

2015年度原子核三者若手夏の学校
素粒子パート 現象論講義録

素粒子物理学の現状と将来

(Particle Physics, its present and future)

講師

萩原 薫

(高エネルギー加速器研究機構)

講義録作成：大阪大学素粒子論研究室

森裕紀	西田充宏	鍵村亜矢	杉本裕司	山村亮	中西由香理
古井敦志	尾崎翔美	玉岡幸太郎	横矢毅	池田一毅	岡部廉平
平井隼人	船越元気	三上恭子	溝川翔太	山本奨太	

謝辞

2015年度原子核三者若手夏の学校での現象論講義を快諾してくださり、実用に適した多くの練習問題を含めて標準模型の基礎から最近の発展まで幅広い内容を丁寧に解説していただいた萩原薫氏に深く感謝致します。また、萩原氏には講義録作成にあたって原稿の詳細なチェックを繰り返し行っていただき、講義録の完成を支えていただいたことに心より御礼申し上げます。

そして、センター校の北海道大学や準備校の東北大学をはじめとする役職校を担当した大学の方々の協力により、2015年度原子核三者若手夏の学校の運営が円滑に行われ実りある講義を実施することができ、この講義録を発表するに至りました。夏の学校運営に関わった全ての方々に感謝します。

最後に、基礎物理学研究所、素粒子論グループをはじめとする2015年度原子核三者若手夏の学校を後援・協賛していただいた全ての団体に深く感謝致します。

2016年7月

目次

第I部 講義1日目	5
1 大統一模型, または標準模型の起源	5
1.1 標準模型 (Standard Model ; SM)	6
1.2 新しい物理	9
2 標準模型の理解に向けて	11
2.1 アイソスピン	11
2.2 ヒッグス2重項	12
2.3 質量項の導入	14
2.4 ローレンツ変換	17
2.5 Weyl表示とDirac表示	19
3 大統一理論 (Grand Unified Theory ; GUT)	23
3.1 SU(5)の表現論と物理	23
3.1.1 5表現, 5*表現とフェルミオン	23
3.1.2 10表現とフェルミオン	24
3.1.3 24表現とゲージボゾン	26
3.1.4 24表現とヒッグス	27
3.2 アノマリー	27
3.3 ゲージ結合定数の輻射補正と漸近自由性	30
3.4 結合定数の統一	32
3.4.1 ヒッグスボゾンが1個の場合	32
3.4.2 ヒッグスボゾンが2個以上の場合	36
3.4.3 ヒッグスが6個ある理論	37
3.4.4 ミニマル超対称標準模型 (Minimal Supersymmetric Standard Model ; MSSM)	39
3.5 新しい物理の模索手段: ミューオン $g-2$	42
4 1日目のまとめ	44
5 質疑応答	44
第II部 講義2日目	47
6 最近の研究	47
6.1 標準模型の物理とその先	48
6.2 \tilde{B} のダークマターシナリオ	51
6.3 電弱理論の輻射補正	59

7	標準模型の物理	68
7.1	QCDにおける T odd asymmetry	68
8	2日目のまとめ	83
第 III 部 宿題		86
O	この宿題中で使う記号の定義	86
O.1	フェルミオン場について	86
O.2	ゲージ場について	86
O.3	ヒッグスについて	87
A	宿題 1	88
A.1	宿題 1-1	88
A.2	宿題 1-2	89
A.3	宿題 1-3	92
B	宿題 2	94
B.1	宿題 2-1	94
B.2	宿題 2-2	96
B.3	宿題 2-3	97
C	宿題 3	99
C.1	宿題 3-1	99
C.2	宿題 3-2	101
C.3	宿題 3-3	102
C.4	宿題 3-4	103
C.5	宿題 3-5	103
C.6	宿題 3-6	104
C.7	宿題 3-7	105
C.8	宿題 3-8	105
D	宿題 4	107
D.1	宿題 4-1	107
D.2	宿題 4-2	110
E	宿題 5	112
E.1	宿題 5-1	112
E.2	宿題 5-2	114
E.3	宿題 5-3	116
E.4	宿題 5-4	117
E.5	宿題 5-5	119

E.6 宿題 5-6	121
E.7 宿題 5-7	122

第I部

講義1日目

1 大統一模型, または標準模型の起源

実はこのタイトルが僕の物理観そのものを表しているのだから、結構良いかなと思います。大統一模型というのは何か新しい模型だと思っただけですけども、標準模型を勉強してきちんと理解すると、どうも標準模型というのは大統一模型の中に入っているようにしか見えない。僕は大学院を卒業してしばらくしてからやっと大統一理論の意味や物理とかが理解できたのですけれども、その時感じたのは「これは絶対本当だろうな」と思いました。疑うことができないような、真実というような感じの捉え方をしました。

僕は総研大の1年生の最初の講義を受け持つことが結構あって、これは標準模型を理解するという目的の講義なんですけれども、半年間の講義の目標は、かつて僕が大統一理論を理解した時に、もう一度標準模型を見直して「ああ、標準模型というのはこうなっているんだな」と思ったように、それが学生の出発点になるようにと思って講義をしています。

ローレンツ変換の変換性をきちんと理解して、左巻きと右巻きのフェルミオンがどのように変換するかとか、それがどのように量子数と関係しているかとかを理解することは、少なくとも標準模型がどういうものであるかというのを理解する核だと思います。実はここにコピーしたのは僕が総研大の講義で使っている宿題です(第III部参照)。僕は普段白板で講義をするので講義ノートというのは存在しないのですが、必ず宿題を出します。講義を聞いてその時に分かったという気になるのは簡単なのですが、それを完全に自分のものとして使いこなせるようになるには必ず練習しなければならない。これはどんなに頭の良い人でもそうだと思うんです。小学校で習う九九ぐらいに使いこなして欲しいという思いで宿題を出しています。

1.1 標準模型 (Standard Model ; SM)

The Standard Model (SM)

The Standard Model (SM) of elementary particles have 3 gauge interactions, SU(3) for QCD, SU(2)×U(1) for the electroweak theory, which breaks spontaneously down to U(1)_{EM}.

We have 8+3+1=12 gauge bosons, 3 generations of 6+3+3+2+1=15 fermions, and at least one doublet of the scalar boson (Minimum SM).

For each generation, the 15 fermions have the following quantum numbers

$$(3, 2, 1/6), (3, 1, 2/3), (3, 1, -1/3), (1, 2, -1/2), (1, 1, -1)$$

Quantization of hyper-charge in units of 1/6 is probably the most important hint for the origin of the 15 fermions (quarks and leptons).

If we re-write the fermion quantum numbers for their **left-hand** chirality components, so that they transform the same way under the Lorentz transformation, we have

$$(3, 2, 1/6), (3^*, 1, -2/3), (3^*, 1, 1/3), (1, 2, -1/2), (1, 1, 1)$$

and notice that they form 10 and 5* of SU(5):

$$\begin{aligned} 10 &= (3, 2, 1/6) + (3^*, 1, -2/3) + (1, 1, 1) \\ 5^* &= (3^*, 1, 1/3) + (1, 2, -1/2) \end{aligned}$$

The charge quantization is a consequence of the tracelessness of the SU(5) generators.

図 1: 標準模型

素粒子の標準模型は3つのゲージ相互作用, SU(3) (量子色力学 (Quantum Chromodynamics ; QCD)), SU(2) × U(1) (電弱理論) で, その対称性が自発的に壊れて, 電磁気の U(1) に落ちる. これがゲージ対称性の総括になっています.

次にゲージ対称性があるので, ゲージボソンがあります. QCD は8つ, $3 \times 3 - 1$ ですね. SU(3) の生成子というのが基本的に 3×3 のエルミートな行列なんですけど, 規格化が決まっているので, トレースがゼロ. それで $3 \times 3 - 1$ で8個ということなんです. この辺のことは, ほぼどんな大学のどんな学生でもちゃんと理解していることです. それで SU(2) の方が 2×2 から1を引いて3つ, U(1) の方は1つということになっていて, 合計で $(8 + 3 + 1 =) 12$ 個のゲージボソンがあります. それで世代が3あるということもみんなよく知っていると思います.

その一つ一つの世代につき, ちょうど15個のフェルミオンがあります. この数え方は, 例えば8個のグルーオンという時には, カラーの自由度を1個持っているスピンの1の質量ゼロのボソンとして, グルーオン1個と数える. だからグルーオンの中の1個というのが例えば量子電磁気学 (Quantum Electrodynamics ; QED) の光子に対応している, そういう数え方です. フェルミオンの時はこの数え方です. カイラルフェルミオンになっています. ですから電子1個というのが, 実は2個のフェルミオンと数えています (右巻きの電子と左巻きの電子の「和」). すごく難しいですね. そういう数え方をするとちょうど15個です.

$6 + 3 + 3 + 2 + 1$ というのも多分みなさん全員がそのように数えられるだろうと

思います。6の部分の通常クォーク2重項とみなさんが呼んでいるものです。クォーク2重項は左巻きしかないので、2重項だから2つで、クォークはカラーの3重項だから3つで、かけ算してちょうど6個のフェルミオンということです。

次の3+3というのはダウンクォークとアップクォークの右巻きの部分です。それぞれ右巻きの部分が1重項なのでカラーの3重項ということで3です。それから次の2のところは、左巻きのニュートリノと左巻きの電子で1つのペアになっています。それから、最後の1が右巻きの電子になります。このようになっているのがクォーク模型です。

現実の世界とちょっと違うのが、最終的にSU(2) × U(1)のゲージ対称性が自発的に壊れて、QEDの電磁的なU(1)の対称性だけが現実の世界では見える対称性として残っている、という点です。大切なことは、このように見えなければならない、このように本当に見えるということです。

次に一世代につき、クォークとレプトン¹の中で同じタイプのフェルミオンが、SU(3)とSU(2)とU(1)の模型でこのような量子数をもっています。これがとても大切ですが、まず6の部分はQCDのSU(3)の3重項で、SU(2)の2重項で、次のU(1)は電磁気的U(1)とはちょっとずれていて、ハイパーチャージのU(1)_Yです。このハイパーチャージの値がちょうど1/6になります。

次に右巻きのアップクォークでカラー3重項で、SU(2)が1重項でハイパーチャージが2/3。それから1重項の場合はハイパーチャージと電荷は同じになります。西島-Gell-Mannの法則というのがあるが、対称性が壊れた後に、電荷はアイソスピンとハイパーチャージを足したものになります：

$$Q_{em} = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (I_3: \text{アイソスピン}, Y: \text{ハイパーチャージ}). \quad (1.1.1)$$

そうすると例えば、SU(2)2重項の部分というのはハイパーチャージ1/6なので、壊れた後でアイソスピンの+1/2の部分は電荷が(1/2 + 1/6 =)2/3。それからアイソスピンが-1/2の部分が-1/2 + 1/6で-1/3になります。そのようにハイパーチャージが決まっているとも言えます。

それから次にあるのが、当然のことながら右巻きのダウンクォーク。それから今度はカラー1重項なのでレプトンですけれども、まず2重項がハイパーチャージが-1/2。ですから上の成分がチャージが(+1/2 - 1/2 =)0で左巻きのニュートリノ。それから下の成分が、チャージが(-1/2 - 1/2 =) -1でそれが左巻きの電子です。

最後にカラー1重項で、かつSU(2)1重項、ですからレプトンです。ハイパーチャージが-1。これが1重項なのはレプトンの右巻きの部分なんですけれども、チャージが-1なのは右巻きの電子です。

実は一つの世代はこうやって作る。我々の世界はこれが3回繰り返しているわけです。もちろん、なんで3回繰り返しているかというのは大問題なんですけれども、

¹6 + 3 + 3 + 2 + 1 = 15を見ると、はじめの6と3と3がクォーク、後の2と1がレプトンに対応する。

このように分かれているということ自体が一番大きな標準模型の鍵です。これが不思議だと思わないといけない。標準模型がどこから出てくるのかというのが、少なくとも素粒子理論を研究している人の研究の目標であるはずで、そうしたら、標準模型がどのようなものであるかをきちんと理解する。そこから何かしらの研究が始まらなければならない。

それで、一番綺麗なのはハイパーチャージが量子化されていることですよね。1/6, 1/3, 2/3, 1/2, 1なんですけれども、基本的に1/6の整数倍になっている。これがなんでかというのが一番重要な問題です。もちろん昔の人、僕だって若い頃は何か電荷のもとになるものがあると考えました。例えばハイパーチャージが1/6のものは、これを1個ずつ分け合っていて、右巻きの電子はこれを6個全部持っている。そうしたいですよ。実際に原子核の電荷はこうやって説明できた。原子番号1から、水素ですか、そこから出発して2, 3, 4, ...。それは最終的には陽子の数を数えているだけだったんですね。昔、僕が大学院の学生の頃はまだそういうような模型は沢山ありましたよ。みなさん一生懸命クォークレプトンの複合模型というのを考えていたように思います。

だけど、今はみなさんはそういう話をほとんど聞きませんよね。それはどうしてかということ、僕が今から話す見方の方が主流になってきてしまって、そうでない見方はほとんど難しいと思っているからだと思います。ただもちろん、現代の研究者が思っていることが正しいとは限りません。だから君たちが自由に考えるのはとても大切ですけど、最終的には実験的に何か出てくるというのが決定的だと思います。それが僕が実験に関わる素粒子論の研究を続けてきた理由でもあります。

次に、これがすごく重要なんですけれども、2重項の部分は左巻きのフェルミオンなんですけど、1重項の部分は、1, 1, 1って3つありますよね。この3つを反粒子に変えます。すごく重要なことは、右巻きのフェルミオンを反粒子に変えると、反右巻きのフェルミオンは左巻きになるということです。これはローレンツ変換の変換性を完全に理解しない限り、絶対に分からないことです。

これはものすごく重要なことなので、僕は講義の2回か3回かを使って説明します。重要なことは、僕らの世界の学生はこういう事実をかけ算の九九のように頭の中でできるようになるのが大切だということです。つまり、現実の世界はそうのようにできているとしか僕には思えません。あるいは多分本当にその通りなんだと思います。なので自然を理解しようと思うなら、一番本質的なところはパッと前提として、全てのものが考えられるようになる事が大切だと思います。

素粒子物理学は場の量子理論で記述されていて、標準模型という場の量子論はカイラルなゲージ理論になっている。カイラルというのは右巻きと左巻きのフェルミオンの成分が全く違う粒子として現れるような模型のことです。標準模型は完全にカイラルになっています。それが自然を理解する上ですごく重要なヒントです。つまり、右巻きのフェルミオンはすべてSU(2)の1重項で、左巻きのフェルミオンはすべてSU(2)の2重項です。

右巻き成分と左巻き成分が同じように変換するフェルミオンは1つも存在しません。それがとても重要なことです。

1.2 新しい物理

新しい物理を考える時に、例えばベクタークォークというものを聞いたことがあるかもしれません。どんな新しい物理を考えても、我々の現在の世界が $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の対称性を持っていますから、必ずそれを含む模型でなければなりません。だからどんな新粒子を考えても、 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のもとで量子数を持っていないければなりません（そうでなければ僕らの世界に入ってくることはできません）。ですから新しい粒子を考える時に、今までになかったものとして、右巻き成分も左巻き成分も $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の全く同じ量子数を持つフェルミオンを考えることは可能です。そういうのをベクタークォークとかベクターレプトンとかと呼びます。

ですが、僕らの世界に右巻きと左巻きの成分が違うものしか残っていないのは、多分そういうものだけが僕らが捕まえることができるぐらい、十分軽くなるからだと思えます。すると右巻きと左巻きが同じように変換するものというのは、とてつもなく重いものになるのではないかというような気がします。もちろん、それは実験的には回避できないわけですが、僕自身の研究ではそういうものを研究したことは無いです。物理学の研究対象は一人一人違うわけですが、若い時からどんな時でも僕はその時に一番重要だと、一番面白いと思ったことしか研究テーマに選んでこなかった。

そういう意味で、僕のものの見方というのは歪んでいるのですけれども、素粒子理論の研究者としてはそれは正しいことだと僕は思っています。

それで、すごく重要なことなんですけど、単純に反粒子にすること、つまり1重項の部分（右巻きの部分）を反粒子にしてしまうと、左巻きのフェルミオンになります。ここで、電荷がひっくり返っているのをみると、右巻きのアップクォーク（ダウンクォーク、電子）と言っていたものが、左巻きの反アップクォーク（反ダウンクォーク、陽電子）などになります。

この段階で実はものすごく面白いことが分かります。この15個の電荷を全て足すと0になります。1/6の6倍が1、(6個ありますからね)、それから-2/3の3倍が-2、それから1/3の3倍が1、実はこの段階で足すと0ですよ。レプトンの部分をみると、-1/2の2倍が-1で、最後の1を足すと0になります。こんな具合になります。

これだけ見ていると、あたかもクォークとレプトンと、それぞれ別々に1つのものに入りそうな気がするのですが、実はこれが一番ミニマルな統一理論である $SU(5)$ に入れると15個が $\mathbf{10}$ と $\mathbf{5}^*$ に分かれます。 $\mathbf{10}$ の部分が3重項と反3重項と1重項、 $\mathbf{5}^*$ の部分が反3重項と1重項。そういう具合になります。

更にもう1つ加えると、16個で1つの多重項になるような $SO(10)$ という有名な理論になります。残念ながら時間がかかるので説明しません。

このように、なんで電荷が量子化されているか、なんでクォークのハイパーチャージとレプトンのハイパーチャージが1:3のような関係になっているかというのが、きちんと理解できるようになります。この事実を完全に理解した上で、標準模型が出てくる元になる理論がどんなものか、という事を考察しなければならない。その時SU(5)模型というのはプロトタイプになります。何も無い所から考えるより、昔の人が素晴らしいアイデアを出したら、それを勉強して「あつ、こういうアイデアもある」と思うことで、新しいものを考える時に役に立つと思います。

2 標準模型の理解に向けて

2.1 アイソスピン

Q_i ($i = 1, 2, 3$)	which transforms as $(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
u_{Ri} ($i = 1, 2, 3$)	which transforms as $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})$
d_{Ri} ($i = 1, 2, 3$)	which transforms as $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})$
L_i ($i = 1, 2, 3$)	which transforms as $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
l_{Ri} ($i = 1, 2, 3$)	which transforms as $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$

これは今説明した問題²ですよね。 Q_i が 6 重項で、 u_{Ri} が右巻きアップクォーク、 d_{Ri} が右巻きダウンクォーク、 L_i が左巻き 2 重項、 l_{Ri} が右巻きレプトンです。

一方、ゲージボソンはこのようになります：

A^a ($a = 1, \dots, 8$)	which transforms as $(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
W^k ($k = 1, 2, 3$)	which transforms as $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
B	which transforms as $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

それとヒッグスボゾン：

$$\phi \quad \text{which transforms as } (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$$

もちろん標準模型の中で、ヒッグスボゾンはとても大切です。実スカラーのヒッグスボゾン ϕ というのが、SU(3) の 1 重項、SU(2) の 2 重項、ハイパーチャージが 1/2 になっています。

ヒッグスボゾンは SU(2) の 2 重項のもとの成分が真空期待値を持つことによって自発的対称性の破れが起きて、上の成分が +1 で下の成分が 0 の電荷を持つように模型ができています。もちろん、自発的対称性の破れの一番最初の理論を思い出してもらおうと、対称性が破れる地点というのが（ポテンシャルが最小になる点であれば）自由であるわけですよね。ですから、その 1 点が決まるまではアイソスピンの上と下の区別がありません。

だからアイソスピン空間において、自発的対称性の破れが起こる地点がどこかに決まります。それがどこかというのが分からないのが隠れた対称性ですね。対称性自体はあったけれど、ポテンシャルの一番低いところ（真空）が対称性の対称点ではない、それが自発的対称性の破れの原因です。その瞬間に、実はアイソスピンの

²第 III 部、○「この宿題中で使う記号の定義」参照。

上と下の区別ができるようになる。その後電荷が記述できる。ここでいう電荷がハイパーチャージの値とアイソスピンの値の和である、という西島–Gell-Mannの規則というのは、真空期待値が決まった後にアイソスピンの軸をうまく取り直したことによって決まる規則です。対称性が壊れる前ではアイソスピンの軸はどのように取っても同じだというのがSU(2)の対称性です。それが対称性の壊れた瞬間に区別ができるようになる。その時に西島–Gell-Mannの規則が成立するようにアイソスピンの軸を選びます。僕の、電荷がこうなりますよ、という説明は、全て対称性が壊れた後にこうなるという言い方をしています。このことを誤解される方がいらっしゃいます。ですが、理論家はその辺のことをきっちりと理解しなければいけない。そのことが自分で納得ができなかったら、最も一般的なアイソスピンの軸から出発して、残ったアイソスピンの回転の自由度を使って、普通の西島–Gell-Mannの規則が成立するようなところまで回転させて、元々の場を回転させた場で書きたい。そういうことをすると、今僕が言った普通に使っているベースに行くことができます。

これは僕の宿題 A に書いてあります。

2.2 ヒッグス 2 重項

ここで、ものすごく重要なことが出てきます。まず、標準模型のヒッグスはSU(2) 2重項ですよね：

$$\phi \quad \text{which transforms as } (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$$

1 と 2 と 1/2 っって書いてありますね。2 がSU(2)の2重項、1 がSU(3)の1重項、1/2 が先ほど言ったハイパーチャージです。この1個のヒッグスボゾンで標準模型は完全に書かれているのですけれども、標準模型の湯川相互作用、クォークやレプトンに質量を持たせる相互作用を全部作ろうと思うと ϕ^C というのが必要となります。これはヒッグス 2 重項の反粒子です：

$$\phi^C = i\sigma^2 \phi^* \quad \text{which transforms as } (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$$

ϕ を使って ϕ^C に対応する相互作用だと言ってもよろしいんですけれども、先々のためにSU(2)変換のもとで2重項が1つあったら、電荷が逆の2重項を作ることができる、というのをこの段階で勉強しておくのはとても役に立ちます。

これを理解することが将来、このずっと先の宿題で、右巻きのフェルミオンの反粒子が左巻きのフェルミオンのようにローレンツ変換のもとで変換するというのを理解するための鍵になります。ですからここは時間をかけてたくさん宿題を作っています(宿題 A 参照)。

この反粒子はもちろん複素共役にしなければなりません。そのことをすぐに理解するためには、次のように考えます。もし ϕ という場が何らかのゲージ変換のもとで、ある電荷を持っていたとします。そうしたら、 ϕ の複素共役は必ず逆の電荷を持ちます。例えば、 ϕ が $\phi \rightarrow e^{iq\theta} \phi$ と変換するとする。その時 ϕ^* がどう変換するかを見ると、必ず $e^{iq\theta}$ というのが複素共役になって $\phi^* \rightarrow e^{-iq\theta} \phi^*$ となる。これがどう

いう意味かと言うと、 ϕ^* という粒子は $-q$ という電荷を持っているということになります。だから ϕ^* とすることで、反粒子にすることはできるんですけども、その前に $i\sigma_2$ というのが入ります。

$i\sigma_2$ というのはたくさん出てくるのですけれども、Pauli 大先生が作った 2×2 の行列ですよ：

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

こういうのは九九と一緒にあるので、僕の頭の中にはこういうのが九九と全く同じように入っているんです。だから、この宿題も何も見ないでバーっと打っているだけなんです。でも、みんな結構こういうの覚えてないです。まだ君たちにとって九九じゃないからなんですけど。

ものすごく重要なことは $\sigma/2$ というのが角運動量の生成子だということです。このことは知識としては知っているよね？ 僕はいつも完全に覚えているので間違えることはありえないんですけども、角運動量の交換関係って結構忘れないでしょ？ 例えば、

$$[J_x, J_y] = iJ_z \quad (2.2.2)$$

というのは学部生の時に習うので忘れないですよ。これを使って行列をテストできます。でも、行列の成分でどっちがマイナスか分からなくなる事ってあると思います。そういう時はこの交換関係でチェックできるんですよ。あと、ベクトル粒子でも J_x, J_y, J_z などは、 i と $-i$ だけで変換されるんですよ。その時にどっちが i で、どっちが $-i$ か分からなくなることがあります。そういう時はいつもこれを使う。全部マイナスだと、マイナスが残っちゃうので間違いだと分かりますよね。サイクリックだというのは多分誰も間違えない。

それで、 $i\sigma_2$ はこういうものです：

$$i\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

このことを ϵ と書くことがあります。 ϵ は (時空の) テンソルじゃないのでなんと言っただけかよく分からないんですけども、ここでは詳しく説明しません。スピノール代数を考える時に使います。だから $i\sigma_2$ ってなんとなく虚数のように思うけれども、ただの (スピノール空間上の) 反対称テンソルです。(1,2) 成分の 1 と 2 をひっくり返す時に -1 を付けなさい、という事ですね。

ここですごい事があります。まず、 ϕ^* というのが、 ϕ が 2 重項、 $\mathbf{2}$ の変換性を持つとしたら、 ϕ^* というのは $\mathbf{2}^*$ の変換性を示します。例えば、 ϕ が $U\phi$ に変換したとします。そうすると ϕ^* というのは、 $U^*\phi^*$ になりますよね。変換行列が複素共役になる。こういうのを複素表現と言います。当然元の変換と違う変換をするわけだから、区別がつかます。ところがそれに $i\sigma_2$ というのをかけてやると、この全体は元の 2 重項に戻ります。これは計算して確認してみてください。つまり、 ϕ が $U\phi$ の変換

をする時には、必ず ϕ^C は $U\phi^C$ と変換します。* も転置も、何も無くて元の U で変換する。だから2重項だって分かります。それはもう宿題でやるしかないのだから、やってもらってます。時々僕が白板の上で自分でやるんだけど、そうすると間違え。結構間違えんですよ、ちゃんとやらないと。SU(2) だから $\sigma_1/2$ の変換と、 $\sigma_2/2$ の変換と、 $\sigma_3/2$ の変換と3つちゃんとやらないといけない。どの変換しても必ず元に戻りますよ、って言わないといけない。これはとても大切な事です。

この後の方で今言った宿題が入っています³。今僕が言ったことがここに書いてありますよね。 ϕ^* は電荷は確かに $-1/2$ になるんだけど、SU(2) のもとでは 2^* のように変換する。ハイパーチャージはすぐ分かるんだけど、宿題ではSU(2) のもとで一度に3つの変換をさせているから大変ですね。でも1個ずつやれば良いです。それに大変だったら微小変換でやれば良いと思います。連続群なので、微小変換で証明してしまえば、その性質が有限変換でも結びつくので、それだけでも十分です。

それから ϕ^* というのは U^* で変換するから、 ϕ^* の転置と ϕ をかけたものが不変になる。これは ϕ^\dagger と ϕ なんですけど、こちらで見ると ϕ^\dagger というのは、右側から U^\dagger で変換して、 ϕ は U で変換するので1。これが普通の見方ですけど、これで見ると U^* 、 U^{-1} の変換になっているというのが重要です。必ずどんな変換をする時にも、逆変換を使ってどのように書けるか理解すると、どうすれば不変なものが作れるかというのが理解できます。ラグランジアンをどうやって書くかという問題なのですが、今の学生さんはローレンツ不変なラグランジアンから出発するので、どうしてそれがローレンツ不変なのか、ということを理解していない人が多い。これが結構難しいんですね。昔の教科書などを見ると、Dirac のラグランジアンがどうしてローレンツ不変なのか、あるいは Dirac 方程式がローレンツ変換のもとでどのように共変に変換するのか、という事が丁寧に書いてあるんです。最近のものには全くそういうのが書いていないのです。流石に Dirac は難しいのでね。要はスピノールが4つも成分を持っているのですが、一方、標準模型は全部2成分のスピノールで書かれていますから、ずっと簡単なんです。だから少なくとも標準模型のラグランジアンくらいは、ローレンツ不変だってことをきちっと理解するというのがとっても大切です。

2.3 質量項の導入

基本的に標準模型では質量項は無いのですが、湯川相互作用の項がヒッグスボゾンの対称性の破れの後、右巻きのフェルミオンと左巻きのフェルミオンの質量項になります。湯川相互作用というのはスカラーボゾンとフェルミオンのペアによる相互作用です。スカラーボゾンはローレンツ変換で不変なので、フェルミオンのペアがローレンツ不変だということを見れば良いのですが、これは結構簡単です。でも、それをきちっと理解するというのが大切です、それを理解していないと、例え

³ 第三部, 宿題 A 参照

ばニュートリノがマヨラナ質量を持つといった時に何を言っているのか分からなくなります。ローレンツ変換の場合はちょっと難しいのですが、基本は逆変換と一つ一つの変換性がどうなっているか見ることです。重要なことは、もし右巻きのフェルミオンがローレンツ変換したとすると、左巻きのフェルミオンは異なる変換をします。しかしこの変換の仕方をしっかり調べると逆変換の転置のように変換する。元々のローレンツ変換も逆変換をとってそれを転置したように変換する。(転置するのは2列のスピンールだからですけど) そのことのせいで、右巻きのフェルミオンを転置して、それを左巻きのフェルミオンと縮約すると、ローレンツ不変になります。それがマヨラナニュートリノ質量です。左巻きのニュートリノ、その荷電共役をとる。

次に ϕ^c を変換します。そうすると、それは $\phi' = U\phi^*$ の荷電共役になるんですけど、 ϕ 自体は U^* 、つまり複素共役の変換をします。それに $i\sigma_2$ がかかっている。だから、問題は U^* と $i\sigma_2$ を交換したらどうなるか？ 実は交換すると U^* が U になる(宿題 A.2 参照)。ただこれだけです。これだけきちんと理解して下さい。そのことによつて、 $\phi^{c\dagger}$ と L 、これはレプトンの2重項なんですけど、この組み合わせというのは実は、この ϕ^T と L と

$$\begin{aligned} (\phi^c)^\dagger L &= (i\sigma^2 \phi^*)^\dagger L \\ &= (\phi^*)^\dagger (i\sigma^2)^\dagger L \\ &= \phi^T (-i\sigma^2) L \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

というように書けるのですけれども、これは $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ のもとで不変になります。そのことを使って、ゲージ変換のもとでヒッグスの荷電共役の随伴とレプトン2重項のかけ算したものが、1重項になるということが分かっちゃえば、あとはフェルミオンの変換に対して1重項にする方法が分かれば、ゲージ不変な演算子を作ることができます：

$$y_{jk}^\nu (\phi^{c\dagger} L_j) \cdot (\phi^{c\dagger} L_k) + h.c. \quad (2.3.2)$$

これは質量次元⁴の演算子になっています(レプトンの次元が3/2でヒッグスボゾンの次元が1)。それがマヨラナニュートリノになります。

僕自身の大学院の標準模型の講義では、ニュートリノを質量0のままにしておくわけにはいかないのです。ニュートリノに質量を入れるという事をします。これは現象論には絶対に必要です。その時に僕は次元5の演算子(2.3.2)を使ってニュートリノに質量を入れる。これをしっかり宿題でやるのが、フェルミオン全般のローレンツ変換を理解することに繋がると思います。これが一つ。もう一つは式(2.3.2)で作ったマヨラナニュートリノ質量の項というのが(2つの L で)レプトン数2を持っている。だからもし、その相互作用が0でなかったら、レプトン数が壊れる(2つ減ったり増えたりする)ということを理解する。この2つのことはとても重要だと

⁴以下、「質量次元」を「次元」と略記する。

思っています。もちろん、僕らの標準模型の世界を作っているフェルミオンの数を16個にするというのも、もう一つの手です。それは右巻きニュートリノという自由度を一つ加えます。そうすると、他のクォークやレプトンの質量項と全く同じようにニュートリノの質量項を作ることができます。そうしても良いのですが、僕の講義でそうしないのは、そのこと自体は多分誰にでもすぐに分かることで、勉強にならないからです。

あともう一つの理由は、ニュートリノの質量が他のクォークやレプトンの質量と比べて極端に軽いのは、新しい物理を反映しているからだと思っているからです。その時に一番考えやすいのは、標準模型の世界では右巻きニュートリノが無い、ということです。もし右巻きニュートリノが無く、しかし必ず質量があったとしたら、それは何か新しい相互作用によって作られるはずですが、ただ標準模型の中には、くりこみ可能な相互作用はすでに入っている。なので、もし右巻きニュートリノが無かったとすると、ニュートリノの質量は0です。ですからそれを0でなくそうとすると、くりこみ不可能な、つまり次元の高い演算子を入れなければいけない。それを入れてみると、簡単にニュートリノのマヨラナ質量項を作ることができる。これは非常に簡単にできます。

ですから次元5の演算子というのは、次元4までがくりこみ可能なので、くりこみ不可能な演算子の中で一番次元の低い演算子なんです。だから一番次元の低い演算子の新しい物理の系が一番最初に見えても、それほど不思議じゃないかもしれないんだと、そういうイメージがあります。

ですので、マヨラナニュートリノの方がDiracニュートリノの解釈よりもより自然なのではないかなと僕は思っています。ただしその場合、レプトン数の保存、あるいはフェルミオン数の保存、というのは犠牲になります。

例えばニュートリノレス二重ベータ崩壊の時に何が起きているかという、感じとしてはボゾンである W が2つぶつかって、それが2つのニュートリノになります。もちろん中性子から始まると、中性子2つが陽子2つになって、電子2つになるということです。中性子2つが陽子2つで電子2つになる。でも中性子が陽子になる時には両方ともバリオンなんですから、実際には仮想的な W 2つ (W^-W^-) が電子2つになる。だからフェルミオン数が保存しなくなります。レプトン数どころじゃないですよ。次元5の演算子はそういう演算子になります。

それで、結局僕らが普通に今観測している保存則というものがたくさんあります。今言ったレプトン数の保存、フェルミオン数の保存、バリオン数の保存というのは全部、所謂大域的な対称性に基づく保存性です。大域的というのは、一言でいうとゲージ対称性でない。難しい言葉でいうと、すべての時空点で、全く同じようにすべての粒子の位相を変換する、という変換です。

今の素粒子理論では、大域的な変換に基づく保存則は必ずしも最終的に正しい保存則ではないのではないかと、みんなが思っています。実際に普通の(Einstein-Hilbert作用で記述される)量子重力の理論では大域的な対称性に基づく保存則は、全て破れ

ということが言われています⁵。ですから、多分大域的な保存性というのはそれほど神聖なものではない。だからこそ、例えば大統一理論で陽子が崩壊するといっても、それほど驚くべきことではないのかもしれない。もちろん、僕がこの次元5の演算子を、Dirac ニュートリノを表す右巻きニュートリノを導入して次元4のDirac ニュートリノの質量を作るというのに比べて、こちらの方がより自然だと感じるのは、そういうことに対する仮定が無いと言えば良いのか、あると言えば良いのか分からないけれども、それは理論家としての標準模型に対するアプローチの仕方の表れです。

ここでは、ゲージ変換、つまり局所的な位相変換に対する不変性によってゲージボゾンが必要だということは、全ての学生が基本的には理解しているようなので、飛ばすことにします。

2.4 ローレンツ変換

せつかくなのでもうちょっと宿題Cからお見せしますね。ローレンツ変換はとて難しいので、僕の方針、いつも自分でどうやっているか言いますね。 x^μ が

$$\begin{aligned} x^\mu \rightarrow x'^\mu &= L^\mu{}_\nu x^\nu \\ &= \{e^{\frac{i}{2}\omega_{ab}M^{ab}}\}^\mu{}_\nu x^\nu \\ &= x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu + O((\omega_{ab})^2) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

のように変換する (M^{ab} : ローレンツ代数の生成子, ω_{ab} : 反対称なパラメータ, $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$)。そうやると M^{ab} の間に交換関係が出てきて、その交換関係によってローレンツ変換が完全に決まっているというのは、もちろんその通りなんですけれども、結局結構難しい。そこでいつも僕がやっているのは、もう成分表示にしてしまうんです：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_{ab}M^{ab} &= (\omega_{23}M^{23} + \omega_{31}M^{31} + \omega_{12}M^{12} + \omega_{01}M^{01} + \omega_{02}M^{02} + \omega_{03}M^{03}) \\ &= \theta_1 J_1 + \theta_2 J_2 + \theta_3 J_3 + y_1 K_1 + y_2 K_2 + y_3 K_3 \end{aligned}$$

先程言った変換は、実はこう書ける。だいたいこう書かないと何がなんだかかわからないですよ。1軸の周りの回転で ω_{23} というのが実は θ_1 で、 J_2 の周りの回転が θ_2 ならそれが ω_{31} で、 J_3 の周りの回転が θ_3 ならそれが ω_{12} で、という関係になって、1軸の周りのブーストの速さ (rapidity) が y_1 、それが ω_{01} で、といった感じになっています。それをきちっと理解して、後は少なくとも J_1 と J_2 と J_3 の部分の交換関係はよく知っているので、 J と K の間の交換関係と K 同士の交換関係をきちっと理解すれば良い。それで、最終的に大抵 J_3 ですよ、3軸の周りの回転と、それから J_2 の、2軸の周りの回転と、3軸の周りのブースト、それだけで、ほぼ全部できます。

⁵ これはブラックホールの蒸発やワームホールによって大域的電荷がなくなってしまうということから主張される [1].

