修士論文

超対称ゲージ理論の
非摂動的解析と双対性

寺嶋　靖治
筑波大学大学院 博士課程 物理学研究科 2 年
学籍番号 945207

平成 18 年 9 月 22 日

要旨

超対称ゲージ理論は現象論的にも非常に有望で興味深いものである。ごく最近、この N=1 超対称ゲージ理論における非摂動的効果を厳密に導き出すという大きな進展があった。

そこで、本論文では、N=1 超対称ゲージ理論における厳密な解析の方法とその具体例としての超対称 QCD の非摂動的な解析の結果、特に真空の相構造についての結果を紹介する。この相構造の中には、カイラル対称性の破れを伴わない閉じ込め相や、四次元の N=1 超共形場理論などの今までにあまり知られていなかった相を含む。特に赤外固定点が超共形場理論で記述される相の場合は、non-Abelian 双対性という顕著な性質を持っている。この双対性は二つのゲージ群を入れ換え、強結合の物理と弱結合の物理を結び付けるという興味深いものであることがわかる。さらに、この超対称 QCD に随伴表現場 X を加えた理論も考察する。そこでも双対性が重要な物理的意味を持つ。

目 次

1　序論

現在、ほとんどの素粒子物理学者が正しいだろうと考えている理論として、標準理論がある。この標準理論はクォーク、レプトンと Higgs 粒子とゲージ群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ のゲージボソンを基本的な粒子としたゲージ理論で記述される。この理論は現在実験で観測されているエネルギーでは実験と矛盾しないことが知られている。しかし、統一理論という観点から見た場合には、標準理論は理論的に自由に変えられるパラメーター（実験と合うように設定される）が多すぎるという欠点がある。さらに、標準理論は Higgs 場というスカラー場を含み、その質量は二次の発散を示す。これは、通常の繰り込み理論を適用すれば問題とはならないが、カットオフスケールを Higgs 場の質量よりも非常に大きいとすれば、Higgs 場の裸の質量を非常に精密に決めなければならない。これが Higgs 場の自然さ (naturalness) の問題と呼ばれるものである。（フェルミオンは二次ではなく log の発散なので問題ない。）

この問題を解決する一つの可能性が超対称ゲージ理論である。この超対称ゲージ理論においてはボソンとフェルミオンの間に一対一の対応があり、ボソンの 2 次の発散をフェルミオンの寄与で打ち消して、log 発散に落とすようになっている。また、$SU(5)$ などのように標準理論のゲージ対称性 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を含むより大きなゲージ群に支配される大統一理論を想定すれば、理論に含まれる自由パラメーターの数も制限されてくるであろう。この場合、大統一スケールで標準理論の三つのゲージ結合定数が一致することが必要であるが、現在得られている実験データーから繰り込み群方程式を使って計算してやれば、超対称性がある場合にのみ、三つのゲージ結合定数が 10^{16}Gev のエネルギー領域で一致することが報告されている [1]。さらに、大統一理論よりもさらにパラメーターの数を少なくするような理論として超弦理論があるが、この場合でも超対称性は基本的である。

このように超対称ゲージ理論は現象論的には大統一理論の候補として非常に有望で、現在、多数の研究者によって精力的に調べられている。このようなゲージ理論を調べる上で、最もよく使われる方法は、ゲージ結合定数に関する摂動論である。この摂動論が信頼できるのは、漸近自由な理論（現象論的にも理論的にも有用なものの多くは漸近自由）の

場合には、その理論を特徴づけるエネルギースケール（QCD の場合はいわゆる Λ スケール) よりも高いエネルギー領域においてである。しかしながら、低エネルギー領域、つまり強結合領域の物理は摂動論では全く扱えず、非摂動的解析が必要となる。ごく最近に至るまで超対称ゲージ理論の非摂動的取り扱いはほとんどなされていなかった。これは四次元のゲージ場理論において非摂動的な解析の手法としては、格子ゲージ理論や 1/N 展開、Schwinger-Dyson 方程式などの限られた方法しか知られていなかったためである。さらに、これら格子ゲージ理論や 1/N 展開を用いても厳密な結果が得られることはなく、格子ゲージ理論などでは計算機実験などによらないと物理量を計算するのは難しい。しかも、今のところ、これらの方法が使えるのは非常に簡単な模型についてのみであり、超対称ゲージ理論については非摂動的な解析というのはあまりなされていなかった [2]。例えば QCD を自然に超対称化したと考えられる超対称 QCD の場合でさえ、質量 0 の模型ではどんな真空が実現されているのかわかっていなかった。つまり、閉じこめ相となっているのかどうかさえわかっておらず、研究者達に謎を残し続けてきた。

しかし、1994 年ごろ、Seiberg は四次元の超対称ゲージ理論に関するある種の厳密な結果を導くことに成功した [3]。この研究と、その後に続けられた Seiberg を含む研究者達による研究により、四次元の超対称ゲージ理論における様々な振る舞いが調べられてきた [7][4][5][8][9]。得られた結果の中には、通常の四次元のゲージ理論についての常識を覆すような現象が多数含まれている。（例えば、カイラル対称性の破れを伴わない閉じこめや、四次元の相互作用する超共形場理論など。）これらと並んで N=2 超対称性という大きい対称性を持ったゲージ理論の厳密解を非常に巧みに導出した Seiberg と Witten の仕事 [6][10] も非常に興味深いものである。。この理論では閉じこめが質量 0 の磁気単極子の凝縮で起こるという、'tHooft などによる二十年近く前のアイデアが実際に実現されていることがわかるなど、非常に興味深い現象が観察される。しかも、超弦理論や可積分系との関連も指摘され非常に活発に研究されている。このように厳密な解析が可能という性質のため、これらの四次元の超対称ゲージ理論は、あまり理解が進んでいない強く相互作用する四次元の場の理論全体に対する ”実験室 ”としての役割も果たし、これらを研究することは有

用であると考えられる。

この N=1 四次元の超対称ゲージ理論の性質の内、最も興味深いと思われるのは non-Abelian 双対性と呼ばれる性質だろう [7]。この non-Abelian 双対性は理論が低エネルギーの極限で四次元の相互作用する共形場理論になる場合に存在する双対性で、ゲージ群の違う二つの超対称理論がその低エネルギーの極限では同一の物理的内容を表すというものである。このような双対性が漸近自由な理論で存在するということ自体も驚きであるが、この non-Abelian 双対性は強結合理論と弱結合理論を入れ替えるような双対性なので、一方の理論の強結合の物理をもう一方の理論の古典的な描像、または、準古典的な描像で理解できるようになるため、非常に有用でもある。

そこで、本論文では Seiberg の仕事を中心に N=1 四次元超対称ゲージ理論の非摂動的解析と non-Abelian 双対性を紹介する。

第二章では、まず、四次元超対称性とはどんなものかを簡単に説明した後、そこで、基本的な役目を果たすカイラル超場やベクトル超場を導入する。これらは超対称ゲージ理論を構成する基本的な要素をなす。さらに、超対称ゲージ理論においては超対称性を保つが物理的に異なった真空が一つの理論の中に縮退して現れるという顕著な性質がある。そこで、その縮退がどの程度解けるか、つまり超対称性の自発的破れについても議論した。

