ホームワーク問題：1次元系における共鳴状態

安井　繁宏

東京工業大学

2017 年 8 月 23 日

これは「原子核三者若手夏の学校 2017（国立オリンピック記念青少年総合センター, 2017 年 8 月 21-25 日）」における講義「チャーム・ボトムのハドロン原子核物理の最近の展開」で配布されるホームワーク (自習) の問題である。

Sec. -1 ホームワークの目的

エキゾチックハドロンの多くは束縛状態ではなく共鳴状態である。なぜエキゾチックハドロンは共鳴状態として存在するのかという問いに答えることは大変難しく、これからも様々な角度から究明すべき課題である。一方で、初年級の大学院生にとって共鳴状態はあまり馴染みがないかもしれない。学部の量子力学の授業で共鳴状態について一通り学んだものの、分かったような分からないような感じが残っているのではないだろうか。そこで、このホームワークでは、解析的な計算が容易な 1 次元の量子力学を題材として共鳴状態について学ぼう。ここで学ぶ題材は通常の教科書ではあまり見られないものを含む。なお、本問題は Harry J. Lipkin “Quantum Mechanics: New Approaches to Selected Topics”, Elsevier Science Publishing (1973) から採録した [1]。

このホームワークの問題は次のように構成されている。

Sec. 0 準備問題：共鳴状態はどのように定義されるのかを確かめる。

Sec. 1 基礎問題：引力的な δ 関数ポテンシャルによる束縛／散乱状態を復習する。

Sec. 2 応用問題：2 つの引力的な δ 関数ポテンシャルによる共鳴状態を考える。

Sec. 3 発展問題：2 チャンネル Feshbach 共鳴を研究する。

Sec. 0 では、共鳴状態の定義について復習する。共鳴状態について散乱振幅における複素エネルギー平面上の極（ポール）として理解しておこう。**Sec. 1** では、1 次元の問題の解き方を思い出すために、（おそらく一回は解いた経験があるであろう）引力的 δ 関数ポテンシャルによる束縛状態の問題を解いてみよう。**Sec. 2** では、最初の共鳴状態の問題として、2 つの引力的 δ 関数ポテンシャルが空間的に離れた場所にあるような場合を考える。散乱振幅を求めて複素エネルギー平面上でポールを見つけよう。**Sec. 3** では、より現実的なハドロン散乱に似た状態として 2 チャンネルの Feshbach 共鳴について解析する。これらの問題を考えることによって共鳴状態を身近に感じて欲しい。

基本事項のまとめ：問題に入る前にいくつかの事項を確認しておこう。1 次元 x 座標において、質量 m の粒子のハミルトニアンの運動項は

$$H_0(x) = -\frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \tag{1}$$

である [2]。ポテンシャルが $V(x)$ のとき、全体のハミルトニアンは

$$H(x) = H_0(x) + V(x), \tag{2}$$

である。一般的に運動量 k をもつ平面波は $\psi_k = e^{ikx}$ である。

[1] この本は Dover 出版社からも再版されているので自分で見てみるとよい。大学院生を対象に素粒子から物性にわたる広い話題について、難しい数式を使うことなく（しかし本質を見失うことなく）分かりやすく解説されている。

[2] プランク定数 h について $\hbar = h/2\pi = 1$ の単位系を用いる。

ポテンシャル $V(x)$ は $x=0$ を境にして $x>0$ と $x<0$ について対称的であるとする：$V(-x)=V(x)$。したがって、ハミルトニアン $H(x)$ も対称的である。このとき、固有状態はパリティ変換 $x\to -x$ に対する偶／奇によって分類される。偶パリティ状態を ψ_{k0}, 奇パリティ状態を ψ_{k1} とすると

$$\begin{aligned} P\psi_{k0}(x) &= \psi_{k0}(x), \qquad (3)\\ P\psi_{k1}(x) &= -\psi_{k1}(x), \qquad (4)\end{aligned}$$