まず座標を変換する。次にベクトルを変換する。その時に、ベクトルの変換は座標の変換と逆になる。だから生成子で書くと、座標の変換が例えば指数の $iy_3 K_3$ (つまり $e^{iy_3 K_3}$) だとしたら、ベクトルの変換は、マイナスが付いて $-iy_3 K_3$ となる。そうすることをきちっと最初に理解する。それさえやっておけば後は自動的に回転とブーストの連続でどんなことでもできる。それをまずベクトルについて完全におきます。ゲージボソンは2自由度しか無いからちょっと難しんですけどね。重心系に行けないというのはとっても嫌です。だからゲージボソンはちょっと後にします。それを全部やった後でフェルミオンをやれば良い。

フェルミオンの J_1 と J_2 と J_3 が $\sigma^1/2$, $\sigma^2/2$, $\sigma^3/2$ だというのは、量子力学ですでに知っているわけですよ。次に K_i がどうなるかという、それに i がつくだけで $i\sigma^1/2$, $i\sigma^2/2$, $i\sigma^3/2$ なんですね。ただ、それによってユニタリーではなくなります。 σ^1 , σ^2 , σ^3 はエルミートのオペレータだから、ユニタリー変換の生成子になる。だけれども $i\sigma^i$, 要するに $i \times \sigma$ 行列なんてユニタリーじゃないですよ。だから、ブーストは回転と違いますよね。これはそのことを反映しているんです。

でも例えば K_3 ですぐに分かることだけど、 $\sigma^3/2$ というのは元々、上の成分が1で下の成分が-1でしたよね。それに i が付いているわけです。そのことのせいで、ブーストの速さがどう入ってくるかという、例えば生成子が K_3 だとしたら、 $e^{-iy_3 K_3}$ になりますよね。その K_3 のところが $i\sigma^3/2$ だとすると、 i がキャンセルして $\sigma^3/2 \times y$ になります。

これは結構重要なのでちょっと実際にやってみましょう。フェルミオンを、例えば

$$\exp(-iyK_3) \times (\text{fermion})$$

と変換します。(fermion) という部分に2列のフェルミオンがあると思ってください。マイナスが付くのは、座標じゃなくてフェルミオンという“もの”が変換するからです。そして iyK_3 。この K_3 というのが、 $i\sigma_3/2$ なんですよ。そうすると、

$$\begin{aligned} \exp(-iyK_3) \times (\text{fermion}) &= \exp(-iy \frac{i\sigma^3}{2}) \times (\text{fermion}) \\ &= \exp \left\{ \frac{y}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \times (\text{fermion}) \end{aligned}$$

とこうなりますよね。それで、対角なので、これは

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{y}{2}} & 0 \\ 0 & -e^{\frac{y}{2}} \end{pmatrix} \times (\text{fermion}) \quad (2.4.2)$$

となります。元々ここにくるフェルミオンというのは、スピンの固有状態で決めて

いることが多いです. 例えば重心系で

$$J_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.3)$$

$$J_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

つまり, 上の成分はスピンの z 軸方向で $+1/2$, 下の成分は z 方向で $-1/2$, というようにフェルミオンを用意します. これをブーストしましょう. z 方向で, エネルギーをどんどん増やします. そうするとどうなるかという, ブーストは式 (2.4.2) でした. だからスピンの z 軸方向で $+1/2$ を持っている部分の式 (2.4.3) はどんどん大きくなっていきます. $\exp(y/2)$ は $1/2$ 乗を持っているので, エネルギーの 2 乗根で大きくなっていきます. 逆の (2.4.4) 式は, どんどん小さくなって, $\sqrt{1/2}$ でエネルギーが無大の極限で, $\exp(-y/2)$ がなくなってしまふ. だからブーストの演算というのは, 実はフェルミオンのスピンのアップとダウンでちょうど逆になるように現れる. 実は左巻きのフェルミオンと右巻きのフェルミオンの違いは, J_1, J_2, J_3 は完全に同じなんです. それで K_1, K_2, K_3 が, 右巻きのフェルミオンの時は $iy\sigma^3/2$. 左巻きの時のフェルミオンの時には $-iy\sigma^3/2$. これがひっくり返るんですね. それしか違いが無いんです. そのことをきちっと理解すると, なんでも分かるようになる.

これを本当に大学院生の宿題の段階できちっとやとくと良いですよ. 本当に頭の中ですぐにできるようになる. だからそういうことを是非自分で気をつけてやってください.

2.5 Weyl 表示と Dirac 表示

$$\begin{aligned} S^{23} = J_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^1 \end{pmatrix} & S^{31} = J_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^2 \end{pmatrix} & S^{12} = J_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^3 \end{pmatrix} \\ S^{01} = K_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\sigma^1 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\sigma^1 \end{pmatrix} & S^{02} = K_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\sigma^2 \end{pmatrix} & S^{03} = K_3 &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\sigma^3 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2}\sigma^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

昔出した宿題をみると, 式 (2.5.1) のようなものが出てきて, フェルミオンのローレンツ変換における生成子の中で (2,3), (3,1), (1,2), (0,1), (0,2), (0,3) 成分の 6 つが独立な生成子ですが, 上の 3 つは角運動量を表しています. これを導く時に, 僕は実は Dirac の 4 スピノール基底を使って導いていきます. これはどう考えても理論家としては気持ちの良くないところで, 全部 Weyl スピノールから出発して全部導く方がより良いと思います. ですが, 実は Dirac の表現の γ 行列を使った表示はものすごく長い歴史を持っています.

Dirac の理論ができたのが 1920 年代で、僕が大学院生の頃は Dirac の理論をすごくきちっと勉強しました。だから、僕でさえ Dirac の表現を使うと間違わないんです。やっぱり学生の頃訓練したものは決して間違わなくて計算がしやすいんです。一方、Dirac の表現を全部忘れて、Weyl 表現から出発しても、現実の世界は全て Dirac フェルミオンからできています。対称性は壊れた後だからです。現実の世界を考える時には、Weyl 表示から出発していると、混合を考えてやらないといけないのですが、面倒で結構間違えることがあります。右巻きのフェルミオンと左巻きのフェルミオンをくっつけないといけないんですけども、その時の相対的な符号などを間違えると結構厄介なことになります。

逆に Dirac 表示では、みんな良く知っている u スピノールとか v スピノールなどがありますが、Dirac 表示の表現から、つまり標準模型の相互作用は全部 Weyl からできているので、そこから出発して $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ と $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ を射影演算子として考えます。そのようにやると実は間違いを起こしません。相対的な符号は決まっているので、 $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = 1$ とかいうのを間違わない限り、間違いません。また、 $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ は二乗しても、 $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ をいくらかけても変わりません。

そういう射影をすることによって計算していくと決して間違わないので、少し面倒ですがローレンツ変換を 4 行 4 列で計算しました。それからカイラル表示で、左巻きの成分と右巻きの成分が完全にデカップルする、完全に対角なものになってしまっているということを見て、中身のことを勉強するという形で紹介しています。ですから最初に計算したローレンツ変換の生成子 (式 (2.5.1)) は 4 行 4 列です。今の表示では上の 2 つが左巻き、下の 2 つが右巻きです。つまり 4 フェルミオンに $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ を作用させると上の 2 つが残って、 $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ を作用させると下の 2 つが残る表示を使っています。ですから、角運動量は右・左成分についても完全に同じであることが分かります。 $\sigma^1/2$, $\sigma^2/2$, $\sigma^3/2$, どれも全く同じように角運動量が決まっています。だからスピンの $+1/2$, $-1/2$ というのは、右巻き成分も左巻き成分も全く同じように決まっています。一方、ブーストの方は右巻き成分と左巻き成分は符号がちょうど逆になっています。先ほど z 成分の場合のみ少しやりましたが、ブーストすると (運動方程式において) スピンが上の方のエネルギーだけが残って、下の方は残りません。上の方の左巻きのカイラリティの部分は、固有状態は残るけども、右巻きの固有状態は消えてしまう、そういうローレンツ変換をすることが分かります。

それから、左巻きと右巻きをカイラリティの意味で使う場合と、ヘリシティの意味で使う場合があります。二つの意味で使うことがややこしいことがよく知られています。カイラリティというのは標準模型の量子数に出てくる左と右です。この表示の場合は、成分の上の半分が左、下の半分が右、と言った時はそれがカイラリティです。 $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ で射影されるものが左巻き、 $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$ で射影されるものが右巻き、これがカイラリティの定義です。これだけが標準模型のラグランジアンの中に現れます。

一方、スピンはスピン演算子の固有ベクトルなので、普通は J_3 の向きで量子化することが多いのですが、そうすると 3 軸の方向にスピン $+1/2$ と $-1/2$ が出てきま

す。そしてもし3軸の方向にブーストすると、それがカイラリティが右巻きであった場合には、 $+1/2$ の固有ベクトルがどんどん大きくなって行って、スピンの成分がどんどん小さくなります。運動量の向きのスピンのことをヘリシティと言います。したがってエネルギーが無大の極限でヘリシティとカイラリティは一致します。

僕の計算の仕方は、 γ 行列を使ってこれを求めてしまってから、実はローレンツ変換が上のスピノール成分の2つと下の2つでもって完全に対角になっていることを確認します。だからローレンツ変換は上の2つだけでもできるし、下の2つだけでもできます。両方必要なわけではないというのが分かります：

$$S^{23} = \begin{pmatrix} S_L^{ab} & 0 \\ 0 & S_R^{ab} \end{pmatrix} \quad (2.5.2)$$

その上で S_R の (a, b) と S_L の (a, b) の関係を求めます。回転の方は全く同じで、ブーストと符号が違うだけの関係なので、関係があるというのはすぐに分かります。重要なのは S_R の変換は S_L の変換の逆行列の随伴行列になっていることです。 S_R と S_L の中身をちゃんと見ると、 σ 行列しか入っていないから簡単だということは想像がつかます。回転の部分はエルミートなんだけれども、ブーストの部分はエルミートでないことに注意します。 S_R 変換は S_L の変換の逆行列の随伴行列になっています。これはどういうことかということ、右巻きと左巻きの成分との縮約を取るとローレンツ不変だということ、これがいわゆる Dirac の質量項です。左巻きの荷電共役は右巻きのように変換すると言いましたが、この時に、もし右巻きの成分が元々の左巻きの荷電共役の成分として入っていたとすると、左巻きの荷電共役の随伴と元々の左巻きの縮約もローレンツ不変です。

ところが、元々の左巻きの荷電共役の随伴というのは、ちゃんと計算してみると、元々の左巻きのフェルミオンの転置を取って、それに $i\sigma_2$ をかけたものになっています。マヨラナフェルミオンのマヨラナ質量が、色々な表記ができるのはそのせいです。中身が分かったら、全部同じものを表しているというのは簡単に分かります。僕の好きな表示は、元々の左巻きのニュートリノだけを用いて書くという表示です。そうするとマヨラナフェルミオンの質量項というのは、元々のスピノールの転置と $i\sigma_2$ と元々のスピノールのかけ算だということが分かります。そうすると明らかに、その中のニュートリノの数は両方とも1でフェルミオン数が1のもののかげ算になります。なぜかということ、転置というのは行の向きを変えるだけなので、転置をしてもチャージ数は変わらないからです。荷電共役変換すると粒子が反粒子になります。そのことをきちっと理解するのが結構大変です。

ここまでで、ローレンツ変換の講義は終わりにします。 u スピノールのスピンの

+1/2 固有状態, スピン -1/2 固有状態は式 (2.5.3) のようになります:

$$u\left(+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.3)$$

これらが J^3 の固有状態になっていることはすぐに分かると思います:

$$S^{12} = J_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma^3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma^3 \end{pmatrix} \quad (2.5.4)$$

これをブーストしてみます. ブースト演算子は式 (2.5.5) なので, 式 (2.5.6) のようになります:

$$B_3(y) = \exp(-iyJ^3) = \begin{pmatrix} \exp(-\frac{y}{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\frac{y}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\frac{y}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-\frac{y}{2}) \end{pmatrix} \quad (2.5.5)$$

$$B_3(y)u\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{-y/2}\sqrt{m} \times 0 \\ e^{+y/2}\sqrt{m} \times 1 \\ e^{+y/2}\sqrt{m} \times 0 \\ e^{-y/2}\sqrt{m} \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E+p} \\ 0 \\ \sqrt{E-p} \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.6)$$

$$B_3(y)u\left(+\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{-y/2}\sqrt{m} \times 1 \\ e^{+y/2}\sqrt{m} \times 0 \\ e^{+y/2}\sqrt{m} \times 1 \\ e^{-y/2}\sqrt{m} \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p} \\ 0 \\ \sqrt{E+p} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

元々が静止系で, スピンを z 方向 +1/2, -1/2 と決めてブーストするとうこうなるということです. そうするとすぐに, スピンが -1/2 の左巻きは上半分だけが残って, スピンが +1/2 の右巻きは下半分だけが残るということが分かります. これがヘリシティとカイラリティの関係を一番直感的に納得できる計算です.

先ほど言ったように, 右巻きのフェルミオンは荷電共役変換する, つまり複素共役を取って $i\sigma_2$ をかけると, これはヒッグスの時と全く同じです:

$$(\psi_R)^c = (i\sigma^2)(\psi_R)^* \quad (2.5.7)$$

これはどうしてかと言うと, ローレンツ変換も σ 行列で決まっているから, と言えば間違っていないと思います. ただ i があつたり, 無かつたりするのでそこを気をつけてください.

ψ_R^\dagger と ψ_L がローレンツ不変になること, それから ψ_L の荷電共役の随伴と ψ_L がローレンツ不変になり, これがマヨラナニュートリノの質量項だということを説明しましたが, 式は (2.5.8) のようになります:

$$((\psi_L)^c)^\dagger(\psi_L) = (-i\sigma^2\psi_L^*)^\dagger(\psi_L) = (\psi_L)^T(i\sigma^2)(\psi_L) \quad (2.5.8)$$

3 大統一理論 (Grand Unified Theory ; GUT)

そしてGUTの話に戻ると、SU(5)の中に、実は標準模型の全ての15個のフェルミオンが綺麗に収まっています。その収まり方が本当に見事だなんて思えるんです。少なくとも、初めて理解した時は本当にそう思いました。今もう一度考えると、SU(5)の群のもとで本当に一つの多重項になるように我々のクォーク・レプトン世代があるのならば、これは当たり前だろうと思います。そうなのですが、見た時の驚きというのはやっぱり消えないように思います。

3.1 SU(5)の表現論と物理

3.1.1 5表現, 5*表現とフェルミオン

まずSU(5)ですから5表現が基本的になっています。次にSU(3)とSU(2)はそのままSU(5)の中に埋め込みます。SU(5)の行列の最初の3行3列の行列をSU(3)に取って、最後の4行目5行目と4列目5列目の行列をSU(2)に取ります。ハイパーチャージは対角に取ります。それが標準的な取り方です。SU(3)とSU(2)をそのままSU(5)の中に埋め込みますと、これは5表現ではなくて5*表現になります：

$$5^* = \begin{pmatrix} d_R^c \\ d_R^c \\ d_R^c \\ -e_L \\ \nu_L \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

まず、標準模型の全てのフェルミオンを左巻きで書くということを最初にやりました。それが、右巻きダウルクォークの荷電共役、それから左巻きのフェルミオン、右巻きアップクォークの荷電共役、右巻き電子の荷電共役（反粒子）です。

これらは全て左巻きのフェルミオンです。全ての粒子を左巻きで書かなければいけない意味は非常に簡単で、全ての多重項は同じ行列変換をしなければいけません。そうでないと、フレームを変えた時に、一生懸命集めてラグランジアンに組み込んだのにバラバラになってしまうからです。だからローレンツ変換のもとで全く同じように振る舞うものだけが、他のゲージ群などの多重項になることができます。ですから、フェルミオンが15個ある時に、それをとりあえず左巻きで書こうとするのは、より大きなゲージ群のもとで何が起きているのかを調べる時の根本中の根本で、大前提です。よって一番最初に全部を左巻きで書く必要があります。けれども、ローレンツ変換というのは結構難しいので、これを理解しようとするとい生懸命勉強しなければいけません。

ここでは全部左巻きの粒子で書かれています。そうすると右巻きの反ダウルクォークはカラーの反3重項なので、SU(5)の5表現の中には入りません。5*表現の中に入ります。SU(5)の行列の全体の複素共役を取った群の中にSU(3)の複素表現が入っています。反クォークというのは q^* のように変換するから、SU(3)の行列では元々のクォークが U で変換したとしたら U^* で変換します。それが複素表現です。

一方、このニュートリノと電子というのは W ボゾンと結合していますね。でもこれは反2重項にしておかないと、 $SU(5)$ の 5^* 表現の中には入りません。でも $SU(2)$ の2重項を反2重項にするのはすごく簡単で、 $i\sigma^2$ をかければ良いです。普通は上に ν_L があって下に e_L がありますが、それが $SU(2)$ の2重項です。それに $i\sigma^2$ をかけます。 $i\sigma^2$ をかけるということはどういうことかということ、上と下をひっくり返して、片方に -1 をかけるということです。どちらに -1 をかけても、それは位相の問題なのでどうでも良いんですけども、ここでは $-e_L$ と ν_L と書きました。これがいわゆる多重項です。 5^* に $SU(3)$ と $SU(2)$ が入りました。

3.1.2 10 表現とフェルミオン

$$\mathbf{10} = \begin{pmatrix} 0 & u_R^c & -u_R^c & u_L & d_L \\ & 0 & u_R^c & u_L & d_L \\ & & 0 & u_L & d_L \\ & & & 0 & e_R^c \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

次に $\mathbf{10}$ 表現 (式 (3.1.2)) を見ます。 $\mathbf{10}$ 表現というのとは一番簡単な複素表現です。“ $SU(5)$ のもとで変換する既約表現を求めなさい” という問題を思い出してください。 $SU(2)$ とか $SU(3)$ とかでは結構やりますよね。基本表現の添字を i とすると、 i は1から5まで動きます。そうすると複素表現の足は ij と付きます。 i と j はそれぞれ1から5まで動くから25個成分があります。それを分ける時、普通はどうするかと言うと、対称部分と反対称部分に分けます。多分、学部2、3年の時に角運動量の合成とかでやるんじゃないかな。 5×5 成分だけれども、反対称な部分が $5 \times 4 \div 2 = 10$ 個、対称な部分はその残りだから15個の自由度を持ちます。

実は反対称な部分が残ります。つまり、反対称な部分に我々の世界のフェルミオンを全て入れることができます。この $\mathbf{10}$ 表現は5行5列の行列の反対称な部分なので、対角成分は完全に0です。行列の左下の部分を書いていないのは、右上の部分に符号をひっくり返して書くだけだからです。 $\mathbf{10}$ 表現の行列を見ると足 (i, j) が $(1, 2, 3)$ を動き、 $SU(3)$ の3重項を作ります。一方、足の添字が $(4, 5)$ の4成分が $SU(2)$ のアップ、5成分が $SU(2)$ のダウンに対応しています。だからこのクォークの6重項が行列の4列目5列目に入るのは分かると思います。

問題は u_R^c というのが $\mathbf{10}$ 表現の行列の左上の成分に入ります。これは $SU(3)$ の表現の理論をきちっと思い出さないといけません。 $SU(3)$ は、今度は足の i が $(1, 2, 3)$ を動きます。そして2つ添字を持っていて、 (i, j) というのを作ってそれを反対称に組むと、反3重項になります。なぜ、陽子の中にクォークが3つあるか、つまりバリオンの中にクォークが3つあるかを考えると、それはカラーがあるからだと言えます。しかし、よくよく考えるとその3つというのがどこから出てくるかということ、 $SU(3)$ の3、つまりQCDの $SU(3)$ 群の3です。なぜ3つかということ、3つのカラー

を反対称に足し上げると1重項になるからです。完全反対称テンソル ϵ_{ijk} を用いて組める $\epsilon_{ijk}q_iq_jq_k$ というのはカラー1重項です。それを証明するなら (q_i, q_j, q_k) を全部 $SU(3)$ で変換して、 ϵ_{ijk} で縮約を取れば良いです。そうすると行列式が出てきて1になり、カラー1重項であることが分かります。 ϵ_{ijk} で縮約すると1になるので、1つ残しておいて、 (i, j) 成分に ϵ_{ijk} をかけたら k 番目のものの反対のカラーになる、つまり k 番目のものの複素表現になります。

そのことを使うと、例えば10表現の(1,2)成分は、カラーで言うと5*表現の3番目の成分と同じになります。それで行列(3.1.2)の(3,1)成分は(3.1.1)の第2成分となり、(1,3)成分は第2成分のマイナスになります。そして(2,3)成分は1成分になります。これでみんな入ります。これらが $SU(5)$ の元で反対称2階テンソルとして変換します。

右巻きを忘れていたんですけれども、これも $SU(2)$ で反対称だから、(4,1)成分に入っているのは $SU(2)$ の(1,2)成分と(2,1)成分の引き算にしたものが出ています。(1,2)成分-(2,1)成分というのは $SU(2)$ の1重項です。完全反対称テンソルを挟むと1重項と言ったのと全く同じです。例えば量子力学で、スピン1/2の電子と電子の角運動量の合成をなさいと言った時に、スカラーになる成分は $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$ でしたよね。この「ひっくり返してマイナスをかける」という反対称化する事と、1重項になるという事は全く同じです。それはやっぱり、スピンと $SU(2)$ 空間が同じなんですよ。

驚くべきことに右巻きニュートリノがあるとすると、それは ν_R の電荷共役として入り1表現となります：

$$\mathbf{1} = \nu_R^c \tag{3.1.3}$$

僕がなぜ右巻きニュートリノを標準模型の中に入れられないかという、少なくともこの描像では右巻きニュートリノはゲージ群の1重項だからです。ゲージ群の1重項は元々、1重項を2つ持つてくるとローレンツ不変な質量を持つことができます。それがマヨラナ質量です。もし自然界にマヨラナ質量があっただけでなく、対称性があったなら、つまりレプトン数の保存則、あるいはフェルミオン数の保存則というグローバルな対称性が、自然界に本当にあるのだったら、右巻きニュートリノが質量ゼロであることは可能です。それは右巻きニュートリノの大きなマヨラナ質量が、その対称性によって禁止されるからです。

でもそれはその瞬間に、大域的な対称性の存在を僕が認めたことになります。勿論それはそれで一つの考え方かなと思うんですけれども、やはり僕の頭の中では大域的な対称性は変だという気がします。やっぱり、Einstein くらいから相対論とかがあっただけでなく、相互作用が近接でなければいけないとか言われて、重力はどうかというと、重力も安定解以外は必ず光の速度でしか伝わらないんだとか、色々なことを言われます。ゲージ変換にしたって局所的なゲージ対称性があっただけでなく、質量ゼロのゲージボゾンが出てきて、そのことによって局所的な点と、そのすぐ隣の点のゲージ変換のずれの補正ができるということを教わります。そういうことを散々教わった後でも

右側の行列の前の規格化は左側の行列と同じようにしただけです。この規格化は普通のアイソスピンなどと同じです。生成子を自乗してトレースを取ったら $1/2$ になるように生成子を定義しています。それから角運動量の生成子と同じになるように生成子を定義しています。例えば $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ ではなくて、 $(\sigma^1/2, \sigma^2/2, \sigma^3/2)$ を角運動量の生成子とします。これは交換関係が角運動量と同じようにするためのものです。この規格化を逆に言えば、 $\sigma/2$ を自乗してトレースを取ると $1/2$ です。それが $SU(5)$ の生成子の中に入っているのです。一つ規格化を決めれば規格化の自由度は一つも残りません。例えば式 (3.1.4) の第2項を自乗してトレースを取ると $1/2$ になるようになっています。第1項も全く同じことになっています。以上で相対的な結合が全部決まります。

3.1.4 24 表現とヒッグス

あとはヒッグスです：

$$24_H = \Sigma \quad (3.1.6)$$

流石にこれがヒッグスかどうかは全くわからないけれども、無理矢理作ろうと思えば、5次元のヒッグスと、

$$5_H = \begin{pmatrix} H_C^- \\ H_C^- \\ H_C^- \\ h_u^+ \\ h_u^0 \end{pmatrix} \quad (3.1.7)$$

5*次元のヒッグスを取り入れると、

$$5_H^* = \begin{pmatrix} H_C^+ \\ H_C^+ \\ H_C^+ \\ h_d^- \\ h_d^0 \end{pmatrix} \quad (3.1.8)$$

カラーの添字を持つヒッグスの部分はとても重くなくてはなりません。式 (3.1.7), (3.1.8) のもと2成分がもし質量ゼロであれば、それが標準模型になる形になっています。

3.2 アノマリー

でも一番重要なのは僕は式 (3.1.1) と (3.1.2) だと思っています。だってこれ何か凄いなと思いませんか？ まだアノマリーの講義をしていないので凄いかどうか解らないかもしれませんが、最初僕がこれを理解した時はもの凄く感動したんです。是非これが感動に値するものかどうかを自分で考えてみてください。僕が勧めたいのは

1974年のGeorgi-GlashowのSU(5)の論文[2]です。是非読んでみてください。彼らが感動したという事が伝わってきます。理論家だったらこの感動を共有することができます。僕はもう十年以上後になって感動したんだけど、やはり素晴らしい論文です⁶：

この論文で、クォーク、レプトンの電荷がなぜ量子化されているかという一つの可能性をみつけた。

この理論は明らかに間違っている。なぜかと言うと二つ理由がある。

一つは、この理論の帰結は、 $SU(3)$ と $SU(2)$ と $U(1)$ の結合が全部同じだということを言っている。

これは良いですね。24個のゲージボゾン全部が、ゲージ変換の不変性から一つのカップリングで可換である。しかし現実の世界では、強い相互作用は圧倒的に強く、ウィーク、そして $U(1)$ はずっと小さい。だから明らかに間違っている。

もう一つは、この理論は X 、 Y を通して、あるいは H_C を通してあつという間に陽子が崩壊してしまう。

現実の世界は陽子も安定原子核も本当に長い時間存在している。僕らの宇宙の年齢は百何十億年で大したことはないんですよ。だけれども陽子や中性子などの僕らが見ているものは数が多いでしょう？ 今、スーパーカミオカンデで見ているのは、5万トンくらいの陽子・中性子を見ているわけですよ。H₂Oだからプロトンがちょっと多いかな。それらが「崩壊すれば絶対に見つけてやる」と待ち構えているのに、何年経っても見つからないわけです。実際には 10^{33} 年くらい平均寿命が長く、いつまで経っても崩壊しない。この論文が書かれた時には一瞬で崩壊してしまうのでダメだと書いた。

よってこのアイデアは明らかに二重に間違っているのだが、この論文を提出させてほしい。なぜなら、我々が見つけた電荷の量子化に対する解はとても素晴らしいと思うからだ。

と書いてある。それはやはり、僕は本当にそう思います。

すぐにその後、一年以内だと思うけれども、Georgi-Quinn-Weinbergの三人が、実はGeorgi-Glashowが言った二つの問題が、両方とも一度に解けるということを計算しました[3]。それがみんながよく知っている、ゲージ階層性、大統一スケールというものがずっと高い所にあるんだというアイデアです。実はGeorgi-Glashowの論文の中でもこのことは知らないのです。だけどそんなことは全く関係無く、電荷を見ただけで標準模型のクォークとレプトンが全部入っています。それが嬉しくてしょうがなくて論文を書いたんですね。

⁶[2]の引用になっているが、分かりやすくするために意識をしている。

実は僕はこれが標準模型だと思っています。標準模型をきちんと見ていくと、少なくともこういう一つのまとまり方があり、このまとまり方をすると標準模型のレプトンの量子数が出てくる、理解できるのだということの例として、標準模型の講義の目標を、このSU(5)模型を理解することにします。

この模型ではクォークとレプトンが一つになって出てきます。これは、クォークとレプトンは見かけはとも違いますが、実際は同じものの違う成分を見ているだけなのだということです。クォークとレプトンが決して独立なものではありませんということ自体は、この議論だけからではなく、他の議論からも導くことができます。この議論は軸性ベクトルのアノマリーを打ち消す機構の議論と同時に後で行います。

標準模型の輻射補正で一番面倒なことが、標準模型はカイラルなので、 γ^5 , γ^μ のかかるバーテックスが出てくることです。例えばZボゾンでもWボゾンでも、 $(1-\gamma^5)\gamma^\mu$ といったバーテックスですね。軸性ベクトルを持ったバーテックスが出てきます。ところが、軸性ベクトルを持ったバーテックスがあると、(軸性ベクトル, ベクトル, ベクトル)や、軸性ベクトルが三つかかったようなバーテックスの部分に発散が残ると、決してくりこみできません。つまり標準模型のSU(3)×SU(2)×U(1), 特にSU(2)×U(1)に軸性ベクトルがあるけれども、その部分のゲージ対称性が輻射補正によって壊れてしまいます。ゲージ対称性が輻射補正によって消えてしまうと何が起こるかという、基本的に対称性が消えてしまいます。対称性が消えるということがどういうことかという、ゲージボゾンの質量がゼロになることができないということです。本質的な物理が何処にあるかは解らないけれども、何処か高いエネルギースケールにカットオフがあって、そのカットオフのスケールまで質量が跳ね上がる、そういうことが起きます。標準模型がカットオフの世界よりもずっと低いエネルギーで安定した量子的な世界を作ることができるのは対称性がある場合だけです。ゲージ対称性が無くなれば、その瞬間に我々の世界が存在しなくなります。その事があるので、軸性ベクトルがあるバーテックスの発散は、どうしても起きてはいけません。これがよく言われる軸性アノマリーを打ち消すための要請です。それはくりこみ可能性の要請と同じなので、くりこみ可能性にはそういう意味があるのだと思っています。くりこみ可能性の物理的な意味というのは、くりこみ可能な理論は非常に高いエネルギースケールの物理から切り離されて存在することができる、ということです。

このことが現実にあるわけです。このことから我々の世界は標準模型だけで全て記述できているように思えてきます。しかも輻射補正を含めて正しいことが分かっています。電磁気の電弱統一理論の輻射補正も加えた後でもって電弱精密実験のデータときちんと合うことが分かっています。それはとても凄いことです。電弱理論がくりこみ可能であることを実験的に証明されています。電弱理論はくりこみ可能な理論としてWeinberg-Salamが67年に予言したものだけでも、それを含めて証明されています。そのことがあるので、(軸性ベクトル, ベクトル, ベクトル)や(軸性

ベクトル, 軸性ベクトル, 軸性ベクトル) の3点バーテックスの発散が消えるという条件がどうしても必要です. その条件を標準模型は満たしています. その満たし方がなんとも不思議で, このクォークとレプトンが全部無いと満たされません. 実は5* 表現のみ, 10 表現のみでも満たされるのですが, 非自明にクォークとレプトンが両方入っていないと発散が無くなるという条件を決して満たすことができません. だからクォークとレプトンが完全に独立だということはありません. ちょうどくりこみ可能になるようなクォークとレプトンの部分だけが現在存在している. 「だから我々が居るのだ」と言えばそれまでなんですけれど, 僕はこういった議論ほど嫌いな議論は無いです. それは感動とはかけ離れていますよね. 僕は何か理由が知りたい, そういう物理屋です.

この時 Georgi-Glashow は, こういう条件や陽子が崩壊するなどという問題があるので全然ダメだ, と言ったのだけれど, その一年後くらいに, 実は統一スケールというのが非常に高いと仮定する, つまり $SU(5)$ というゲージ対称性がものすごく高いエネルギースケールで壊れば良いと分かりました. 僕らが一番馴染みが深いのは自発的対称性の破れ (Spontaneous Symmetry Breaking ; SSB) です. 馴染み深いと言っても僕らの世界では, 物性現象と, それから電弱対称な項, 素粒子物理に関してはハドロン物理と南部先生のカイラル対称性の破れ, それから電弱対称性のヒッグス場による破れ, その位しか例を知らないわけですよ. だから GUT でもう一度それが繰り返すかどうかというのは, ちょっと僕は自信がありません. GUT というのは非常に高いエネルギースケールなので, その段階ですでに重力の相互作用とかいうような, 僕らがまだよく理解していない事が影響していて, 何か違う物理があるかもしれません.

例えば SSB だと標準模型が繰り返すだけなので, 一瞬で模型を, 完全な場の量子論の中で模型を作ることができます. $SU(5)$ が壊れるスケールを非常に高くしていくと何が起きるかという, 実は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の部分は対称に残り, それ以外の部分は非常に重くなります. 式 (3.1.4) では X と Y の6重項のペア, 12個の非常に重いゲージボゾンができます. それから $SU(5)$ のヒッグス (式 (3.1.7), (3.1.8) の H_C) や, 式 (3.1.6) もそうなんですけど, $SU(5)$ のヒッグスの方もとても重くなり, こういったところを落とすことができます. フェルミオンはみんな軽いのですけれども, 24個のボゾンの内, 半分は非常に重くなってしまいます. そのことによって, 実は $SU(3)$ のゲージ結合と $SU(2)$ のゲージ結合, そして $U(1)$ のゲージ結合の輻射補正が変わります.

3.3 ゲージ結合定数の輻射補正と漸近自由性

一番単純に議論する時には, 輻射補正には重い粒子は効かない. そういうルールをデカップリング定理 (decoupling theorem) と言います. これは常に正しいルールです. このルールを使うと, 例えば $SU(5)$ GUT のスケールで結合定数が全部同じだったとします. 低いエネルギーで結合定数がどうなるかということを考えると, そ

の時にループ補正によって輻射補正が起きます。でも輻射補正に効いてくるのは軽い粒子なんです。重い粒子は効かない。そうすると輻射補正にはクォーク・レプトンは全部効くのですが、ゲージボゾンでは半分の、グルーオンとSU(2)とU(1)しか効かない。XやYなどは効かなくなってしまう。しかも5表現と5*表現はどうしてもヒッグスが必要ですから、そのことを考えると H_C が軽いとまずいので、どうしても重くしなければなりません。そうすると H_C は効かなくなる。これで何が起こるかという、元々 H_C というのはカラーの自由度を持っていますよね。SU(2)については1重項です。これが無くなったことによって、QCDの相互作用だけが急激に低いエネルギーから大きくなる。漸近自由なんですけれども、その起き方がとても急激になります。式(3.1.4)のX, Yも同じですよ。ここはSU(3)の3重項でSU(2)の2重項、これが無くなることによって今度はSU(3)の部分とSU(2)の部分が大きくなります。U(1)の部分は影響されません。そのような事があるせいで、低いエネルギーでは結合定数の大きさに違いが出てくる⁷：

$$\begin{aligned}
 \text{q-q-g} : \quad & \frac{\pi}{\alpha_3(m_Z)} = \frac{\pi}{\alpha_5(m_X)} - b_3 \ln \left(\frac{m_X}{m_Z} \right), \quad b_3 = \frac{11}{2} + 0 - \frac{2}{3} N_{\text{gen}} \\
 \text{l-}\nu\text{-W} : \quad & \frac{\pi}{\alpha_2(m_Z)} = \frac{\pi}{\alpha_5(m_X)} - b_2 \ln \left(\frac{m_X}{m_Z} \right), \quad b_2 = \frac{11}{3} - \frac{1}{12} N_h - \frac{2}{3} N_{\text{gen}} \\
 \text{l-l-B} : \quad & \frac{\pi}{\alpha_1(m_Z)} = \frac{\pi}{\alpha_5(m_X)} - b_1 \ln \left(\frac{m_X}{m_Z} \right), \quad b_1 = 0 - \frac{1}{20} N_h - \frac{2}{3} N_{\text{gen}}
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

クォーク-クォーク-グルーオンの結合定数とレプトン- ν -Wの結合定数、そしてレプトン-レプトン-B(ハイパーチャージのボゾン)の結合定数の、この3つの結合定数を低エネルギー・ゼロ運動量で計算するというをします。ただしSU(5)理論でこの輻射補正を計算します。そうするとSU(5)理論ですから、元々ツリーレベルではみんな同じ(α_5)です。輻射補正だけによって、SU(3)とSU(2)とU(1)の結合定数の大きさがずれます。その時の輻射補正の係数が b_1, b_2, b_3 と書いてありますが、これは簡単なループ計算をしないと求められません。それをやりますと、実は b_1, b_2, b_3 というのは、式(3.3.1)のようにふるまう。よく言われている漸近自由というのは、 b_3 が11/2でかなり大きい正の値だということ。これがずっと高いエネルギーで結合定数が小さくなる。SU(5)から始めるので、実は低エネルギーで結合定数が成長するということになります。SU(2)の場合もやはり非可換なので大きくなります。だけど大きくなり方がSU(3)に比べると2/3です。それから更に、フェルミオンは全部漸近自由でない。フェルミオンがあると分極が起きるので、近い距離では遮蔽(screening)が壊れます。だからより裸の電荷が大きくなるように見えて、結合定数は大きくなる。だから漸近自由性はとても不思議で、中に入っていくと反遮蔽(anti-screening)ですかね、より結合定数が小さくなるという事が起きます。理解するのは難しいんですけども、でも非可換ゲージ群ではそうなることが色々な形で示すことができます。それを一番最初に摂動論で示したのが、Politzer[4]とGross-Wilczek[5]です。

⁷係数 b_3, b_2, b_1 はそれぞれSU(3), SU(2), U(1)ゲージボゾンに結合する全ての軽い粒子からの寄与を受ける。1項目はゲージボゾンの自己相互作用(漸近的自由なら正でSU(n)の n に比例する)、2項目はヒッグス二重項の数 N_h 、3項目は世代数 N_{gen} を持つクォークとレプトンからの寄与である。

すぐ分かると思うんですけども、ゲージボゾンの寄与ではSU(5)の中の8つだけ、3つだけとかにしか効かないので α_3 と α_2 と α_1 で違いがあります。それからヒッグスボゾンの部分は、元々のSU(5)の5重項が、2重項と3重項に分離したせいで、2重項だけが効く。そうすると何が起ころかという、ヒッグス2重項というのはカラー1重項ですから、QCDの結合定数が全く変わりない。けれども、ヒッグス2重項が沢山あると、例えばSU(2)の結合定数は1/12ずつくらい影響する。それからハイパーチャージの方は1/20ずつくらい影響する。そういう事が起きます。

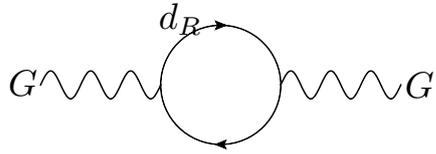
3.4 結合定数の統一

(3.3.1)を見ると、 N_{gen} が同じなので、フェルミオンは3つとも全く同じように変換するということがすぐに分かる。同じように効くので実は結合定数のエネルギーに対する傾きを変えません。3と2と1でフェルミオンを動かしても全部同じように傾きが動くのでくっついたりしない、つまり結合定数の統一ができない。けれどヒッグスボゾンは、SU(3)は動かさないけどSU(2)とU(1)は動かす。しかもその傾きの動かし方が違う。それによってヒッグスボゾンを1個2個と足していくと、実はこの3つを一つの場所で一致させることができます。それが結構楽しいゲームなので、学生には最後に遊ぶゲームとしてやってもらっています。

そのゲームの答えが、上からゲージボゾンのプロパゲータ補正、Wボゾンのプロパゲータ補正、Bボゾンのプロパゲータ補正(図2)、それから、ゲージボゾン(グルーオン)ループ、Wループ、Bは元々何も無い(図3)。それを計算すると、フェルミオンの表現に応じて、図2, 3のような補正が出てくる。それから、ゲージボゾンの時には3とか2とか0とかが出てくる。実はこのゲージボゾンの自己結合の計算はそんなに自明ではありません。2点関数の計算だけで済ませようと思うと、ゲージをいわゆる一番簡単なファインマンゲージ(Feynman gauge)では無く、特殊な背景ゲージ(Background gauge)を使わないと2点関数だけで記述することができない。あるいはちょっと工夫がいります。そうすると、特に3点関数を計算しようとするとても大変なんですけれども、3点関数の計算をしないでも、この答えを出すことはできます。

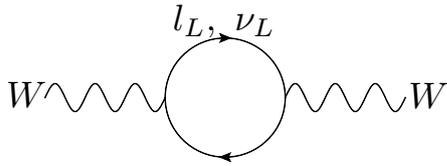
3.4.1 ヒッグスボゾンが1個の場合

図4は昔の学生が作ってくれた絵なんですけれども、 $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3$ です。先ほど見せたように、くりこみ群方程式の解は、 $1/\alpha$ で描くと対数で直線ですね。あれはリーディングオーダーの式で今は次のオーダーとか、部分的には次の次のオーダーも知られていますけれども、こういうゲームの時にはリーディングオーダーで十分です。やってみると、高エネルギーでは1点にはなりません。



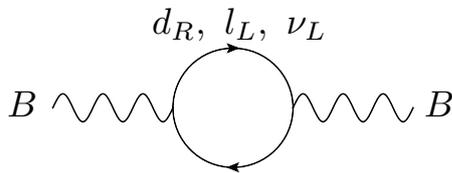
$$b_3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{from } \text{Tr}\{T^a T^b\} = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$



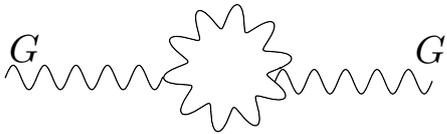
$$b_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{from the coupling } \frac{g}{\sqrt{2}}$$



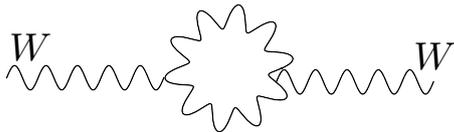
$$b_1 = \left[3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

図 2: ゲージボソンのプロパゲータ補正



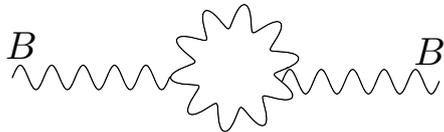
$$b_3 = 3$$

if (G) only.



$$b_2 = 2$$

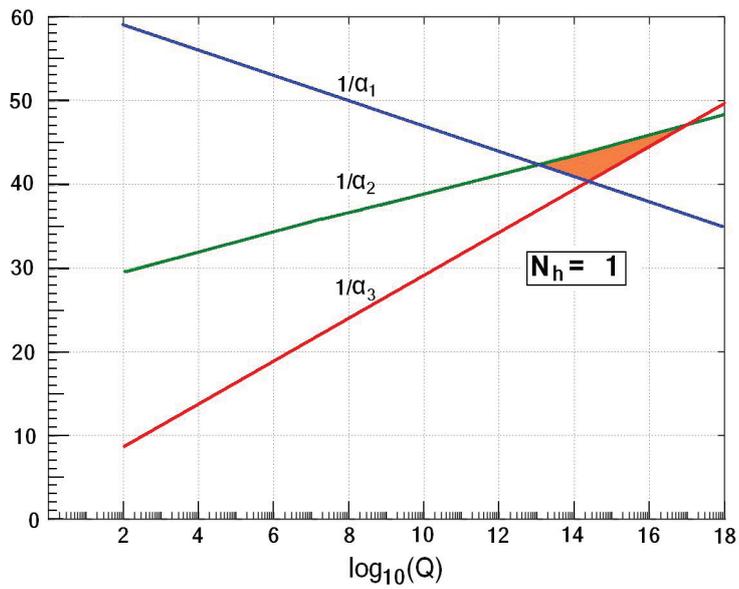
if (W) only.



$$b_1 = 0$$

since (G, W, B) don't couple.