第三章では、超対称ゲージ理論における Wilson 型低エネルギー有効理論について述べた。超対称ゲージ理論の厳密な結果は全てこの低エネルギー有効理論についてのものである。この Wilson 型低エネルギー有効理論とは、高エネルギーの場の自由度を先に積分してしまい、残る低エネルギーの場の自由度だけで書かれた理論を構成したものであり、これから理論の真空構造、すなわち様々な相構造を解析する事ができる。この低エネルギー有効理論をまともに評価するということは非常に難しく通常は無理である。しかし、超対称理論の場合、低エネルギー有効理論は、通常のフレーバー対称性やバリオン数保存などの制限に加えて、超対称性に由来するカイラル場についての正則性という性質を持つ。この制限は実は非常に強力であり、弱結合極限などの性質と合わせると、低エネルギー有効理論を完全に（正確にいうと低エネルギー有効理論のスーパーポテンシャルを完全に）決

定する場合がある。これが最近の四次元の超対称ゲージ理論の厳密な解析の鍵となった。この正則性に加えて、低エネルギー理論に対しては’tHooft 量子異常釣り合い条件 [11] が課せられ、低エネルギースペクトルの決定に重要である。そこでこの章では、’tHooft 量子異常釣り合い条件についても簡単に述べた。

第四章では、最初に Seiberg によって調べられた模型であり、最も理解が進んでいる四次元 N=1 超対称ゲージ理論の一つである、超対称 QCD を低エネルギー有効理論を使った厳密な解析の例として解説した [3][7]。この模型はゲージ群 $SU(N_c)$ とフレーバー数 N_f を持つ。フレーバー数を変えていくと、$N_f < N_c$ の場合は量子論的には真空が存在せず、$N_f = N_c$ の場合はカイラル対称性を破る閉じこめ相の真空、$N_f = N_c + 1$ の場合はカイラル対称性を破らない閉じこめ相の真空、$N_c + 2 \leq N_f \leq \frac{3}{2}N_c$ の場合は低エネルギー極限で双対理論である “magnetic” 理論のグルーオンやクォークが自由場として存在する相、$\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の場合は低エネルギー極限でグルーオンやクォークが相互作用する超共形場理論、$3N_c \leq N_f$ の場合は低エネルギー極限でグルーオンやクォークが自由場として存在する相にが、それぞれのフレーバー数領域で存在することを示す。特に $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の場合は non-Abelian 双対性が存在することが明らかになる。

第五章では、Kutasov と Schwimmer による超対称 QCD にゲージ群の随伴表現に属するカイラル場を加えた模型の解析を紹介する [12][13][14]。これは N=1 超対称 QCD の拡張模型であり、やはり non-Abelian 双対性の存在を示すことができる。また、超対称 QCD と比べて余計につけ加えられた場のために、理論の変形の自由度が多数存在する。そのため、non-Abelian 双対性が確かに正しいと考え得るに足る非自明な証拠が得られる。さらに、non-Abelian 双対性が超対称 QCD に限らない N=1 超対称ゲージ理論において一般的な性質ものであることもわかる。実際、non-Abelian 双対性は、ゲージ群を $SO(n)$ や $Sp(n)$ などの群に変えた模型や、ゲージ群の対称または反対称テンソル表現に属するカイラル超場を持つ模型など、非常に多くの模型に対して得られている [15][16][17]。

2　4次元超対称性

2.1　超対称性

素粒子理論において、対称性の考察は非常に有用なものである。特に最近のゲージ場理論や超弦理論においては、理論の対称性が重要な役割を果たす。そのうちで最も基本的なものは、特殊相対性理論から従う Poincaré 不変性であろう。この対称性を拡張する試みは古くから行われてきたが、４次元における自明でない唯一の可能性が超対称性である[18][19]。これは反交換関係も使って表される超 Lie 代数で表現され、Weyl spinor であるフェルミオン的な生成子 $Q^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}$ を使って、

$$\begin{aligned}\{Q^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} &= 2\sigma^m_{\alpha\dot{\beta}} P_m \delta^A_B \\ \{Q^A_\alpha, Q^B_{\dot{\beta}}\} &= \{\bar{Q}^A_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}B}\} = 0 \\ \left[P_m, Q^A_\alpha\right] &= \left[P_m, \bar{Q}_{\dot{\alpha}A}\right] = 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

と表される。ここで、Weyl spinor などの規約は [20] に従う。また、P_m は並進移動の生成子である４元運動量演算子であり、ギリシャ文字が２成分 Weyl spinor の足、ラテン文字の小文字が４元ベクトルの足を表す。ラテン文字の大文字 (A,B) は１から超対称性の数といわれる N まで値を取る。この N がいくつかに従って、N=1 超対称性、N=2 超対称性などといわれる。唯一の可能性といったが、実は N が２以上の超対称性に対しては中心拡大といわれる拡張が可能であり、重要な役割を果たす。Appendix にその最も一般的な代数を示す。

この超対称性を持った標準模型を拡張した理論は、その対称性のために理論の紫外発散が弱くなり、標準模型におけるヒッグス場の自然さの問題というものを解決するという良い性質がある。しかし、超対称性があれば後で、(2.5) 節でわかるように、上の交換関係から理論のスペクトラムに同じ質量を持ったボソンとフェルミオンが存在する。現実の世界では、明らかにこのようなことは起こっていない。そこで、今述べた良い性質を保ったままボソンとフェルミオンの間に質量の差を出すために２つの方法が考えられている。１つは、ソフトな破れ、といわれる方法で、直接超対称性を破る項を理論の作用に加える。

このとき、”良い性質 ”を保つように適当に ”ソフト ”な項だけをつけ加える。この超対称性を破る項は、超重力が自発的対称性の破れた結果低エネルギーで超対称性を破る項が現れると解釈できることが知られている [22]。（超重力とは超対称性をゲージ化して局所的対称性にしたもので、自動的に重力を含む。超弦理論の低エネルギー理論にも超重力が現れる。超重力に対して、今述べた超対称性を大局的超対称性と呼ぶこともある。）もう一つの方法は、超対称性を自発的に破る方法である。これは非常に難しいことが知られている。しかし、動的超対称性の破れと呼ばれる、量子効果によって超対称性を自発的に破ることができれば、ゲージ階層性の問題が解決できるといわれている [21]。ゲージ階層性の問題とは異なるゲージ場を特徴づけるエネルギースケール（電弱スケール、大統一スケール、プランクスケールなど）が非常に大きく違うということである。動的超対称性の破れの場合、後述する超対称性における非繰り込み定理により、非摂動効果だけが自発的に対称性を破る項を有効作用につくることができ、それがゲージ対称性も自発的に破れば、ゲージ階層性を説明できる。

さらに、標準模型に現れる三つの相互作用定数が、対称性を仮定すると大統一スケールで一致するという結果がある [1]。

このように、超対称性は現実的な素粒子論における模型としてもおもしろい可能性である。しかし、通常の４次元の場の理論と違い、以下にみるように４次元超対称性理論は、摂動論によらない厳密な結果、特にどのような真空が実現されるのかがわかる場の理論としても非常に興味深い。そこで、次節でそれを調べるための準備として、超空間と超場といわれる超対称場の理論で重要な道具を導入する。

