$$\mathcal{N} = 4 \quad \mathrm{SYM} \longrightarrow \mathcal{N} = 1^* \ \mathrm{SYM}$$

Fukuma-Matsuura-Sakai　それからあと面白い発展としては、この AdS/CFT 対応というのは、次元のひとつ違う 4 次元の CFT と 5 次元の AdS 、何かこう次元がひとつ増えた中での string 理論という対応になってたんですが、その増えた 1 次元の正体を物理的に解釈していこう、という方向があります。実際は、その CFT というか boundary gauge theory の立場からいくと、増えた 1 次元というのは実は energy scale みたいに解釈ができて、coupling が変化していくというのは、実は繰り込み群の効果で energy scale を変えたときに coupling が running していく効果に焼き直すことができる。そういう見方をする

と、AdS 空間の中の古典的な運動方程式というのが、boundary S の gauge theory の繰り込み群方程式というふうに解釈しなおせて、色々なdynamicsを議論できる。何かそういう話もあります。それはいろんな人がやっているんですが、例えば基研の福間さんとか、松浦さんあたりかな、彼らも最近論文をかいて非常に面白い結果を出しています。

string 理論としての対応　もうひとつは、やっぱりそういう gauge theory あるいは supergravity の近似を越えて、string 理論としての対応というのを見たい。そういうのが更に拡張として考えられます。これはまあ3次元の場合は割りと詳しく調べられていますが、こういう curved space の string 理論というのは必ずしも簡単でなくて、group manifold の場合でもいろんな解釈があってそう単純ではないですが、これに関しては実際に string 理論としての取り扱いや、CFT として取り扱いができるので、わりと詳しく調べられています。日本だったら、あの佐藤勇二さんだとか、あるいは今基研にいる細道さんだとか、東大の菅原さんだとかその辺の人たち。もともとは Giveon、Kutasov、Seiberg という人たちが始めたのかな、それから Ooguri たちがちょっと論文を書いている。

$$\mathrm{Ad}S_3 \sim SL(2)$$

NS5-brane　それから僕が最近面白いと思っているのは、singular CFT に関連することなんですが、昨日今日の話は D-brane のが出発点になって duality を考えていましたが、string 理論にはもうひとつ brane が存在しまして、それが NS5-brane 。NS5-brane の理論を使って同様の対応を作ってやろうという動きもあります。AdS/CFT でいったら gauge theory と string の対応と言いましたけれど、NS5-brane では実は、gauge theory の側が local field theory にならずに何か little string theory になっている。

$$\text{little string theory} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{r}\text{string theory on linear dilaton background}\\ \text{at double scaling limit}\end{array}$$

これは昔の Seiberg-Witten だとかそういう話に非常に詳しい人は、いわゆる Argyres-Douglas point のような、互いに mutually non-local な object が同時に massless になるようなときに、local field theory で表せないような CFT になっているとか、そういう話がありますけれども、そういうのを記述している理論だと一般に考えられています。だから、ある種の例えば $\mathcal{N}=2$ の $SU(3)$ の Seiberg-Witten theory、gauge theory の Argyres-Douglas point での理論、そういうものと dual なものとして、今度は AdS ではなくて、linear dilaton background 上での string、あるいは linear dilaton というのはそのままでは well-defined ではないので、なんかある種の double scaling limit をとった理論として string 理論を定義して、それで little string theory と比べてやりましょう。そういう議論があります。これは Giveon、Kutasov だとか、最初は Aharony、Berkooz、Kutasov、Seiberg だとかそういう人たちがやってます。それで、一般にこの string 理論としての対応をみるのは3次元はやられていると言いましたけれども、例えば4次元の我々の gauge theory を知りたければ、AdS$_5$ 上の string 理論を考えないといけないんですけれども、こういうのは非常に難しいですね。一般に non-linear σ model になって、flat な場合と違って exact に解いたりすることはできないので、AdS$_5$ 上の string 理論を考えるというのは結構難しいん

ですけれども、この linear dilaton だとか、あるいはそれを使って double scaling limit をとった string theory というのは CFT として構成することができるので、こっちを具体的に作ることができるんですね。そういう意味で AdS/CFT 対応のある側面を見るという意味でも、何か面白いんじゃないかと思っているんですが、比較する little string theory があんまりよく分かっていないので、何かどちらも一長一短のところがあったりします。しかし、こういう方向の拡張も面白いんじゃないかと、そういうふうに考えています。

ということで、何かあんまり具体的な AdS 空間の話とかそういうのが出てこなかったので、シリキレトンボな感じになってしまいましたが、一応これで終わりにしたいと思います。どうも。

(2 日目 終了)