図 3: ゲージボゾンループ

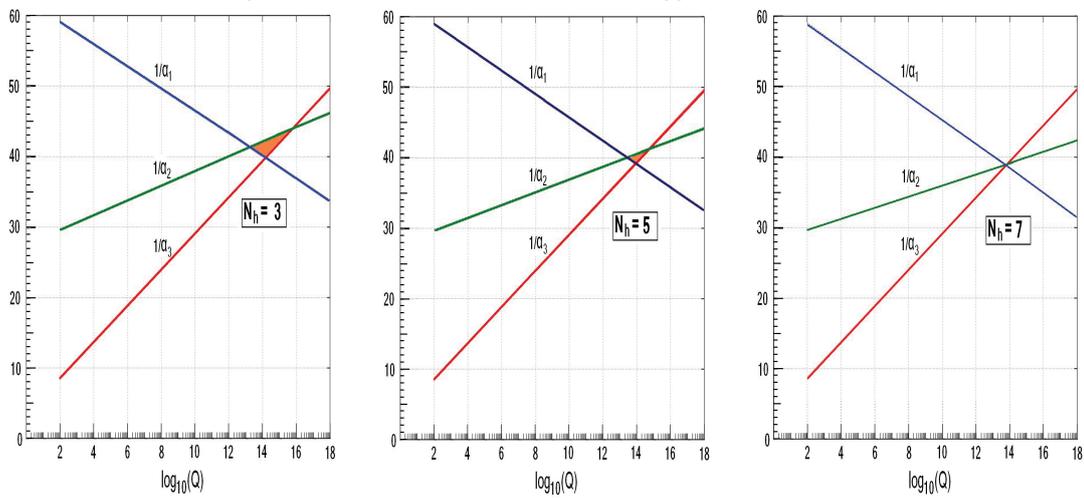


drown by K.Senda

The above result follows from the 3 gauge coupling strengths measured at the m_Z scale, if we assume 3 generation of quarks and leptons and 1 Higgs doublet in the SM (minimum SM). The idea of the Grand Unification of the 3 gauge couplings is clearly a great success qualitatively, since the ordering of the three gauge coupling strengths, $\alpha_3(m_Z) > \alpha_2(m_Z) > \alpha_1(m_Z)$ agree with the ordering $b_3 > b_2 > b_1$, which in tern reflects the ordering $3 > 2 > 1$ of the gauge group $SU(3)$, $SU(2)$, $U(1)$.

図 4: ヒッグスボゾン 1 個の結果

The quantitative disagreement of the unification may suggest new particles in the TeV region. For instance, if we introduce N_h Higgs doublets we find



drawn by K.Senda

The unification is achieved for $N_h = 7$, but the GUT scale becomes rather small, which contradicts with the observed proton longevity. In order to avoid this, we should make the slope of the SU(3) coupling b_3 small, suggesting new colored particles at TeV scale.

図 5: ヒッグスボソンを増やしてみた結果

3.4.2 ヒッグスボゾンが2個以上の場合

次にヒッグスボゾンを増やしてみます。すると面白いんですけどね、ヒッグスボゾン3個、5個、7個と増やしていくと、7個でばっちり合います(図5)。特にこれに意味があるわけじゃありません。だからこそゲームだと言っているんですけどね。

でもこれが結構重要です。7個で合いましたということで、これで良いかというところではない。大体合っているところを見ると、これは 10^{14} GeV よりもちょっと下です。これはどういうことを言っているかという、今とても重いと言った X ボゾン、 Y ボゾン、それからカラーヒッグスの質量が、基本的に 10^{14} GeV くらいにあるということを示唆しています。もしヒッグスボゾンが7個ある標準模型を僕らがプロポーズするとするとしたらそうなります。そうすると、もう完全にその模型は存在しません。なぜなら、そのくらいの質量だと簡単に陽子崩壊率を計算することができて、それがスーパーカミオカンデでまだ見つからないというのと完全に矛盾するからです。だから、この模型はもちろんすぐダメです。

でもそのことから随分色々なことが得られます。もしこのアイデアが正しいとしますよね。つまり、まず大統一というのが電荷の量子化の解として素晴らしいということをもとに認めます。次に、Georgi-Quinn-Weinberg が提出したアイデア [3]、強い相互作用が強くて、弱い相互作用 $SU(2)$ が次で、 $U(1)$ が一番小さいという事実が、非常に高いスケールで対称性が壊れていて、そこからの輻射補正で説明できるんだ、という説明が正しいと仮定しますね。でも僕はその説明ってすごく説得力があると思っています。なぜかと言うと、一番大きいのが、一番漸近自由の係数が大きい QCD で、次が $SU(2)$ で、一番小さいのが漸近自由の成分の無い $U(1)$ です。それは実験事実ですけども、それと今のアイデアとの相性ってものすごく良いと思いませんか。それで、全てがゲージ相互作用なんだから、より高いゲージ群のゲージ相互作用として統一されるというのは、むちゃくちゃに自然です。だから、もしどこかのスケール、非常に高いエネルギースケールで、本当にゲージ結合定数が1つになるとしたらそれはものすごく本当らしいです。

あるいは、たとえきちっと分からなかったとしても、大体の傾向として、すでに強い相互作用の方が大きくて、 $SU(2)$ が真ん中で、 $U(1)$ が小さいという事実だけをとって、もうこれが正しいと思ったって僕は良いと思います。

僕の考え方は極端かもしれませんが、それが僕のイメージの中にあります。だからこれが正確に統一されるかどうかなんて、僕にとってはどうでも良いことです。ただし、イメージとして本当に正しい模型では、これくらいの図は、ある程度の小さな誤差の範囲に収まって欲しいという気持ちはあります。そうすると、摂動論的な意味での統一が可能になるからです。

でも僕の話しているこの考え方は、本当に的を射ている考え方だと思います。なのでそのことは逆に言うと、現在強い相互作用と $SU(2)$ と $U(1)$ の結合定数の順番がこうなっていることは、非常に高いエネルギースケールでそれらの相互作用が統

一されていることを強く示唆していると思います。そのことが理由で、ゲージ階層性がないような模型、いくらでもありますよね。ラージエクストラディメンション⁸とかね。全く現実性のあるものと思えなかったの、僕はそういうことに関する仕事はしたことがありません。

だから自分がどういう物理的描像を持つかということは、少なくとも僕の場合は、自分がどういう仕事をするかにもものすごく強く結びついています。そのせいもあって、僕はそういうものには見向きもしなかったし、現在も全く見向きもしていません。でもそれぞれみんなが違うことを考えるということはもっと大切なことなので、他の方が他の模型をやるのはもちろん正しい事だと思います。

これで重要なことは、先ほど言ったようにヒッグスはSU(2)の2重項ですよ。だから、SU(3)の傾きは絶対に変わらない。これが変わらないということによって、SU(2)とU(1)に物質を加えて一致させるところを求めるといことは、どうしてもSU(2)とU(1)の傾きを小さくするように入れないといけない。ということは、一致させる場所というのは必ずこの点(図4の赤と青の交点)よりも低くなります。図5では一致点が 10^{14} GeVからほんの少ししか小さくなっていません。

これよりも上で統一させようと思うと、SU(3)のカーブを変える必要があります。そのカーブを変えた理論を有効な理論だと思うには、TeVスケールでカラーを持っている粒子を入れなくちゃならない。そうでない限り、統一スケールを陽子崩壊のデータと矛盾なくすることは絶対にできない。こういうことって大切だと思いますか？僕はこういう定性的なことが大切だと思っています。

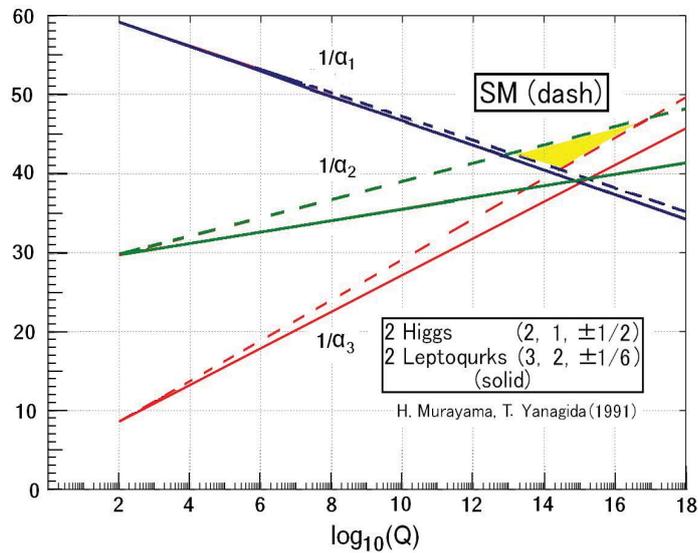
3.4.3 ヒッグスが6個ある理論

次に、どうでも良い理論のうちの一つですけれども、面白い理論の話をして。先ほどヒッグスボゾンが7つでOKと言いました。7つって難しいんだけど、ヒッグスボズンを6つにするのはすごく簡単で、それはスカラーの2重項で3重項を作れば良い。なぜなら、クォークだって左巻きのクォーク2重項というのは6重項ですよ。だから全く同じように、ヒッグスボゾンでクォーク3重項でSU(2)2重項なもの、6重項を作れば良い。そうするとヒッグスボゾンがちょうど6つある。けど今度はカラーを持っています。だからSU(3)の結合を落とすことができる。そうすると図6になるんです。これ結構良いでしょ。今度は統一のスケールが 10^{15} GeVくらい。ある時点ではこれはまだ大丈夫だったんですけど、もうすでにダメかもしれない。これを最初に言ったのが村山-柳田の論文[7]です⁹。

⁸ 標準模型を、高次元時空に浮かんだ4次元時空に閉じ込められた場の理論であると見なす理論。階層性問題を解決できると期待されているが、実験的検証はまだされていない[6]。

⁹ 多重ヒッグス模型が駄目であることはこの論文が提出される以前から知られていた。この論文の興味深い所は、ヒッグス2重項で且つカラー3重項のスカラーを、レプトンとクォークの対にカップルさせ(レプトクォーク)、それを対にすることにより、ヒッグス2重項が6個という、ゲージ結合の統一条件を満たし、同時にカラー自由度によって、SU(3)結合の漸近自由性が弱まり、統一スケールを上げることに成功した部分である。

As a simplest example, instead of introducing 6 additional Higgs doublet, we may introduce a pair of color-triplet and SU(2) doublet scalar bosons. Now both the SU(3) and SU(2) couplings run slower, and they meet at large enough mass scale. By arranging their hypercharge to make them 'lepto-quarks', the U(1) coupling meets at the same point.



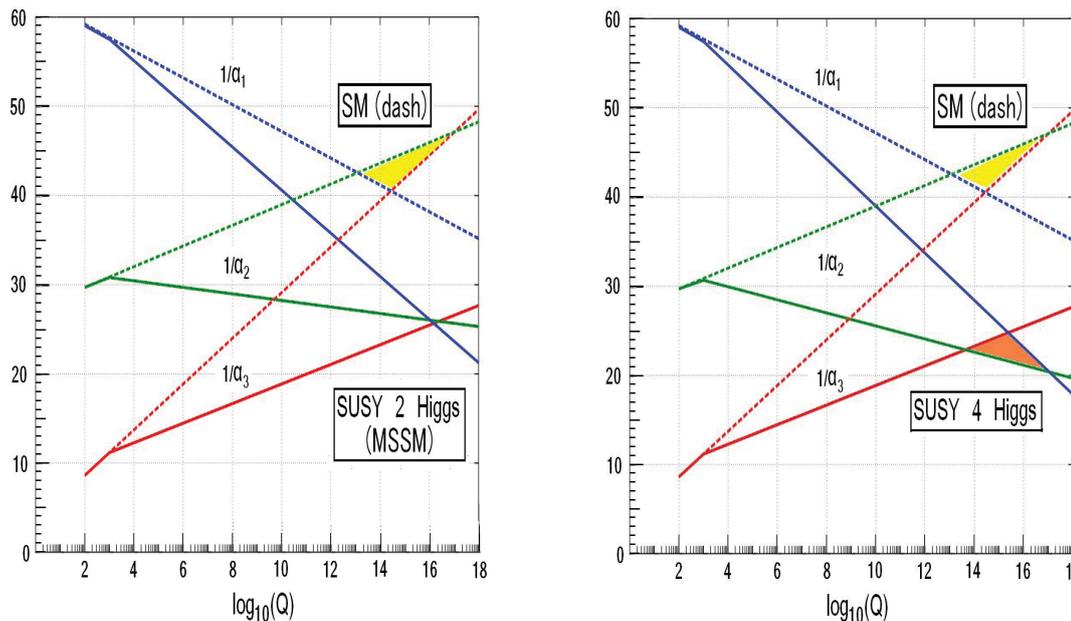
This example shows that it is relatively easy to find a common solution for the unification of the 3 gauge couplings and the proton longevity. How about the Supersymmetric SM ?

図 6: カラーの自由度を持たせたヒッグスボゾンの例

こういうの楽しいですよ。もちろん統一させることは可能だし、だからどうって言うことはないんですけども、これを成功させるためには必ずカラーを持った TeV スケールの粒子がないといけないということは本当だと思います。それはやっぱり LHC の物理を考えている時には重要じゃないかと思います。

3.4.4 ミニマル超対称標準模型

(Minimal Supersymmetric Standard Model ; MSSM)



The unification occurs only for the MSSM (Minimum Supersymmetric SM), where there is only one pair of Higgs supermultiplets. The effective number of the Higgs doublet is 6, since the Higgsinos contribute twice the Higgs bosons to the running of SU(2) and U(1) couplings. The two couplings meet at higher scale because the winos make the SU(2) couplings run slower. Miraculously, the gluino contribution to the SU(3) couplings make the 3 couplings meet at one point, $m_{MSSMGUT} = 2 \times 10^{16}$ GeV.

図 7: MSSM による結合定数の統一

一番有名な MSSM ¹⁰が図 7 左にあります。MSSM はだいたい 10^{16} GeV くらいのスケールにあるので、スーパーカミオカンデなどの検出器では見えません。もちろん、模型の制限をめちゃくちゃ強くして、最小超対称 SU(5) 模型とかいう、とてつもなく不自然な模型を作ると、その模型はリジェクトできるんですけど、そういう問題を議論しているわけではありません。

傾向として、 $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ の結合定数の順番がこうなっていると、電荷の量子化が合っていると、クォーク、レプトンの統一と、高いエネルギーでの統一の壊れ、そ

¹⁰標準模型に超対称性と呼ばれる、ボゾンとフェルミオンの入れ替えに対する対称性を課した模型(超対称性については 6.1 「標準模型の物理とその先」を参照)。超対称性の加え方は、どれほどの超対称チャージが存在するかに依存する。この場合、超対称性により新しく加える粒子、及び相互作用の数が最も少なくなるように超対称性を課した模型の事。

ういう全体的な描像が正しいかどうかということを議論する時には、模型の詳細とかはいつでも良いことです。そういうことには全く影響されない。

ミニマル超対称標準模型というのはそれなりに面白い模型です。これは本当かもしれないと、実は僕は今でも思っています。それはいくつかの理論的な理由がありますけれども、一番大きかったのはトップクォークがとても重いということを予言した理論だからです。ちょっと難しくなりますけれども、超対称標準模型で電弱対称性を自発的に壊すということは実はそう簡単にはできません。そういう模型がたくさん作られたんですけども、どれもあまり魅力的では無かった。その時に超対称性を持つ標準模型で、もしトップクォークがとても重かったら、トップクォークのヒッグスボゾンへの結合による輻射補正によって、ヒッグスボゾンの自発的対称性の破れが起きるという理論が80年代の半ばの頃に提案されました。日本の井上さんとかのグループも非常に重要な論文 [8] を発表しています。その時は、80年代の後半なので、僕は KEK でトップクォークを TRISTAN ¹¹ によって見つけるという仕事をしていました。そんなに重いはず無いのにとみんなが思っていました。「30 GeV ぐらいにあるんじゃないか」と菅原先生がおっしゃったので、そうかなとか思って、ずっと探していたんです。

ところが全然重くて百何十 GeV だった。それが実は MSSM の予言だと思ってもよいです。MSSM では非常に重いトップクォークの湯川結合によって、自発的な $SU(2)_L \times U(1)$ の対称性の破れが起きます。それが1つの大きな理由です。もう一つは図7の左の図ですよ。やっぱりこれはすごいですよね。これは合わせようと思って合ったのではありません。ミニマルな条件と言うのは確かに多少語弊があるかもしれないけれども、ヒッグスボゾンが最低どうしても2つ必要だということは超対称性の帰結から出てきます。先ほど言った ϕ と ϕ_C というのが、両方とも超対称なパートナーを持つことはできません。なぜかと言うと、 ϕ のスーパーパートナーが左巻きだったとすると、 ϕ_C のスーパーパートナーは超対称性のせいで右巻きになってしまうからです。ですから、超対称性は全て左巻きでないとうまくいかないのです。どうしても電荷が逆のヒッグス2重項が必要です。それだけを入れるというのがミニマルな模型です。それを考えるとバチッと合った。これはちょっと無視できないんじゃないかと思いました。試しに、次のミニマルは4つヒッグスがある模型なんですけども、どうしてもペアで入れないといけないので、もう全然合いません (図7右)。元の標準模型と同じぐらい合わない。だから、MSSM で結合定数の統一という時には、実はモチベーションは、「ミニマルじゃないとダメ」だということは覚えておいて下さい。 $N=1$ の超対称性じゃないといけない。1重項はいくらあっても大丈夫です。だから、ヒッグス1重項を入れるような次のミニマルは大丈夫です。

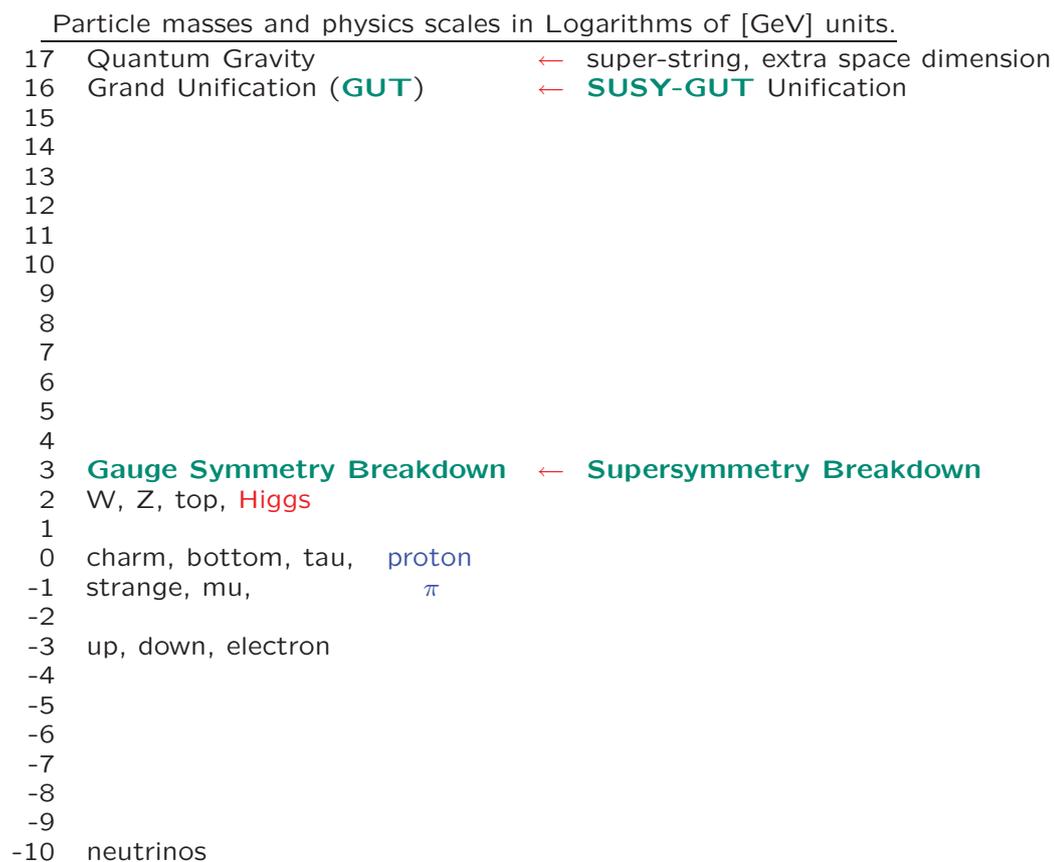


図 8: GeV 単位の対数スケールでの粒子質量と物理スケール

3.5 新しい物理の模索手段：ミュオン $g-2$

今、図8の 10^3 GeV スケール（ゲージ対称性の破れ）から 10^{16} GeV スケール（大統一スケール）の議論をしました。フェルミオンは全部質量を知っているの、この絵を描けますよね。ニュートリノとアップ、ダウン、電子の間に階層性があると思いませんか？ 僕はあると思います。この階層性って、今議論した階層性の半分くらいに見えませんか？

これは冗談ですけどね。ただ時々こういうものを書いてね、よく物理を考えるって大切です。だってこれが標準模型が僕らにくれているデータなんです。一番大切なデータの内の一つです。その次には質量とかは重要です。とてつもなく難しいので、フレーバーの質量とかには全然触れませんけれど。

ミニマル標準模型の粒子以外が何も見つからなかったらどうしよう、というのは誰でも考えます。僕も考えます。新しい物理のヒントがどっかに必ずあるはずだとずっと思って研究してきたので、いつもこのシナリオは嫌です。今、新しい物理が見つかる、一番可能性が高いと思っているのはミュオンの $g-2$ の実験です。ミュオンの $g-2$ の実験は、実験が一つしか無い¹²のがネックなんですけれども、 3.3σ ぐらいかな、理論の予言とずれています。僕は、この実験が出た時に注目して、これは自分でちゃんとやらないといけないと思って、その時に参入しました。現在はミュオン $g-2$ の理論の予言の標準値というのは僕が計算したものになっています。僕は理論の計算には完全な自信があります。過去に行ってきた、たくさんの実験を使っているの、難しいと思われるかもしれないけれども、全ての独立な実験の結果の総合なので、それが大きく動くということは全く考えられません。理論的な不確定さも色々な人が言うよりは遥かに小さいと思っています。

ですから実験値が正しい限り、非常に大きな標準模型とのずれがあります。唯一の欠点の実験が一つしかないということなんですけれども、ただそれでも一応、 μ の実験と μ^+ の実験と両方やっています。間違っている可能性は低いと思っていますんですけれども、それでも精密な実験を行うために現在、東海村の J-PARK で、KEK の齊藤先生を中心とした、全く新しいアイデアの、超低速というのかな、静止した μ^+ を 60cm ぐらいのサイクロトロンで加速しないでただぐるぐる回して、そこで電場 0 の状況で $g-2$ を測るといような実験が出発しています [10]。そういう体系が全く違う実験で裏付けされる。それから、理論的な予言の方も e^+e^- の実験だから、多少は良くなっていくので、いずれ、エラーが半分程度には、あるいは少なくとも $2/3$ には縮むと思います。

ですから非常に近い将来、現在の中心値が動かなかつたら、 5σ を超えます。その段階で絶対に誰も無視できなくなって、その瞬間に標準模型のものしかない模型なんていうことは誰一人いうことができなくなります。だから僕の今の頭の中は、そ

¹¹ トリスタン実験。トップクォークなどの新粒子の探索などを目的としていた [9]。

¹² ミュオン $g-2$ の現在の精密測定値を与える実験は、米国 BNL（ブルックヘブン国立研究所）の実験があるが、この実験は数年前に終了している。現在、BNL 実験の発展版が米国 Fermilab で準備されている。さらに、日本の J-PARC において、全く新しい原理による実験が準備されている。

ういう時が早く来れば良いな, 新しい物理が見つからないということを行っている人がみんなどっかに行っちゃえば良いな, というのが僕の意見です. でもそれも非常に主観的なものですけどね.

4 1日目のまとめ

最後に以前のトークで僕が言ったことです：

Why $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$?

→ The RG answer to this question is, to me, the strongest reason why I believe in the hierarchy, which is huge enough to accumulate ‘small’ quantum corrections.

何で α_3 が α_2 よりも大きくて、 α_2 が α_1 よりも大きいのか。これは僕はヒエラルキーをつけている。つまり現在は、統一とヒエラルキーというのは一つの対です。その対のイメージが正しいということを示唆しているとした僕には思えません。これはものすごいデータだと思っています。

5 質疑応答

質問

もし、ヒッグスが何種類かあるとしたら、2つ目の軽いヒッグスの質量はどのくらいにあると思われますか？

答え

それはものすごく難しい問題でね、それこそ今僕が考えている問題です。

例えば、ヒッグスボゾンが見つかった2012年の7月ですか。もうその前の年の12月にヒントが出ていました。あの時、実験家の結果を聞いてもうヒッグスボゾンがあることは確実だと僕は思ったので、7月までに何か面白い論文を1つ書こうと思った。その時に学生に言ったのが、MSSMというのは非常にモチベーションの高い模型だから、その模型で見つかったヒッグスボゾンよりも軽いヒッグスボゾンがある可能性をしらみ潰しに調べようということを書いて、それをやりました。その時はきちっと論文も掲載されて、そういう可能性は残っていたんですけども、実はその可能性は消えました。それはなぜかって言うと、もし現在すでに125 GeVのヒッグスボゾンよりも軽いヒッグスボゾンが1つでも存在したとすると、必ず電荷を持ったヒッグスボゾンがトップクォークよりも軽くなります。175 GeVよりも重くすることができない。そうすると、トップクォークが必ず電荷を持ったヒッグスボゾンに崩壊して、結構大きな確率でタレプトンに崩壊してしまいます。MSSMというのはとっても制限が強い理論だからです。そうすると、実はすでにそういう可能性はリジェクトされてしまっています。

だから実験的に言うと、次に軽い粒子は、今の感じとしておそらく、トップクォークの質量よりもあまり軽いのはダメだと思う。だから軽くて150 GeVとかね、そのくらいだと大丈夫だと思うんですけども、それより重くなければいけないというのがMSSMの中の制限です。一般的な2重項模型 (doublet

model) にしたら全く自由になってしまいます。そういう実験的な制限ってすごく重要なので、いつも僕は気をつけています。それはなぜかと言うと、僕は理論的に本当かもしれないというモデルを本当に一生懸命やる、というのが僕の研究のパターンなので、本当かもしれないと思ってやるからものすごくちゃんとやるんです。そうすると、実験的な制限はすごく重要なのできちんと全部評価します。でも一般的に考えたら難しいですね。ヒッグスボゾンが1個しか無いモデルが絶対にダメかといわれるとね、僕はとっても変だと思えるんですけども、もちろんアノマリーがミュオン $g-2$ しか無かったら、たとえヒッグスボゾンが1個しか無くてもミュオン $g-2$ だけを説明するなんていうのは簡単にできちゃうのでね。だからそれはヒントにはならないんです。ただし、TeV スケール以下に、絶対にミュオンの量子数を持った新しい粒子があるということだけは確実です。それだけは確実になるんだけど、それ以外に新粒子がどういうものであるかということは結構自由なので、決まりません。それとヒッグスセクターとが結合するかどうかもまた自由です。僕はずっと長いこと MSSM とか SUSY への拡張とかを主に考えてきたので、その立場で考えると、なんとなくヒッグスボゾンのハイパーチャージが $+1/2$ のものと、 $-1/2$ のもののペアがあるというのが一番自然に思います。その場合には1つの組み合わせが今見つかった。必ず次の組み合わせがあるはず。その組み合わせは、残念ながら理論的には TeV スケール以下としか言えない。それ以上のことは何か本当にものを見てモデルを具体的に考えないと決まりません。

だから、幅があって申し訳ないですが、150 GeV くらいから TeV くらいまでだと僕は思います。でもきっとあると思っています。

質問

最後の方で MSSM を信じる理由として、トップが重いことを予言できると言われたんですけど、トップが重いことの説明は MSSM ではできないですよね？

答え

はい、全く別の問題です。もし、トップクォークが重かったとするとトップクォークとヒッグスボゾンの湯川結合が大きいので、大きな湯川結合による大きな輻射補正が起きる、そういうロジックです。なぜ大きいのかは全く分かりません。それは新しい物理の問題です。

質問

ニュートリノの階層性と同じように、トップが大きいという階層性も、シーソーとかじゃないですけど別の上の理論で説明できるとかというのを考えたりはしますか？

答え

そのことに関してはね、僕、一度南部先生の講義を聴いたことがあってね。僕がログで見せた質量の絵 [図 8] がありましたよね。南部先生ね、これをリニア

スケールで見せた。どうなると思う？ リニアスケールで見ると、トップクォークが質量を持っていて、トップクォークの質量は W とか Z と大体同じで他のクォーク、レプトンの質量は全部0になってしまう。だから南部先生は、トップクォークだけが質量を持っていて、それが W と Z の質量の素だと述べた。凝縮とか、そういう模型を作ることもできるわけですよね。でもやっぱり気持ちとしては、トップクォークと W ボゾンと Z ボゾン、それからヒッグスボゾン、その4つの粒子の質量がみんな同じあたりにあるのって、ものすごく何か示唆しているって思われませんか？ 僕はそのイメージから逃れられないんですね。だから何とかしてそのことは、自然に説明できる方法があるに違いないと思っています。

第II部

講義2日目

6 最近の研究

今日は最近の研究からという事で、最初の1時間は新しい物理の探索に関する事です。僕は、必ずどこかに新しい物理があるはずだという事は絶対に確信していて、そのヒントがどこに出てくるのかは分からないと思っています。だから、どんな場所でも出てきても、それが分かるようにしておきたいというのが僕の方針です。ずっと若い時はそう思ってきました。でも若い時はやっぱり、最初は、自分の専門というのかな、自分が深くやった事、それしか分からない。それが現実でした。ものすごく頭の良い人は別かもしれないけれど。でも、一つの事が完全に分かったと思ったら、その事はしないで、必ず次に他の事、まだ良く分からない事をきちんと仕事にするように努力しました。それはどうしてかっていうと、論文を書くところまで理解すると、少なくともその一つの論文を書いた事に関しては本当に深く理解できて、世界中のだれにも負けないという自信を持つ事ができたからです。だから、さすがに一つの事に対して一つの論文、というわけにはいかなかったけれども、十分に理解できたと思ったら必ず他の事をやるようにしていました。それを本当に若い時から、多分君たちと同じ年代の時から続けていました。僕は君たちよりもう30年以上、下手すると40年位なんですけど、それだけずっとやってきたのですから、本当に色々な事が分かるようになりました。その理由はやっぱり、自分で新しい物理を見つけたかとかいうより、色々な新しい物理を見つける方法はあるのですけれども、もちろん、理論的な整合性とかを出発点にした新しい物理を見つける事もできる。でも、一番とつきやすいのは、実験的に何か今までの理論では説明できない事が見つかって、それがきっかけとなって新しい物理が見つかる。それが、なにか面白いですよ。その方向で何か研究しようと思うと、やっぱり気がつかないだけで、どこかでおかしい事が起こるわけですよ。それに気がつくためにはその部分をちゃんと理解してなければならない。そんなような感じです。

最初のお話はそういう形で、今ちょっとがんばってやっている事を紹介したいと思います。ここでは、新しい物理を見つけるヒントとして、宇宙物理で、銀河系の中心からくるガンマ線のアノマリー。それともう一つは、しばらく前から僕が集中していると聞いた、ミューオン $g-2$ のアノマリー。その二つをもとにして、理論の偏見をもって何かそれを説明するような模型を考える。それで、今はその模型のシグナルがLHCできっと見えるはず。そういう発想の仕事を紹介します。最後の、標準模型の物理も面白いっていうのは、趣味みたいなものなのですけれども、僕は標準模型をとて長い事やっているんで、結構面白い物理ができる。二つ紹介しますが、両方ともLHCの物理です。

6.1 標準模型の物理とその先

まず最初は銀河中心からのガンマ線輻射のアノマリー、暗黒物質、MSSM, LHC, ミューオン $g-2$, というような話をします (以下はスライドのタイトル):

A MSSM scenario with light stau and bino DM

(軽いスタウとビーノのダークマターを用いた最小超対称標準模型シナリオ)

超対称性というのは、全ての粒子にスピンの $1/2$ ずれたパートナーが出てくるような模型です。僕らの時空の対称性は、ローレンツ群と並進及び回転の群を組み合わせたポアンカレ群です。その空間の、一つの可能な拡張で、よくイメージしやすいのは、空間の次元が3次元ではなくて、4次元や9次元などへの拡張です。そのような拡張の仕方の他に、実数の次元ではなくて、グラスマン変数の次元への拡張が可能です。その拡張した空間の事を超空間、拡張した代数の事を超ポアンカレ代数 (super Poincaré algebra) と呼びます。

そのように場の理論を拡張する事ができます。この場の理論は単純な場の量子論です。だから、僕らがよく理解していると思っている場の量子論の枠組みの中で、超対称性理論っていうのを記述する事ができるので、計算もきちんとできるし、輻射補正もきちんと計算できる。そういうタイプの理論です。従って、新しい物理の枠組みとしては非常に保守的なものになっていると思います。

その理論では、グラスマン座標があるので、そちらの方向の変換をすると、不変性から全く同じ量子数を持っているのだけれど、スピンだけが $1/2$ ずれたような粒子が出てきます。ただ、そういうものは現実には観測されていない。例えば電子に対しては、スカラー電子というスピンの 0 の電子が出てくるのですが、そういうのは存在していません。ですから超対称性があったとしても、その対称性は破れていなければいけない。ただ実は、超対称性にはとても重要な事があって、それは輻射補正を非常に強く制限するという事です。特に厳密 (exact) な超対称性があると、理論によっては輻射補正が全く無い事が分かります。これを非くりこみ定理 (Non renormalization theorem) と言います。