2.2　超空間と超場

４元運動量演算子 P_m は四次元空間上の場の上で $-i\partial/\partial x^m$ と表されるが、$Q, \bar{Q}$ も同じように表現したい。そのため、４次元ミンコフスキー空間座標 $\{x^m\}$ に加えて、反交換するグラスマン数である座標 $\{\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\}$ を導入する。このように、グラスマン数の座標でパラメトライズされる空間を超空間と呼ぶ。

すると、この超空間上の関数はグラスマン数の性質から、

$$
\begin{aligned}
F(x,\theta,\bar\theta) &= f(x)+\theta\phi(x)+\bar\theta\bar\chi(x)+\theta\theta m(x)+\bar\theta\bar\theta n(x)+\theta\sigma^m\bar\theta v_m(x) \\
&\quad +\theta\theta\bar\theta\bar\lambda(x)+\bar\theta\bar\theta\theta\Psi(x)+\theta\theta\bar\theta\bar\theta d(x)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

とグラスマン座標について有限次元でテイラー展開でき、いくつかの通常の関数で表すことができる。ここで、θ と $\bar\theta$ の多項式の基底を、Lorentz 変換性が明白になるように選んだ。この $F(x,\theta,\bar\theta)$ を超場と呼ぶ。この超場の上では超対称性の生成子 $Q,\bar Q$ は、

$$
Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^m} \tag{3}
$$

$$
\bar Q_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^m} \tag{4}
$$

と書け、$P_m=+i\partial/\partial x^m$ として、式 (1) を満たすことが具体的な計算によって示せる。

さらに、超場の各成分（上の $f(x)$ や $\phi(x)$ などのこと）を理論に現れる場（演算子、特に複合演算子だと思ってもよい）として、超対称変換を、

$$
\delta_\xi F(x,\theta,\bar\theta) \equiv (\xi Q+\bar\xi\bar Q)F = \delta_\xi f(x)+\theta\delta_\xi\phi(x)+\cdots \tag{5}
$$

と超場と各成分場の両方に対して定義する。各成分場に対しては、$\delta_\xi f(x)=(\xi Q+\bar\xi\bar Q)f(x)$ で $\xi,\bar\xi$ に比例する項をくらべて $Q,\bar Q$ を決めれば、式 (1) を $P_m=-i\frac{\partial}{\partial x^m}$ として満たすことがわかる。

これで超対称代数である式 (1) の場の理論での表現と、それをまとめた超場という便利な道具が得られたが、それは、式 (2) に見られるようにたくさんの成分が含まれていた。そこで、超場に制限をつけて表現の大きさを小さくすることを考える。これには、2 つの制限の付け方があり（カイラル超場とベクトル超場)、だいたいその 2 つのやり方で超対称性のもとでの全ての変換性を持った場を構成できることが知られている。次節でそれらを説明する。

2.3 カイラル超場とベクトル超場、超対称ラグランジアン

カイラル超場とは、

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^m} \tag{6}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^m} \tag{7}$$

を使って、

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{8}$$

を満たす超場として定義される。このカイラル超場は、$y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ を使って、

$$\Phi(y,\theta,\bar{\theta}) = A(y) + \sqrt{2}\theta\Psi(y) + \theta\theta F(y) \tag{9}$$

と展開されることが、

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}y^m = \bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^\beta = 0 \tag{10}$$

を使えばわかる。同様にして、D を $\bar{D}$ に換えたものを反カイラル超場と呼ぶ。この超場は、複素スカラー A、Weyl フェルミオン Ψ を１つずつ含む（次元２の F は補助場とみなされる。）また、$D,\bar{D}$ は $Q,\bar{Q}$ と反交換することが示せる。式 (5) を使えば、カイラル超場の各成分場の超対称変換は、

$$\delta_\xi A = \sqrt{2}\xi\Psi \tag{11}$$

$$\delta_\xi\Psi = i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\partial_m A + \sqrt{2}\xi F \tag{12}$$

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\Psi \tag{13}$$

となることがわかる。n 個のカイラル超場 Φ^i だけを使った超対称な模型は、

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta}K(\Phi^i,\Phi^{\dagger j}) + \left[\int d^2\theta W(\Phi^i) + h.c.\right] \tag{14}$$

というラグランジアンで与えられる。ここで、h.c. はエルミート共役を表し、$\int d^2\theta\,\theta\theta = 1$ などと規格化されているとする。また、K,W は任意関数である。K を Kähler ポテンシャ

ルと呼び、W をスーパーポテンシャルという。このラグランジアンを成分場で表した式を Appendix にまとめた。

また、$K = \Phi^i \Phi^i$,W を 3 次までの多項式と置いたものを Wess-Zumino 模型という [23]。これは、補助場を積分すると、通常の運動項と Yukawa 結合と 4 次までのスカラーポテンシャルを持っている。Wess-Zumino 模型は、カイラル超場だけを使ってつくれる、通常の意味で繰り込み可能な最も一般的な超対称性を持った模型である。

ベクトル超場とは、

$$V = V^\dagger \tag{15}$$

で定義される超場である。ここで $V^\dagger =$ V のエルミート共役、であり、

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar{\theta}) \;\; = \;\; & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ & + \frac{i}{2}\theta\theta\left[M(x) + iN(x)\right] - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\left[M(x) - iN(x)\right] \\ & - \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi(x)\right] \\ & - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

と展開できる。これは、スピン 1 の成分場 v_m を含むので、ゲージ場を含む多重項になっている (v_m がベクトルポテンシャル)。そこで、あるゲージ群の生成子の数だけ V_a があるとする。一般にゲージ場を含む作用に対しては、ゲージ変換で不変なものだけが許されることが知られている。そこで、ベクトル超場に対してはゲージ変換を超対称な形に一般化した変換を、$V = T^a V_a$ という行列と Λ_a というゲージ変換の生成関数をカイラル超場に拡張したものを使って、

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} \tag{17}$$

と定義する。ここで $(T^a)_{ij}$ はゲージ群の生成子の表現行列の一つであり、$\Lambda = T^a \Lambda_a$ である。この変換が表現行列 T^a によらないことは、Hausdorff の公式を使えばわかる。また、$V' = V'^\dagger$ であることはすぐわかる。さらに、Hausdorff の公式で Λ のべき展開したときの最初の項をみると、

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \cdots \tag{18}$$

となるので、QED の Coulomb ゲージのように、ゲージ変換で式 (16) の C, χ, M, N を消して、λ, v_m, D だけで書くことができる。このゲージを Wess-Zumino ゲージと呼ぶ。ただし、通常の意味のゲージ変換は Wess-Zumino ゲージに固定した後でも残っている。このように Wess-Zumino ゲージに固定した後の超対称変換は Appendix に記した。v_m はスピン 1 のゲージボゾン、λ はスピン 1/2 の Weyl フェルミオン（ゲージーノと呼ばれる）、D は補助場にそれぞれなる。カイラル超場に対してもそれらがゲージ群の適当な表現（表現行列 $(T^a_\Phi)_{ij}$）であるとして $(\Phi)^i = \Phi^i$ と列ベクトルでかけば、

$$\Phi' = e^{-i\Lambda}\Phi \tag{19}$$

とできる。Φ' も、また、カイラル超場となる。また、

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}e^{-V}D_\alpha e^V \tag{20}$$