のように変換する。ただし、$P\psi(x)=\psi(-x)$ である。ポテンシャルが無視できる遠方 $|x|\to\infty$ において漸近状態として、具体的に $\psi_{k0}(x)$ および $\psi_{k1}(x)$ は次のように与えられる。偶パリティ状態について

$$\psi_{k0}(x)=\begin{cases}\cos(kx-\delta_0) & (x<0)\\ \cos(kx+\delta_0) & (x>0)\end{cases}, \qquad (5)$$

であり、奇パリティ状態について

$$\psi_{k1}(x)=\begin{cases}\sin(kx-\delta_1) & (x<0)\\ \sin(kx+\delta_1) & (x>0)\end{cases}, \qquad (6)$$

である。ただし、δ_0 および δ_1 は位相差である。実際に偶パリティ状態について $\psi_{k0}(-x)=\psi_{k0}(x)$ であり、奇パリティ状態について $\psi_{k1}(-x)=-\psi_{k1}(x)$ であることを確認してみよう。

Sec. 0 準備問題：S 行列と共鳴状態

散乱における S 行列を考えて、共鳴状態がどのように定義されるのかを確認しよう。

0.1 波動関数 $\psi_{k0}(x)$ および $\psi_{k1}(x)$ の “極座標表示”を考える。動経方向を $r=|x|$ として、“角度方向”θ を $x>0$ のとき $\theta=0$ および $x<0$ のとき $\theta=\pi$ と定義する。このとき、$\psi_{k0}(x)=\psi_{k0}(r,\theta)=\phi_{k0}(r)$ および $\psi_{k1}(x)=\psi_{k1}(r,\theta)=e^{i\theta}\phi_{k1}(r)$ として

$$\phi_{k0}(r)=\frac{1}{2}e^{-i\delta_0}\left(e^{-ikr}+e^{2i\delta_0}e^{ikr}\right), \qquad (7)$$

および

$$\phi_{k1}(r)=\frac{i}{2}e^{-i\delta_1}\left(e^{-ikr}-e^{2i\delta_1}e^{ikr}\right), \qquad (8)$$

と表されることを示せ[3]。

0.2 波動関数 $\psi_{k\ell}(x)$ $(\ell=0,1)$ は、“極座標表示”において

$$\psi_{k\ell}(r,\theta)=\alpha e^{i\ell\theta}\big(e^{-ikr}+(-1)^\ell e^{2i\delta_\ell}e^{ikr}\big), \qquad (9)$$

と表されることを示せ[4]。e^{-ikr} および $(-1)^\ell e^{2i\delta_\ell}e^{ikr}$ のそれぞれは物理的に何を意味するかを考えよ。

[3] $e^{i\ell\theta}$ は “角度成分”に対応することに注意する

[4] 係数 “$\alpha=i^\ell e^{-i\delta_\ell}/2$”は全体のファクターでありとくに重要ではない。

0.3 位相差 δ_ℓ は運動量 k の関数であり $\delta_\ell(k)$ と書かれる。ここで、$\ell = 0, 1$ に対して S 行列を

$$S_\ell(k) = e^{2i\delta_\ell(k)}, \tag{10}$$

と定義する [5]。部分波振幅 $f_\ell(k)$ を

$$f_\ell(k) = \frac{S_\ell(k) - 1}{2ik} = \frac{1}{k} e^{i\delta_\ell(k)} \sin\delta_\ell(k). \tag{13}$$

と定義する。真中の式の分母における $S_\ell(k) - 1$ の第 2 項の -1 は自由波による差し引きを表す。$|f_\ell(k)|^2$ に比例する散乱断面積は, $\sin\delta_\ell(k_r) \simeq 1$ (あるいは $\cot\delta_\ell(k_r) \simeq 0$) を満たすような運動量 k_r のときに大きな値をもつので散乱過程に大きな寄与をする。