一方で、大統一模型がある程度正しいとすると、大統一なので、まず結合定数の大きさが同じである必要があります。超対称性と大統一模型が整合するための一番大きな問題は、大統一模型には非常に大きな輻射補正が必要で、その大きな輻射補正には非常に大きなエネルギースケールの階層 (hierarchy) が必要であるという事です。

もう一つの問題は、クォーク、レプトンの統一なので、ほぼ必ず核子の崩壊が起きるという事です。その崩壊寿命は大統一が起きるスケールの4乗に比例して長くなる。だから、エネルギーが高ければ高いほど、我々の粒子、核子の安定性を保証している。その事で非常に大きな階層がなければいけないという事が分かっています。その階層のもとで、普通の場の量子論を用いて、特にヒッグスボソンの質量の輻射補正を計算すると、2次の紫外発散が出てきます。その発散はどう考えても全

での摂動論の次数で全部足し上げた後で階層を安定させなければいけないのですが、僕らの今理解している場の量子論の枠組みの中ではそういう事はできない。

でも、もし超対称性が実は存在して、その破れのスケールが1 TeV 以下のあたりにあったとすると、超対称性が1 TeV 以上で回復するので、それ以上のスケールでの大きな輻射補正が完全に打ち消し合います。その事によって、僕らの電弱スケール (Electro-Weak scale) で、およそ 250 GeV くらいですかね、そのスケールが非常に高い 10^{16} GeV の統一スケールがあったとして、その下で安定に存在する事ができる。その事が可能な場の理論の模型で、階層を一発で解消できるというような理論は超対称性理論だけです。

もちろん、他にもヒッグスボゾンが複合粒子 (composite) である¹³、とかのアイデアはありますけれども、他のアイデアの場合には、我々の数 GeV スケールから 10^{16} GeV の間に多層な物理の階段が必要になります。僕らの今までの物理の経験から言うと、むしろそちらの方が自然に思えるかもしれません。それはどうしてかっていうと、例えば化学の世界のエネルギー (長さの) スケールは、オングストローム (10^{-10} m) という原子の大きさのスケールがあって、それからフェムトメートル (10^{-15} m) といつて、原子核のスケールまで落ちると全く状況が変わってしまう。それがさらに GeV ($\sim 10^{-16}$ m) まで落ちると、標準模型の世界になって、見かけ上と本当の基本粒子が従う物理が全く違う事になる。それが昨日の講義の中身でした。それと同じように、2, 3桁スケールが変わったら、また新しい物理が出てきてつていうのは、割と今まであった事なので自然に思えるのかもしれません。

だから、標準模型のスケールから大統一模型のスケールまで、たくさんの階層が存在する可能性があると思います。ただその場合にも、3つのゲージ結合定数の統一だけは何となく非常に高いスケールをもって理解するという事を維持していると期待します。そう思うと、ヒッグスが複合粒子 (composite) を作るメカニズムはそのゲージ結合定数の増大と今までのシナリオは守らないといけない。そうするとその物理っていうのは、標準模型の量子数を、実はあまり持っていて欲しくない。もし持っているとしたら、例えば SU(5) の完全な多重項 (multiplet) だけを使って模型を作る、という事を延々と続けなければいけない。それにはたくさん条件があります。なので本当かもしれないけれど嫌だなと言う感じがします。僕はある意味そちらの方でも仕事をした事があります。

僕はテクニカラー理論¹⁴をやったのですが、そのテクニカラー理論では、QCD でも起こる南部先生のカイラル対称性の自発的破れが、そのまま高いエネルギースケールでもう一度繰り返す。QCD の場合は、アップクォークとダウンクォー

¹³ヒッグスが複合粒子 (composite) であるとは、何か新しい強結合相互作用によってヒッグスボゾンが他の粒子の束縛状態になる事である。これは超対称性を用いない標準模型を超えた模型の一つとして提案されている。

¹⁴テクニカラー理論 (technicolor theory, 複合模型) とは、ヒッグス粒子が中間子のような複合粒子と考え、それを構成するフェルミオン (このフェルミオンをテクニクォーク (techniquark) と呼ぶ) が存在するとして構築される理論の事である。

クがちょっとずつ質量を持っているせいで、自発的対称性の破れで出てくる南部ゴールドストーンボゾンの質量が完全にゼロではない。テクニカラー理論の場合は、高いエネルギー領域において、テクニアップクォークとテクニダウンクォークが完全にゼロ質量だとすると、テクニパイオンというのが完全にゼロ質量になります。そのテクニパイオンが南部ゴールドストーンボゾンとして、 W と Z に吸収されて、それが現実に観測される W と Z になるのがテクニカラー理論です。

この理論はものすごく綺麗だと思って、この理論を聞いた時に、僕は絶対にこれだなんて思いました。ただその理論では、ヒッグスボゾンがQCDにおけるシグマメソンのように、テクニアップクォークとテクニダウンクォークで作られる1重項(singlet)のスカラーであるような共鳴状態(resonance)になります。そこまではとっても綺麗だったのですけれども、その理論でクォークの質量を作ろうとするとそれは至難の業でした。その当時はまだトップクォークがなかったので、せいぜいトップクォークは20-30 GeVだと思ってたのですが、それでも20-30 GeVのトップクォークを作ろうとすると、必ずもっと軽いアップクォーク、ダウンクォーク、チャームクォークなど、そのスケールのセクターでとても観測に相容れないような大きなFlavor Changing Neutral Current (FCNC)¹⁵が出てきてしまう。そういう問題があった、残念ながら生き残らなかった。

そういう歴史があります。ものすごく昔の話です。そういうものを通して、超対称性模型が登場してきた時に、本当はみんながやっている事をやりたくはなかったのですけれども、勉強すれば勉強するほど、これはあっても良いと思いました。だから超対称模型が本当である可能性はある、というように判断せざるを得ませんでした。従って、自分が本当であると思った模型で、何か見つかった現象を説明できたら面白いなという仕事をしました。そのような仕事はいままでたくさんやっております。

タウレプトンというのは、レプトンの中で一番重たいレプトンなのですけれども、そのスカラーのパートナーがスタウ(stau)。それから、 $U(1)$ のゲージボゾンである B ゲージボゾンというのは理論の中でしか出て来ない粒子で、僕らの世界では光子と Z がある。でも、ちゃんと電弱対称性の破れを勉強した方は、 W の3重項のボゾンである W^3 と B ボゾンの混合で光子と Z が出てくる、という事を理解していると思います。その混合角がワインバーグ角(Weinberg angle)と今呼ばれている弱混合角(weak-mixing angle)です。こういう新しい模型を考える時には必ず $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の標準模型のゲージ対称性は必ず満たしているはずだと、その前提で全て考えます。そうすると、新しい物理は必ず標準模型の対称性を満たしているのです、そのスーパーパートナーも、光子とか Z とかではなくて、 B ゲージボゾンとか、それか W ボゾンとかのスーパーパートナーがまず存在している。一方で、

¹⁵世代のみを変えるフェルミオンの遷移をもたらすカレント。実験的に非常に小さいことがわかっているが、新しい物理を考える際には非常に生じやすく、現象論に合った模型を作る際には注意が必要である

超対称な場合においても電弱対称性の破れが起きるので、実は B ボゾンのスーパーパートナーであるビーノ (Bino; \tilde{B}) と、 W ボゾンのスーパーパートナーであるウィーノ (Wino) も実は混合を起こします。その時にチャージを持っているスピン $1/2$ の粒子と、チャージを持っていないスピン $1/2$ の粒子は、全部対称性の破れによって混合するわけです。その混合した結果、質量固有状態だけでいうと、それが実験で観測される。そういう形になります。

だから、標準模型で W と Z と光子がどうやって出てくるかって事をきちんと勉強しておく、新しい物理において常にみんながやっている事というのはただその繰り返しだけです。だから標準模型をきちんと勉強しておけば、どんな新しい物理が出て来たとしても、それが現実の世界にどのように見えるかっていう事は場の量子論なので計算する事ができます。だから結構簡単にできるんだって事を覚えておいてください。

6.2 \tilde{B} のダークマターシナリオ

この節でビーノっていつているのは、混合の無いほぼ純粋な B ボゾンのスーパーパートナーであるとしてます。その理由はそれがダークマターだとすると、銀河系の中心からくるガンマ線のアノマリーが説明できるからです。このシナリオを \tilde{B} のダークマターシナリオと言います。これをちょっと説明します。

FermiLAT (Fermi Large Area Telescope; フェルミガンマ線宇宙望遠鏡) っていうのは、衛星のガンマ線検出器です。二日前にこうのとりの¹⁶が飛んだんですよ。僕はいつ国際宇宙ステーションにドッキングするのかなと思ってたんですけど、もうしたのかな? こうのとりに早稲田大学の鳥居先生の検出器が載ってるはずですよ。色々性能が FermiLAT と違うのですけれども、最先端のダークマター観測が可能な検出器になっています。だから色々面白い実験があります。

FermiLAT はガンマ線検出器として最も優秀で、非常に良いデータをたくさん集めています。全ての方向のガンマ線を見ているんですけども、今注目するのが我々の銀河の中心から来ているガンマ線です。そこにちょっとアノマリーがあって、10 GeV ぐらいの、ものすごい軽いダークマターがタウレプトン対に消滅していると考えられるような不思議なアノマリーがあるんですよ。ここでは最初になんで僕がこのアノマリーに注目したかって話をします。前にも言ったけれど、僕は自分が研究する時には、何かそれが本当だと自分が思わないと始める気が起きない、自分の時間をそのために費やす気が起きないんですよ。このアノマリーに関しては、初めて論文を見た時にムムッと思ったんですよ。それをちょっと説明いたし

¹⁶こうのとりのとは、国際宇宙ステーション補給機の事である。その名の通り、国際宇宙ステーションに必要な各種実験装置や宇宙飛行士の食料や衣類の運送を行う無人宇宙補給機である。2015年8月19日に打ち上げがなされ、同年8月25日に国際宇宙ステーションと結合し、同年9月29日に国際宇宙ステーションから離脱した。

ます。そういう事って結構大切です。他の方がそうとはちっとも思っていないので、これは僕の主観なんですけれども、君たちが自分の研究対象に出会う時に、やっぱり同じような事があるだろうと思うので、その参考になればなと思ってこの題材を選びました。

MSSM というモチベーションがある模型で考えると、そのシナリオには 10 GeV のビーノがあつて、これがものすごく軽くて、軽いから面白いんですよ。スカラータウが 100 GeV、こんなの絶対に見つかつてははずなんだけど、未だに LHC で検出できてない。その話をちょっと後でします。この最初の論文 [11] は結構古いんですよ。2013 年のものなんですけど、もう 2-3 年前かな？ この論文を僕が読んだのは、いつだろう。3 月くらいに読んだのか、6 月くらいに読んだのか。とにかく時間はあまり経っていませんでした。面白い論文なんですよ。著者の D. Hopper さんは有名なシカゴ大学の宇宙物理学者で、T. R. Slatyer さんは、FermiLAT の実験家の方です。

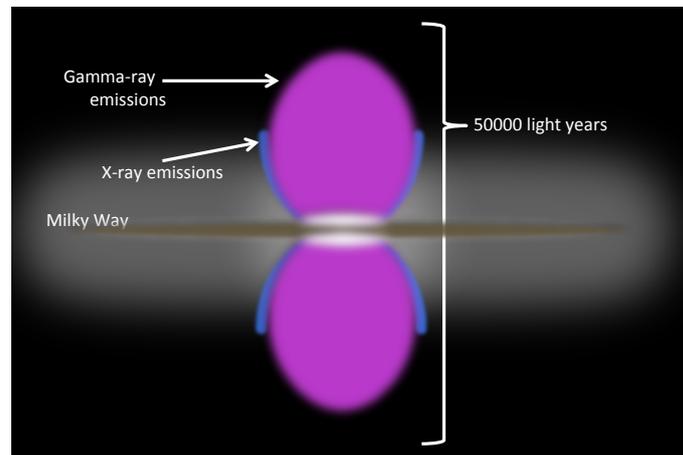


図 9: フェルミバブルの概要図 (Fermi Gamma-ray Space Telescope, NASA). 元の鮮明な図は [12].

これ (図 9) はフェルミバブル (概要図) です。重要な事は、図 9 中の Milky Way と書いてある部分が我々の天の川銀河です。ここの中心が銀河中心です。この、何かランプみたいなの (上下に広がる紫色の部分) は結構明るくて、たくさんガンマ線とか X 線とかが見えるんです。ここの中を非常に詳しく見たんですよ。そうすると、ガンマ線のアノマリーが見つかりました。そこで、彼らが何をやったかについて、この範囲の観測のデータを輪切りにして発表した (図 10 の横線)。これがすごく重要なんですよ。図 10 の真ん中が銀河中心です。まず銀河中心に一番近いところがちょっとあつて、それから 10° から 20° 、 20° から 30° 、 30° から 40° 、 40° 以上というふうにデータを輪切りにして、そのそれぞれの輪切りのデータのところでガンマ線のスペクトラムを調べた。そうしたら図 11、図 12 になつたって言うんですよ。

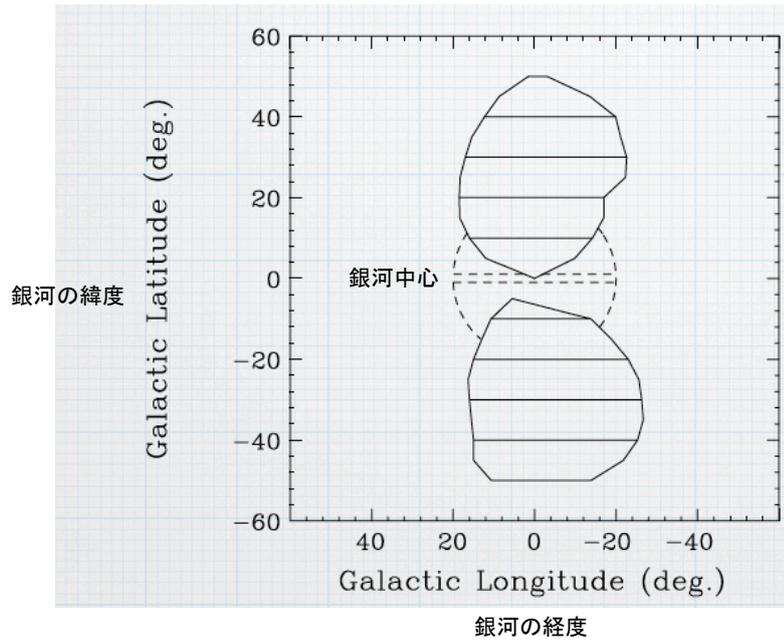


図 10: データを輪切りにしたもの (D. Hooper, T. R. Slatyer [11])

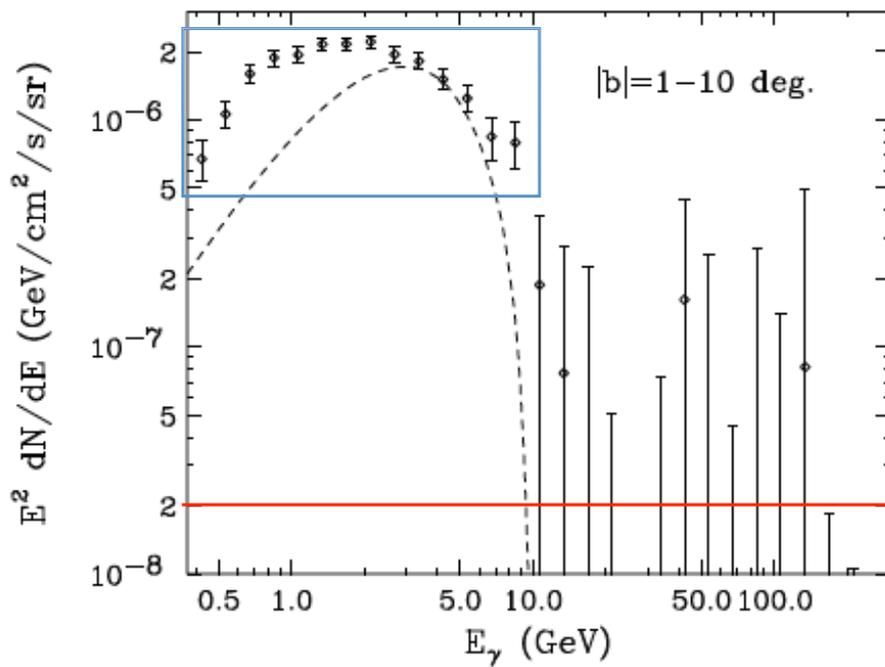


図 11: 1° - 10° のガンマ線のスペクトラム (D. Hooper, T. R. Slatyer [11])

これ(図 11)が一番銀河中心に近いところ、 1° - 10° くらいのところでの、ガンマ線のスペクトラムです。図 11を見ると、ガンマ線のエネルギーが、10 GeV のところで落ちている。1-10 GeV ぐらいのところには、ガンマ線の増大(図 11 の青い四角の点線)があるんですね。この外側には無い。

この辺(図 11 の青い四角の誤差と点線を比較)は全然あっていないじゃないかって思うんですけども、これから後、たくさんの方が解析して、バックグラウンドを取り除くのは物凄く難しいという事がすでに分かっています。何しろ銀河中心なので、最もたくさんガンマ線があるところなんです。そこから自分たちが理解していると思っているガンマ線のソースを、丹念に丹念に抜き去っている。それで残ったのがこれ(図 11)なんですよ。ですから、たくさんの方がやって、この辺の細かいところについては、確かに、色々な分布が可能だって事が分かっています。ただ、今でも、本当に FermiLAT の全体がやり直した解析でも、他の方がやった解析でも、このアノマリーは実は消えていません。今でもちゃんと残っています。だから僕は、未だにこれは可能性があると思っています。

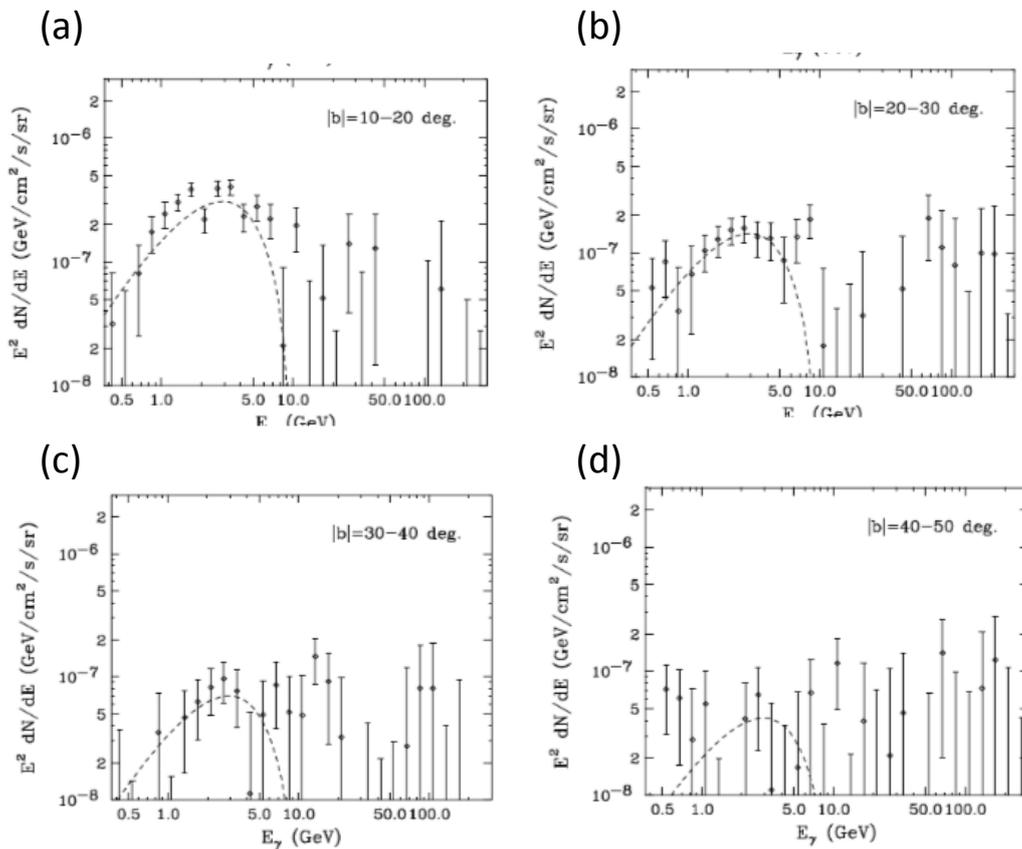


図 12: 様々な角度ごとにガンマ線のスペクトラムを調べたもの (D. Hooper, T. R. Slatyer [11])

図 11 が 1° - 10° の結果です。小さい角度から見ていきます。 10° - 20° (図 12 の (a)),

きれいに見えますね. 20°-30°(図 12 の (b)), きれいに見えますね. 30°-40°(図 12 の (c)), これはちょっと色めがねが無いと見えないですね. 40°-50°(図 12 の (d)), これは見える人はおかしい (笑). 何に感動したのか, 何でムムッと思ったのかというと, これはフィットじゃないんですよ. 先ほど, 最初に一番真ん中(図 11)をお見せしましたよね. 実はこれ, 全体の規格化因子 (normalization) がどんどん小さくなっていっているわけですね. 図 11 と図 12 を見ていただくと分かるんですけども, 30°-40°では(データ点が)10⁻⁷以下になっています. なので, これ(図 12 の (d))は全然見えない. この相対的な規格化因子っていうのは, 何を使ったかっていうと, 僕らが知っていると思っているダークマター密度の2乗の平均を使っているんですね.

つまり, 銀河中心に近いところではよりダークマターの密度が大きい. もしタウレプトンの対消滅がその起源だとしたら, ダークマター密度の2乗にダークマターの密度流速 (density flux) が比例するはずですね. それを使ったんです. それに合っている. その事がこの論文 [11] のレポートです:

$$\rho(r) \propto \frac{r^{-\gamma}}{(1 + \frac{r}{R_s})^{3-\gamma}}, \quad \gamma = 1.2, \quad R_s = 20 \text{ kpc}. \quad (6.2.1)$$

よく言われるように, 式 (6.2.1) がいわゆるダークマター密度のプロファイルです. γ はシミュレーションによって色々違うんですけどね. 特に中心付近はよくわからないんですよ. 普通我々の銀河の事はよく知っているって僕らは思いますよね. でも実は本当に中心の方はよく見えない. ある程度遠くになるとたくさん星があって, ある程度回転のスピードが見えるので, その中にどのくらいあるかって非常によくわかります. でも本当に真ん中の方に行くときよくわからない. だからこの値っていうのがすごく信頼できるかっていうのはよくわかりません. 例えば宇宙論をやっている方に聞くと, その辺だろうとは思いますが, そこ(式 (6.2.1) の γ) の 1.2 っていう数字に意味があるかどうかわかんないし, この数字が我々の銀河と他の銀河で同じかどうかわからないらしいです. あるいは今一番問題になっているのは, 銀河のそばのドワーフギャラクシー (dwarf galaxy) といって, 星のとても少ないダークマターが主な銀河があるんですね. そういうところの γ 線のアノマリーが見えたら, もうバックグラウンドがとても小さいので, とっても綺麗に観測できますよね. なので, 今みんなが死に物狂いになって, 全てのドワーフギャラクシーを観測していて, 今のところ確証は無いんですけども, 一つだけこれと無矛盾なデータが出ています.

僕の経験では, いつもなにか新しいものが発見された時には, 発見するまではとてもとても大変だけれども, ある時期が経つと, 全ての場所で見つかるというようになるんです. だからもし, これも本当だったら, そのうちにちょっとずつこのぐらいの銀河でも同じものが見えた, こっちでも見えたっていうようになってくると思って, 楽しみにしています. まあ今のところ, そこまでは至ってません. そういうような曖昧さがあります.

でも僕はこれを読んだ時に、なんか背筋がゾッとするような感じがして「へえ、そうなんだ。ダークマターが見つかったのかもしれない」って思いました。だからおそらく、この論文 [11] を書いた、D. Hooper さんと T. R. Slatyer さんもそう思ったに違いないんですね。ただ、なんでみんながそれほど注目しなかったかっていう理由は非常にはっきりしていて、特に D. Hooper っていう方は同じ事を延々と言い続けているかららしいんですね。僕にとってはこの論文 [11] が初めてで、面白いと思ったんですけども、これが出る前もずっとそれをやっているらしくって「なんか同じ事をまだ言ってる」というように思われたようです。でもそういう事は僕には関係無いので、これは本当に面白いと思いました。なにしろデータが全てですよ、物理なんだから。もしこれが本当だったら、どんな模型であれ、それが説明できなかつたら嘘ですもんね。だから自分が一番魅力的だと思っている MSSM で、この現象を説明できるかどうかやってみたんです。そうしたら、なんかできるんですよ。それがこの論文 [13] です。

その論文 [13] 中では色々説明してありますけれども、ビーノ (\tilde{B}) が対消滅して、 $\tau^+\tau^-$ になる、 $\tilde{B}\tilde{B} \rightarrow \tau^+\tau^-$ という確率を計算してみます。そうすると実は、もう密度流速の規格化が決まっています、しかもダークマター密度も決まっていますので、タウレプトンの対消滅断面積もきちんとデータを再現するためにはすでに決まっているはずなんですね。だからその対消滅断面積が再現できるようなパラメータ領域があるかどうかを調べなくちゃいけない。それをやってみました：

$$\tilde{B}\tilde{B} \rightarrow \tau^+\tau^-$$

$$\langle\sigma v\rangle \xrightarrow{v\rightarrow 0} \frac{g'^4\beta_\tau}{128\pi} \left[\frac{4(m_\tau Y_R^2 s^2) + 2m_{\tilde{B}} Y_L Y_R s c + m_\tau Y_L^2 c^2}{\Delta_1} + \frac{4(m_\tau Y_R^2 c^2 - 2m_{\tilde{B}} Y_L Y_R s c + m_\tau Y_L^2 s^2)}{\Delta_2} \right]^2 \quad (6.2.2)$$

$$\Delta_i = m_{\tilde{B}}^2 + m_{\tilde{B}}^2 - m_\tau^2$$

計算すると結構面白い事がわかって、 $\tau^+\tau^-$ に崩壊するものだから、間に τ レプトンのスーパーパートナー (スカラータウ, $\tilde{\tau}$) を交換しなければならない。 \tilde{B} と \tilde{B} の間に、 $\tilde{\tau}$ を交換して $\tau^+\tau^-$ ができる。もし標準模型の過程だったら、2つの光子が消滅して τ ペアを作る。そうすると t チャンネルとか u チャンネルに τ レプトンが飛びます。一方でこの過程では、入ってくるのがダークマターで \tilde{B} がペア、それで途中横切って飛ぶのが τ のスーパーパートナー、そういう形になっています。ですから、 $\tilde{\tau}$ の質量と、 $\tilde{\tau}$ と τ レプトンと \tilde{B} の間の結合定数を決めると、対消滅断面積が決まっているはずですよ。

でもダークマターの物理をやる時に気をつけるべき2つ重要な事があって、一つは \tilde{B} はマヨラナ粒子だという事です。マヨラナ粒子2つが、非相対的に対消滅する時には、実は s 波の振幅しか起きません。 s 波の振幅は、ダークマターペアが特別

なスピン状態を取る時しか対消滅できない、そういう条件になります。そのせいで実は、間に飛ぶ $\tilde{\tau}$ が、例えば左巻きの $\tilde{\tau}$ とか、右巻きの $\tilde{\tau}$ とかが純粹なまま混ざらずに飛んだとすると、ゼロ運動量の閾値 (threshold) のところで振幅がなくなって消えてしまいます。従って閾値のところダークマター残存量がとても大きくないといけない、つまり銀河中心におけるダークマターの平均速度ってすごく小さいんですよ。よくダークマターの残存量を計算する時に、宇宙初期ではダークマターの速度分布は、感じとして運動量がダークマターの質量の $1/5$ とか $1/6$ とかそのくらいってよく言いますよね。そうではなくて、銀河中心の場合はもう完全に冷えてしまっているの、その速度は、ちょっと単位忘れてしまいましたけれども、ほぼ温度ゼロなんです。そういう時には本当にゼロ運動量の極限、完全に s 波の極限しか振幅が存在しません。そうするとその事からすぐに言える事は、間に交換される $\tilde{\tau}$ というのは、左巻きと右巻きの大きな混合が無いといけないという事です。

その事がこの振幅の計算で出てきていて、式 (6.2.2) に \tilde{B} の質量に比例している項があるんですけども、その項が左巻きの湯川結合定数 Y_L と右巻きの湯川結合定数 Y_R 、混合角 $\sin \theta$, $\cos \theta$ のかけ算になる。実はこれが一番重要な寄与になります。もう一つ、 τ レプトンは質量があるので実は m_τ に比例するような結合定数の寄与があるんですけども、さすがに m_τ と $m_{\tilde{B}}$ は5倍違うので、必ず $m_{\tilde{B}}$ に比例する項が支配的って事がわかります。

なにしろ $\tilde{\tau}$ が軽くなくちゃいけない、かつ振幅は最大限大きくしないと(ダークマターの残存量が)説明できなかつたので、ギリギリ可能なところを調べてみた。 $\tilde{\tau}$ はLEPの実験とかを見ると、100 GeV くらいまで軽くなる事ができるんですね。一方混合角は完全に自由に取れるパラメータなので、最大混合¹⁷にしてしまえばよい。それに従って計算してみたら、実はうまく説明できてしまったんですね。せっかく説明できたので、同じシナリオで、例えばヒッグスの2光子崩壊幅 $\Gamma(h \rightarrow \gamma\gamma)$ がどうなるかとかを色々調べたんですけども、その結果がこの絵(図13)です。横軸が軽い方の $\tilde{\tau}$ の質量です。100 GeV, 90 GeV, 110 GeV, だいたいこのくらいのスケールです。一番気になるLEPの制限ですけども、ここ(図13の(1)と(2))に制限があります。強い方の制限(図13の(1))を見た時に、90 GeV より大きければ、 $\tilde{\tau}$ はLEPではこのシナリオを否定できていません。図13は $\tilde{\tau}$ の質量差が300 GeV、ですから例えば横軸の目盛りが100 GeVの点っていうのは、軽い $\tilde{\tau}$ が100 GeVで、重い $\tilde{\tau}$ が400 GeVの場合です。その場合に、ここに紫の領域(図13の(3))があります。この領域の中で実は銀河中心からの密度流速が説明できます。ですから、混合角が最大($\theta = 45^\circ$)だと結構重くても大丈夫で、極端な話120 GeVでも説明できてしまう。一番ベストは紫の領域の中心付近になります。

¹⁷ τ レプトンには、左巻きと右巻きのそれぞれに、超対称パートナー $\tilde{\tau}_L$, $\tilde{\tau}_R$ が存在する。それら2つの質量行列は一般に非対角なので、 $\tilde{\tau}$ の質量固有状態は、 $\tilde{\tau}_L$, $\tilde{\tau}_R$ を回転行列で混ぜ合わせたものになる。最大混合というのは、その回転行列の回転角を 45° 、つまり1:1の比で $\tilde{\tau}_L$, $\tilde{\tau}_R$ を混ぜあわせる事に相当する。

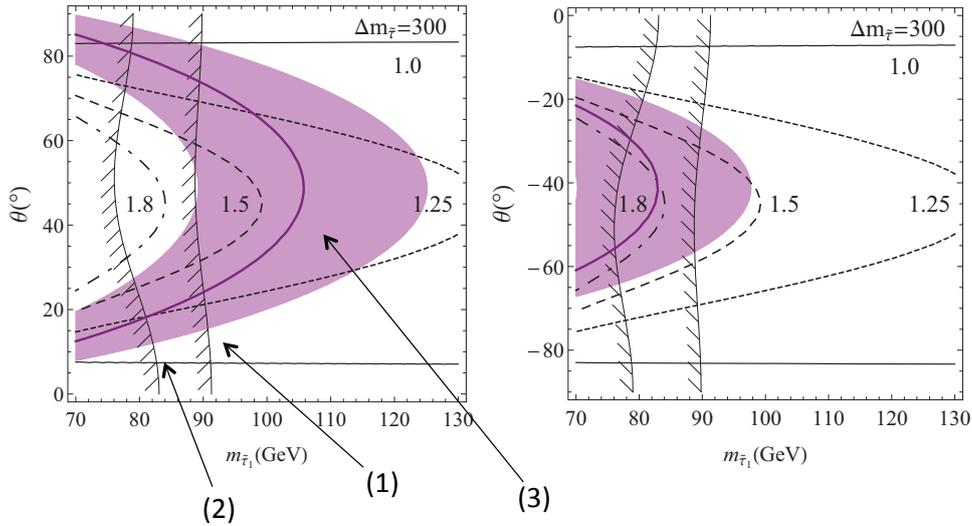


図 13: $\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_0 = 2 \times 10^{-27} \text{cm}^3/\text{s}$ での $m_{\tilde{\tau}_1} - \theta_{\tilde{\tau}}$ 平面の等高線 (紫の曲線) とヒッグスの 2 光子崩壊幅 $\Gamma(h \rightarrow \gamma\gamma)/\Gamma(H_{\text{SM}} \rightarrow \gamma\gamma)$ (黒の曲線, 点線, 破線)[13]. ただし $\tilde{\tau}$ の質量差は $\Delta m_{\tilde{\tau}} = m_{\tilde{\tau}_2} - m_{\tilde{\tau}_1} = 300 \text{ GeV}$ である. 紫の影の領域は, $\langle \sigma v \rangle_0/2 < \langle \sigma v \rangle < 2\langle \sigma v \rangle$ となる領域. 縦に伸びる曲線は LEP からの $m_{\tilde{\tau}_1}$ の下限を $\theta_{\tilde{\tau}}$ の関数として表したものである.

もう一つ (図 13 には) 数字が書いてあって 1.25, 1.5, 1.8 つてのがあります. これは僕らがつけたもので, ヒッグスボゾンのプロパティで一番大きな寄与があるのがヒッグスが 2 つの光子に崩壊する崩壊幅であり, このシナリオではとても強く効きます. どうしてかって言うと, ヒッグスボゾンは τ レプトンに湯川結合で相互作用しますよね. ですから全く同じように, $\tilde{\tau}$ とも相互作用します. ヒッグスボゾンが $\tilde{\tau}$ のループを通して 2 つの光子に崩壊するという振幅を計算すると, その振幅の符号をうまく W ボゾンループの振幅と同じ符号にする事が可能です. フェルミオンだとそれができないんですけども, スカラーボゾンだとそれが可能になります. そのせいで 2 つの光子への崩壊の振幅を大きくする事ができる. (図 13 の) この数字は例えば 1.8 付近だと 80 % 大きくできる, 1.5 付近だと 50 % 大きくできる, 1.25 付近だと 25 % 大きくできるという数字です. もちろん今はすでに, ヒッグスボゾンから 2 つの光子への崩壊確率はあまり大きくてはダメだという事がわかっていますけれども, 多少大きくても良いというのは今の宇宙ではあり得るという事です. これはこのシナリオの予言になります.

混合角を負にして同じ事をする (図 13 の右側) と, 実は解が殆どなくなってしまう. これは, 左巻きの $\tilde{\tau}$ と右巻きの $\tilde{\tau}$ の混合で, 混合角が正なのか負なのかによって答が違うという初めての例で, とても面白いと思いました. すぐに分かるように, 例えば LEP の制限だとか, それからヒッグスから 2 つの光子への崩壊確率ってというのは, この符号 (図 13 の縦軸の θ の符号) に全く依りません. だけれども \tilde{B} の対消

滅確率っていうのは、混合が逆向きだととても小さくなってしまう。

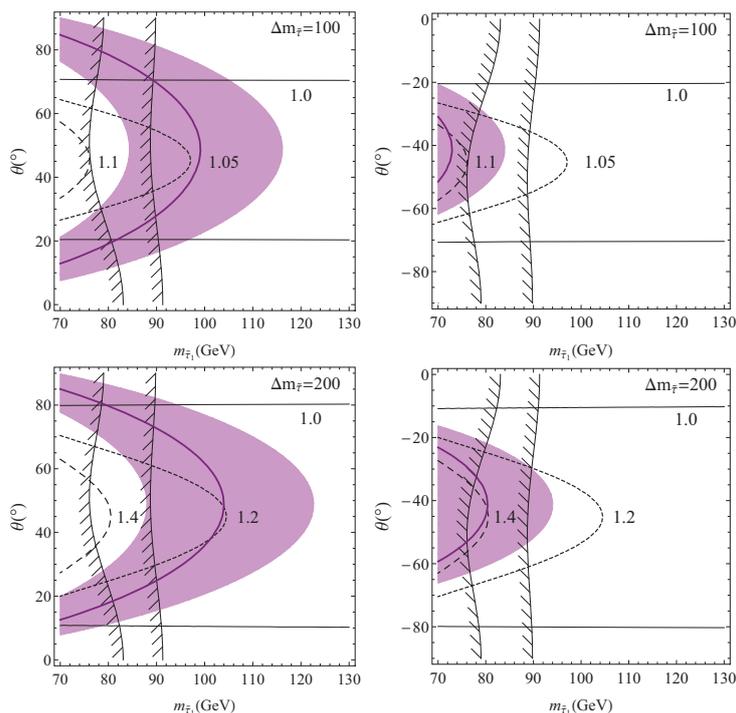


図 14: 図 13 と同じ図. ただし, Δm_{τ} が 100 GeV と 200 GeV の場合 [13].

これをもうちょっと繰り返すと色々なシナリオが可能で (図 14), 質量差が 100 GeV だと, より小さなところだけが無矛盾で 2つの光子の崩壊確率エンハンスメント¹⁸は小さい. 質量差が 200 GeV の時はちょうど中間くらいになる. ですから重要な事は, 軽い τ が 100 GeV 付近にないとダメという結論なんですけれども, もしそれが正しいければ, 混合角はある程度大きく, 正で, さらに重い τ が 100 GeV から 300 GeV 以上軽い方よりも重ければ良い. 大きな混合があるって事と, 質量が大きいくずれているという事は結構無矛盾だという事がすぐ分かるので, これはひょっとすると良いかもしれない, とこの時に思いました. ダークマターの対消滅というところに関しては, これだけで基本的にはお話は終わりです.