とすると、W はカイラル超場となり上の拡張されたゲージ変換で、

$$W_\alpha{}' = e^{-i\Lambda}W_\alpha e^{i\Lambda} \tag{21}$$

と変換する。これらの超場を使って拡張されたゲージ変換で不変な超対称ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16kg^2}\mathrm{Tr}\left(\int d^2\theta\, W^\alpha W_\alpha + h.c.\right) + \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\Phi^\dagger e^V\Phi \tag{22}$$

とかける。ここで、$\mathrm{Tr}(T^aT^b) = k\delta^{ab}$ とする。このラグランジアンの第一項はゲージ場の運動項を、第二項はカイラル超場の運動項をそれぞれ与える。これは、$V \to 2gV$ としてから、成分場でかけば、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;\; = \;\; & -\frac{1}{4}v^a_{mn}v^{a\,mn} + \frac{1}{2}D^aD^a \\
& -\mathcal{D}_mA^\dagger\mathcal{D}_mA - i\bar{\Psi}\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m\Psi + F^\dagger F \\
& +i\sqrt{2}g\left(A^\dagger T^a_\Phi\Psi\lambda^a - \bar{\lambda}^aT^a_\Phi A\bar{\Psi}\right) + gD^aA^\dagger T^a_\Phi A
\end{aligned} \tag{23}$$

となる [24][25]。ここで、

$$\mathcal{D}_mA \;\; = \;\; \partial_mA + igv^a_mT^a_\Phi A \tag{24}$$

$$\mathcal{D}_m\Psi = \partial_m\Psi + igv_m^a T_\Phi^a \Psi \tag{25}$$

$$\mathcal{D}_m\lambda^a = \partial_m\lambda^a - gt^{abc}v_m^b\lambda^c \tag{26}$$

$$v_{mn}^a = \partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a - gt^{abc}v_m^b v_n^c \tag{27}$$

$$[T^a, T^b] = it^{abc}T^c \tag{28}$$

であり、全微分項は全て落とした。このラグランジアンは、補助場以外の運動項を全て含み、通常の意味でゲージ不変であり、補助場を積分すれば、特別な形の Yukawa 結合とスカラーポテンシャルを持つ。

いま、カイラル超場の運動項を最も簡単な形で入れたが、前に述べたような一般の Kähler ポテンシャルの場合でもゲージ場をいれることが可能なことが知られている [26]。

さらに、物質場（カイラル超場のこと）の相互作用には、

$$\mathcal{L}_F = \int d^2\theta\, W(\Phi^i) + h.c. \tag{29}$$

を加えることができる、W はゲージ群の変換で不変な Φ^i の関数である。これはスーパーポテンシャル、または、F 項と呼ばれる。

2.4 真空の moduli 空間

理論に何らかの対称性があり、しかも、それらが自発的に破れている場合、真空にはその対称性に付随した縮退がある。破れている対称性が、大域的な時は理論のスペクトルに質量０の Nambu-Goldstone 粒子が現れ、ゲージ化された局所対称性の時は Higgs 機構が起こると考えられる（この場合、古典的にはゲージ変換で互いに移り変わる真空が存在するが、真空が縮退しているとは言わない。）このとき、異なった真空でも物理的には同じ理論になっている。

しかし、前節の超対称ゲージ理論は多くの場合、対称性に付随しない真空の縮退を持っている。これを flat directions と呼ぶ

この縮退した真空は、通常、物理的に違う内容を持っている。例えば、理論の持っている大域的対称性や、粒子のスペクトルなどが違っている。そこで、この縮退した真空をパ

ラメトライズする空間を、真空の moduli 空間、または、単に moduli 空間と呼ぶ。

この真空の moduli 空間は、古典的に考えたものが、そのまま量子論にいっても同じものになるとは限らない。特に、超対称性を持っていない理論でも無理に flat directions を持たすようなこともできるが、超対称理論の非繰り込み定理や, 大域的対称性で保護されていないので、摂動論の範囲で既に真空の縮退が解かれてしまう。（超対称理論の非繰り込み定理というのは摂動論の範囲ではスーパーポテンシャルが繰り込みを受けないというものである。）超対称性理論の場合でも、後で見るように、古典的な場合とは異なる moduli 空間が量子論的非摂動効果で現れることが多い。そこで、古典的 moduli 空間と量子論的 moduli 空間を区別する必要がある。

古典的 moduli 空間はスカラーポテンシャルを見てやれば、それを最小にするところとして決まる。スカラーポテンシャルは補助場 D,F を積分すれば、

$$V(A) = \frac{1}{2g^2}\sum_a D^{a2} + \sum_i |F_i|^2 \tag{30}$$

$$where\ D^a = \sum_{i,k,l}(A_i)^{\dagger l}(T_i^a)_l^k(A_i)_k \tag{31}$$

$$F_i = \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} \tag{32}$$

となることがわかる。ここで、D^a の表式ではゲージ群の表現の足も具体的にかいた。F_i の表式は、正確にはゲージ群の表現の足もいる。T_i^a は i 番目のカイラル超場の表現行列でエルミート行列に選んだ。W(A) はスーパーポテンシャルをカイラル超場をその一番低い成分、つまりスカラー場で置き換えたものである。このスカラーポテンシャルは二乗の和の形をしている。そこで、真空を決める条件は、

$$D^a = 0 \quad for\ all\ a \tag{33}$$

$$F_i = 0 \quad for\ all\ i \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

という二つの条件になる。前者は D-flatness 条件などと呼ばれる。この二つの方程式をといて、ゲージ群の作用で同値なものを除けば、flat directions が求められる。

ここで、flat directions の簡単な例を挙げる。ゲージ群が U(1) でチャージが 1 と-1 のカイラル超場である Q と $\tilde{Q}$ を持つ理論を考えると（スーパーポテンシャルはないとする)、上の式から、

$$D = Q^\dagger Q - \tilde{Q}^\dagger \tilde{Q} \quad = 0 \tag{36}$$

が flat directions の条件である。これは、

$$| < Q > | = | < \tilde{Q} > | = a \tag{37}$$

ということで、これからゲージ変換の自由度を消すと、

$$< Q > = < \tilde{Q} > = a \tag{38}$$

となる。この例では、真空期待値 a が 0 でなければ超 Higgs 機構 (超対称性を保った Higgs 機構のこと。この時、ゲージボソンが質量を得るのに対応して、ゲージーノとカイラル超場の Weyl フェルミオンが有質量 Dirac フェルミオンとなる。また、局所的超対称性、つまり超重力に対する Higgs 機構も超 Higgs 機構という）で U(1) ゲージ群が壊れている。そのゲージボソンの質量は a の値によって違うので、a の値の違う真空は明らかに物理的に異なったものになる。