(i) 散乱振幅 $f_\ell(k)$ が

$$f_\ell(k) = \frac{1}{k} \frac{1}{\cot\delta_\ell(k) - i}, \tag{14}$$

と表されることを示せ。

(ii) 散乱振幅 $f_\ell(k)$ をエネルギー $E = k^2/2m$ の関数として考える。上で定義された k_r を用いて、$\cot\delta_\ell(k)$ を $E_r = k_r^2/2m$ (共鳴エネルギー) の周りで展開して、

$$f_\ell(k) \simeq -\frac{1}{k} \frac{\Gamma/2}{E - E_r + i\Gamma/2}, \tag{15}$$

と表されることを示せ。ここで Γ は崩壊定数であり、

$$-\frac{2}{\Gamma} = \left.\frac{\mathrm{d}\bigl(\cot\delta_\ell\bigr)}{\mathrm{d}E}\right|_{E=E_r}, \tag{16}$$

と定義される。

複素数に拡張されたエネルギー平面上の $E = E_r - i\Gamma/2$ は $f_\ell(k)$ の 1 次の極である。この複素エネルギーにおいて散乱振幅は大きくなるので、このような極が共鳴状態を与える。このセクションの結果を用いて以下の **Sec. 1**, **2**, **3** の問題を考える。

Sec. 1 基本問題：引力的な δ 関数ポテンシャルによる束縛／散乱状態

$U_0 > 0$ として、引力的な δ 関数ポテンシャル

$$V(x) = -\frac{U_0}{2m}\delta(x), \tag{17}$$

を考える。係数の $1/2m$ は計算の簡便さのために導入した。このポテンシャルによる束縛状態と散乱状態を

[5] 参考として、3 次元座標のとき部分波 l の波動関数 $\psi_l(k, r)$ の漸近形は

$$\psi_l(k, r) \to \frac{i^{l+1}}{2k^{l+1}} \Bigl(f_l^+(k) e^{-ikr} - (-1)^l f_l^-(k) e^{ikr} \Bigr), \tag{11}$$

と書くことができる。e^{-ikr} は入射波であり、e^{ikr} は反射波である。このとき S 行列を

$$S_l(k) = \frac{f_l^-(k)}{f_l^-(k)}, \tag{12}$$

と定義する。詳細については S. Aoyama, T. Myo, K. Kato, K. Ikeda, Prog. Theor. Phys. 116, 1 (2006) を参照せよ。

考える。

1.1 $\epsilon > 0$ を微小な正の実数とする。また、ハミルトニアン $H(x) = H_0(x) + V(x)$ の固有状態として、運動量 k (エネルギー $E = k^2/2m$) をもつ偶パリティの波動関数を $\psi_{k0}(x)$ とする。このとき、次の関係式

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{k0}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=+\varepsilon} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_{k0}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\varepsilon} + U_0\psi_{k0}(0) = 0, \tag{18}$$

が成り立つことを示せ。

1.2 $x \neq 0$ のとき偶パリティの波動関数 (運動量 k) は $\psi_{k0}(x) = \cos(k|x| + \delta_0)$ で与えられる。**Sec. 1.1** の結果を用いて、位相差 $\delta_0(k)$ は

$$\tan\delta_0(k) = \frac{U_0}{2k}, \tag{19}$$

で与えられることを示せ。

1.3 S 行列 $S_0(k) = e^{2i\delta_0(k)}$ は

$$S_0(k) = \frac{1 + i\tan\delta_0(k)}{1 - i\tan\delta_0(k)}, \tag{20}$$

と表されることに注意して、$S_0(k)$ は $k = iU_0/2$ においてポールを与えることを示せ。このとき、束縛エネルギー $U_0^2/(8m)$ をもつ束縛状態が存在することを示せ。

1.4 位相差 $\delta_0(k)$ を k の関数として描け [6]。

Sec. 2 応用問題：2 つの引力的な δ 関数ポテンシャルによる共鳴状態

$x = \pm a/2$ $(a > 0)$ に引力的な δ 関数ポテンシャルがある場合を考える。$U_0 > 0$ としてポテンシャルを

$$V(x) = -\frac{U_0}{4m}\big(\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)\big), \tag{21}$$