6.3 電弱理論の輻射補正

僕は昔から色々な事をやってきたと言いましたけれども, そのうちの一つに, 電弱理論の輻射補正の研究があります. それをやったのは 1990 年代なんですけれども, 1990 年代がどういう時代だったかっていうと, LEP で Z の精密実験が行われて, それからテバトロン (Tevatron) で W の精密実験が行われた時期です. つまり, W が

¹⁸ ヒッグスから 2つの光子への崩壊 $\Gamma(h \rightarrow \gamma\gamma)$ が標準模型と比べてどのくらいの割合で大きいかという事. 本文でも説明がある通り, 図 13 の 1.8 という数字は標準模型に比べて 80 % 大きい事を示す. 図 14 中の 1.05 や 1.1 などの数字も同様.

ゾンのプロパティの精密実験が行われて、初めて電弱理論を輻射補正を含めて精密実験ができるようになった時代です。その事が予めわかっていたので、1990年代になってからは、僕は電弱理論の精密実験に備えた輻射補正の研究を集中的にやりました。

目標は精密実験をたくさんやる事によって、その中で新しい物理のヒントを見つけないといけない事です。なので一番気をつけたのは、輻射補正の枠組みとして、新しい物理を入れた時に入り方がわかりやすいような枠組みを作る事です。僕のやり方だと単純な拡張で実験と直接比較する事ができる、そういう枠組みを作りました。

そういう事情があるので、昔作ったのを眺めてそれで一応調べてみると、今のシナリオ、 \tilde{B} の質量が決まって、 $\tilde{\tau}$ の質量が決まって、それから混合が決まる、そうしたら精密実験にはどの程度影響ができるかっていうのを調べてみました。

これ(図15)は Z の精密実験のパターンです。色々書いてありますが、実はまっ白になってる部分は実験データのエラーの中で完全に独立になっていて、全くLEPの実験では区別がつかないという意味です。ここでやっと39%、まさにコンフィデンスレベル¹⁹の影ができています(図15の左下)。だから感じとしては、許される領域がこのようになっている。その中でごちゃごちゃ動いてもなんにもわからない。ただ、 W ボゾンの質量(図15の右下)だけはちょっとだけなんかあるかなって感じですね。 W ボゾンの質量の中心値(図15の右下の(1))と1シグマの誤差です。これ(図15の右下の(2))が実は今の標準模型の予言です。例えば質量差が300 GeVぐらいで混合角を変えていくと、ちょっと良くなる場所がある。でもこれも確率がほんのちょっと上がるだけで、大した事ではありません。でもそういうところをチェックするというのはいつもやっています。

¹⁹実験値が信頼できるレベル、という意味

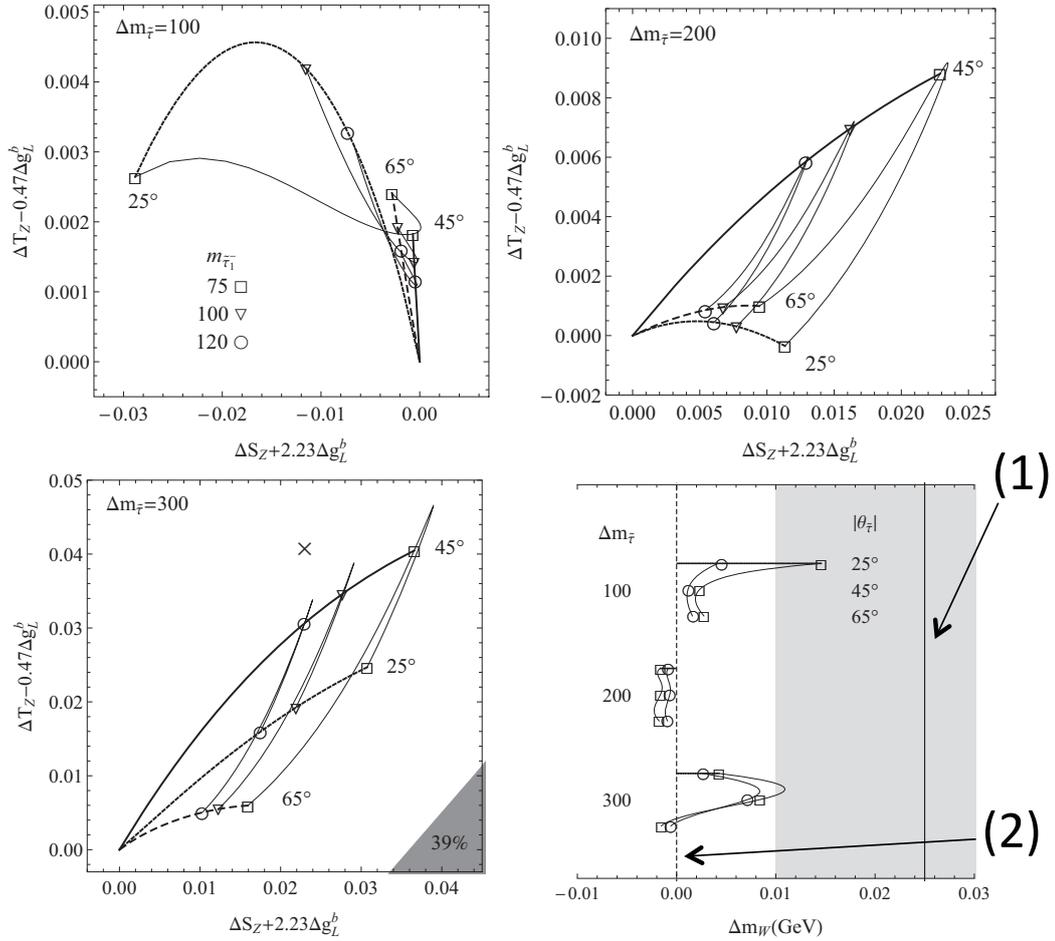


図 15: 左上: $\Delta m_{\tilde{\tau}} = m_{\tilde{\tau}_2} - m_{\tilde{\tau}_1} = 100$ GeV の時の ΔS_Z と ΔT_Z への $\tilde{\tau}$ の寄与を異なる $\tilde{\tau}$ のミクシングアングル $|\theta_{\tilde{\tau}}|$ でプロットしたもの. 右上: 左上と同じ. ただし $\Delta m_{\tilde{\tau}} = 200$ GeV の時. 左下: 左上と同じ. ただし $\Delta m_{\tilde{\tau}} = 300$ GeV の時. 右下: 異なる $\Delta m_{\tilde{\tau}}$ と $|\theta_{\tilde{\tau}}|$ で Δm_W への $\tilde{\tau}$ の寄与をプロットしたもの [13].

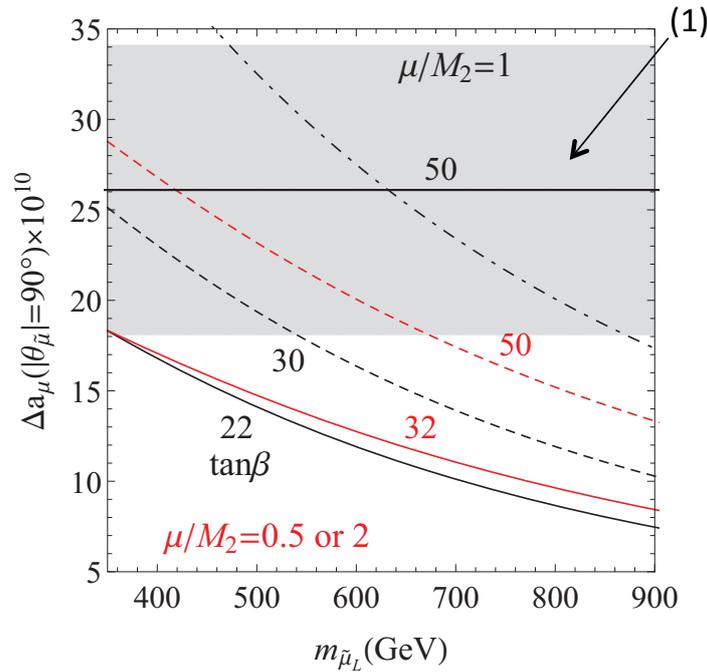


図 16: $\tilde{\mu}$ の混合が 0 の時、つまり $|\theta_{\tilde{\mu}}| = 90^\circ$ の時の Δa_μ を $m_{\tilde{\mu}_L}$ の関数としてプロットしたもの。軽いチャージノ ($\tilde{\chi}_1^-$) の質量は $m_{\tilde{\chi}_1^-} = 350$ GeV に固定されている。より詳しい図の説明は論文 [13] の 6 節参照。

次に、一番重要なミューオン (μ) $g-2$ です (図 16)。残念ながら $\tilde{\tau}$ は直接 μ の $g-2$ には寄与しません。それはやっぱり μ にフレーバー数保存があるからです。色々考えたんですけど、 μ が $\tilde{\tau}$ になって $\tilde{\tau}$ が μ に戻るっていうのをやったら、やっぱり全く起きないんです。そうすると結局何をしなくちゃいけないかっていうと、スカラーミューオン ($\tilde{\mu}$) の質量っていうのをある程度概算しないといけない。普通に考えると、3つのスカラーレプトンのスカラーエレクトロン (\tilde{e})、 $\tilde{\mu}$ 、 $\tilde{\tau}$ の質量は、基本的に同じオーダーであるだろうと思ってます。

ただ、前にも言ったように、例えばヒッグスボゾンの質量が対称性の破れを起こすのは、ヒッグスボゾンの持っている大きな湯川結合のせいで、ヒッグスボゾンの質量のパラメータが負になるからだと言いました。全く同じ事がスカラーレプトンについても言う事ができます。スカラーレプトンのうち、 \tilde{e} と $\tilde{\mu}$ っていうのは、同じ程度の質量を持っているとみんな思っているのですが、 $\tilde{\tau}$ は結構大きな湯川結合を持っているせいで、 $\tilde{\tau}$ の質量というのは、 \tilde{e} と $\tilde{\mu}$ の質量よりも小さくなっているというのが非常に自然です。ですから $\tilde{\mu}$ の質量を仮定する時には、 $\tilde{\tau}$ よりはずっと重いと考えます。

ここで仮定したのは、現在の LEP の実験で、 $\tilde{\mu}$ の質量が 350 GeV 以上という事

です。それからチャージノ ($\tilde{\chi}$) の質量が 350 GeV, これも LHC のバウンドです。ここ (図 16) に書いてある数字は $\tan \beta$ ²⁰ です。それを使ってミュオン $g-2$ を見ると、これ (図 16 の (1)) が実験と理論の誤差になる、1シグマのバウンドなんですけど、それを説明するためには、ある程度 $\tan \beta$ が大きくないとダメだというのがこのシナリオの結論のように見えます。

普通ならこれだけ合ったら、きっとそうに違いないという事になるけれども、それが言えなかった理由ってのが非常にはっきりしています。それはどうしてかって言うと、このシナリオがもし本当だと、我々は存在しない (笑)。簡単な事なんですけれども、ダークマターの質量がわかっていて、一番近い質量を持っているのが $\tilde{\tau}$ だとわかっているんで、宇宙の初期にダークマターができて、それがどこまで対消滅するかっていうのはすぐに計算できます。そこで計算してみると、この模型の予言っていうのは、現在のダークマター密度は宇宙が“閉じる”密度の7倍から8倍という結論になりました。つまり、我々の宇宙が“開いて”いるという事がこの模型では説明できない。

重要な事は、僕はそれでもこの論文を投稿したんです。なんでかっていうのは結局こういう事です。もし、銀河中心からの γ 線のアノマリーが本物だったら、このシナリオがそれを説明する一つの可能性です。それは $\tilde{\tau}$ が軽いはずとか、色々な予言を持っています。それらの予言は検証可能です。LHC で必ず検証できます。そういう状況であるので、もしそういう検証が成功したら、このシナリオはどんな状況があっても無視できないシナリオになります。その場合、理論家あるいは世界の研究者がしなければいけないのは (以下の) 2つです。

まず、MSSM を拡張する。拡張する事によって現在のダークマター密度の残存量を説明する。あるいは、宇宙論を変える。宇宙論に基いて計算した時の仮定っていうのは、ダークマターができてから後は、宇宙はずっと今まで熱平衡にあり続けたという事です。その宇宙論を変えようと思ったら、ダークマターができた後で、もう一度再加熱を起こせば良いわけですね。そういうのをレイトタイムエントロピープロダクション (Late-time entropy production) と呼ぶらしいです。そういう模型はあるんですけども、いくらなんでもそういう宇宙論の模型は僕にはちっとも魅力的に思えません。だからこれはあまり本当じゃないんじゃないかと思って、控えめな発表の仕方になりました。だから、なにか重要な欠点があっても、それで諦めるっていうのは正しくないですね。その一番大きな例が GUT の SU(5) の論文だと思います。(今の例は) 全然あんなすごいものじゃ無いですけども、そういう気持ちっていうのは大切だと思います。

僕、実はこれがこういう状況にあるにも関わらず、今でもこれを続けていて結構

²⁰ 超対称性のあるモデルには、標準模型のヒッグスと逆符号の $U(1)_Y$ のハイパーチャージを持ったヒッグスが必要である事が知られている。 $\tan \beta$ はその2種類のヒッグスの真空期待値の比の大きさを表すパラメータである。

色々な事を調べたんですよ.

調べた事リスト

1. $\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e)$ と $\Gamma(\mu \rightarrow \nu_\mu e \bar{\nu}_e)$ の間のレプトンの普遍性の破れ
2. $l = e, \mu$ での $\Gamma(Z \rightarrow \tau \bar{\tau})$ と $\Gamma(Z \rightarrow l \bar{l})$ の普遍性の破れと $Z \rightarrow \tau \bar{\tau}$ での τ の偏極のアノマリーの可能性
3. 軽い $\tilde{\tau}$ と \tilde{B} の磁気双極子モーメント ($\gamma_{\tau_L \tau_R}$) とウィーク双極子モーメント ($Z_{\tau_L \tau_R}$) への寄与
4. $B(H \rightarrow \text{invisible modes}) \sim 20\%$ (LHC8 limit) は $\sigma(\text{DM-nucleon}) \sim 2 \times 10^{-46} \text{ cm}^2$ に対応する
5. $B(H \rightarrow \text{invisible modes}) \sim 5\%$ (LHC reach) は $\sigma(\text{DM-nucleon}) \sim 5 \times 10^{-47} \text{ cm}^2$ に対応する
6. $B(H \rightarrow \text{invisible modes}) \sim 1\%$ (ILC reach) は $\sigma(\text{DM-nucleon}) \sim 1 \times 10^{-47} \text{ cm}^2$ に対応する

上に色々リストしています.

例えばリストの1については、 $\tilde{\tau}$ がとっても軽いんだから τ レプトンの崩壊幅と μ の崩壊幅があって、 τ レプトンの時には $\tilde{\tau}$ がループで効きますよね. だから、この崩壊幅の普遍性の破れが見えるんじゃないかと思って計算してもらいました. そうしたら全然小さくて、今の観測と全く矛盾が無い事がわかりました.

次にリストの2については、 $Z \rightarrow \tau \bar{\tau}$ と、 $Z \rightarrow l \bar{l}$ のブランチングフラクション²¹のアノマリーがあり得るかってやったら、やっぱり全然あり得ない.

実はこの2つの理由はすごい簡単です. どちらの場合も標準模型の振幅というのは、カイラリティを保存しているんですよ. 左巻きのカイラリティの τ が ν_τ と左巻きの電子 (e) と左巻きのニュートリノになる ($\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e$). 僕らのシナリオって、 $\tilde{\tau}$ が左巻きと右巻きが非常に大きく混合してなくちゃいけなかったんですよ. ところが、混合させた瞬間に振幅としては、カイラリティを保存しない振幅になって、それは標準模型の振幅と直交してしまい、干渉しなくなっちゃう. その事のせいで、混合を大きくすれば大きくするほど、量子補正は小さくなる. 僕のように経験を積んだ理論家にとっては、こんな事は学生にやらせる前に知ってなくちゃいけないようなレベルの恥ずかしい事なんですけれども、あまり考えずに「ちょっとやってみて」と言ってしまったという失敗例です.

(リストの3について) 左巻きと右巻きの混合が効くのは、双極子モーメントなんです. 双極子モーメントっていうのは、例えば光子と左巻きの τ と右巻きの τ の結

²¹全崩壊幅と、注目している過程の崩壊幅の比を取ったもの.

合で、ミューオン $g-2$ と同じですよ。ウィークだったら、 Z と τ 、こういうのに効くかなあと思って調べたけど、やっぱりこっちの方は観測があまりにも悪いので全然見えません。

もっと重要なのは、ダークマターが 10 GeV ですごい軽いのでこれは直接探索の実験で見えないかって事ですよ。ただし、LUX の実験とかの制限がとてもきついです。そこで、やってみたら実はほとんど \tilde{B} のダークマターと原子核との散乱断面積ってのがヒッグスボゾンのインビジブルウィズス (invisible width)²² と線形な関係にあるってというのがすぐにわかります。ヒッグスボゾンはピュアな \tilde{B} ²³ ペアには対消滅する事ができません。だからもし \tilde{B} が完全にピュアだったら、ヒッグスボゾンはダークマターペアに崩壊する事ができません。それと全く同じ事が Z についても言えます。けれども、ほんの僅かにヒグシーノ (\tilde{H}) の成分を持っていたとすれば、もちろんヒッグスボゾンは \tilde{H} と \tilde{B} に崩壊する事ができるので、混合を通してダークマターに対消滅する事ができます。

Z ボゾンの invisible width の制限っていうのは、ヒッグスボゾンの invisible width の制限よりもずっと強いので、 Z ボゾンの制限が重要なと思われる。けれども Z ボゾンの場合には、全く \tilde{B} に結合しないので、両方 \tilde{H} じゃないとダークマターペアに対消滅できないわけですね。その事のせいで、 Z ボゾンの崩壊幅というものがヒッグスとの混合の 2 乗で効きます。それを比較してみると、驚くべき事に、現在のヒッグスボゾンの崩壊幅に対する制限の方が Z ボゾンの invisible width に対する制限よりも強いんです。

ちょっと意外ですよ。だからとてもびっくりした。これを見つけたのは、僕の共同研究者で S. Mukhopadhyay という IPMU のインド人のポスドクの方です。彼はこの 9 月からピッツバーグに居ます。そういう事があるので、実は、例えばこのヒッグスボゾンの invisible width が 20 % ぐらいっていうのは現在可能なんですけれども、もしこのぐらいあるとすると、ダークマターが核子と散乱する散乱断面積が $2 \times 10^{-46} \text{ cm}^2$ になります (リストの 4)。それが 5 % だともう非常に小さくなって $5 \times 10^{-47} \text{ cm}^2$ (リストの 5)。それで invisible width が ILC reach にある 1 % まで落ちるとすると、ダークマター断面積が 10^{-47} cm^2 (リストの 6)。

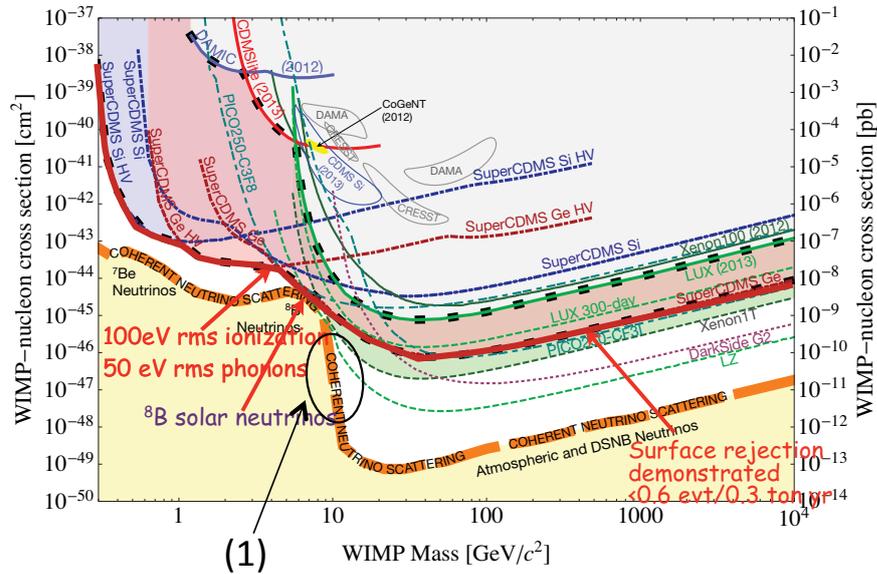
それで、これを比べてみますよね。 10^{-47} cm^2 と今言ったのは図 17 の左の縦軸の 10^{-47} の目盛のところ。そこで (ダークマターの質量が) 10 GeV になります (図 17 の横軸の 10 の目盛)。だからこの辺になります (図 17 の (1))。実はこのシナリオはダークマターの直接探索についてはナイトメアシナリオ²⁴になります。(その理由を以下で説明しています。) LUX2013 (図 17 の緑の線) が今のバウンドです。今ここ (図 17 の緑の線とオレンジの線の間) が閉じていません。ダークマターが 1 GeV から 1 TeV であると図 17 に描いてあるんですけども、みんな割とこの辺 (100 GeV

²²実験で見えない (観測できない) 粒子への崩壊幅。例えば、ニュートリノへの崩壊など。

²³中性ウィーノやヒグシーノなどと混合していない状態の \tilde{B} 。

²⁴何も見つからないという悪夢のシナリオ。

Next Step: SuperCDMS SNOLAB



Lake Louise Feb 19 2014

32

B.Sadoulet

図 17: 様々な実験からのダークマターへの制限。横軸：ダークマターの質量，縦軸：ダークマターの散乱断面積

から 1000 GeV のところ) を見ていると思います。結構今までの実験では、10 GeV 以下のところの推定域が無かったので、今色々な方が本当に苦労してこちらをサーチしています。

原子核の反跳とかね、それからあとは電子の反跳ですよ、そういうのを見ているのがダークマター検出器なんですけれども、この 10 GeV 以下のところっていうのは、太陽ニュートリノがダークマター検出器を動かしちゃうんですね。ちょっと驚きなんですけれども、ニュートリノが散乱し出すって事です。そのバックグラウンドがこの辺(図 17 の 10 GeV 以下の黄色の領域)にあって、これ以下にはセンシティブリティがいかないだろうと今のところみんなが思ってます。ですからここもダークマター直接探索はなかなか難しいという結論になりました。

(ここから先は準備中の論文の話になるので割愛させていただきます。)

重要な事は、そこまで完全に理詰めに攻め抜くという事が大切だということです。そうでなかったら新しい物理なんか逃げちゃいます。だからもし、本当に新しい物理を見つけたかったら、少なくとも僕がやってみせたようなレベルで、論理的に絶対逃げ道が無いような解析をしないといけません。そういう例をやってるんだと思っ

て、LHCの物理の解析の一つのプロトタイプとして見て欲しいと思って、準備中の仕事を紹介致しました。

これで、ちょうど時間となりました。最初の講義はこれで終わりにします。
(休憩)

7 標準模型の物理

一転してリラックスした講義になります。昨日のは学生に向けた本当の講義でもまじめな内容です。今朝、お話ししたのが僕が研究者として、新しい物理を必ず見つけるという意気込みのもとで、まじめに研究をした仕事です。

今日これから話す関連した二つの話題は楽しいだけのお話です。QFT というのはか QCD というのはか、結構楽しい事がたくさんあって、理論家にとってはとても楽しい事なんだけど、実験家の人はまだ知らない、まだ検出していない、そのような事が結構あります。そういう事って標準模型の物理なので、必ず実験家が検出するはずだとは思っているんですけども、やっぱり検証して欲しい、そういう感じの仕事です。

7.1 QCD における T odd asymmetry

最初のお話は W ボゾンです。QCD における T odd asymmetry というのは後で説明します。LHC で生成される W ボゾンは散乱面から直角の方向に偏極し、その偏極の方向と大きさが摂動 QCD で計算可能だという話です。

散乱面というのはビームの運動量と W の運動量のベクトル積で決まります。だから向き付けのある散乱面です。

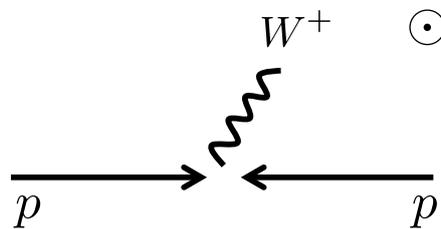


図 18: 陽子の衝突による W ボゾンの生成。

例えば左から陽子が来たとして、 W^+ がこういう運動量ででてきたとします (図 18)。左から来る陽子の運動量と、 W の運動量のベクトル積はこっち側 (図 18 に対して紙面上方向) を向いています。それで W のスピン偏極がこちらの方向か向こう側か、上か下か、あるいは左か右かに偏極していたら面白い。例えば普通、散乱振幅をツリーレベルで計算すると偏極は必ずこの面 (散乱面と平行な面) の中に有ります。だけどループ計算をしてループの中の位相を拾うと、実は散乱面と直角の偏極を起こす事が可能です。摂動 QCD の場合は散乱振幅が摂動 QCD で計算できるので、摂動論の計算でもって W の偏極がどれだけの大きさで、どちらの向きに偏極するのか計算する事が可能です。

それは QCD の予言なのだから、必ず実験で検証されるべきものです。ところが、その実験的な検証がまだされていないという話をします。だからこれは実験家に僕

があげた予言で、こういう標準模型の物理もきちんとやって欲しいというのが僕の願いです。

そこで、もし W が偏極していたとします。そうすると W が l (レプトン) に崩壊する時は、 W の偏極の向きを教えてください。

例えば W^+ は l^+ と ν に崩壊します。 l^+ は右巻きで、 ν は左巻きとします。ですから W^+ がもし偏極しているとする、その偏極の向きに l^+ が来やすいです。従って偏極が正の方向にあるとしたら、正の方向に l^+ ができる確率が高くなります。だから l^+ の運動量の非対称 (asymmetry) を見る事で、 W ボゾンの偏極の向きを観測する事が可能です。これは W ボゾンの崩壊が弱い相互作用でパリティを壊しているからです。こういう理屈で実験が可能です。

実はこの予言は僕が日笠さんと一緒に 1984 年に計算したものです。その計算はもちろん正しかったのですが、現在は自動的なループ計算のプログラムで正しい事が簡単に証明できる時代です。1984 年、僕はアメリカにいたんですけれども、実はこの仕事の元になっている計算というのは 1981 年にやっています。1981 年というのは僕がまだ日本にいた時で、僕がポストクの 2 年目かな、だけど無給のポストクでした。

日笠さんは大学院の博士課程の 1 年目ぐらいだったと思います。もう一人の同じ学年の大学院生の甲斐君という学生と 3 人で、摂動 QCD のループ計算をしました。

(以下は T odd asymmetry の説明をしています。) まずパリティ変換では運動量が反転しますが、スピンは反転しません。どうしてかっていうと、スピンは $r \times p$ だからですね、 r も反転するし p も反転するのでスピンは反転しません。だけど時間反転 (time reversal) をすると、運動量もスピンも両方とも反転します。ですから QCD 振幅の absorptive part ²⁵ は大体

$$\text{QCD 振幅の absorptive part} \sim (\vec{p}(\text{beam}) \times \vec{p}(W)) \cdot s(w) \quad (7.1.1)$$

と書け、運動量 2 つとスピンの積なので、パリティのもとでは偶 (even) ですから偶パリティの物理です。だけど時間反転で負になるので T odd asymmetry と言います。つまり QCD でもこういう非対称を出す事ができる。

みんなよく勘違いするんですけど、T odd asymmetry は時間反転の不変性の破れではありません。まず、時間反転では、運動量とスピンを全部反転する状態を作り、同時に時間の向きも逆になります。だから逆過程の全部のスピンと運動量を変換したものと順過程を比較して、その差が見つかれば、時間反転不変性の破れになるわけです。一方、実際の実験で見るのは、時間の向きを逆にしないような非対称をみます。でもそれは時間反転と全然関係無いじゃないかと思うかもしれない。し

²⁵後の段落で説明する。

かし (以下で説明するように) 実はユニタリティという場の理論が持っている非常に重要な特徴を使うと、時間反転の T odd asymmetry が観測されるのは散乱振幅が位相を持っている時だけだということになります。それも非自明な位相でないといけません。普通その事を終状態相互作用位相 (final state interaction phase) とか位相変移 (phase shift) とか色々な言い方をします。その始状態と終状態の位相の違いを拾う事でこの非対称が出てくる。CP の非対称も基本相互作用の位相を拾う事によって出てくるんですけども、実は CP 不変な理論、時間反転に対して不変な理論で T odd asymmetry が散乱振幅の phase を拾う事で出てきます。

そういう事実は僕は大学院生の頃に学んで、それに関する色々な仕事が出ていたのを見ていて、日笠さんたちに「とても面白いプロジェクトがあるから一緒に計算しないか」って言って始めた仕事は1981年で、それが元になって1983年に W の偏極についての論文を書く事ができました。そういう歴史のある仕事です。ただ残念なのは未だに実験が検証してくれないという事です。何ででしょうかね。

ここでは現在、台湾の国立中央大学にいる山田敏文さんのスライドを使わせていただきます。山田さんはこの9月から韓国の KIAS に行かれる事になっています：

Observation of Absorptive Part

Absorptive part can be observed through part of the cross section that is odd under **naïve T-reversal**, which we call **"T-odd asymmetry"**.

☺ From unitarity, $T_{fi} - T_{if}^* = i \sum_k T_{fk}^\dagger T_{ki} \delta^4(p_k - p_i) \equiv i A_{fi}$.

If the theory is invariant under T-reversal (good approximation in many cases), we have $T_{fi} = T_{i\tilde{f}}$,
 where states " \tilde{i} ", " \tilde{f} " are the states where **naïve-T-reversal**

for any 3-momentum $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$,
 for any spin $\sigma \rightarrow -\sigma$,

is imposed on states " \tilde{i} ", " \tilde{f} ", respectively.

We finally obtain

$$\underbrace{|T_{\tilde{f}\tilde{i}}|^2 - |T_{fi}|^2}_{\text{Part of cross section that is odd under naïve-T-reversal, namely, T-odd asymmetry}} = 2 \text{Im} (T_{fi}^* A_{fi}) + \underbrace{|A_{fi}|^2}_{\text{Absorptive part}}$$

図 19: 山田敏文さんのスライド 1

一応イントロダクションとかをいうと、今言ったユニタリティ (unitarity) というのがこれです (図 19 の T_{fi} に関する式)。ユニタリティというのは S 行列の絶対値の 2 乗が 1 というのがユニタリティですよ。

$$S^\dagger S = 1. \tag{7.1.2}$$

この式をS行列を散乱行列が何も変わらない1の周りで展開して $1+iT$ というふう
に書いておいてから、 $(1+iT)^\dagger$ と $(1+iT)$ の積が1であるという条件を見ると、

$$T_{fi} - T_{if}^* = i \sum_k T_{fk}^\dagger T_{ki} \delta^4(p_k - p_i) \equiv iA_{fi}, \quad (7.1.3)$$

という式が出ます。みんながよく知っているのは始状態と終状態をここで同じにし
たものです。そうすると前方散乱振幅といって、 f が i になりますので、(7.1.3)の左
辺は $T_{ii} - T_{ii}^*$ となり、前方散乱振幅の虚部の2倍になります。ここで右辺を見てみ
ると、 f というのが i になり、

$$i \sum_k T_{ik}^\dagger T_{ki} \delta^4(p_k - p_i) = i|T_{ii}|^2, \quad (7.1.4)$$

となるので、 T_{ik} の絶対値の2乗の積分、つまり全断面積 (total cross section) にな
ります。良いですね、有名な光学定理です。

今ここで使うのは前方散乱振幅ではなくて、一般の散乱振幅、 i から f への散乱
振幅です。でも基本的に同じような関係があつて、 i から k という終状態を通つても
う一度 f に戻る。これが終状態相互作用位相なんです。その寄与が T_{fi} つていう振
幅と T_{if} の複素共役と関係しています(式(7.1.3)参照)

ここで、時間反転不変性を使います。これはどういう事を言っているかという
 i から f に行く散乱振幅は \tilde{f} から \tilde{i} に行く散乱振幅と同じであるつていう事になり
ます(図19参照)。 \tilde{i} 、 \tilde{f} は全ての運動量とスピンを反転させたものになります。これ
が先ほどのT oddの意味です。一方で時間反転不変性は実はT oddにするだけじゃ
なく、その時間反転、つまり全ての運動量とスピンをひっくり返すだけじゃなくて、
時間の向きが i から f に行くというのを、 \tilde{f} から \tilde{i} に変えた時に、それが等しくなる
というのが時間反転不変性です。

ここで $|T_{\tilde{f}\tilde{i}}|^2$ から $|T_{fi}|^2$ を引きます。そこにこのユニタリティの式(7.1.3)を代入し
ます。ここで $|T_{\tilde{f}\tilde{i}}|^2 - |T_{fi}|^2 = 0$ 、つまり時間反転不変性は仮定してしまいます。そ
うすると

$$|T_{\tilde{f}\tilde{i}}|^2 - |T_{fi}|^2 = 2\text{Im}(T_{fi}^* A_{fi}) + |A_{fi}|^2, \quad (7.1.5)$$

が出ます。ここに出てきたもの、 A_{fi} というのが absorptive part と普通呼んでいる
もので、虚部みたいなものです。

前方散乱振幅だったら虚部で、一般の散乱振幅の場合には色々なところに位相が
出てきてしまいます。実部とか虚部とかは簡単な複素数じゃないので、この物理的
な中間状態を通して終状態に行く成分の事を absorptive part, 吸収部分と呼ぶ事
になっています。この部分((7.1.5)の右辺)が absorptive part に比例する。そこで、も
し absorptive part が摂動論で計算できるとします。ただし、これはツリーレベルで
は絶対に存在しないんですね。だから摂動論では、1ループレベル以上で出てくる

んですけど、この項 $2\text{Im}(T_{fi}^* A_{fi})$ は摂動論の最初のオーダーでこの項 $|A_{fi}|^2$ は高次のオーダーになります。

僕らはこの A_{fi} という部分を計算しました。使った散乱振幅は、この問題だと、例えばクォークとグルーオンがぶつかってクォークと W ができるなんていう散乱の、1 ループの absorptive part を計算したという仕事です。ただし、とってもとっても大変でした。

最初、1981年に計算したのはゴールデンウィークにだった事を覚えています。5月の何日だったかもよく覚えています。少なくとも3日、4日、5日はお休みでした。多分5日だった気がします。その間は大学に誰も来なくて、大学は静かな所、共同研究するのに一番良いなという所でもあって、毎日セミナー室の結構大きな部屋を3人で独占して計算しました。今はもうそのセミナー室は存在しませんけどね。その部屋の特徴は窓が一面しかなくて、その残りの3面が全部黒板なんです。だから結構長い黒板があって、横にもあって、3面が黒板という部屋でした。

その時僕らがやった方法は、僕が黒板で全部計算して、日笠さんと甲斐さんがノートで計算してチェックしながら進めるっていう方法でした。僕は黒板の左の方から始めて、ずーっと計算して行ってこう行って一回り。そうすると、僕が終わった頃にはもう日笠さんと甲斐さんの計算も結構進んでいるようで、チェックが終わっていて、最初の面は消す事ができる。それを何周もして、何周したか覚えてませんが、3日ぐらいかかりました。なんか今はループ計算は全部コンピューターがあったという間にやってしまうから、なんか変なように感じますが、昔はとっても大変だったんです。

(以上のことは)1981年の仕事、多分これ [14] が出版されたのかな。えっと萩原、日笠、甲斐の最初の論文、1982年に掲載されているので、1981年に計算したものだと思います。僕らが考えたのは、ニュートリノが過剰に原子核にぶつかってレプトンができるという反応過程です。その時に、ニュートリノとレプトンで散乱面ができますよね。そこでジェットができるんですけども、この場合はハドロンで計算します。ハドロンがその散乱面の右側にできるか左側にできるかっていう非対称を計算しました。それを発表したのが1982年で、その後1984年に先ほどの W の偏極の仕事をしました。

あと色々、僕はこの話題がとっても好きだったので、たくさん仕事をしたんですけども、実はどの一つも検証されていない。

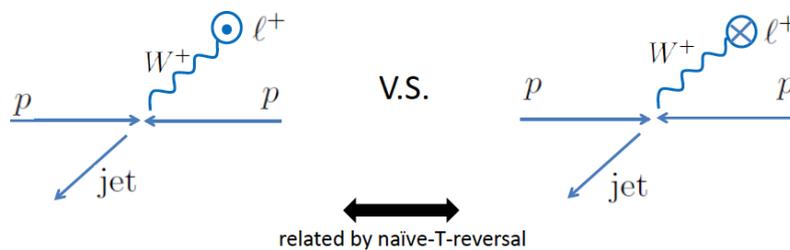
僕の前、誰がこの研究をやっていたかという、もうみなさんご存知でないかもしれないけれども、僕が大学院生の頃、ハーバード大学とか CERN でヒーローみたいな存在だった A. De Rujula という方です。その方がやった仕事をみて「あ、これは面白いんじゃないか」と思って始めたのがこの仕事です。それで、とても面白かったのがこの A. De Rujula, R. Petronzio, B. E. Lautrup っていう論文 [15] で、1978年でした。ちょうど僕が大学院生だった頃なんですけど、この論文を読んだら論文の最後にコメントが書いてあったんです。これ読むと面白いですよ。A. De Rujula

はハーバードの方なんですけれども、この論文を書き終わったら、H. Georgi だか S. L. Glashow だったか S. Weinberg が誰か覚えてないんですけれども、有名な人にこの論文を見せたら、お前は絶対に間違っているって言われたって書いてありました。だけれども、その論文の研究をされていたんです。

それで僕は、あのハーバードの偉い先生が絶対に間違っているって思う論文だったら、自分もやる価値があるんじゃないかと思ってやったわけです。そういう向こう気は若い頃からあったんです。

Observation of Absorptive Part (cont'd)

In this talk, we focus on $pp \rightarrow W^+ (\rightarrow \ell^+ \nu) + \text{jet}$ process at the LHC and study the distribution of quantity $\vec{p}_{p1} \times \vec{p}_{W^+} \cdot \vec{p}_{\ell^+}$.