量子論的にどうなるか後から一つ一つの模型について調べてゆく。

2.5 超対称性の自発的破れと Witten 指数

超対称性は現実には破れていなければならないので、その自発的破れを考えるのは重要である。まず、spinor の基底として Majorana 基底をとると、

$$Q_i^\dagger = Q_i \tag{39}$$

と超対称性の生成子が、エルミート演算子で表せる（ここで、i=1,2,3,4 なので四つの演算子。）ハミルトニアンは、

$$H = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(Q_i)^2 \tag{40}$$

とエルミート演算子の二乗の和の形になる。すると、

$$< 0|H|0 > \quad \geq 0 \tag{41}$$

がわかる。さら H が超対称性の秩序変数となっている。つまり、$H = 0$ のとき超対称性は破れていず、$H > 0$ のとき超対称性は破れている。ただし、H はハミルトニアン演算子とともに、その真空期待値も表すことにする。これは、ハミルトニアンがエルミート演算子 Q の二乗の和の形になっていることと、$Q|0 >= 0$ かどうかが超対称性が自発的に破れているかどうかを決めることから従う。しかし、これは時間方向の並進対称性も自発的に破れていることも意味するわけではもちろんない（エネルギー運動量テンソルにメトリックに比例した項をつけ加えれば真空のエネルギーを 0 にできる。）

また、$N > 1$ の場合は、

$$H = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(Q_{i1})^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(Q_{i2})^2 = \cdots \tag{42}$$

となるので、例えば Q_{i1} が自発的に破れると $H > 0$ となるので、全ての超対称性が同じスケールで破れて N=0 となる。一部分の超対称性だけを破ることは超重力までいけば可能である。

古典的には超対称性が自発的に破れていない模型でも、量子論では超対称性が自発的に破れる可能性がある（動的超対称性の破れ）。内部対称性の場合は、ポテンシャルの形を少し変えても普通は対称性は保たれたままだが、超対称性の場合はポテンシャルの小さい変化で $H > 0$ となりえる。そういう意味で、超対称性は自発的破れに対して不安定といえる。しかし、摂動論では量子効果はスーパーポテンシャルには効かない、という非繰り込み定理からの結果があり、非摂動効果だけが超対称性を破ることができる。これがインスタントンのように小さい寄与でありゲージ対称性も自発的に破れば、先に述べたようにゲージ階層性問題を解決する。そこで、非摂動効果をいろいろな模型で計算したいが、これは普通は簡単ではない。次章から超対称模型の場合に非摂動効果を低エネルギーで具体的に評価する手段を考察するが、ここでは、超対称性の破れに対して制限を与える、Witten 指数というものを導入する [27]。

Witten 指数とは、有限の時空間に対して定義された超対称模型に対して（超対称性を保つために周期境界条件をおいた４次元トーラスを時空間とする）、

$$\mathrm{Tr}(-1)^F \tag{43}$$

で定義される。ここで演算子 F はフェルミオン数で、Tr は完全系を張る全ての状態に対する期待値の和を表す。また、

$$(-1)^F = exp(2\pi i J_z) \tag{44}$$

となる。J_z は全角運動量演算子の z 成分である（４次元トーラスに対しても 90 度の回転は定義できる。）

この指数の定義にある Tr は、実は基底状態に対してとればよいことがわかる。それは、運動量が０の励起状態のみを考えて超対称性の生成子の基底を Majorana 基底にとって定数倍すれば、

$$\begin{aligned} H &= Q_1^2 = Q_2^2 = Q_3^2 = Q_4^2 \\ Q_iQ_j + Q_jQ_i &= 0,\ for\, i \neq j \end{aligned} \tag{45}$$

とできる。そして、例えば、$Q = Q_1$ とすれば、

$$\begin{aligned} Q|b> &= \sqrt{H}|f> \\ Q|f> &= \sqrt{H}|b> \end{aligned} \tag{46}$$

とボソンとフェルミオンで励起状態が対をつくるためである。ボソンとフェルミオンの励起状態からの寄与は $(-1)^F$ で符号が違い、Tr で和をとると相殺する。運動量が０でなくても $(-1)^F$ が運動量と交換することから同様に相殺する。結局、Witten 指数に寄与するのは基底状態のみであることがわかった。

そこで Witten 指数を、

$$\mathrm{Tr}(-1)^F = n_B^{H=0} - n_F^{H=0} \tag{47}$$

と書き直せる。ここで、$n_B^{H=0}(n_F^{H=0})$ はボソン的な基底状態の数（フェルミオン的な基底状態の数）である。

このWitten指数にはいくつかの重要な性質がある。その最も重要な性質は、

$$\mathrm{Tr}(-1)^F \neq 0 \tag{48}$$

ならば超対称性は自発的に破れていない、というものである。これは、等式(47)のようにWitten指数がかけるので、$\mathrm{Tr}(-1)^F \neq 0$ ならば $n_B^{H=0}$、$n_F^{H=0}$ の片方、または、両方が0でないためである。

また、Witten指数は理論を少し変形しても変わらない。これは、パラメーターの変化に従って、基底状態から励起状態へ（または逆の方向に）ボソンとフェルミオンが対をつくって移動すると考えられるからである。ただし、理論の漸近的な振る舞いが変わる場合には、場の配位の無限遠から真空ができるというようなことが起き得て、Witten指数の値が変わり得る。

Witten指数の値は、カイラル超場からつくられる2次元超対称非線形シグマ模型の場合は、その理論の定義された多様体のEuler数であることがわかっている[27]。

４次元超対称ゲージ理論の場合にも物質場が入っていなければ、Witten指数の値はゲージ群のdual Coxeter数になることが示されている[27]。例えば、$SU(N)$ であれば N になる。物質場を含めても、それに質量があれば上の結果は変わらない。これは、質量を十分重くしてやればWitten指数の値は物質場が入っていない場合と変わらないことは明らかで、しかも、Witten指数がパラメーターの変化によらないことを使ってもわかる。物質場がゲージ群の実表現であれば質量項をつくれるので、質量０の理論でも有質量の理論からの極限で得られるものなら結果は変わらない。しかし、実表現でない場合には上の結果は適用できない。

このように、Witten指数は超対称性の破れに対して非常に強力ではあるが、超対称性の自発的破れが起こっているかどうかの判定にしか用いることができない。次章では、さらに別の手法を使って超対称性理論の非摂動的側面を調べる。

3　低エネルギー有効理論による厳密な解析の方法

3.1　低エネルギー有効理論

ある理論の低エネルギー有効理論とは、適当なエネルギースケールより低いエネルギーでもとの理論と同じ結果を与える理論である。これは、場の理論では繰り込み群の方法に従って、考えているスケールより高い質量を持った自由度を積分していき、高エネルギーでの作用を低エネルギーで評価したものとみなせる

低エネルギー有効理論の例には、物性論での超伝導を非常に良く記述する BCS 理論に対する Ginzburg-Landau 理論や、素粒子理論での QCD に対するシグマ模型など多くの例がある。QCD の場合は、高エネルギーではクォークやグルーオンで記述されるが、低エネルギーでの自由度は閉じこめのためハドロンやメソンとなっていて、それをシグマ模型が記述する。このシグマ模型は、QCD の低エネルギーでの振る舞いをうまく記述すると思われているが、その導出には多くの仮定（閉じこめ、カイラル対称性の破れなど）が含まれている。もちろん、相互作用も完全には決まらない。これは簡単な模型以外では、繰り込み群を厳密に解くというのがまず不可能だからである。