とする [7]。

2.1 ハミルトニアン $H(x) = H_0(x) + V(x)$ の固有状態として偶パリティの波動関数 (運動量 k) の波動関数 $\psi_{k0}(x)$ を考える。このとき、$\epsilon > 0$ を微小な正の実数として、$x = \pm a/2$ 近傍で

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{k0}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pm a/2+\varepsilon} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_{k0}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pm a/2-\varepsilon} + U_0\psi_{k0}(\pm a/2) = 0, \tag{22}$$

が成り立つことを示せ。

[6] 3 次元の散乱の場合、束縛状態が一つあると位相差は $\delta = \pi$ から始まる (“Levinson の定理”を参照)。しかし、1 次元の場合はそうではないことが指摘されている。Shi-Hai Dong, Zhong-Qi Ma, International Journal of Theoretical Physics, 39, 469 (2000) [arXiv:quant-ph/9903016] を参照せよ。

[7] $a \to 0$ の極限において、この $V(x)$ は **Sec. 1** で与えられた δ 関数ポテンシャルに帰着する。

2.2 $|x| \le a/2$ および $|x| > a/2$ において、波動関数 $\psi_{k0}(x)$ が

$$\begin{aligned} \psi_{k0}(x) &= \cos kx \quad (|x| \le a/2), & (23)\\ \psi_{k0}(x) &= \cos(kx \pm \delta_0) \quad (|x| > a/2), & (24) \end{aligned}$$

で与えられるとする。δ_0 は位相差である。このとき、δ_0 は k の関数として

$$\tan\delta_0 = \frac{4k/U_0 + \sin ka}{1+\cos ka}, \tag{25}$$

で与えらえることを示せ。

2.3 運動量について $k \to 0$ あるいは ∞ の極限それぞれにおいて、位相差 δ_0 は

$$\begin{aligned} \tan\delta_0 &\simeq \frac{U_0}{2k(1+U_0 a/2)} \quad (k \to 0), & (26)\\ \tan\delta_0 &\simeq \frac{U_0}{4k}(1+\cos ka) \quad (k \to \infty), & (27) \end{aligned}$$

で与えられることを示せ。

2.4 散乱振幅

$$f_0(k) = \frac{1}{k}\frac{1}{\cot\delta_0 - i}, \tag{28}$$

は $\cot\delta_0 = 0$ を満たす k に対して大きな値をもつので散乱過程に大きな寄与をする。この k は

$$\sin ka = -\frac{4k}{U_0}, \tag{29}$$

を満たすことを示せ。

2.5 $\sin k_r a = -4k_r/U_0$ の解 k_r に対して共鳴エネルギーは $E_r = k_r^2/2m$ 与えられる。このとき崩壊定数 Γ を求めよ。

Sec. 3 発展問題：Feshbach 共鳴状態（2 チャンネル問題）

質量 m をもつ粒子が 2 チャンネルの内部自由度をもつとして、それぞれを ψ_g 状態と ψ_e 状態とする。ψ_g と ψ_e の結合による共鳴状態の生成を考える。ψ_g はエネルギーが低い状態であり、ψ_e はエネルギーが高い状態であるとする。ψ_g と ψ_e の間に相互作用がないとき、それぞれのエネルギーを E_g および E_e とする $(E_g < E_e)$。このとき、自由粒子のハミルトニアンは、ψ_g と ψ_e をベースとする 2×2 行列

$$H_0(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + E_g & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + E_e \end{pmatrix}, \tag{30}$$

で与えられる。ここで、ψ_e 状態には $x = 0$ で引力的な δ 関数ポテンシャルがあるとしよう。また、ψ_g と ψ_e が $x = 0$ で相互作用をするとし、相互作用は δ 関数で与えられるとしよう。このとき、$U_0 > 0$ として、相