With narrow width approximation on W^+ , the measurement of $\vec{p}_{p1} \times \vec{p}_{W^+} \cdot \vec{p}_{\ell^+}$ is equivalent to that of $\vec{p}_{p1} \times \vec{p}_{W^+} \cdot \vec{s}_{\perp}$ where \vec{s}_{\perp} is the spin of W^+ perpendicular to the scattering plane.

8

図 20: 山田敏文さんのスライド 2

ここに描いた絵(図20)なんですけど、陽子と陽子がぶつかってWとジェットができた時に、Wの偏極がこちら向きなのか違う向きなのかっていうのに非対称が出来ます。その非対称はT-oddなので absorptive part に比例します。これを計算すると、例えばアップクォークとグルーオンがぶつかってダウンクォークとW+ができる時に、absorptive part がどこに出てくるかっていうと当然ここに出ますよね(図21の左側のファインマン図)。

Absorptive part っていうのは、中間状態が現実の粒子だっていうのが条件なので、例えばこの場合だとアップクォークとグルーオンがぶつかって、グルーオンとアップクォークに一度なる。それがもう一度散乱してダウンクォークとW+ができるっていうのが absorptive part です。また、この場合(図21のファインマン図)は、ここ(図21の図中の黒い点線)にもできるんですよ。アップクォークとグルーオンができてダウンクォークとダウンクォーク、それからアップクォークなのかな。でもこのチャンネル(図21の右側のファインマン図中の黒い点線)で見ると、アップクォークと反ダウンクォークがぶつかってWができるでしょ。それでWは重い

Calculation of Absorptive Part

We calculate the cross section for $pp \rightarrow W^+ (\rightarrow \ell^+ \nu) + \text{jet}$ process using **perturbative QCD**.

In perturbation theory, absorptive part $\sum_{k \in \mathcal{H}} T_{fk}^\dagger T_{ki} \delta^4(p_k - p_i) = -i (T_{fi} - T_{fi}^\dagger)$ is calculated with **Cutkosky rules** as

e.g., for subprocess $u g \rightarrow W^+ d$ in the leading order of g_S ,

$$-i (T_{fi} - T_{fi}^\dagger) = \text{[Tree Diagram]} + \text{[One-loop Diagram]} + \dots,$$

where every loop propagator cut by $\dots\dots\dots$ is replaced with a delta function as $\frac{1}{(l+p)^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta((l+p)^2 - m^2)$.

Absorptive part appears at one-loop level in the leading order.

➡ T-odd asymmetry arises through interference of tree and one-loop diagrams.

図 21: 山田敏文さんのスライド 3

ので、アップクォークと反ダウクォークができて、それがもう一度くっついてダウクォークになる。そういう寄与が有ります。その2つの和が摂動論で出てきます。それをきちんと計算しました。

現在はそれが Mad loop というテクニックで計算できます。Mad loop も楽しいですけどね。ただ僕の仕事じゃないので紹介しません。

1984年の頃は、もう本当にみんなが教科書に書いてある方法でループ計算をした。有名な Feynman parametrization とかかって、それでプロパゲータを一個にまとめて、それから parameter setting するという方法です。唯一ちょっと違っていたのが、次元正則化 (dimensional regularization) をもう完全に僕はマスターしていたので、この正則化を用いたことです。ただ、ちょっと面倒なのが超関数とかが出てくるところなんですけれども、次元4の周りで展開すればそれでよろしい。だから本当に昔のやり方に比べたら少し楽な計算をしたと思いますけれども、現在はもうこの辺のループ計算が完全に自動化されています。

それよりもずっと後で僕が学んだのが、ループ積分を非常に基本的なスカラー積分だけをきちんとやって、それをコンピュータプログラムとして保存しておけば、その基本的でない積分は全部基本積分に落とし込む事ができるということです。その仕事を G. Passarino と M. J. G. Veltman[16] がやっていて、「これはとても良いな」と思いました。僕が電弱理論の輻射補正をきちんと全部自分で1990年代にやり直したって言う事を言いましたが、その時は G. Passarino と M. J. G. Veltman の方法を使いました。

ただ、ここで一つだけ言っておきたいのは、あの結構大変な計算は全部僕一人で

やって、まさか昔の答えが一つも間違っていないとは思えないくらい難しい計算だったんですけれども、それらに一つもエラーがなかったことです。全ての弱い相互作用の低エネルギーと Z , W の on-shell の量を一つ残らず計算したんですが、10年ぐらい前に低エネルギーの量については全部 W. J. Marciano と A. Sirlin の2人の論文が掲載されていました。それで、一つぐらい論文があったと思うんですが、一つ完成するたびに W. J. Marciano と A. Sirlin の論文と照らし合わせてみました。そうしたら、たった一つもエラーを見つけられなかった。その時僕は本当に感動しました。本当にこのレベルの人たちって絶対にエラーしないんだ。そういうのってとっても感動します。それで、やっぱり自分は研究者としてみんなの役に立つ仕事をしようと思ったら、エラーしてはいけないんだと思いました。ミスが無いってすごいですよね。実はミスプリントはあるんだけど、ミスプリントについてちゃんと選んだものが出てくるんです。だから完全に一致したんです。それはとっても驚きでした。

でも、Mad loop はそれと全然違うんです。G. Passarino と M. J. G. Veltman の方法には欠点があります。箱型のファインマン図まではまだ良いんですが、LHC では5点関数、6点関数、場合によっては7点関数ぐらいすぐ出てきてしまう。そういうように外側の足の大きなループを、基本的な4点関数のループ積分に落とす事がものすごく大変で、計算的には一応落とし込めるんですけれども、ところがその計算で行列式0の逆数がそこら中に入ってきて、実際に計算しようと思ったら、ありとあらゆる場所で計算不能になる。とてつもなく面倒な事が起きます。5点関数ですら結構大変です。6点関数なんて本当に大変で全然できません。

それを色々な方法でみんなやって、一つのグループはQCDの on-shell reduction というのを使いました。それは理論的には結構面白くて、E. Witten の spin space とかいうのから出発しています。基本的に何をやっているかという、QCDの off-shell のグルーオンの運動量をスピン空間に解析接続する事によって、非物理的な off-shell のグルーオンを on-shell の行列要素で記述する事ができる。そういうような技術が結構10年ぐらい前から展開されて、それを使ってプログラムを作って計算するっていう事を選んだグループがあります。そのグループが glab hat っていう SLAC の誰だっけ、名前忘れちゃったけど SLAC の人たちが中心になってやっています。

でも欠点があって、無質量の議論しかできないものだから、Yang-Mills 理論しかできない。例えばグルーオン-グルーオン散乱だと、グルーオン-グルーオンから、10個のグルーオンぐらいの計算まではあつという間にやってしまうというすごいプログラムをつくりました。でも MadGraph というチームは、そんな Yang-Mills 理論しかできないなんて役にたたない、どんな新しい物理があってもループ計算を自動的にやる、という全く違う方針を立てました。しかも G. Passarino と M. J. G. Veltman の手法はもうダメだ、もう6点関数では話にならないと。

例えば、連中はグルーオン-グルーオンからヒッグスとグルーオン-グルーオン-グルーオンを簡単にやってしまいます。どういうやり方をするのかというと、OPP 法 (Ossola-Papadopoulos-Pittau method)[17] っていう、3人のグループが考えたみた

いです。それはループ積分をする時に、G. Passarino と M. J. G. Veltman の方法は、ループ積分をした後の結果がローレンツ群に対してテンソルのように振る舞うという事を使って、積分を基本形に落とし込むんですけど、新しい MadGraph チームがとった方法というのは、積分変数などをうまく取ってループ積分を基本形に落とし込む操作を全部やっ飛ばしてしまうというテクニックです。この方法で、一瞬で計算できるそうです。これが、日笠さんと私が1980年代に計算したものと完全に一致している事がわかりました。まあ、それはそれで嬉しかったですけど。

今は“MadGraph5_aMC@NLO”っていうのがあって、自動的に計算ができます。それを使って $pp \rightarrow W^+ \text{ Jet}$ を考えてみます。サブプロセスとしては、

$$ug \longrightarrow W^+(l^+\nu_l)d, \quad u\bar{d} \longrightarrow W^+(l^+\nu_l)g, \quad \bar{d}g \longrightarrow W^+(l^+\nu_l)\bar{u}$$

でこれを計算すれば良い。

Expression for $W^+(\rightarrow \ell^+\nu) + \text{jet}$ Cross Section

$$\frac{d\sigma}{dq_T^2 d\cos\hat{\theta} d\cos\theta d\phi} = F_1(1 + \cos^2\theta) + F_2(1 - 3\cos^2\theta) + F_3 \sin 2\theta \cos\phi$$

$$+ F_4 \sin^2\theta \cos 2\phi + F_5 \cos\theta + F_6 \sin\theta \cos\phi$$

$$+ F_7 \sin\theta \sin\phi + F_8 \sin 2\theta \sin\phi + F_9 \sin^2\theta \sin 2\phi .$$

q_T : W boson transverse momentum
 $\hat{\theta}$: scattering angle of W boson in parton center-of-mass frame
 (θ, ϕ) : solid angle of charged lepton in a W rest frame with $\vec{n}_y // \vec{n}_z^{\text{lab}} \times \vec{q}_T^{\text{lab}}$

parton center-of-mass frame

a W rest frame

F_i 's are functions of q_T , $\cos\hat{\theta}$, and contain QCD amplitudes and parton distribution functions.

図 22: 山田敏文さんのスライド 4

そうすると、実際に見るのはレプトンの角度分布なので、 W^+ が3つ偏光状態 (+1, 0, -1) の重ねあわせで、どれだけのレプトンの角度分布が出るのかというのは簡単に計算できるので予めやっておきます。それで、この F_7 と F_8 と F_9 という角度分布 (図 22) が T-odd になります。特徴は $\sin\phi$ が入っている事です。他はみんな $\cos\phi$ が入っている。有名なのは $\cos\theta$ (図 22 の F_5 の部分) が有名でこれが前方後方非対称性 (forward-backward asymmetry) と言います。

F_1 と F_2 と F_5 がツリーで出てくるものです。それぞれ、ヘリシティが横偏光、縦偏光、+ と - の差になっていて、それ以外は全部干渉しています。この3つ (F_1, F_2, F_5) は密度行列の言葉で言うと対角成分で、その残り ($F_3, F_4, F_6, F_7, F_8, F_9$) が非対角成分なんですけど、そのうちの3つ (F_3, F_4, F_6) はツリーレベルで出てくる。

だけど、最後の3つ (F_7, F_8, F_9) は1ループの absorptive part で出てくる。なぜかと言うと、時間反転でこの項 ($\sin \phi$) が符号を変えるからです。それをちゃんとやるのは結構大変なので、がんばって一つ一つチェックする必要があるかもしれません。こういう事は、最初の論文を書く時にやりました。それで、 W^+ についてやってレプトンの非対称性を見る。山田さんのスライド (図 23) で説明がなされているように、時間反転で $\hat{\theta} \rightarrow \hat{\theta}, \theta \rightarrow \theta, \phi \rightarrow -\phi$ と変換します。

T-odd Part of the Cross Section

$$\frac{d\sigma}{dq_T^2 d\cos\hat{\theta} d\cos\theta d\phi} = F_1(1 + \cos^2\theta) + F_2(1 - 3\cos^2\theta) + F_3 \sin 2\theta \cos\phi$$

$$+ F_4 \sin^2\theta \cos 2\phi + F_5 \cos\theta + F_6 \sin\theta \cos\phi$$

$$+ F_7 \sin\theta \sin\phi + F_8 \sin 2\theta \sin\phi + F_9 \sin^2\theta \sin 2\phi.$$

q_T : W boson transverse momentum

$\hat{\theta}$: scattering angle of W boson in parton center-of-mass frame

(θ, ϕ) : solid angle of charged lepton in a W rest frame with $\vec{n}_y // \vec{n}_z^{\text{lab}} \times \vec{q}_T^{\text{lab}}$

Under naïve-T-reversal, $\hat{\theta} \rightarrow \hat{\theta}, \theta \rightarrow \theta, \phi \rightarrow -\phi$.

Hence functions F_7, F_8, F_9 represent T-odd contributions to the cross section.

図 23: 山田敏文さんのスライド 5

そうすると元々の F_1 から F_6 がジェットが出て、 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ ですが、 F_7 から F_9 は $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ になります。

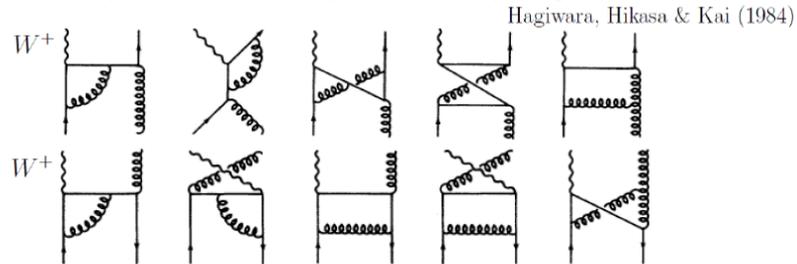


図 24: 山田敏文さんのスライド 6

それで、これ (図 24) が昔計算したものですけど、何日もかかって一生懸命計算しました。今は MadGraph でやると一瞬で出てきてしまいます。T-odd な F_7, F_8, F_9 が図 25 になるというのがわかって、これは本当に昔の論文と変わらないです。それで、それを実際にどうやったら実験で見えるかという、先ほど言ったように、 W^+ の偏光の情報というのは、例えば y 軸というのを、図 26 のように取って、レプトンの運動量の y 成分が正のものと負のものの非対称性を見れば、それが非対称性のチェックになります。

Numerical Evaluation of T-odd Part

To study the impact of T-odd contributions to the overall cross section, we define $A_i \equiv F_i/F_1$ ($i = 7, 8, 9$). (Overall cross section is prop. to F_1 .)

In pp collisions with $\sqrt{s} = 8$ TeV, $A_i(q_T, \cos\hat{\theta})$ are evaluated as Yokoya (2013)

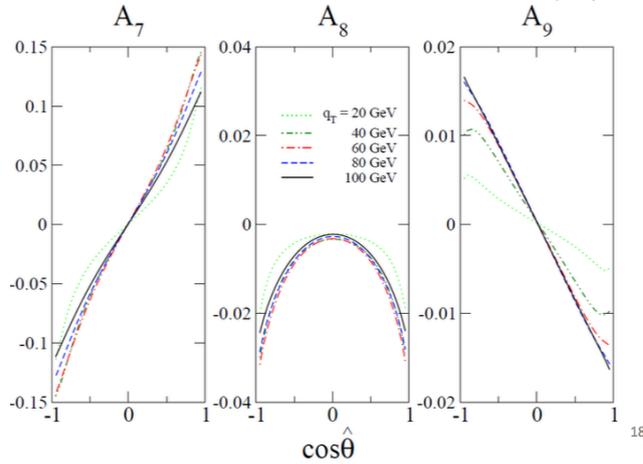
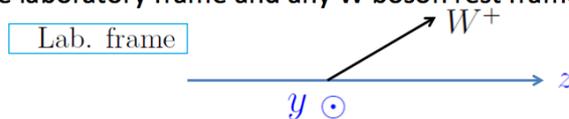


図 25: 山田敏文さんのスライド 7

T-odd Observable at Hadron Colliders

We look for a T-odd observable that is sensitive to $F_7 \sin\theta \sin\phi$ term and can be reconstructed easily in hadron collisions.

Notice that when y -axis is defined parallel to $\vec{n}_z^{\text{lab}} \times \vec{q}_T^{\text{lab}}$, it is common for the laboratory frame and any W boson rest frames.



If we denote the y -component of charged lepton momentum by $(\vec{q}_l)_y$, we have $\sin\theta \sin\phi = (\vec{q}_l)_y / (M_W/2)$.

Measure the difference in the numbers of events with $(\vec{q}_l)_y > 0$ and $(\vec{q}_l)_y < 0$, and define **T-odd asymmetry A** as

$$A \equiv \frac{\sigma(\text{events with } (\vec{q}_l)_y > 0) - \sigma(\text{events with } (\vec{q}_l)_y < 0)}{\sigma(\text{events with } (\vec{q}_l)_y > 0) + \sigma(\text{events with } (\vec{q}_l)_y < 0)} .$$

A reflects $F_7 \sin\theta \sin\phi$ term's contribution.

図 26: 山田敏文さんのスライド 8

これはすごく簡単なので、実験で見るのも簡単なはずなんですけど、問題があります。なんで MadGraph 使って、検出シミュレーションまでもう一度やってみせたかという、実際に W の散乱面を決めようと思ったら、missing p_T の情報が必要だからです。その missing p_T というのは、ニュートリノの横方向の運動量の情報です。それを見れば、 W の横方向の運動量が完全に決まるんじゃないかと思うんですけども、誤差が大きい。その時ジェットがたくさん出てくるイベントですので、missing p_T の誤差は結構大きくなります。ですから、missing p_T の誤差を考慮した上で、この非対称性が出るかというのは自明ではないので、シミュレーションをやっているという事です。

Parton-level Analysis (cont'd)

Selection cuts:

- Define $W(\mu^+\nu_\mu)+\text{jet}$ events
- The leading jet should satisfy $p_{j1T} > 30 \text{ GeV}$ & $|\eta_{j1}| < 4.4$.
 - Require one μ^+ with $p_{\mu^+T} > 25 \text{ GeV}$ & $|\eta_{\mu^+}| < 2.4$.
 - Require missing transverse momentum $\cancel{p}_T > 25 \text{ GeV}$.
 - The transverse momentum of W boson, $q_T \equiv |\vec{p}_{\mu^+T} + \vec{p}_T|$, should satisfy $q_T > 30 \text{ GeV}$.
 - The transverse mass, $M_T \equiv \sqrt{2(|\vec{p}_{\mu^+T}||\vec{p}_T| - \vec{p}_{\mu^+T} \cdot \vec{p}_T)}$, should satisfy $M_T > 60 \text{ GeV}$.
 - Require $|(\vec{q}_l)_y| / (M_W/2) > 0.6$.

For each event, $(\vec{q}_l)_y$ is reconstructed as

$$|(\vec{q}_l)_y| = \left| \vec{p}_{\mu^+T} - \vec{q}_T \frac{\vec{q}_T \cdot \vec{p}_{\mu^+T}}{|\vec{q}_T|^2} \right| \quad \leftarrow \vec{q}_T \equiv \vec{p}_{\mu^+T} + \vec{p}_T$$

$$\text{sgn}((\vec{q}_l)_y) = -\text{sgn}(\vec{p}_{\mu^+T} \times \vec{p}_T \cdot \vec{n}_z^{\text{lab}})$$

25

図 27: 山田敏文さんのスライド 9

シミュレーションをやる時には結構色々な事をやらなくてはいけなくて(図 27 参照), ジェットの横方向の運動量が 30 GeV 以上で, ジェットの pseudo rapidity²⁶ が 4.4 以下でないといけない。さらに, μ^+ の横方向の運動量が 25 GeV 以上で, pseudo rapidity が 2.4 以下でないといけない。また, missing transverse momentum が 25 GeV 以上, W の横方向の運動量が 30 GeV 以上, transverse mass が 60 GeV 以上である必要がある。こういう事によってイベントをなるべく純粋な W からミューオンに崩壊するイベントで, その最後に, y 成分が $\frac{m_W}{2}$ に比べて大きい事を要求する。これは missing p_T の散乱面がある程度ゆらいでも, 十分横向きの運動量大きいものは影響を受けないという条件です。その後, 非対称性を計算する。そうすると, 理論計算をすると簡単に分かるんですけど, 例えばミューオンの rapidity とジェットの

²⁶pseudo rapidity ($= \eta$) とは, ビームと放出粒子間の角度 θ を用いて $\eta \equiv -\log(\tan(\theta/2))$ と定義される量である。定義より, η が大きいほど θ は小さくなる。

Parton-level Analysis (cont'd)

The cross section asymmetry

$$A \equiv \frac{\sigma(\text{events with } (\vec{q}_i)_y > 0) - \sigma(\text{events with } (\vec{q}_i)_y < 0)}{\sigma(\text{events with } (\vec{q}_i)_y > 0) + \sigma(\text{events with } (\vec{q}_i)_y < 0)}$$

in each bin of $\eta_{\ell^+} - \eta_j$ is as below.

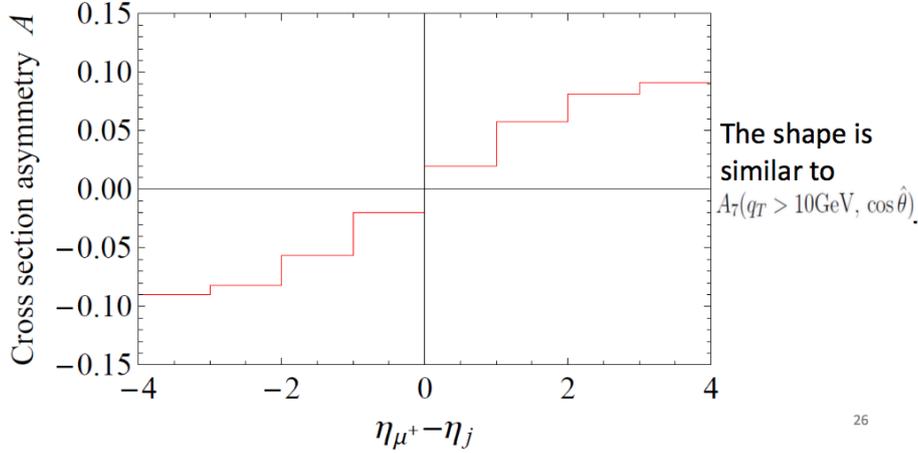


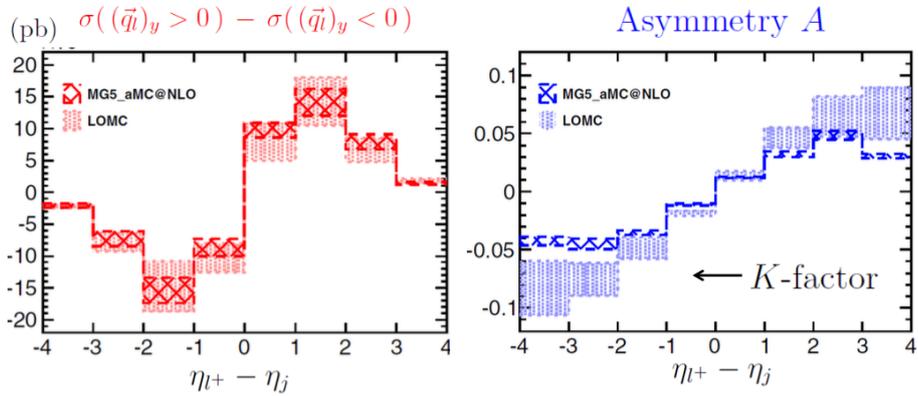
図 28: 山田敏文さんのスライド 10

rapidity の差を-4 から 4 までとって、先ほどの非対称性を見ると ($\eta_{\mu^+} - \eta_j$ が) 正の時は (Cross section asymmetry が) 正になる (図 28)。しかも、結構大きくて 5% もあります。これは $\mathcal{O}(\alpha_s)$ の補正なんですけど結構大きいです。リーディングオーダーにも関わらず大きな非対称性が出ている。これが逆の方 ($\eta_{\mu^+} - \eta_j < 0$) を見ると (Cross section asymmetry が) 負になる (図 28)。これは実験で見えるんじゃないかと思えます。また、シミュレーションをやってみるとこうなります (図 29)。

先ほどの非対称性はこちら (図 29 の右側) です。ツリーレベルでこのようになったけど、シミュレーションを行った結果、ネクストリーディングオーダーの補正が入ったプログラムで言うとこんな感じになります (図 29 の MG5_aMC@NLO)。さすがに 10% まではいきませんが、3-5% の非対称性で止めないと、小さな誤差でも困るわけです。それ以外にも色々な量を計算する事ができて、他の量でやるとこんなようになります (図 29 の左側)。特にレプトンとジェットの rapidity の差なんてのは非常に簡単な量ですよ、それが正のところと負のところを比べる事によってさらに非対称性が大きくなる。こういう事が見えるはずですよ。

じゃあ、実験の誤差はどうなるんだと考えてみたんですけど、これは統計的な誤差はどうも 0 のようです。非対称性の誤差は基本的に統計誤差が入るとこういうように書ける (図 30 の δA)。だけど N_{evt} っていうのはむちゃくちゃに大きい。色々な条件を課しても、ものすごくたくさんのイベントが残る。この誤差がどのくらいかという、さきほどの pseudo rapidity でおよそ 10^{-3} のオーダーなんです。だから数%, 2% の非対称性っていうのは 10 シグマで絶対に測れるはずなので、待っています。まだ結果が出てきていません。残念だと思っているのが現状です。

Result of Detector-level Analysis



T-odd asymmetry appears **even at detector-level**.

Uncertainty due to scale choice is under control with “MadGraph5_aMC@NLO”.

31

図 29: 山田敏文さんのスライド 11

Observability

- With 20 fb^{-1} of data, the statistical error of the asymmetry A , $\delta A = \sqrt{(1 - A^2)/N_{\text{evt}}}$, is 1.1×10^{-3} , 1.5×10^{-3} , 2.5×10^{-3} , 4.5×10^{-3} for $|\eta_{l^+} - \eta_j|$ bins of [1,2], [2,3], [3,4], [4,5].

- The dominant background comes from

$$W^+ \rightarrow \tau^+ (\rightarrow \mu^+ \nu_\mu \bar{\nu}_\tau) \nu_\tau \text{ events.}$$

However, we have found that their contribution to the cross section is below 2%, and hence the asymmetry A is still observable.

図 30: 山田敏文さんのスライド 12

この仕事のまとめをします。QCDの振幅の absorptive part は T-odd 非対称性をつかって直接観測する事ができる。だから、これが普通のいわゆるネクストリーディングオーダーの補正と違う。ネクストリーディングオーダーの補正ってリーディングオーダーの予言があつて、ループ補正をするとより正確になるというタイプの補正です。T-oddの非対称性というのは、ツリーレベルでは実は0で存在しないので、ループレベルで初めてリーディングオーダーで生み出される。だから、もしT-oddの非対称性についてネクストリーディングオーダーの補正を計算しようとする、とても大変になってしまいます。それはどうしてかという、2ループの計算が必要だからです。リーディングオーダーですでに1ループなのでとても大変です。僕は、実は2ループの仕事も若い時はやっていた、そうすると4点関数の2ループとか、それから5点関数の1ループが必要になるんですけども、4点関数の2ループはできる気がしない。なんか1ループに関してはありとあらゆるテクニックが2000年代にわーっと展開されて、色々な方法があります。例えば MadGraph は非常に強力な武器になっています。だけど2ループのレベルでは、実はそういうタイプの汎用性があるテクニックが実は開発されていません。その事があつて結構困難じゃないかなあと思います。それに実験的に検証される前に2ループをやるのも馬鹿馬鹿しいので、よほど優秀な学生が出てこなければ頼めない仕事です。

また、 $pp \rightarrow W^+ \text{ Jet}$ の過程でやってみると、実は散乱面からの直交した向きに、レプトン分布の非対称性がでる。それが8 TeVのLHCの 20 fb^{-1} で無視できない統計誤差で、QCDの予言に対して統計誤差が1/10以下であるという状況なので、測れるはずだというのが我々の結論です。この結論が本当に正しいかどうかは実験で確かめるしかないのを待っているんですけども、いまのところ連絡が無いというのが現状です。

(ここから先は準備中の論文の話になるので割愛させていただきます。)

8 2日目のまとめ

素粒子物理学の現状と将来

- 1 : 素粒子標準模型は、それを導くより基本的な物理のヒントに満ち満ちている。
- 2 : 素粒子標準模型を導くより基本的な物理は必ず存在する。
(アイデアはたくさんある。GUT, SUSY, String 等)
- 3 : しかし、新しい物理のスケールがどこにあるのかわからない。
(数100GeV ?, 1 TeV ?, 10 TeV ?, 10^{16} GeV ?, 10^{18} GeV ?)
- 4 : 新しい物理のスケールが 1 TeV 以下にあれば、そのシグナルは標準模型の
予言からのずれとして、近い将来の精密実験 (フレーバー実験を含む) と
最高エネルギー衝突実験で必ず発見される。
- 5 : 新しい物理のスケールが 10 TeV 以上の場合、精密に測定された標準模型
のパラメータ (質量、混合角、CP位相) と量子数 (スピン、ゲージ荷電)
とを基本データとして、それらを導く基本理論を構想しなければならない。
- 6 : LHC実験はこの二つのシナリオのどちらが正しいかを確定することができる。
新しいミューオン $g-2$ 実験が、 5σ 以上の予言からの乖離を示す可能性がある。
レプトンとクォークのフレーバー変換も 1 TeV 以下の新物理を示唆する。
無ニュートリノ 2重ベータ崩壊は 10^{12} GeV スケールの物理を示唆する。
- 7 : ILC実験の意義は二つのシナリオのどちらかであるかによって大きく異なる。
1 TeV 以下の新物理の場合は、その発見と確立に向けて主要な貢献ができる。
10 TeV 以上の新物理の場合は、ヒッグス結合、特にトップ結合の精密測定。
(250 GeV の円形 e^+e^- コライダーはトップ結合の精密測定ができない。)
- 8 : 今重要なのは、現在与えられている全てのヒントとデータとを基に、考えら
れる新しい物理のシナリオの帰結を詳細に検討し、稼働中及び将来の素粒子
実験と宇宙観測実験で、その証拠を確実に得るための条件を明らかにするこ
とだ。(今日紹介した私の研究はその一例です。)

図 31: まとめ

では最後、まとめ。これはなんかね、昨日がんばって作ったんです。

素粒子標準模型はそれを導く基本的な物理のヒントに満ち満ちている。これは説明しました。素粒子標準模型を導く、より基本的な物理は必ず存在する。これは僕の信念です。アイデアはたくさんある。GUT, SUSY, String など。まあ、String についてはほとんど説明してませんけれども、GUT と SUSY だけはちょっとだけ紹介しました。

しかし、新しい物理のスケールがどこにあるのかわからない。数 100 GeV かもしれない。これが今朝の 100 GeV とか 10 GeV のダークマターとか、100 GeV のスタウとかというのもこれです。1 TeV かもしれない、10 TeV かもしれない、 10^{16} GeV かもしれない、 10^{18} GeV かもしれません。

新しい物理のスケールが 1 TeV 以下であれば、そのシグナルは標準模型からのずれとして、近い将来の精密実験、(図 31 の 4 で)“フレーバー実験を含む”と書いたのは、現在たくさんのフレーバー実験が、もちろん LCB とか Belle II も入りますけれども、より可能性があるのは完全に新しい実験として μ - e conversion の実験。それから $\mu \rightarrow e + \gamma$ の実験も継続されています。その辺でもし、荷電レプトンのフレーバーの破れが見つければ、その瞬間に数値的にレプトンセクターが新しい物理だっという証拠となっています。それはミュオン $g-2$ と独立です。どうしてかということ、ミュオン $g-2$ はたとえフレーバーの破れが無いような模型でもアノマリーが起きます。ただし 1 TeV 以下でなければダメです。レプトンフレーバーの破れの場合はミュオン $g-2$ に寄与するような、レプトンセクターのアノマリーで、新しい粒子が 1 TeV 以下に絶対にあるという事だけは共通です。だけど、その上にフレーバーの破れの技術が加わるような事が必要です。それから、最高エネルギー衝突実験、これはまあ LHC ですが、一応 ILC の気持ちもちょっと入っています。

新しい物理のスケールが 10 TeV 以上の場合は、実はそういうシグナルは決して見つからないはずで、その場合には精密に測定された標準模型のパラメータ、つまり先ほど言ったように質量、混合角、位相 (CP 位相) で、標準模型が持っている全てのくりこみ可能なパラメータ、これが基本パラメータです。その全てと、それから量子数、スピンとゲージ結合定数、これが僕の最初の講義で重要だと言ったやつなんですけれども、その両方を使って新しい物理を構想するより他無いです。残念ながら、これが現実です。ただしそれは 10 TeV 以上の物理です。もちろん残り 1 TeV と 10 TeV の間をどうするかと言われたら、それは許してください。このあたりは何と言って良いかわからないわけです。

LHC 実験ではこの 2 つのシナリオのどちらかが正しいかを確定する事ができる。僕はそう思います。新しいミュオン $g-2$ の実験が、5シグマ以上の予言からの乖離を示す可能性があります。レプトンとクォークのフレーバー変換も 1 TeV 以下の新物理を示唆します。それに対して、ニュートリノレス 2重ベータ崩壊 (neutrinoless double beta decay) はものすごく重要な実験で、ツリーレベルは世界中のあらゆる実験グループが挑戦していますけれども、これは実は発見されても TeV 以下の物理ではありません。元々非常に高いエネルギースケールでの物理であって、おそらく 10^{12} GeV になると思います。実は GUT のスケールは 10^{16} GeV と思ってますけれども、それよりは低くないといけないという事が知られています。ですから、 10^{12} GeV、あるいはそれ以下の物理を強く示唆するという事になります。それでも今のところ、このスケールの物理が示唆しているのは QCD の Peccei-Quinn 対称性、いわゆる QCD の CP 問題ぐらいしかないんですけれども。

後は一応ニュートリノのシーソー模型も関係ありますね。それはニュートリノのニュートリノレス 2重ベータ崩壊 (neutrinoless double beta decay) に非常に関係しているので、同じ物理になります。これは 10^{12} GeV あたりの中間スケールであるかもしれないという事を示唆しています。それで、割と重要な事は、このスケールの物理が最初に強調した、ゲージ結合定数の統一と矛盾しない可能性がとても大きく

て、その一番良い例がニュートリノのシーソー模型です。いわゆる Type1 シーソー模型ってやつです。それはなぜかっていうと、マヨラナ・ニュートリノの質量をもたらすニュートリノが SU(5) の 1 重項だからです。つまり、標準模型の 1 重項の物理は新しいものがどこにあっても、ゲージ結合定数の統一には全く影響しません。

次に ILC 実験の意義は 2 つのシナリオのどちらかであるかによって大きく異なります。これは現実です。だからあまり夢見て言っているような事はどうしてもできません。1 TeV 以下の新物理の場合には、その発見と確立に向けて主要な貢献ができる可能性があります。

だけど 10 TeV 以上の新物理の場合には、ヒッグス結合、特にトップとの結合定数の測定が最も重要になります。標準模型が持っている全てのパラメータの中で、一番大きな値を持っているものがトップクォークの湯川結合です。ですから、トップクォークの湯川結合の測定の精密実験以上に重要な測定は、この 10 TeV 以上の新物理のシナリオではあり得ません。これが最も重要なパラメータです。そのパラメータはやっぱり LHC ではなかなか精密実験は難しいです。しかし 500 GeV の ILC では、その実験をものすごく精密にできます。その事はものすごく重要で、実はすごく多くの方が、ヒッグスの精密実験は新しい大きなサーキュラー e^+e^- コライダーをつくれればできるんだと言っています。だけれども、サーキュラーコライダーは絶対に 500 GeV までエネルギーを上げる事はできません。それはものすごくはっきりしている事です。従って、トップクォークの湯川結合の精密実験が、もし ILC ができなくなったら絶対に 10 TeV 以上の新物理を発見することはできなくなってしまいます。

もちろん、サーキュラー e^+e^- 衝突実験のメリットは本当はヒッグスの精密実験にあるのではなくて、将来的に e^+e^- を陽子-陽子にもう一度変えて、LEP から LHC のシナリオをもう一度繰り返す事ができます。さすがに、100 TeV の pp コライダーがもしできたら、それは素晴らしい事なので、誰も反対はしません。ですけれども、そのシナリオに基づいて 250 GeV の e^+e^- サーキュラーコライダーを作るならば、(500 GeV でなければ) ILC はいらないんだっていうのは絶対に間違っているのです。その事は非常に強く主張する必要があります。その事だけ、ここで強調したいと思います。

今度は理論家にとっての事です。今重要なのは、現在与えられている全てのヒントとデータを基に、考えられている新しい物理のシナリオの帰結を詳細に検討し、稼働中及び将来の素粒子実験と宇宙観測実験で、その証拠を確実に得るための条件を明らかにする事です。今日紹介した私の最初の仕事はこういう気持ちを持ってやらしてもらっています。これで僕の講義が全部終わりました。

第III部

宿題

○ この宿題中で使う記号の定義

全ての素粒子の相互作用を記述する標準模型 (SM) のラグランジアンをコンパクトな形式で書き下すために、簡略化された定義を導入する。

0.1 フェルミオン場について

SMには、 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ変換のもとで表1のように変換する5つの物質場 (matter fields) の多重項がある：

物質場	$SU(3)_C$ の表現	$SU(2)_L$ の表現	$U(1)_Y$ 電荷
Q_i	3	2	1/6
u_{Ri}	3	1	2/3
d_{Ri}	3	1	-1/3
L_i	1	2	-1/2
l_{Ri}	1	1	-1

表 1: フェルミオン場のゲージ変換表. i は世代数で $i = 1, 2, 3$ である. **3** と **2** はそれぞれ $SU(3)_C$ と $SU(2)_L$ の基本表現である. R の添字は右巻きのフェルミオンを表し, Q と L は左巻きのフェルミオンを表す.

Q_i は $SU(3)_C$ と $SU(2)_L$ のそれぞれで基本表現なので, $3 \times 2 = 6$ 成分ある. 同様に u_{Ri} , d_{Ri} , L_i , l_{Ri} はそれぞれ 3, 3, 2, 1 成分ある. 以上より, 各世代について $6 + 3 + 3 + 2 + 1 = 15$ 個の物質場がある.