そこで、低エネルギー有効理論をつくる際に対称性が重要なものになる。超対称性もその一つである。しかし、超対称性を持ったゲージ場の場合、低エネルギー理論もカイラル超場とベクトル超場でかけるはずである。そのとき、超対称性からくる制限は、スーパーポテンシャルの正則性で表される。これは、実は、非常に強力な性質であり、スーパーポテンシャルを完全に決めることもある。正則性については、次節で詳しく議論する。

また、以下で低エネルギー有効理論といったときには高次の微分を含んだ項は小さいとして無視する。

3.2　正則性

超対称性理論は、超対称多重項（つまり超対称変換で互いに変換される場）を超場という形で表したとき、有効作用のスーパーポテンシャル（$d^2\theta$ で積分されるような項）はカ

イラル超場だけでかかれ、カイラル超場の複素共役である反カイラル超場は含まない。つまり、カイラル超場を複素数の座標と思ったときに、スーパーポテンシャルはそれらの正則な関数である。

それに加えて、理論に現れる様々な結合定数（質量パラメーター、Yukawa 結合定数、ゲージ結合定数を次元転移させて得られるスケール Λ など）も、運動項のないカイラル超場だと思ってやれば [28]、結合定数に対しても正則でなければいけないことがわかる。この結合定数に対する正則性というのも超対称理論に固有の性質である。さらに、このように、結合定数を背景場だとみなすと、それらがもろに破っている対称性に対して、結合定数に適当な変換性を課すことによって、その対称性が回復していると思える。そうすれば、有効作用はその対称性で不変な形でかけているはずである（これを選択則とも呼ぶ。）

有効作用の正則性といったが、これまで議論してきた有効作用とは、最初に述べたように繰り込み群から決まると考えられる Wilson 有効作用と呼ばれるものである。これに対して、一粒子既約有効作用といわれるものもある。こちらは、理論に外場をいれたときの分配関数の log の、外場に対する Legendre 変換から求められるものである。繰り込み群方程式にでてくる結合定数は、こちらから直接求められるものである。従って、β 関数もこちらから決まる。この一粒子既約有効作用は、一般には結合定数に対して正則とは限らない [29]。また、Wilson 有効作用の β 関数は 2 ループ以上の寄与がないことが知られている [30]。以下でも、Wilson 有効作用のみ用いる。

さらに、弱結合極限などの、理論がどう振る舞うかがある程度わかる極限から、スーパーポテンシャルが制限を受ける。

これらを全て考えに入れると実際に繰り込み群を解かなくてもスーパーポテンシャルが、しばしば完全に決まってしまう。鍵となるのは、正則関数（正確には断面）は、その漸近的振る舞いと特異性から決まってしまう、ということである。

ここで、例として一つのカイラル超場からつくられる Wess-Zumino 模型を考える。この模型は、

$$W_{tree} = m\phi^2 + g\phi^3 \tag{49}$$

というスーパーポテンシャルを持つ（ϕ がカイラル超場、m が質量項、g が四点結合とYukawa 結合。）この模型は対称性を持たないが、結合定数も超場だと思えば二つの U(1) 対称性を持つ。それは、

$$
\begin{array}{cccc}
 & U(1) & \times & U(1)_R \\
\phi & 1 & & 1 \\
m & -2 & & 0 \\
g & -3 & & -1
\end{array}
$$

である。ここで、U(1) は超対称変換と可換で、カイラル超場に対するチャージが示してある。$U(1)_R$ は超対称変換と非可換で、$(\theta, \bar{\theta})$ に対してもチャージ (-1,1) で変換する。それに加えて、カイラル超場も表のチャージで変換する。これで、$\int d^2\theta W_{tree}$ と運動項が不変なことがわかる。この対称性と、正則性から、有効スーパーポテンシャル（θ と時空間座標で積分すると有効作用になるもの）は、

$$W_{eff} = m\phi^2 \, f\left(\frac{g\phi}{m}\right) \tag{50}$$

と、$\frac{g\phi}{m}$ を引数に持つ一つの未知正則関数 f でかける。ここで、g/m を固定したまま $g \to 0, m \to 0$ の弱結合極限を考えると、そこでは、古典的なスーパーポテンシャルに g,m に関して二次以上の量子補正（と非摂動項）となるはずである。これから、

$$f(t) = 1 + t \tag{51}$$

となることがわかる。つまり、

$$W_{tree} = m\phi^2 + g\phi^3 = W_{eff} \tag{52}$$

というスーパーポテンシャルは繰り込みを受けないという非繰り込み定理を再現する。非繰り込み定理は摂動論的に証明されるが [31]、実は、正則性の結果と考えられることが知られている。このとき、もちろん Kähler ポテンシャルは繰り込みを受けるが、その正確な形はわからない。また、この結果は非摂動的にも正しいともいえるが、もともと Wess-Zumino 模型は漸近自由な理論でないので、非摂動的な理論ではない。ただし、二次元では Wess-Zumino 模型は非摂動的に存在すると思われているので、そこでも同様の議論で非繰り込み定理がいえる。

3.3 ’tHooft 量子異常釣り合い条件

低エネルギー有効理論に存在する非常に軽い自由度がわかっていれば、前節の技法を用いて有効スーパーポテンシャルをしばしば決めることができ、量子 Moduli 空間なども決定できる。しかし、低エネルギー有効理論における自由度がなにかという問いは自明ではない。そこで、超対称性を持った理論でよく使われる方法が、’tHooft 量子異常釣り合い条件である [11]。これはどういうものかを以下で説明する。まず、理論に自発的に破れていない大局的対称性（カイラル量子異常も持たないもの）があった時、この対称性を局所的なものだと思う（ゲージ化されていると思う。）この時、このゲージ場は非常に弱く相互作用しているとすれば、それを特徴づけるエネルギースケールより十分高いエネルギースケールでは元の理論とそう変わらないと考えられる。しかし、非 Abel 量子異常が一般的には存在する。それをなくすために、spectator フェルミオンと呼ばれる仮想的にいれたゲージ場とだけ相互作用するようなフェルミオンをいれて、それによって非 Abel 量子異常がなくなるようにする。すると、この理論の低エネルギー有効理論は元の低エネルギー有効理論で現れる自由度に加えて、spectator フェルミオンと仮想的なゲージ場を余計に含み、この理論でも非 Abel 量子異常は消えているだろうと考えられる。これは、どちらの理論でも spectator フェルミオンによって相殺されているはずなので、spectator フェルミオンなしの量子異常への二つの理論の寄与は等しいという条件がでる。これが’tHooft 量子異常釣り合い条件である。この条件を概念的な図で書くと、

のようなものになる。

この条件を満たさせる自由度を見つけることは、後で見るように非常に難しい（実際、’tHooft が最初にこの条件を用いたのは、QCD におけるカイラル対称性が自発的に破れていないとすると、この条件を満たす低エネルギーでの自由度はフレーバーが 2 の時以