互作用を表すポテンシャルは ψ_g と ψ_e をベースとする 2×2 行列

$$V(x) \;=\; -\frac{1}{2m}\delta(x)\begin{pmatrix} 0 & U_1 \\ U_1 & U_0 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

で与えられる。$U_0 > 0$ なので、対角成分 (2,2) において ψ_e 状態には引力が働いていることに注意する。ただし、この引力は非常に弱いものであると考えて、$U_0^2 \ll 8m(E_e - E_g)$ が満たされるとする。非対角成分 (1,2) あるいは (2,1) は ψ_g 状態と ψ_e 状態の間の相互作用を与えていることがわかる。ハミルトニアン $H(x) = H_0(x) + V(x)$ の固有状態として偶パリティの状態 $\psi(x) = \big(\psi_g(x), \psi_e(x)\big)$ を考える。

3.1 $\epsilon > 0$ を微小な正の実数とする。このとき、

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=+\varepsilon} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\varepsilon} + U_1\psi_e(0) = 0, \tag{32}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_e(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=+\varepsilon} - \left.\frac{\mathrm{d}\psi_e(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=-\varepsilon} + U_0\psi_e(0) + U_1\psi_g(0) = 0, \tag{33}$$

が成り立つことを示せ。

3.2 偶パリティの波動関数を考えて、$|x| > 0$ で $\psi_g(x)$ と $\psi_e(x)$ が

$$\psi_g(x) \;=\; \alpha\cos(k|x| + \delta_0), \tag{34}$$

$$\psi_e(x) \;=\; \beta e^{ik_e|x|}, \tag{35}$$

で与えられるとする。δ_0 は位相差である。係数 α および β は ψ_g 状態および ψ_e 状態の規格化を与える。エネルギー固有値 E に対して、k と k_e は

$$k^2 \;=\; 2m(E - E_g), \tag{36}$$

$$k_e^2 \;=\; 2m(E - E_e), \tag{37}$$

で与えらえる。以下では、簡単な状況を考えるために、ψ_e 状態について "束縛状態"であると見なせる場合を考えて、エネルギー固有値 E は $E < E_e$ であるしよう [8]。ψ_e は "束縛状態"であるとしているので、$|x| \to \infty$ で波動関数がゼロになるように $k_e = i\kappa_e$ ($\kappa_e > 0$ は正の実数) であるとする。このとき、次の関係式

$$\tan\delta_0 = \frac{U_1^2}{2k(2\kappa_e - U_0)}, \tag{38}$$

が成り立つことを示せ。

3.3 Sec. 3.2 の状況のもとで共鳴状態が存在することを示せ。このとき共鳴エネルギー E_r と崩壊幅 Γ は

$$E_r \;=\; E_e - \frac{U_0^2}{8m}, \tag{39}$$

$$\Gamma \;=\; \frac{U_0 U_1^2}{8\sqrt{2m^3}\sqrt{E_e - E_g - U_0^2/8m}}, \tag{40}$$

で与えられることを示せ。ただし、$E_g < E < E_e$ であることに注意せよ。

[8] 以下の **Sec. 3.3** で見るように、実際には安定な束縛状態ではなく、有限な寿命をもつ準束縛状態（共鳴状態）であることに注意する。

3.4 Sec. 3.3 で得られた結果の物理的意味を考えてみよう。共鳴エネルギーに U_0 が現れて、崩壊幅に U_1^2 が現れることは、何を意味しているだろうか？

3.5 2 チャンネルの結合によって力学的エネルギーの一部が内部エネルギーに転換することによって生じる共鳴状態を Feshbach 共鳴という。**Sec. 3.1-3.4** で得られた共鳴状態が Feshbach 共鳴であることを説明せよ。

Sec. 4 おまけ問題：奇パリティ状態の束縛／共鳴状態？

Sec. 1 から **Sec. 3** までは偶パリティ状態を考えた。これらの問題で奇パリティ状態を考えると解はどのように変化するでしょうか？