これらの全ての15個 (×3世代) の物質場は, ローレンツ変換のもとでスピン1/2の場として変換する. 15個のうち, Q_i (6個), L_i (2個) の8個は左巻きのフェルミオンとして変換し, 残りの u_{Ri} (3個), d_{Ri} (3個), l_{Ri} (1個) の7個は右巻きの変換をする.

後に左巻き, 右巻きフェルミオンは両方ともローレンツ変換のもとで2成分のスピンールとして変換することを学ぶ.

0.2 ゲージ場について

SMには表2の3種類のゲージ場がある：

ゲージ場	SU(3) _C の表現	SU(2) _L の表現	U(1) _Y 電荷
A_μ^a	8	1	0
W_μ^k	1	3	0
B_μ	1	1	0

表 2: ゲージ場のゲージ変換表. $a = 1, 2, \dots, 8$ であり, $k = 1, 2, 3$ である. **8** と **3** はそれぞれ SU(3)_C と SU(2)_L の随伴表現である.

合計で $8 + 3 + 1 = 12$ 個のゲージ場が存在する. B_μ は SM のゲージ変換のもとで 1 重項 (singlet) であり, ハイパーチャージも 0 である.

ゲージ場は全て, ローレンツ変換のもとでベクトル場として変換する. さらに SU(2)_L × U(1)_Y → U(1)_{EM} の自発的対称性の破れが起こる前は全て 0 質量の場である.

0 質量のベクトル場は (いわゆる横向き偏光の) 2 成分しか物理的な成分をもたない. つまり, ベクトル場の 4 成分での表現は (いわゆる縦向きとスカラー的偏光の) 2 成分の余分な自由度を持っている. 現実の物理がこの余分な 2 成分に依存しないというのは, 物理がゲージ不変性を持っているということである.

0.3 ヒッグスについて

SM にはたった 1 つのヒッグス 2 重項がある:

ヒッグス場	SU(3) _C の表現	SU(2) _L の表現	U(1) _Y 電荷
ϕ	1	2	1/2

表 3: ヒッグス場のゲージ変換表

ヒッグス場はローレンツ変換のもとでスカラーとして変換する. 以下のように荷電共役変換を導入すると後々に便利である:

$$\phi^c = i\sigma^2 \phi^*$$

荷電共役場	SU(3) _C の表現	SU(2) _L の表現	U(1) _Y 電荷
ϕ^c	1	2	-1/2

表 4: 荷電共役場のゲージ変換表

ここで, この変換は表 1 の L_i と全く同じ量子数であることに注意する.

A 宿題 1

A.1 宿題 1-1

宿題 1-1-1

$SU(3)_C \times SU(2)_L$ の 6 重項 Q_i が 2 つの 3 重項 u_{Li}, d_{Li} を使って,

$$Q_i = (u_{Li}, d_{Li})^T = \begin{pmatrix} u_{Li} \\ d_{Li} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.1})$$

と書けることを示せ. ただしここで T は転置である.

宿題 1-1-2

西島-Gell-Mann 関係式

$$Q = T^3 + Y \quad (\text{A.1.2})$$

が u_{Li}, d_{Li} の $U(1)_{EM}$ 電荷 Q を与えることを示せ.

ここで T^3 は $SU(2)_L$ の対角的な生成子で, Pauli 行列を使って $T^3 = \sigma^3/2$ と表され, $Y = 1/6$ は Q_i のハイパーチャージであり,

$$YQ_i = \frac{1}{6}Q_i \quad (\text{A.1.3})$$

である.

宿題 1-1-3

宿題 1-1-1, 宿題 1-1-2 と同様に, L_i が ν_{Li}, l_{Li} で

$$L_i = (\nu_{Li}, l_{Li})^T = \begin{pmatrix} \nu_{Li} \\ l_{Li} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.4})$$

と書けることを示し,

$$YL_i = -\frac{1}{2}L_i \quad (\text{A.1.5})$$

と西島-Gell-Mann 関係式を使って ν_{Li}, l_{Li} の $U(1)_{EM}$ 電荷 Q を求めよ.

***** 注意 *****

Q_i, L_i は 2×2 行列 Q の固有ベクトルではない. 上成分と下成分はそれぞれ $U(1)_{EM}$ 荷電行列 Q の異なる固有値を持つ. 電磁相互作用, もしくは $U(1)_{EM}$ ゲージ相互作用

用は $SU(2)_L$ ゲージ対称性を “明確に (explicit に)” 破る.

A.2 宿題 1-2

$SU(2)_L$ のゲージ変換のもとで ϕ は

$$\begin{aligned}\phi \rightarrow \phi' &= U(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\phi \\ &= \exp\{i(T^1\theta_1 + T^2\theta_2 + T^3\theta_3)\}\phi\end{aligned}\quad (\text{A.2.1})$$

のように変換する. ここで θ_k ($k = 1, 2, 3$) は $SU(2)_L$ 変換の実パラメータである. また, T^k は $SU(2)_L$ の基本表現の生成子で Pauli 行列を使って,

$$T^k = \frac{1}{2}\sigma^k \quad (\text{A.2.2})$$

と表される.

宿題 1-2-1

$$(T^k)^\dagger = T^k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (\text{A.2.3})$$

と,

$$[U(\theta_1, \theta_2, \theta_3)]^\dagger U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 1 \quad (\text{A.2.4})$$

を示せ. つまり, 変換行列 $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ はユニタリ行列であり, その生成子 T^k はエルミート行列である.

宿題 1-2-2

ϕ^* の $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ変換での変換性を求めよ.

ヒント

1. $U(1)_Y$ 変換について

$$\begin{aligned}\phi \rightarrow \phi' &= U(\theta_0)\phi \\ &= \exp\{iY\theta_0\}\phi\end{aligned}\quad (\text{A.2.5})$$

ここで $Y\phi = (1/2)\phi$ である。この時,

$$\begin{aligned}\phi^* &\rightarrow (\phi^*)' = (\phi')^* \\ &= U(\theta_0)^* \phi^* \\ &= \exp\{-iY\theta_0\} \phi^* \\ &= \exp\{i(-Y)\theta_0\} \phi^*\end{aligned}\tag{A.2.6}$$

なので ϕ のハイパーチャージが $1/2$ なら, ϕ^* のハイパーチャージは $-1/2$ であると分かる。一般に, 複素共役場は元の場に対して逆符号の $U(1)$ 電荷を持つ。

2. $SU(2)_L$ 変換について

$$\begin{aligned}\phi^* &\rightarrow (\phi^*)' = (\phi')^* \\ &= (U\phi)^* \\ &= U^* \phi^* \\ &= \exp\{-i[(T^1)^* \theta_1 + (T^2)^* \theta_2 + (T^3)^* \theta_3]\} \phi^*\end{aligned}\tag{A.2.7}$$

ここで $U = U(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ である。 $U^* \neq U$ なので ϕ^* の $SU(2)_L$ の表現は ϕ とは異なる。さらに,

$$(T^1)^* = T^1, \quad (T^2)^* = -T^2, \quad (T^3)^* = T^3\tag{A.2.8}$$

なので, 式(A.2.7)は

$$\phi^* \rightarrow (\phi^*)' = \exp\{i[(T^1)^* (-\theta_1) + (T^2)^* \theta_2 + (T^3)^* (-\theta_3)]\} \phi^*\tag{A.2.9}$$

となる。もしくは式(A.2.9)は U を使って,

$$U^*(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = U(-\theta_1, \theta_2, -\theta_3)\tag{A.2.10}$$

と表せる。つまり U^* と U は θ_1, θ_3 が0でない限り, 別の行列である。 ϕ^* と ϕ は θ_2 方向, もしくは2軸回りの回転で同じように変化すると言っても良い。

宿題 1-2-3

次の内積が $SU(2)_L$ 変換で不変であることを示せ。

$$(\phi^*)^T \phi = \phi^\dagger \phi\tag{A.2.11}$$

変換のユニタリ行列は

$$U^\dagger U = 1\tag{A.2.12}$$

を満たすので、宿題 1-2-3 の性質は全てのユニタリー変換に対して一般に成り立つことである。また、式 (A.2.12) は

$$U^* = (U^{-1})^T \quad (\text{A.2.13})$$

とも書けるので、ユニタリー群の複素共役表現は逆行列の転置で変換するとも言える。

宿題 1-2-4

ϕ^c が $SU(2)_L$ 変換のもとで、 $\mathbf{2}^*$ ではなく $\mathbf{2}$ として変換することを示せ。

これは、言い換えると、 ϕ^c は $SU(2)_L$ の変換性が ϕ と同じにもかかわらず、 ϕ^c は ϕ と逆符号の $U(1)_Y$ 電荷を持つということである。

ヒント

$$\begin{aligned} \phi^c \rightarrow (\phi^c)' &= (\phi')^c \\ &= (i\sigma^2)(\phi')^* \\ &= (i\sigma^2)(U\phi)^* \\ &= (i\sigma^2)U^*\phi^* \end{aligned} \quad (\text{A.2.14})$$

であり、 U^* は宿題 1-2-2 ですでに得られている。

ここで、

$$(-i\sigma^2)(i\sigma^2) = 1 \quad (\text{A.2.15})$$

を示し、1 を式 (A.2.14) の ϕ^* の前に挿入すれば、

$$\begin{aligned} \phi^c \rightarrow (\phi^c)' &= (i\sigma^2)U^*\phi^* \\ &= (i\sigma^2)U^*(-i\sigma^2)(i\sigma_2)\phi^* \\ &= (i\sigma^2)U^*(-i\sigma^2)\phi^c \end{aligned} \quad (\text{A.2.16})$$

となるので、 ϕ^c が $SU(2)_L$ 変換で $\mathbf{2}$ として変換するためには

$$(i\sigma^2)U^*(-i\sigma^2) = U \quad (\text{A.2.17})$$

を示せば良い。

もし式 (A.2.17) を示すのが初めてなら、最初に無限小変換

$$\begin{aligned} U &= \exp\{i(T^1\theta_1 + T^2\theta_2 + T^3\theta_3)\} \\ &= 1 + i(T^1\theta_1 + T^2\theta_2 + T^3\theta_3) + \text{higher orders.} \end{aligned} \quad (\text{A.2.18})$$

$$\begin{aligned} U^* &= \exp\{-i[(T^1)^*\theta_1 + (T^2)^*\theta_2 + (T^3)^*\theta_3]\} \\ &= 1 - i[(T^1)^*\theta_1 + (T^2)^*\theta_2 + (T^3)^*\theta_3] + \text{higher orders.} \end{aligned} \quad (\text{A.2.19})$$

の場合について式 (A.2.17) を示せば良い。できれば有限変換の場合も示して欲しい。

この証明には以下の Pauli 行列に関する関係式を示しておくとう便利である：

$$\begin{aligned} (i\sigma^2)(\sigma^k)(-i\sigma^2) &= -(\sigma^k)^* \quad \text{for } k = 1, 2, 3 \\ \Leftrightarrow (i\sigma^2)(\sigma^k)^*(-i\sigma^2) &= -(\sigma^k) \quad \text{for } k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{A.2.20})$$

この関係式は、完全に自分のものになるまでたくさん証明することを勧める。

以上より、 ϕ^c は $SU(2)_L$ 変換のもとで ϕ と同様に変換するが、ハイパーチャージは ϕ とは逆符号である。表 1 から ϕ^c の変換性は L_i の変換性と全く同じである。それ故に、

$$\begin{aligned} (\phi^c)^\dagger L_i &= (i\sigma^2 \phi^*)^\dagger L_i \\ &= (\phi^*)^\dagger (i\sigma^2)^\dagger L_i \\ &= \phi^T (-i\sigma^2) L_i \end{aligned} \quad (\text{A.2.21})$$

は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換のもとで不変である。この性質は完全に理解するまで、注意深く何度も確認して欲しい。SU(2) 群は全ての SU(n), SO(2n) 群やローレンツ群に登場するので、式 (A.2.20) や式 (A.2.21) が SU(2) 群の変換で不変であるという事実は、SU(2) 変換の性質の中でも、最も重要な性質の1つである。

A.3 宿題 1-3

よく使う簡略化された書き方として、 $a^T = (a_1, a_2)$, $b^T = (b_1, b_2)$ という2つの2重項の不変内積を

$$\begin{aligned} a \cdot b &\equiv a^T (i\sigma^2) b \\ &= (a_1, a_2) (i\sigma^2) (b_1, b_2)^T \\ &= (a_1)(b_2) - (a_2)(b_1) \end{aligned} \quad (\text{A.3.1})$$

のように定義すると、式 (A.2.21) は

$$\begin{aligned} (\phi^c)^\dagger L &= \phi^T (-i\sigma^2) L \\ &= -\phi \cdot L \\ &= L \cdot \phi \end{aligned} \quad (\text{A.3.2})$$

と書ける。

宿題 1-3-1

以下の恒等式を示せ。

$$(a^c)^\dagger b = -a \cdot b \quad (\text{A.3.3})$$

$$b^\dagger a^c = b^* \cdot a^* \quad (\text{A.3.4})$$

宿題 1-3-2

SM の $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換のもとで以下の項が不変であることを示せ.

$$\begin{aligned}
 & (Q_i)^\dagger(Q_i) \\
 & (u_{Ri})^\dagger(u_{Ri}) \\
 & (d_{Ri})^\dagger(d_{Ri}) \\
 & (L_i)^\dagger(L_i) \\
 & (\phi)^\dagger(\phi) = (\phi^c)^\dagger(\phi^c) \\
 & (Q_j)^\dagger(\phi^c)(u_{Rk}) \\
 & (Q_j)^\dagger(\phi)(d_{Rk}) \\
 & (L_j)^\dagger(\phi)(l_{Rk}) \\
 & (L_j)^\dagger(\phi^c)
 \end{aligned} \tag{A.3.5}$$

SM のラグランジアンは以上の 9 種類の項によって構成される. 最後の項を除く 8 項は $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ変換のもとで不変であるだけでなく, ローレンツ不変でもある.

最後の項がゲージ不変なのは, 宿題 1-2-4 で示したように, ϕ^c と L_j が $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に対して全く同じ量子数をもっているからである (どちらも $SU(2)_L$ の 2 でハイパーチャージが $-1/2$). また, その複素共役

$$\{(L_j)^\dagger(\phi^c)\}^* = (\phi^c)^\dagger(L_j) \tag{A.3.6}$$

はローレンツ変換のもとで 2 成分の左巻きスピノールとして変換する.

B 宿題2

B.1 宿題2-1

SU(3) × SU(2) × U(1) のゲージ変換を

$$a(x) \rightarrow a'(x) = U(x)a(x) \quad (\text{B.1.1})$$

と表す. $a(x)$ は $(R3, R2, Y)$ 表現として変換する場, $R3$ と $R2$ は SU(3) 群と SU(2) 群の表現, Y は U(1) の超電荷である. $U(x)$ は

$$U(x) = \exp(i(T^a)_{R3}\theta_{R3}^a(x) + i(T^k)_{R2}\theta_{R2}^k(x) + iY\theta_Y(x)) \quad (\text{B.1.2})$$

と表すことができる. ここで $(T^a)_{R3}$ ($a = 1, \dots, 8$) は $R3$ 表現の SU(3) 生成子, $(T^k)_{R2}$ ($k = 1, 2, 3$) は $R2$ 表現の SU(2) 生成子, Y は超電荷である. 12個の θ はすべて時空座標

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad (\text{B.1.3})$$

の実関数である. 共変微分演算子 D_μ を導入する. これは定義より

$$D_\mu \rightarrow U(D_\mu)U^\dagger \quad (\text{B.1.4})$$

と変化する.

SM ラグランジアンは以下のように書き下せる:

$$L_{\text{SM}} = L_{\text{gauge}} + L_{\text{matter}} + L_{\text{Higgs}} + L_{\text{Yukawa}} \quad (\text{B.1.5})$$

$$L_{\text{gauge}} = \text{Tr}([D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]) \text{ (up to normalization)} \quad (\text{B.1.6})$$

$$L_{\text{matter}} = Q_j^\dagger(iD_\mu\gamma^\mu)Q_j + u_{R_j}^\dagger(iD_\mu\gamma^\mu)u_{R_j} + d_{R_j}^\dagger(iD_\mu\gamma^\mu)d_{R_j} \quad (\text{B.1.7})$$

$$+ L_j^\dagger(iD_\mu\gamma^\mu)L_j + l_{R_j}^\dagger(iD_\mu\gamma^\mu)l_{R_j} \quad (\text{B.1.8})$$

$$L_{\text{Higgs}} = (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - V(\phi) \quad (\text{B.1.9})$$

$$V(\phi) = \mu^2\phi^\dagger\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (\text{B.1.10})$$

$$L_{\text{Yukawa}} = y_{jk}^u Q_j^\dagger \phi^c u_{R_k} + y_{jk}^d Q_j^\dagger \phi d_{R_k} + y_{jk}^l L_j^\dagger \phi l_{R_k} + y_{jk}^\nu (\phi^{c\dagger} L_j) \cdot (\phi^{c\dagger} L_k) / \Lambda + h.c. \quad (\text{B.1.11})$$

宿題2-1-1

共変微分 D_μ の定義

$$D_\mu \rightarrow U(D_\mu)U^\dagger \quad (\text{B.1.12})$$

を用いて上記のラグランジアンがゲージ不変であることを示せ:

L_{gauge} については一般に不変性を示せ.

L_{matter} については SU(3), SU(2), U(1) を個別に確かめよ.

L_{Higgs} については SU(2), U(1) を個別に確かめよ.

宿題 2-1-2

L_{Yukawa} の y^u, y^d, y^l 項の SU(3), SU(2), U(1) 不変性を個別に確かめよ。

宿題 2-1-3

L_{Yukawa} の y^l 項の $\phi^{c\dagger} L_j$ の SU(2), U(1) 不変性を示せ。 $\phi^{c\dagger} L_j$ と $\phi^{c\dagger} L_k$ の間の \cdot の意味は後で明らかになる。

\cdot は

$$a \cdot b \equiv a^T i\sigma^2 b = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_1)(b_2) - (a_2)(b_1) \quad (\text{B.1.13})$$

と定義されることに注意せよ。この定義より

$$(\phi^c)^\dagger(L) = (i\sigma^2 \phi^*)^\dagger(L) = (\phi)^T (-i\sigma^2)(L) = -\phi \cdot L \quad (\text{B.1.14})$$

となる。場を成分表示で書いて計算すると、

$$\phi = (\phi^+, \phi^0)^T \quad (\text{B.1.15})$$

$$\phi^c = i\sigma^2 \phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = (\phi^{0*}, -\phi^-)^T \quad (\text{B.1.16})$$

$$L = (\nu_L, l_L)^T \quad (\text{B.1.17})$$

であるから、

$$(\phi^c)^\dagger L = (\phi^0, -\phi^+)(\nu_L, l_L)^T = (\phi^0)(\nu_L) - (\phi^+)(l_L) \quad (\text{B.1.18})$$

となる。ここで

$$(\phi)^T \cdot L = (\phi^+, \phi^0) i\sigma^2 (\nu_L, l_L)^T = (\phi^+)(l_L) - (\phi^0)(\nu_L) \quad (\text{B.1.19})$$

となることに注意せよ。ここで少し練習問題を与える：

$$a \cdot b = -b \cdot a \quad \text{when } [a_j, b_k] = 0 \quad (\text{B.1.20})$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{when } \{a_j, b_k\} = 0 \quad (\text{B.1.21})$$

を示せ。上の定理の直接の結論は、もし $a = (a_1, a_2)^T$ の成分がボゾンのならば

$$a \cdot a = -(a^c)^\dagger a = 0 \quad (\text{B.1.22})$$

となることである。

$(\phi^c \cdot L)$ の間の \cdot 積はボゾンの演算子 ϕ^c とフェルミオンの演算子 L のあいだにあるので

$$(\phi^c \cdot L_j) = -(L_j \cdot \phi^c) \quad (\text{B.1.23})$$

となる。これを場の成分表示

$$L_j = (\nu_{L_j}, l_{L_j})^T \quad (\text{B.1.24})$$

$$\phi = (\phi^+, \phi^0)^T \quad (\text{B.1.25})$$

を用いて確かめよ。 $(\phi^c \cdot L_j)$ と $(\phi^c \cdot L_k)$ の間の \cdot 積は2つのフェルミオンの演算子の間にあるので

$$(\phi^c \cdot L_j) \cdot (\phi^c \cdot L_k) = (\phi^c \cdot L_k) \cdot (\phi^c \cdot L_j) \quad (\text{B.1.26})$$

となる。この \cdot 積は $(L_j$ や L_k のような) フェルミオンの演算子が2成分スピノールとして変換するスピノール空間に適用される。これは $SU(2)$ の **2** 表現によく似ているが異なるものである。なぜならば、カイラルフェルミオンのローレンツ変換は $SU(2)$ ではなく $GL(2, C)$ だからである。ローレンツ変換は後で考察する。

宿題 2-1-4

$L_{\text{gauge}}, L_{\text{matter}}, L_{\text{Higgs}}$ はエルミートだが、 L_{Yukawa} の各項はエルミートではないことを示せ。この段階では共変微分 D_μ を単純な微分 ∂_μ として扱え。

上記の SM ラグランジアンでは、湯川相互作用の $(y^\nu)_{jk}$ 項として質量次元5の演算子を導入している。(物質場の質量次元の合計が5であるので質量次元1のパラメータ Λ で割っている。) それらはニュートリノ質量のために必要である。生じたニュートリノ質量はフェルミオン数保存則を破り、マヨナラ質量と呼ばれる。これらについては後で説明する。

B.2 宿題 2-2

右巻きニュートリノと呼ばれる新しい場

$$\nu_{R_k} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (\text{B.2.1})$$

を導入することによって SM ラグランジアンを得ることができる。これらの場は $(1, 1, 0)$ 表現として変換する。すなわち、SM ゲージ変換とは異なるゲージ変換のもとで変換する。これらの3つの新しい場も含めると、湯川相互作用は

$$L_{\text{Yukawa}} = y_{jk}^u Q_j^\dagger \phi^c u_{R_k} + y_{jk}^d Q_j^\dagger \phi d_{R_k} + y_{jk}^l L_j^\dagger \phi l_{R_k} + y_{jk}^\nu L_j^\dagger \phi^c \nu_{R_k} + h.c. \quad (\text{B.2.2})$$

と与えられる。ニュートリノ質量項がアップクォーク質量項と同じように見え、ラグランジアンがさらに対称的に見えるこの L_{Yukawa} の形式が好きな人もいるであろう。

宿題 2-2-1

y_{jk}^{ν} に比例する新しい湯川項が $U(1)_Y$ 変換で不変であることを示せ。

(電弱スケール以下のすべてを記述すべき) SM ラグランジアンとして右巻きニュートリノを含むラグランジアンを採用するかどうかはすべての素粒子理論家が直面する基本的な問題である。右巻きニュートリノを含むラグランジアンは Dirac ニュートリノ質量を与え、(電子質量が電子数と電荷を保存させるように) フェルミオン数が保存される。ところが、次元 5 の演算子を含むラグランジアンはニュートリノにマヨラナ質量を与え、フェルミオン数の保存則が破れる。したがって、この 2 つのラグランジアンは現象論的に全く異なる結果を持っている。 $0\nu 2\beta$ 崩壊 (ニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊) を探す実験は 2 つのシナリオの正誤をはっきりさせるだろう。

理論的な観点では、右巻きニュートリノを含むラグランジアンはくりこみ可能だが、次元 5 の演算子を含むラグランジアンはくりこみ不可能である。SM ラグランジアンの 2 つのシナリオからどちらかを選ぶためには、自発的対称性の破れにおける「くりこみ可能性」の意味に対する見識が必要である。くりこみ可能性は、ワインバーグとサラムを電弱相互作用のゲージ理論に到達させるのに重要な役割を担った。

もしくりこみ可能性の原理が自発的に破れたゲージ理論に到達するために重要だとすると、それを指導原理とすべきだろうか。もしくは、ニュートリノ質量を含んだ正しい理論に到達するためにはくりこみ可能性を指導原理にできないようになっており、ウィークボゾン質量 (他のすべてのクォークとレプトンも同様) とニュートリノ質量の起源は全く異なっているのだろうか。

SM ラグランジアンとして次元 5 の演算子を含んだラグランジアンを導入していることが、この問題に対する著者の立場をすでに表している。

B.3 宿題 2-3

講義をしている中で、ユニタリー行列とエルミート行列の基本的な性質を思い出す必要がある人がいることに気づいた。

もっとも重要なことは

$$T^\dagger = T \tag{B.3.1}$$

で定義されるエルミート行列 T の以下の性質だろう。エルミート行列の固有値は非負になる：

$$\lambda_k \geq 0 \text{ when } Ta_k = \lambda_k a_k \tag{B.3.2}$$

T はユニタリー行列を用いて対角化される：

$$U^\dagger T U = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \tag{B.3.3}$$

T と U は $n \times n$ 行列である。これらは量子力学のエルミート演算子の性質だから、証明にはなれておくべきである。もしそうでなければ、教科書を参照せよ。

行列指数関数のほとんどの性質は上記の性質を用いて導出される。たとえば、ユニタリー行列の行列式とその生成子のトレースは以下のように関連している。角度 θ^a のユニタリー行列を

$$U(\theta^a) = \exp(iT^a\theta^a) \quad (\text{B.3.4})$$

と表現する。生成子 T^a を

$$T^a = V^\dagger \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) V = V^\dagger D V \quad (\text{B.3.5})$$

と対角化する。この時、 U も同じユニタリー行列 V で対角化することができる：

$$U(\theta^a) = \exp(iT^a\theta^a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iT^a\theta^a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta^a)^n}{n!} (T^a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta^a)^n}{n!} (V^\dagger D V)^n \quad (\text{B.3.6})$$

$$= V^\dagger \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta^a)^n}{n!} (D)^n V = V^\dagger \text{diag}(\exp i\theta^a \lambda_1, \dots, \exp i\theta^a \lambda_n) V \quad (\text{B.3.7})$$

したがって、

$$\det(U(\theta^a)) = \prod_{k=1}^n \exp(i\theta^a \lambda_k) = \exp(i\theta^a \sum_{k=1}^n \lambda_k) = \exp(i\theta^a \text{Tr}(T^a)) \quad (\text{B.3.8})$$

を証明するのは簡単である。最後の部分で、任意の行列の行列式とトレースはユニタリー変換

$$A \rightarrow A' = U^\dagger A U \quad (\text{B.3.9})$$

のもとで不変という事実を用いた。この証明は教科書で見つけることができる。

宿題 2-3-1

上記の命題を証明せよ。

C 宿題3

C.1 宿題3-1

ローレンツ変換は時空の4元ベクトルによってパラメタ化された座標系の変換を表す：

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad (\text{C.1.1})$$

$$\begin{aligned} x'^\mu &= L^\mu{}_\nu x^\nu \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{ab}M^{ab}\right)^\mu{}_\nu x^\nu \\ &= x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu + O((\omega_{ab})^2) \end{aligned} \quad (\text{C.1.2})$$

上記の式において $L^\mu{}_\nu$ はローレンツ変換の行列を与え、 ω_{ab} ($a, b = 0, 1, 2, 3$) は変換の程度を測る実数であり、 M^{ab} は変換の生成子を表す。最後の行で無限小変換が与えられている。最も重要なことは、生成子 M^{ab} が添字 a, b の交換について反対称であることである：

$$M^{ba} = -M^{ab} \quad (\text{C.1.3})$$

ゆえに、

$$\omega_{ba} = -\omega_{ab} \quad (\text{C.1.4})$$

である。

従って独立な生成子とそのパラメータはそれぞれ6個である。これらを θ_i, J_i, y_i, K_i を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_{ab}M^{ab} &= \omega_{23}M^{23} + \omega_{31}M^{31} + \omega_{12}M^{12} + \omega_{01}M^{01} + \omega_{02}M^{02} + \omega_{03}M^{03} \\ &= \theta_1 J_1 + \theta_2 J_2 + \theta_3 J_3 + y_1 K_1 + y_2 K_2 + y_3 K_3 \end{aligned} \quad (\text{C.1.5})$$

とおく。

6つの独立な生成子とそのパラメータの2つの表示の間関係は次のようになる：

$$\begin{aligned} M^{ab} &= \epsilon_{abc} J_c & \omega_{ab} &= \epsilon_{abc} \theta_c \\ M^{0a} &= K_a & \omega_{0a} &= y_a \\ (a, b &= 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (\text{C.1.6})$$

J_a は a -軸まわりの回転を与え、そのパラメータ θ_a は元の座標系と回転した座標系との間の a -軸についての方位角を表すものである。一方、 K_a は a -軸にそったブーストを与え、そのパラメータ y_a はラピディティと呼ばれ元の座標系と加速した座標系との間の相対速度を表すものである。

回転の3つの生成子は

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c \quad (\text{C.1.7})$$

を満たすべきであるので、大きさや符号の自由度は無い。ここで完全反対称テンソル $\epsilon_{123} = 1$ は右手型の回転を定める。3つの回転の生成子は $SU(2)$ 代数をなしているので、空間回転と $SU(2)$ 変換は同じ群構造を持つ。

宿題 3-1-1

次の2式 (C.1.8), (C.1.9) を示せ：

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \omega_{12}, (\text{定義}) \\ &= -\omega_{21} \\ &= \omega^{12} \\ &= -\omega^1_2 \\ &= \omega^2_1 \end{aligned} \quad (\text{C.1.8})$$

$$\begin{aligned} y_3 &= \omega_{03}, (\text{定義}) \\ &= -\omega_{30} \\ &= \omega^{03} \\ &= -\omega^0_3 \\ &= \omega^3_0 \end{aligned} \quad (\text{C.1.9})$$

但し、計量 $g^{ab} = g_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ を用いて共変ベクトルと反変ベクトルの間の変換を

$$v^a = g^{ab}v_b \quad (\text{C.1.10})$$

$$v_b = g_{ab}v^a \quad (\text{C.1.11})$$

によって定める。これと、 ω_{ab} の反対称性 $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$ は用いてよい。

この問題から回転に対し

$$\omega^i_j = -\omega^j_i, (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{C.1.12})$$

であることと、ブーストに対し、

$$\omega^0_k = \omega^k_0, (k = 1, 2, 3) \quad (\text{C.1.13})$$

であることが、一般のローレンツ変換

$$\begin{aligned} x^\mu \rightarrow x'^\mu &= L^\mu_\nu x^\nu \\ &= \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{ab}M^{ab}\right)^\mu_\nu x^\nu \\ &= x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu + O((\omega_{ab})^2) \end{aligned} \quad (\text{C.1.14})$$

から2種類の変換に区別することを確認の方がよい。また、同様の操作により、

$$J_3 = M^{12} = -M^{21} = M_{12} = -M^1_2 = M^2_1 = \dots \quad (\text{C.1.15})$$

$$J_2 = M^{31} = -M^{13} = M_{31} = -M^3_1 = M^1_3 = \dots \quad (\text{C.1.16})$$

$$K_3 = M^{03} = -M^{30} = -M_{03} = -M^3_0 = -M^0_3 = \dots \quad (\text{C.1.17})$$

$$(\text{C.1.18})$$

が成り立つ事を

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\omega_{ab}M^{ab} &= \omega_{23}M^{23} + \omega_{31}M^{31} + \omega_{12}M^{12} + \omega_{01}M^{01} + \omega_{02}M^{02} + \omega_{03}M^{03} \\ &= \theta_1J_1 + \theta_2J_2 + \theta_3J_3 + y_1K_1 + y_2K_2 + y_3K_3 \\ &\quad (a, b = 0, 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (\text{C.1.19})$$

から示すことができる。

C.2 宿題3-2

まず最初に回転とブーストとの行列表示を求める。

宿題3-2-1

行列表示

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2.1})$$

を用いて回転の交換関係

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l \quad (\text{C.2.2})$$

を示せ(これは回転の生成子のベクトル表現と呼ばれる)。

上記の行列表示は

$$(J_1)_{23} = (J_2)_{31} = (J_3)_{12} = -i \quad (\text{C.2.3})$$

とすると覚えやすい。他の成分はエルミート性

$$(J_k)^\dagger = J_k \quad (\text{C.2.4})$$

から得られる。

宿題3-2-2

上記の演算子(C.2.1)に符号や大きさの不定性が無いことを確認せよ。

C.3 宿題 3-3

宿題 3-3-1

行列の指数関数の定義

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \quad (\text{C.3.1})$$

を用いて

$$\begin{aligned} L(\theta_3 = \phi) &= \exp(iJ_3\phi) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.3.2})$$

を示せ.

宿題 3-3-2

上記の行列は座標系の z -軸についての方位角 ϕ の右手型の回転

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L(\theta_3 = \phi) \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \cos \phi + y \sin \phi \\ -x \sin \phi + y \cos \phi \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{C.3.3})$$

を表すことを確かめよ.

宿題 3-3-3

同様にして

$$\begin{aligned} L(\theta_2 = \phi) &= \exp(iJ_2\phi) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.3.4})$$

が座標系の y -軸についての方位角 ϕ の右手型の回転を与えることを示せ.

C.4 宿題 3-4

宿題 3-4-1

以下の3つの行列

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4.1})$$

が (C.2.1) で与えられる J_k と合わせて以下の交換関係

$$[K_l, K_m] = -i\epsilon_{lmn}J_n \quad (\text{C.4.2})$$

$$[J_l, K_m] = i\epsilon_{lmn}K_n \quad (\text{C.4.3})$$

を満たすことを示せ.

ちなみに上記の交換関係 (C.4.2), (C.4.3) と回転の生成子の交換関係

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l \quad (\text{C.4.4})$$

が完全なローレンツ変換の代数を与える.

ところで、ブーストの生成子は回転の生成子とは少し様子が異なる.

宿題 3-4-2

ブーストの生成子 K_l はエルミートでなく、対称であることを示せ：

$$(K_l)^\dagger = -K_l \quad (\text{C.4.5})$$

$$(K_l)^T = K_l \quad (\text{C.4.6})$$

上記の交換関係は K_l を $-K_l$ にしても変わらないので、代数関係だけでは K_l の符号を固定することはできない。その性質は以下の座標変換から理解される：

$$\begin{aligned} L(y_3 = y_a) &= \exp(iK_3y_a) \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(y_a) & 0 & 0 & -\sinh(y_a) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(y_a) & 0 & 0 & \cosh(y_a) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.4.7})$$

C.5 宿題 3-5

宿題 3-5-1

行列の指数関数の定義を用いて上記のブーストの行列 (C.4.7) を求めよ.

C.6 宿題 3-6

宿題 3-6-1

ラピディティ y による z -軸に沿ったローレンツブーストの座標変換

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L(y_3 = y_a) \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cosh(y_a) - z \sinh(y_a) \\ x \\ y \\ z \cosh(y_a) - t \sinh(y_a) \end{pmatrix} \quad (\text{C.6.1})$$

を求めよ.

ラピディティ y が二つの座標系の相対速度 β と次のように関係していることを明記しておくといよい.

$$\beta = \tanh(y), \quad y = \tanh^{-1}(\beta) \quad (\text{C.6.2})$$

同じ軸について 2 回の回転が行われた時を考える :

$$\begin{aligned} L(\theta_3 = \phi_a)L(\theta_3 = \phi_b) &= \exp(i\phi_a J_3) \exp(i\phi_b J_3) \\ &= \exp(i(\phi_a + \phi_b) J_3) \\ &= L(\theta_3 = \phi_a + \phi_b) \end{aligned} \quad (\text{C.6.3})$$

これと同じように, 同じ軸に沿って 2 回のブーストが行われた時を考えると

$$\begin{aligned} L(y_3 = a)L(y_3 = b) &= \exp(iaK_3) \exp(ibK_3) \\ &= \exp(i(a+b)K_3) \\ &= L(y_3 = a+b) \end{aligned} \quad (\text{C.6.4})$$

のようにラピディティが単純に足し算される. この類似性から, ラピディティはブースト作用の角度変数と呼ばれる.

宿題 3-6-2

双曲線関数の基本的な性質

$$\cosh(y)^2 - \sinh(y)^2 = 1 \quad (\text{C.6.5})$$

を確認せよ.

これは三角関数の性質

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \quad (\text{C.6.6})$$

と合わせて, 計量のローレンツ変換のもとでの不変性

$$(t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (\text{C.6.7})$$

を保証する.