外は存在しない、という議論のためで、そこから、QCD においてカイラル対称性は自発的に破れているだろうということを言っている。）超対称な理論の場合、フェルミオンの自由度が決まればボソンの自由度も決まるので、この条件は、正しいだろうと思われる低エネルギー有効理論を見つける有用な道具となる（少し違った使い方もされる。）

4 超対称 QCD

この章では、N=1 超対称ゲージ理論で最もよく知られている模型の一つである、超対称 QCD の真空構造等を調べる。

超対称 QCD とは、ゲージ群 $SU(N_c)$ のベクトル超場 V^a $(a = 1, 2, \cdots, {N_c}^2 - 1)$ と、$SU(N_c)$ の基本表現と反基本表現で変換するカイラル超場をそれぞれ N_f 個、$Q^i_r, \widetilde{Q}^s_j$ $(i, j = 1, 2, \cdots, N_f\,;\ r, s = 1, 2, \cdots, N_c)$、を持った超対称ゲージ理論である。ただし、スーパーポテンシャルは持たない。これはクォーク質量 0 の QCD をそのまま超対称化したものになっている（つまり、クォークとグルーオンをそれぞれ超場に置き換えている。そこで、スクォークとゲージーノが加わっている。）ただし、D 項からくる相互作用が QCD に加わっている。そこで、カラー、フレーバーなどの用語を使う。N_f は 1 以上とし、0 の時は pure 超対称 Yang-Mills 理論という。また、カイラル超場の質量項がある場合にも超対称 QCD と呼ぶが、この論文中で単に超対称 QCD と書いた場合はクォーク質量 0 のものを指すことにする。

この模型ではスカラーが（反）基本表現で変換するので、閉じこめ相と Higgs 相の厳密な区別がなく [32]、二つの解釈を滑らかに行き来することができることが知られている。また、この理論の β 関数は、

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -\frac{g^3}{16\pi^2}\,\frac{3N_c - N_f + N_f\gamma(g^2)}{1 - N_c\frac{g^2}{8\pi^2}} \\ \gamma(g^2) &= -\frac{g^2}{8\pi^2}\,\frac{N_c^2 - 1}{N_c} + O(g^2) \end{aligned} \tag{53}$$

と計算されている [36]。ここで、$\gamma(g^2)$ は質量の異常次元である。これの 1-loop 近似での g^3 の係数は $3N_c - N_f$ であり、$3N_c < N_f$ の時、漸近自由である。

この理論の大域的対称性は、古典的には、

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_A \times U(1)_B \times U(1)_R \tag{54}$$

である。ここで、最初の四つの対称性は、質量 0 の QCD の left-hand と right-hand のフレーバー $SU(N_f)$ と軸性 U(1) とバリオン数をそれぞれ自然に超場に拡張したものである

（超対称多重項に同じ変換性を持たせる。つまり、超場に自然に変換性を持たせる。）これらの対称性は超対称性と可換だが、もう一つの対称性である $U(1)_R$ は超対称性と非可換である R 対称性である。具体的には、$U(1)_R$ は、

$$
\begin{aligned}
W_\alpha(\theta) &\rightarrow e^{\lambda} W_\alpha(e^{-\lambda}\theta) \\
Q_r^j(\theta) &\rightarrow e^{\frac{N_f-N_c}{N_f}\lambda} Q_r^j(e^{-\lambda}\theta) \\
\tilde{Q}_j^s(\theta) &\rightarrow e^{\frac{N_f-N_c}{N_f}\lambda} \tilde{Q}_j^s(e^{-\lambda}\theta)
\end{aligned} \tag{55}
$$

とする。$Q, \tilde{Q}$ のチャージは $U(1)_A$ と $U(1)_B$ を使って自由に定義し直せるので、後の便利のためこの値にした。超場に対する変換性をまとめると、

$$
\begin{aligned}
Q \qquad & \left(N_f, 1, 1, 1, \frac{N_f-N_c}{N_f}\right) \\
\tilde{Q} \qquad & \left(1, \bar{N}_f, 1, -1, \frac{N_f-N_c}{N_f}\right)
\end{aligned} \tag{56}
$$

となる。フェルミオンの $U(1)_R$ チャージは、それが含まれる超場のチャージと比べて (-1) ずれることと、ゲージーノは $U(1)_R$ チャージ (+1) を持つことに注意すれば、$U(1)_R$ はカイラル量子異常を持たないことがわかるので、量子論的には $U(1)_A$ のみがカイラル量子異常によって破れる。ただし、この量子異常を持つ対称性も、次元転移からでるスケール Λ にもチャージを与えることによって、選択則としては使える。結局、量子論でも残る対称性は、

$$
SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B \times U(1)_R \tag{57}
$$

である。

上で述べたことは、$N_c = 2$ の場合、Q と $\tilde{Q}$ の表現が同値になってしまうので、少し変更を受ける。しかし、その場合でも $N_c \neq 2$ の場合と同様に行えるので、ここでは省略する。以下でも、$N_c = 2$ の場合は別に考える必要がある。

次に、超対称 QCD の古典的 moduli 空間は、ゲージ群が U(1) 群の場合と同様に、

$$
\begin{aligned}
D^a &= (Q^\dagger)_i^r (T^a)_j^i Q_r^j - (\tilde{Q}^\dagger)_s^i (T^a)_i^j \tilde{Q}_j^s \\
&= 0
\end{aligned} \tag{58}
$$

から決まる。ここで、反基本表現の表現行列（エルミート行列）は、基本表現の表現行列の転置のマイナスであることを使った。この方程式の解は [33] で与えられている。それは、ゲージ対称性と大域的対称性の自由度を除いて、

$$Q = \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & a_{N_f} \end{pmatrix} \tag{59}$$

（$N_f < N_c$ の場合で a_i は全て任意)、

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & a_{N_c} \\ & & & \end{pmatrix} \tag{60}$$

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & & & \\ & \tilde{a}_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & \tilde{a}_{N_c} \\ & & & \end{pmatrix} \tag{61}$$

$$|a_i|^2 - |\tilde{a}_i|^2 \quad \text{は } i \text{ に依らない} \tag{62}$$

（$N_f \geq N_c$ の場合で a_i は全て任意。）

ここで、$Q, \widetilde{Q}$ はフレーバーの足を行の添字、カラーの足を列の添字とした行列とみなしている。

ゲージ不変な記述では古典的 moduli 空間は、“メソン ”

$$M^i_j = Q^i \widetilde{Q}_j \tag{63}$$

と、“バリオン ”

$$\begin{aligned} B^{i_1 \ldots i_{N_c}} &= Q^{i_1} \cdots Q^{i_{N_c}} \\ \widetilde{B}_{i_1 \ldots i_{N_c}} &= \widetilde{Q}_{i_1} \cdots \widetilde{Q}_{i_{N_c}} \end{aligned} \tag{64}$$