C.7 宿題 3-7

宿題 3-7-1

上記のローレンツ変換の性質 (C.6.3),(C.6.4),(C.6.7) を全て確かめなさい。

最後にベクトルに対するローレンツ変換 ((C.6.7) を満たす座標変換) を定義しよう。理解すべき唯一の基本性質はベクトル量 (粒子の 4 元運動量ベクトル, ベクトル場, etc) は座標変換の反対の方向に変換するということである。

唐突ではあるが, ここでは対象の回転とブーストの演算子を

$$R_m(\theta_m) = \exp(-i\theta_m J_m), (m = 1, 2, 3 \text{ or } x, y, z) \quad (\text{C.7.1})$$

$$B_m(y_m) = \exp(-iy_m K_m), (m = 1, 2, 3 \text{ or } x, y, z) \quad (\text{C.7.2})$$

のように定義しておく。

注意すべきは指数関数の中に負号がついていることである。この負号は対応する座標変換では付いていなかったことにも注意しておいてほしい。

C.8 宿題 3-8

宿題 3-3-1

質量を持った粒子の静止系から出発し, 以下のことを示せ:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p'^\mu = B_z(y)p^\mu = \begin{pmatrix} m \cosh(y) \\ 0 \\ 0 \\ m \sinh(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \quad (\text{C.8.1})$$

$$p''^\mu = R_y(\theta)B_z(y)p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ p \sin \theta \\ 0 \\ p \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{C.8.2})$$

$$p'''^\mu = R_z(\phi)R_y(\theta)B_z(y)p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ p \sin \theta \cos \phi \\ p \sin \theta \sin \phi \\ p \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{C.8.3})$$

組み合わせられたローレンツ変換

$$\begin{aligned} L(y, \theta, \phi) &= R_z(\phi)R_y(\theta)B_z(y) \\ &= \exp(-i\phi J_3) \exp(-i\theta J_2) \exp(-iy K_3) \end{aligned} \quad (\text{C.8.4})$$

は標準的な 4 元運動量のパラメータ表示を与える。

理論系の学生は共変，反変ベクトルの添え字の使用法を習得すべきである。実験系の学生はローレンツ変換の行列表示を習得しておくといだろう。

D 宿題4

D.1 宿題4-1

次の方程式を Dirac 方程式という：

$$[i\partial * \gamma - m]\Psi(x) = 0. \quad (\text{D.1.1})$$

ここで、記号 $*$ は以下のように定義する：

$$a * b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu. \quad (\text{D.1.2})$$

Dirac は γ^μ を $\Psi(x)$ が以下のローレンツ不変な方程式を満たすように導入した：

$$[\partial * \partial + m^2]\Psi(x) = 0. \quad (\text{D.1.3})$$

これをクライン・ゴールドン方程式と呼ぶ。ただし、

$$\partial * \partial = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \nabla^2 = \Delta, \quad (\text{D.1.4})$$

である。

宿題4-1-1

(D.1.1) から (D.1.3) を導くために、次のことが必要であることを示せ：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{D.1.5})$$

ただし、

$$\{A, B\} = AB + BA, \quad (\text{D.1.6})$$

は反交換子である。式 (D.1.5) は γ 行列の基本性質である。

次の γ 行列の表現はカイラル表現、またはワイル表現と呼ばれる：

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1.7})$$

$$\sigma_+^\mu = [1_{2 \times 2}, \sigma], \quad (\text{D.1.8})$$

$$\sigma_-^\mu = [1_{2 \times 2}, -\sigma]. \quad (\text{D.1.9})$$

ただし、 σ はパウリ (行列) ベクトルである：

$$\sigma = [\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3],$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1.10})$$

宿題 4-1-2

次のことを確かめよ：

$$(\sigma^i)^2 = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{for } i = 1, 2, 3), \quad (\text{D.1.11})$$

$$(\sigma^i)^\dagger = \sigma^i \quad (\text{for } i = 1, 2, 3), \quad (\text{D.1.12})$$

$$\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma^k}{2}. \quad (\text{D.1.13})$$

(D.1.11) はパウリのシグマ行列の規格化を与え、(D.1.12) と (D.1.13) は3つのシグマ行列 $\sigma^i/2$ が SU(2) の代数を満足することを表している。

宿題 4-1-3

次のことを示せ：

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\text{D.1.14})$$

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (\text{for } i = 1, 2, 3). \quad (\text{D.1.15})$$

これはカイラル表現の特徴である。

宿題 4-1-4

(D.1.7) で定義された4つの行列が γ 行列の定義 (D.1.5) を満たしていることを σ 行列の性質 (D.1.11)~(D.1.13) を用いて証明せよ。

次の式で行列 $\gamma^5 = \gamma_5$ を導入する：

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{D.1.16})$$

宿題 4-1-5

カイラル表現 (D.1.7) では γ^5 が対角行列になることを示せ：

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 1_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (\text{D.1.17})$$

宿題 4-1-6

以下を示せ：

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{for } \mu = 0, 1, 2, 3), \quad (\text{D.1.18})$$

$$(\gamma^5)^2 = 1. \quad (\text{D.1.19})$$

また, (D.1.5) と γ^5 の性質 (D.1.18), (D.1.19) を用いて γ^μ, γ^5 が 5次元のクリフォード代数を形成していることを確かめよ. すなわち,

$$\{\gamma^\kappa, \gamma^\eta\} = 2g^{\kappa\eta} \quad (\text{for } \kappa, \eta = 0, 1, 2, 3, 5), \quad (\text{D.1.20})$$

を確認せよ. ただし, $g^{\kappa\eta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1)$ である.

次にカイラル射影行列を導入する：

$$P_L = P_- = \frac{1 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1.21})$$

$$P_R = P_+ = \frac{1 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1.22})$$

宿題 4-1-7

(D.1.19) から以下の射影的性質が導かれることを確かめよ：

$$P_L + P_R = 1, \quad (\text{D.1.23})$$

$$P_L P_R = 0, \quad (\text{D.1.24})$$

$$(P_L)^2 = P_L, \quad (\text{D.1.25})$$

$$(P_R)^2 = P_R. \quad (\text{D.1.26})$$

D.2 宿題 4-2

完全性条件 (D.1.23) を用いることで, 全ての4成分スピノール Ψ は2つの状態の和で表すことができる:

$$\Psi = (P_L + P_R)\Psi,$$

$$P_L\Psi = \Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.2.1})$$

$$P_R\Psi = \Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2.2})$$

ここで, Ψ は4成分スピノール, ψ は2成分スピノールとして導入した. また, (D.2.1) や (D.2.2) の0は2成分縦ベクトル $(0,0)^T$ を表す.

宿題 4-2-1

Dirac 方程式 (D.1.1) が以下のように表されることを示せ:

$$(i\partial * \gamma - m)\Psi(x) = \begin{pmatrix} -m & i\partial * \sigma_+ \\ i\partial * \sigma_- & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{D.2.3})$$

ただし, 4成分スピノール Ψ にかかっている質量項 m は 4×4 の単位行列が省略されており, 2成分スピノール ψ_L, ψ_R にかかっている質量項 m は 2×2 の単位行列が省略されている.

(D.2.3) から Dirac 方程式は2成分スピノールを用いて次のように表される:

$$i\partial * \sigma_- \psi_L = m\psi_R, \quad (\text{D.2.4})$$

$$i\partial * \sigma_+ \psi_R = m\psi_L. \quad (\text{D.2.5})$$

ψ_L と ψ_R は質量項を通じてのみ結びつき, 質量 $m \rightarrow 0$ の極限で独立になる:

$$i\partial * \sigma_- \psi_L = 0, \quad (\text{D.2.6})$$

$$i\partial * \sigma_+ \psi_R = 0. \quad (\text{D.2.7})$$

運動量空間で (D.2.6) の解をみつけよう. ψ_L をフーリエ変換すると

$$\psi_L(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \{e^{-ipx} a_{\lambda,p} u_L(p, \lambda) + e^{ipx} b_{\lambda,p}^{\dagger} v_L(p, \lambda)\}, \quad (\text{D.2.8})$$

となる. ここで, $\lambda = \pm 1/2$ は質量ゼロのフェルミオン粒子の保存量子数であるヘリシティを表すものである. 質量ゼロの粒子に対しては, $E = |p|$ である. また, u_L, v_L はスピノールであり, 以下を満たす:

$$p * \sigma_- u_L(p, \lambda) = 0, \quad (\text{D.2.9})$$

$$p * \sigma_+ v_L(p, \lambda) = 0. \quad (\text{D.2.10})$$

次に以下のように z 軸方向に沿った運動量を持つような系で (D.2.9),(D.2.10) を解いてみよう：

$$p^\mu = (E, 0, 0, E). \quad (\text{D.2.11})$$

この時，式 (D.2.9),(D.2.10) は以下のように書ける：

$$E(1 + \sigma^3)u_L(p, \lambda) = 0, \quad (\text{D.2.12})$$

$$E(1 - \sigma^3)v_L(p, \lambda) = 0. \quad (\text{D.2.13})$$

また，運動量が (D.2.11) で与えられる時には次のことが成り立つ：

$$\sigma^3 = \frac{p \cdot \sigma}{|p|} = 2 * \text{Helicity}. \quad (\text{D.2.14})$$

$u_L(p, \lambda), v_L(p, \lambda)$ はヘリシティ演算子の固有状態であるので

$$\sigma^3 u_L(p, \lambda) = 2\lambda u_L(p, \lambda), \quad (\text{D.2.15})$$

$$\sigma^3 v_L(p, \lambda) = 2\lambda v_L(p, \lambda), \quad (\text{D.2.16})$$

は保存する．固有値 λ は $+1/2$ もしくは $-1/2$ である．

(D.2.15),(D.2.16) をそれぞれ (D.2.12),(D.2.13) に代入すると，次が得られる：

$$(1 + 2\lambda)u_L = 0, \quad (\text{D.2.17})$$

$$(1 - 2\lambda)v_L = 0. \quad (\text{D.2.18})$$

このことから次のことが言える：

$$u_L(p, +1/2) = v_L(p, -1/2) = 0. \quad (\text{D.2.19})$$

この関係は以下の時成り立つので覚えておく：

- カイラリティが L で質量ゼロのフェルミオンのヘリシティが $-1/2$ である時.
- カイラリティが R で質量ゼロの反フェルミオンのヘリシティが $+1/2$ である時.

宿題 4-2-2

式 (D.2.15),(D.2.16) の厳密解が以下のものであることを示せ：

$$u_L(p, -1/2) = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2.20})$$

$$v_L(p, +1/2) = D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2.21})$$

ここで C と D は規格化定数である^a.

^aこれらは2成分スピノールのローレンツブーストにより固定されている。また、スピノール u, v は荷電共役で関係づけられるので、マヨラナフェルミオンに対する C と D の間の相対的な位相は関連づいている。

宿題 4-2-3

前述のカイラリティ L に関する議論を右巻きカイラリティのフェルミオン ψ_R に対して繰り返せ。

次の宿題 E では、ある特殊な系において Dirac 方程式を解くことにより、質量を持つフェルミオンの波動関数に対する解を求める。一般の系への拡張は1回のブーストと2回の回転を実行することによって得られる。

E 宿題 5

E.1 宿題 5-1

宿題 5-1-1

以下のテンソル

$$S^{ab} = \frac{i}{4}[\gamma^a, \gamma^b] \quad (\text{E.1.1})$$

について、以下のローレンツ変換の代数が成り立つことを示せ：

$$[S^{ab}, S^{cd}] = i(g^{ad}S^{bc} + g^{bc}S^{ad} - g^{ac}S^{bd} - g^{bd}S^{ac}) \quad (\text{E.1.2})$$

ここで、ガンマ行列は以下を満足する：

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2g^{ab} \quad (\text{E.1.3})$$

宿題 5-1-2

次を示せ：

$$S^{23} = J_1 = \begin{pmatrix} \sigma^1/2 & 0 \\ 0 & \sigma^1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.4})$$

$$S^{31} = J_2 = \begin{pmatrix} \sigma^2/2 & 0 \\ 0 & \sigma^2/2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.5})$$

$$S^{12} = J_3 = \begin{pmatrix} \sigma^3/2 & 0 \\ 0 & \sigma^3/2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.6})$$

$$S^{01} = K_1 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1/2 & 0 \\ 0 & i\sigma^1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.7})$$

$$S^{02} = K_2 = \begin{pmatrix} -i\sigma^2/2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2/2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.8})$$

$$S^{03} = K_3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^3/2 & 0 \\ 0 & i\sigma^3/2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.9})$$

式 (E.1.2) にまとまっている通り， J_i と K_i はローレンツ変換の代数を満たす。

最も重要なことは，4スピノールのローレンツ変換がブロック対角になることである：

$$S^{ab} = \begin{pmatrix} S_L^{ab} & 0 \\ 0 & S_R^{ab} \end{pmatrix} \quad (\text{E.1.10})$$

ここで S_L と S_R は，

$$S_L^{ab} = \frac{i}{4} [\sigma_+^a \sigma_-^b - \sigma_+^b \sigma_-^a] \quad (\text{E.1.11})$$

$$S_R^{ab} = \frac{i}{4} [\sigma_-^a \sigma_+^b - \sigma_-^b \sigma_+^a] \quad (\text{E.1.12})$$

で与えられる 2×2 行列であり，上2スピノール ψ_L と下2スピノール ψ_R に対するローレンツ変換として次のように変換する：

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{ab} S_L^{ab}\right) \psi_L \quad (\text{E.1.13})$$

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = \exp\left(-\frac{i}{2} \omega_{ab} S_R^{ab}\right) \psi_R \quad (\text{E.1.14})$$

また，次の 2×2 の生成子によって作られる．この時，スピノールに対するローレンツ生成子の表現は単に

$$J_k^L = J_k^R = \sigma^k/2 \quad (\text{E.1.15})$$

$$K_k^L = -i\sigma^k/2 \quad (\text{E.1.16})$$

$$K_k^R = i\sigma^k/2 \quad (\text{E.1.17})$$

となる。これより、 S_L と S_R 両方の表現には K_k の符号の違いしかなく、ローレンツ代数の組を満足する。

E.2 宿題 5-2

さて、Dirac 方程式の解を求めよう：

$$u(p, \lambda) = \begin{pmatrix} u_L(p, \lambda) \\ u_R(p, \lambda) \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.1})$$

Dirac 粒子の静止系をとる：

$$p^\mu = (m, 0, 0, 0) \quad (\text{E.2.2})$$

また z 軸を、 u_L と u_R のスピン量子化軸に沿ってとる (E.1.15)：

$$J_z = \sigma^3/2 \quad (\text{E.2.3})$$

粒子を z 軸正の方向に沿ってブーストした時、 λ はこの座標系で $\sigma^3/2$ の固有値である。よって次を得る：

$$u_L(p, +1/2) = u_R(p, +1/2) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.4})$$

$$u_L(p, -1/2) = u_R(p, -1/2) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.5})$$

ここでの \sqrt{m} の正規化は、私 (萩原) が主に使うタイプの正規化である。 z 軸正の方向に沿ってのブーストをラピディティ y によって行う：

$$\begin{aligned} p^\mu \rightarrow p'^\mu &= B_z(y)p^\mu \\ &= \exp(-iyK_3^L)p^\mu \\ &= m(\cosh(y), 0, 0, \sinh(y))^T \end{aligned} \quad (\text{E.2.6})$$

そしてスピノールは次のように変換する：

$$\begin{aligned}
 u_L(p, +1/2) \rightarrow u'_L(p', +1/2) &= B_z(y)u_L(p, +1/2) \\
 &= \exp(-iyK_3)\sqrt{m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \sqrt{m} \begin{pmatrix} e^{-y/2} & 0 \\ 0 & e^{y/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{E.2.7}
 \end{aligned}$$

$$u_L(p, -1/2) \rightarrow u'_L(p', -1/2) = \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{E.2.8}$$

$$u_R(p, +1/2) \rightarrow u'_R(p', +1/2) = \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{E.2.9}$$

$$u_R(p, -1/2) \rightarrow u'_R(p', -1/2) = \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{E.2.10}$$

宿題 5-2-1

上述の計算を実際に行ってみよ。

質量 0 の極限 $E = p$ において、2つのヘリシティ要素だけが生き残ることが確認できる：

$$u_L(p, -1/2) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{E.2.11}$$

$$u_R(p, +1/2) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{E.2.12}$$

他の2つの組合せは質量 0 の極限で無くなる：

$$u_L(p, +1/2) = u_R(p, -1/2) = 0 \tag{E.2.13}$$

宿題 5-2-2

質量 0 極限で2つのヘリシティ要素だけが生き残ることを示せ。

質量 0, つまり高エネルギー極限では、ヘリシティ = $-1/2$ ($+1/2$) の状態に対して、左手系 (右手系) カイラリティ要素だけが生き残る。標準模型は、これらの状態が、標準模型の全てのフェルミオン、クォークとレプトンの構成要素であることを示している。

E.3 宿題 5-3

さらに, $R_y(\theta)$ の後, $R_z(\phi)$ を演算させる:

$$\begin{aligned}
 p^\mu &\rightarrow p'''^\mu \\
 &= R_z(\phi)R_y(\theta)B_z(y)p^\mu \\
 &= R_z(\phi)R_y(\theta)m(\cosh(y), 0, 0, \sinh(y))^T \\
 &= R_z(\phi)R_y(\theta)(E, 0, 0, p)^T \\
 &= R_z(\phi)(E, p \sin \theta, 0, p \cos \theta)^T \\
 &= (E, p \sin \theta \cos \phi, p \sin \theta \sin \phi, p \cos \theta)^T
 \end{aligned} \tag{E.3.1}$$

宿題 5-3-1

この座標系において, $u_L(p''', \pm 1/2)$ と $u_R(p''', \pm 1/2)$ を計算せよ.

計算結果は以下ようになる:

$$\begin{aligned}
 u_L'''(p''', +1/2) &= R_z(\phi)R_y(\theta)B_z(y)u_L(p, +1/2) \\
 &= \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \theta/2 \\ e^{+i\phi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \\
 u_R'''(p''', +1/2) &= \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \theta/2 \\ e^{+i\phi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \\
 u_L'''(p''', -1/2) &= \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin \theta/2 \\ e^{+i\phi/2} \cos \theta/2 \end{pmatrix} \\
 u_R'''(p''', -1/2) &= \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin \theta/2 \\ e^{+i\phi/2} \cos \theta/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{E.3.2}$$

ここで (各ヘリシティの) u スピノールに関して以下の共通位相因子を取り除く場合がある:

$$\begin{aligned}
 u_L(p, +1/2) &= e^{-i\phi/2} \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{+i\phi} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \\
 u_R(p, +1/2) &= e^{-i\phi/2} \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{+i\phi} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \\
 u_L(p, -1/2) &= e^{+i\phi/2} \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix} \\
 u_R(p, -1/2) &= e^{+i\phi/2} \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta/2 \\ \cos \theta/2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{E.3.3}$$

E.4 宿題 5-4

荷電共役を導入しよう。Dirac は $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ の運動方程式から始めた。我々もその方針をとる。まず、ラグランジアンを考える：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\Psi}(iD_\mu \gamma^\mu - m)\Psi \\ &= \bar{\Psi}([i\partial_\mu - gT^a A_\mu^a]\gamma^\mu - m)\Psi\end{aligned}\quad (\text{E.4.1})$$

$\bar{\Psi}$ の運動方程式を得るために、次のことに注意する：

$$\bar{\Psi}\partial_\mu \Psi = \partial_\mu(\bar{\Psi}\Psi) - (\partial_\mu \bar{\Psi})\Psi \quad (\text{E.4.2})$$

そしてこの時全微分項を無視すると、

$$\mathcal{L} = (-i\partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu)\Psi - \bar{\Psi}[gT^a A_\mu^a \gamma^\mu + m]\Psi \quad (\text{E.4.3})$$

これは Ψ の導関数を持たないので、運動方程式は簡単になる：

$$i\partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu + \bar{\Psi}[gT^a A_\mu^a \gamma^\mu + m] = 0 \quad (\text{E.4.4})$$

宿題 5-4-1

運動方程式 (E.4.4) を導出せよ。

この方程式の転置を取ろう：

$$\begin{aligned}i\partial_\mu(\gamma^\mu)^T \bar{\Psi}^T + [g(T^a)^T A_\mu^a (\gamma^\mu)^T + m]\bar{\Psi}^T \\ = \{[i\partial_\mu + g(T^a)^T A_\mu^a](\gamma^\mu)^T + m\}\bar{\Psi}^T \\ = 0\end{aligned}\quad (\text{E.4.5})$$

すなわち、もし行列 C が次の式を満たす時、

$$C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = -\gamma^\mu \quad (\text{E.4.6})$$

そして Ψ^c を次のように定義する時、

$$\Psi^c = C\bar{\Psi}^T \quad (\text{E.4.7})$$

(E.4.5) は次のように表される：

$$[(i\partial_\mu + g(T^a)^T A_\mu^a)\gamma^\mu - m]\Psi^c = 0. \quad (\text{E.4.8})$$

Ψ の運動方程式、

$$[(i\partial_\mu - gT^a A_\mu^a)\gamma^\mu - m]\Psi = 0, \quad (\text{E.4.9})$$

とこの方程式を比較すると、 Ψ^c が、電荷を反対にした Ψ の運動方程式と同じものを満たすということが分かる。(生成子の転置は、非アーベル電荷を表している。(T^a)^T = (T^a)^{*} に注意すると、 Ψ^c は Ψ の複素共役表現として変換する。)

宿題 5-4-2

荷電共役を取った Dirac 場 Ψ^c の運動方程式を導出せよ。

C を次のように与えると (E.4.6) を満たすことが分かる：

$$\begin{aligned}
 C &= i\gamma^2\gamma^0 \\
 &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^2 \\ \sigma_-^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{E.4.10}$$

この時,

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}^T &= (\Psi^\dagger\gamma^0)^T \\
 &= (\gamma^0)^T\Psi^* \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L^* \\ \psi_R^* \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \psi_R^* \\ \psi_L^* \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{E.4.11}$$

$$\Psi^c = \begin{pmatrix} i\sigma^2\psi_R^* \\ -i\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\psi_R)^c \\ (\psi_L)^c \end{pmatrix}. \tag{E.4.12}$$

ψ_L と ψ_R の荷電共役に関するマイナス符号に注意してほしい。繰り返すと,

$$(\psi_L)^c = -i\sigma^2(\psi_L)^* \tag{E.4.13}$$

$$(\psi_R)^c = +i\sigma^2(\psi_R)^* \tag{E.4.14}$$

となる。荷電共役変換は 2 回行くと、元の場に戻る必要がある：

$$(\Psi^c)^c = \Psi \tag{E.4.15}$$

宿題 5-4-3

(E.4.15) を示せ。

最も重要なことは,

$$(\Psi^c)_L = \begin{pmatrix} (\psi_R)^c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\Psi^c)_R = \begin{pmatrix} 0 \\ (\psi_L)^c \end{pmatrix} \tag{E.4.16}$$

これはすなわち、次のことを意味する。

- $(\psi_L)^c$ は右手系カイラルフェルミオンとして変換する.
- $(\psi_R)^c$ は左手系カイラルフェルミオンとして変換する.

(E.4.13, E.4.14) の演算は, 単に両方の要素の複素共役をとり, 相対的にマイナス符号を付けて上と下の要素を交換するということが分かる.

E.5 宿題 5-5

ヒッグス二重項を使って SU(2) 不変量を得たのと同様に, カイラルフェルミオンを使うことでローレンツ不変量を得ることができる. ここで, (E.1.11, E.1.12) の 2 つの生成子 S_L^{ab}, S_R^{ab} は

$$\begin{aligned}
 S_L^{ab\dagger} &= \left(\frac{i}{4} [\sigma_+^a \sigma_-^b - \sigma_+^b \sigma_-^a] \right)^\dagger \\
 &= -\frac{i}{4} [\sigma_-^b \sigma_+^a - \sigma_-^a \sigma_+^b] \\
 &= \frac{i}{4} [\sigma_-^a \sigma_+^b - \sigma_-^b \sigma_+^a] \\
 &= (S_R^{ab})
 \end{aligned} \tag{E.5.1}$$

の関係を満たすことに注意. したがって, 次の組み合わせ

$$\psi_R^\dagger \psi_L, \psi_L^\dagger \psi_R \tag{E.5.2}$$

はローレンツ不変である.

宿題 5-5-1

(E.5.1) を示し, (E.5.2) のローレンツ不変性を示せ. $\psi_L^\dagger \psi_R$ は単に $\psi_R^\dagger \psi_L$ の複素共役でそれらの和は Dirac 質量項である.

宿題 5-5-2

$$(\psi_L^c)^\dagger \psi_L = \psi_L^T (i\sigma^2) \psi_L \tag{E.5.3}$$

を示し,

$$(\psi_L^c)^\dagger \psi_L \tag{E.5.4}$$

がローレンツ不変であることを示せ.

ここで, (E.5.4) または (E.5.3) はマヨラナ質量項と呼ばれ, 2 つ ψ_L の位相変換が足されているので, フェルミオン数 2 を持っている. 観測されるニュートリノ質量

はマヨラナ質量だと信じているが、これは（ニュートリノが無い2重ベータ崩壊の）実験で示されるべきである。

マヨラナ質量項が (E.5.4) または (E.5.3) で表現されるように、 ψ_L, ψ_R のような2成分のスピンール場を用いたが、以下の4成分のマヨラナフェルミオンを使う事もある：

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_L^c \end{pmatrix} \quad (\text{E.5.5})$$

宿題 5-5-3

(E.4.16) の定義を用いて

$$\Psi_M^c = \Psi_M \quad (\text{E.5.6})$$

を示せ。また、

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_M \Psi_M &= \Psi_M^\dagger \gamma^0 \Psi_M \\ &= (\psi_L^c)^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_L^c \end{aligned} \quad (\text{E.5.7})$$

を示せ。

したがって、1つのフェルミオンのマヨラナ質量項は以下の3つのように表現されることが多い：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{m}{2} \bar{\Psi}_M \Psi_M \\ &= -\frac{m}{2} [(\psi_L^c)^\dagger \psi_L + h.c.] \\ &= -\frac{m}{2} [\psi_L^T (i\sigma^2) \psi_L + h.c.] \end{aligned} \quad (\text{E.5.8})$$

ここで、最後の表現は

$$\begin{aligned} \psi_L^T (i\sigma^2) \psi_L &= (\psi_L)^i (i\sigma^2)_{ij} (\psi_L)^j \\ &= (\psi_L)^i (\psi_L)_i \end{aligned} \quad (\text{E.5.9})$$

と書けることに注意。ここで、

$$\begin{aligned} (\psi_L)_i &= (i\sigma^2)_{ij} (\psi_L)^j \\ &= \epsilon_{ij} (\psi_L)^j \end{aligned} \quad (\text{E.5.10})$$

であり

$$\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1 \quad (\text{E.5.11})$$

である。

ローレンツ不変性が上下の添字の縮約によって保証されているので、(E.5.9) の最後の表現は、理論研究者にとって最も便利である。

E.6 宿題 5-6

宿題 5-2, 宿題 5-3 で得た u スピノールから, v スピノールを得ることができる. 粒子を消滅させ, 反粒子を生成する Dirac 場が

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \sum_{\lambda} [a_{p,\lambda} u(p, \lambda) e^{-ipx} + b_{p,\lambda}^{\dagger} v(p, \lambda) e^{ipx}] \quad (\text{E.6.1})$$

で表現される場の理論の枠組みで考えたい. すると, この荷電共役場は

$$\Psi(x)^c = \int \frac{d^3p}{2E(2\pi)^3} \sum_{\lambda} [b_{p,\lambda} u(p, \lambda) e^{-ipx} + a_{p,\lambda}^{\dagger} v(p, \lambda) e^{ipx}] \quad (\text{E.6.2})$$

となり, 反粒子を消滅させ, 粒子を生成する. ここで, (E.6.2) は (E.6.1) の生成消滅演算子と a, b の単純な入れ替えになっていることに注意せよ.

宿題 5-6-1

以下の定義

$$\Psi^c = C(\bar{\Psi})^T \quad (\text{E.6.3})$$

を用いて, v スピノールが, u スピノールから

$$\begin{aligned} v(p, \lambda) &= C\bar{u}(p, \lambda)^T \\ &= C(u(p, \lambda)^{\dagger} \gamma^0)^T \\ &= C(\gamma^0)^T (u(p, \lambda))^* \\ &= i\gamma^2 \begin{pmatrix} u_L(p, \lambda)^* \\ u_R(p, \lambda)^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\sigma^2 u_R(p, \lambda)^* \\ -i\sigma^2 u_L(p, \lambda)^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.6.4})$$

$$v_L(p, \lambda) = i\sigma^2 u_R(p, \lambda)^* \quad (\text{E.6.5})$$

$$v_R(p, \lambda) = -i\sigma^2 u_L(p, \lambda)^* \quad (\text{E.6.6})$$

と得られることを示せ.

ここまで来ると, (E.3.3) から一般の運動量 p に対する v スピノールが

$$\begin{aligned}
v_L(p, +\frac{1}{2}) &= i\sigma^2 u_R(p, +\frac{1}{2})^* \\
&= e^{+i\frac{\phi}{2}} \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
v_R(p, +\frac{1}{2}) &= -i\sigma^2 u_L(p, +\frac{1}{2})^* \\
&= e^{+i\frac{\phi}{2}} \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
v_L(p, -\frac{1}{2}) &= i\sigma^2 u_R(p, -\frac{1}{2})^* \\
&= e^{-i\frac{\phi}{2}} \sqrt{E-p} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{+i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
v_R(p, -\frac{1}{2}) &= -i\sigma^2 u_L(p, -\frac{1}{2})^* \\
&= e^{-i\frac{\phi}{2}} \sqrt{E+p} \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} \\ -e^{+i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{E.6.7}$$

で表現されることは容易に分かる. 質量ゼロの極限では, 2つの項

$$\begin{aligned}
v_L(p, +\frac{1}{2}) &= e^{+i\frac{\phi}{2}} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
v_R(p, -\frac{1}{2}) &= e^{-i\frac{\phi}{2}} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} \\ -e^{+i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

だけが残る. ここで, (E.3.3) から質量ゼロ極限の u スピノールの結果を再び書き下しておく:

$$u_L(p, -\frac{1}{2}) = e^{+i\frac{\phi}{2}} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{E.6.8}$$

$$u_R(p, +\frac{1}{2}) = e^{-i\frac{\phi}{2}} \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{+i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{E.6.9}$$

E.7 宿題 5-7

この宿題は長い. なぜなら, ラグランジアン of 項

$$\bar{\Psi} \partial_\mu \gamma^\mu \Psi \tag{E.7.1}$$

または, ベクトルとしての性質を持つ項

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = (\psi_L)^\dagger (\sigma_-^\mu) (\psi_L) + (\psi_R)^\dagger (\sigma_+^\mu) (\psi_R) \tag{E.7.2}$$

のローレンツ不変性を示さなければならいからだ.

式 (E.7.2) の2つの項はどちらも, ローレンツ変換:

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = e^{-\frac{i}{2}\omega_{ab}S_L^{ab}} \psi_L \quad (\text{E.7.3})$$

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = e^{-\frac{i}{2}\omega_{ab}S_R^{ab}} \psi_R \quad (\text{E.7.4})$$

でベクトルとしての変換を受ける.

示すべきは,

$$\begin{aligned} (e^{-\frac{i}{2}\omega_{ab}S_L^{ab}})^\dagger \sigma_-^\mu e^{-\frac{i}{2}\omega_{cd}S_L^{cd}} &= \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{ab}\Sigma^{ab}} \right)_\nu^\mu \sigma_-^\mu \\ &= \sigma_-^\mu + \omega^\mu_\nu \sigma_-^\nu + h.o. \end{aligned} \quad (\text{E.7.5})$$

$$\begin{aligned} (e^{-\frac{i}{2}\omega_{ab}S_R^{ab}})^\dagger \sigma_+^\mu e^{-\frac{i}{2}\omega_{cd}S_R^{cd}} &= \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{ab}\Sigma^{ab}} \right)_\nu^\mu \sigma_+^\nu \\ &= \sigma_+^\mu + \omega^\mu_\nu \sigma_+^\nu + h.o. \end{aligned} \quad (\text{E.7.6})$$

である. ここで, Σ_{ab} はローレンツ変換の生成子のベクトル表現である:

$$(\Sigma^{ab})_\nu^\mu = i(g^{a\mu}g_\nu^b - g^{b\mu}g_\nu^a) \quad (\text{E.7.7})$$

$\mathcal{O}(\omega_{ab})$ についてやると,

$$\begin{aligned} (e^{-\frac{i}{2}\omega_{ab}S_L^{ab}})^\dagger \sigma_-^\mu e^{-\frac{i}{2}\omega_{cd}S_L^{cd}} &= \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{ab}(S_L^{ab})^\dagger \right) \sigma_-^\mu \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{cd}S_L^{cd} \right) + h.o. \\ &= \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{ab}(S_R^{ab}) \right) \sigma_-^\mu \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{cd}S_L^{cd} \right) + h.o. \\ &= \sigma_-^\mu + \frac{i}{2}\omega_{ab}[(S_R^{ab})\sigma_-^\mu - \sigma_-^\mu(S_L^{ab})] + h.o. \end{aligned} \quad (\text{E.7.8})$$

$$\begin{aligned} (S_R^{ij})\sigma_-^\mu - \sigma_-^\mu(S_L^{ij}) &= \frac{\epsilon_{ijk}}{2}[\sigma^k, \sigma_-^\mu] \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}}{2}(-\delta_l^\mu)[\sigma^k, \sigma^l] \\ &= \frac{\epsilon_{ijk}}{2}(-\delta_l^\mu)2i\epsilon_{klm}\sigma^m \\ &= -i\delta_l^\mu \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\sigma^m \end{aligned} \quad (\text{E.7.9})$$

$$\begin{aligned} (S_R^{12})\sigma_-^\mu - \sigma_-^\mu(S_L^{12}) &= -i\delta_l^\mu \epsilon_{3lm}\sigma^m \\ &= -i\delta_1^\mu \epsilon_{31m}\sigma^m - i\delta_2^\mu \epsilon_{32m}\sigma^m \\ &= -i(\delta_1^\mu \sigma^2 - \delta_2^\mu \sigma^1) \end{aligned} \quad (\text{E.7.10})$$

$$\begin{aligned} i\omega_{12}[(S_R^{12})\sigma_-^\mu - \sigma_-^\mu(S_L^{12})] &= \omega_{12}[\delta_1^\mu \sigma^2 - \delta_2^\mu \sigma^1] \\ &= \omega_{12}[\delta_1^\mu(-\sigma_-^2) - \delta_2^\mu(-\sigma_-^1)] \\ &= -\omega_{12}[\delta_1^\mu(\sigma_-^2) - \delta_2^\mu(\sigma_-^1)] \\ &= \omega_2^1[\delta_1^\mu(\sigma_-^2) - \delta_2^\mu(\sigma_-^1)] \end{aligned} \quad (\text{E.7.11})$$

となり, これは, $\omega_{12} = -\omega_{21} \neq 0$ の時に, 式 (E.7.5) を導く. また,

$$\begin{aligned}
 (S_R^{03})\sigma_-^\mu - \sigma_-^\mu(S_L^{03}) &= i\frac{\sigma^3}{2}\sigma_-^\mu - \sigma_-^\mu(-i\frac{\sigma^3}{2}) \\
 &= i\left(\frac{\sigma^3}{2}\sigma_-^\mu + \sigma_-^\mu\frac{\sigma^3}{2}\right) \\
 &= i\delta_0^\mu\left(\frac{\sigma^3}{2} + \frac{\sigma^3}{2}\right) + i\delta_l^\mu\frac{(-\sigma^3\sigma^l - \sigma^l\sigma^3)}{2} \\
 &= i\delta_0^\mu\sigma^3 - i\delta_l^\mu\delta^l3 \\
 &= i(\delta_0^\mu\sigma^3 - \delta_3^\mu) \tag{E.7.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i\omega_{03}[(S_R^{03})\sigma_-^\mu - \sigma_-^\mu(S_L^{03})] &= -\omega_{03}[\delta_0^\mu\sigma^3 - \delta_3^\mu] \\
 &= \omega_{03}[\delta_0^\mu\sigma_-^3 - \delta_3^\mu\sigma_-^0] \\
 &= \omega_3^0[\delta_0^\mu\sigma_-^3 - \delta_3^\mu\sigma_-^0] \tag{E.7.13}
 \end{aligned}$$

は, $\omega_{03} = -\omega_{30} \neq 0$ の時に, 式 (E.7.5) を導く. 同様に式 (E.7.6) も導ける.

宿題 5-7-1

以上のようにして, 式 (E.7.5), (E.7.6) を示せ.

参考文献

- [1] L. F. Abbott and M. B. Wise, “Wormholes and Global Symmetries,” *Nucl. Phys. B* **325**, 687 (1989).
- [2] H. Georgi, S.L. Glashow, “Unity of All Elementary Particle Forces”, *Phys.Rev.Lett.* **32** (1974) 438-441.
- [3] H. Georgi, Helen R. Quinn, Steven Weinberg, “Hierarchy of Interactions in Unified Gauge Theories”, *Phys.Rev.Lett.* **33** (1974) 451-454.
- [4] H. D. Politzer, “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?”, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346.
- [5] D. J. Gross, F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories”, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343.
- [6] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, “Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with submillimeter dimensions and TeV scale quantum gravity,” *Phys. Rev. D* **59** (1999) 086004, [arXiv:hep-ph/9807344](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9807344).
- [7] H. Murayama and T. Yanagida, “A viable SU(5) GUT with light leptoquark bosons,” *Mod. Phys. Lett. A* **7**, 147 (1992).
- [8] K. Inoue, A. Kakuto, H. Komatsu and S. Takeshita, “Aspects of Grand Unified Models with Softly Broken Supersymmetry,” *Prog. Theor. Phys.* **68**, 927 (1982).
- [9] “トリスタン計画報告書,”
http://www2.kek.jp/proffice/archives/hyouka/TRISTANreport/1_2.html (2016年2月24日参照) .
- [10] “Muon g-2/EDM experiment at J-PARC’,’ <http://g-2.kek.jp/portal/information.html> (2016年2月26日参照) .
- [11] D. Hooper and T. R. Slatyer, “Two Emission Mechanisms in the Fermi Bubbles: A Possible Signal of Annihilating Dark Matter,” *Phys. Dark Univ.* **2**, 118 (2013), [arXiv:1302.6589](https://arxiv.org/abs/1302.6589) [astro-ph.HE].
- [12] T. Perrotto and L. Chandler, “NASA’s Fermi Telescope Finds Giant Structure in our Galaxy,” http://www.nasa.gov/mission_pages/GLAST/news/new-structure.html
- [13] K. Hagiwara, S. Mukhopadhyay and J. Nakamura, “10 GeV neutralino dark matter and light stau in the MSSM,” *Phys. Rev. D* **89**, no. 1, 015023 (2014), [arXiv:1308.6738](https://arxiv.org/abs/1308.6738) [hep-ph].

- [14] K. Hagiwara, K. i. Hikasa and N. Kai, “Measuring Three Gluon Coupling in Semiinclusive Neutrino and Anti-neutrino Scattering,” *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 983.
- [15] A. De Rujula, R. Petronzio and B. E. Lautrup, “On the Challenge of Measuring the Color Charge of Gluons,” *Nucl. Phys. B* **146**, 50 (1978).
- [16] G. Passarino and M. J. G. Veltman, “One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model,” *Nucl. Phys. B* **160**, 151 (1979).
- [17] G. Ossola, C. G. Papadopoulos and R. Pittau, “CutTools: A Program implementing the OPP reduction method to compute one-loop amplitudes,” *JHEP* **0803**, 042 (2008), [arXiv:0711.3596](https://arxiv.org/abs/0711.3596) [hep-ph].