の真空期待値で決まる。(i,j をフレーバーの足に使っていることに注意。)ここで、"メソン "は $SU(N_c)$ の足をそのままつぶして得られ、"バリオン "はカラー $SU(N_c)$ の足を完全反対称テンソル $\epsilon^{i_1\ldots i_{N_c}}$、または、$\epsilon_{i_1\ldots i_{N_c}}$ でつぶして得られる。超場の Bose 対称性から、明らかに、"バリオン "は $N_f < N_c$ の時は存在しない。同様に、超場の Bose 対称性から、"メソン "と "バリオン "は全てが独立ではなく、いくつかの関係がつく。(これは古典的な場合で、量子論的には "メソン "と "バリオン "は複合演算子とみなされるので、古典的な関係がそのまま保たれるとは限らない。)

この理論を量子論的に解析すると、実は、$N_f - N_c$ の大小によって性質が違うことがわかるので、次章から N_f が小さい方から順に考察してゆく。

4.1 $N_f < N_c$ の場合

まず、有効理論のスーパーポテンシャルを求めたい。正則性と対称性を使えばスーパーポテンシャルは、

$$W_{eff} = C_{N_c,N_f}\left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{\det\tilde{Q}Q}\right)^{\frac{1}{N_c-N_f}} \tag{65}$$

と一意に決まる。ただし、C_{N_c,N_f} は subtraction scheme に依存する値を持つ定数である。これが 0 かどうかによって真空が持ち上がるかどうかが決まる。このスーパーポテンシャルの形は $N_f < N_c$ でないときでも正しいが、その場合は指数が発散するか、determinant が 0 になるのでスーパーポテンシャルは存在せず、flat directions が残る(これは準古典的な議論が使えるときで、量子論的にはスーパーポテンシャルが存在し得る。)

さらに、式 (59) の a_{N_f} が大きい極限では、Higgs 機構で $SU(N_c)_{N_f}$ が $SU(N_c-1)_{N_f-1}$ になると考えられる。ここで、$SU(N_c)_{N_f}$ とはゲージ群が N_c でフレーバー数が N_f であることを表すとする。ここで、低エネルギーでの $SU(N_c-1)$ のゲージ結合定数から決まるスケールを Λ_L、高エネルギーでの $SU(N_c)$ でのそれを Λ とすると、スケール a_{N_f} での二

つの理論のゲージ結合定数を合わせることにより、

$$\Lambda_L^{3(N_c-1)-(N_f-1)} = \frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{a_{N_f}^2} \tag{66}$$

という関係が成り立つ（ただし、$\overline{DR}$ scheme と呼ばれる subtraction scheme をとった場合。DR は dimensional reduction の略である。この方法は、超対称理論では標準的であり、Siegel[48] によって導入された。）これを、式 (65) に a_{N_f} をいれて評価したものに代入すると、$C_{N_c,N_f} = C_{N_c-N_f}$ の時、低エネルギー $SU(N_c-1)_{N_f-1}$ 理論でも式 (65) のスーパーポテンシャルがでる。

次に、$W_{tree} = mM_{N_f}^{N_f}$ という $Q_{N_f}, \widetilde{Q}_{N_f}$ の質量項で変形することを考える。すると、低エネルギーでは、$SU(N_c)_{N_f-1}$ になっている。スケールの関係は、

$$\Lambda_L^{3N_c-(N_f-1)} = m\Lambda^{3N_c-N_f} \tag{67}$$

となる。この時のスーパーポテンシャルを対称性から厳密に決めると、

$$W_{exact} = \left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{\det M}\right)^{\frac{1}{N_c-N_f}} f\left(t = mM_{N_f}^{N_f}\left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{\det M}\right)^{-\frac{1}{N_c-N_f}}\right) \tag{68}$$

の形になる。m が小さく、弱結合のところでは、$f(t) = C_{N_c,N_f} + mM_{N_f}^{N_f}$ であるが、正則性から全ての t で正しい。つまり、

$$W_{exact} = C_{N_c,N_f}\left(\frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{\det\widetilde{Q}Q}\right)^{\frac{1}{N_c-N_f}} + mM_{N_f}^{N_f} \tag{69}$$

と決まる。ここで、m が大きい極限を考えて、大きい質量を持った超場を積分すると、

$$C_{N_c,N_f-1} = (N_c-N_f+1)\left(\frac{C_{N_c,N_f}}{N_c-N_f}\right)^{\frac{N_c-N_f}{N_c-N_f+1}} \tag{70}$$

という関係が前と同様に要求される。これと、$C_{N_c,N_f} = C_{N_c-N_f}$ より、$C_{N_c,N_f} = (N_c - N_f) \times const.$ となる。

最後に残った定数だが、$N_f = N_c - 1$ の場合、式 (65) は 1-instanton 作用に比例する。これは $N_f = N_c - 1$ の時は、

$$\Lambda^{\frac{3N_c-N_f}{N_c-N_f}} = \Lambda^{3N_c-N_f} \tag{71}$$

からわかる。しかも、この時、ゲージ群は Higgs 機構で完全に破れるので、instanton 計算が信頼できる。そこで、$N_c = 2$, $N_f = 1$ で instanton 計算を $\overline{DR}$ scheme で実際に実行すれば、

$$W_{eff} = (N_c - N_f)\left(\frac{\Lambda^{3N_c - N_f}}{\det\widetilde{Q}Q}\right)^{\frac{1}{N_c - N_f}} \tag{72}$$

が生成されることがわかる [34]。$N_f = N_c - 1$ の場合、instanton の非摂動効果でスーパーポテンシャルが生成されることがわかったが、$N_f < N_c - 1$ の場合はどんな機構からスーパーポテンシャルが生成されるのだろうか。

ここでは詳しく議論しないが、これは実は、ゲージーノの凝縮によって生じることが知られている。

結局、式 (72) のスーパーポテンシャルが生成されることがわかったわけだが、それは場の無限遠に最小値 0 を持つ。そこで、古典的には無限にあった真空は、量子論では全て消え去ってしまう。つまり、この理論は量子論的には well-defind でない [33]。

最後に、$W_{tree} = Tr\ mM$ を加えて、全てのフレーバーに質量を与えることを考える。この時、対称性と適当な極限の考察から厳密なスーパーポテンシャルは、$W_{full} = W_{eff} + W_{tree}$ となることが前と同様にわかる。これから、“メソン ”M の真空期待値は、

$$< M^i_j >= \left(\det\, m\Lambda^{3N_c - N_f}\right)^{\frac{1}{N_c}} \left(\frac{1}{m}\right)^i_j \tag{73}$$

と計算できる。この表式には N_c 乗根が含まれているので、その N_c 個の値に対応して, N_c 個の真空が存在することがわかる。実際、質量が十分大きければ、低エネルギーでの有効理論は $SU(N_c)$ pure Yang-Mills 理論で、これは Witten 指数などから N_c 個の真空を持つことが知られている。

4.2 $N_f = N_c$ の場合

古典的には、ゲージ不変な記述で見ると “メソン ”M^i_j と “バリオン ”

$$B = \frac{1}{N_c!}\epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_{N_f}} Q^{i_1}_1 Q^{i_2}_2 \cdots Q^{i_{N_f}}_{N_f}$$

$$\widetilde{B} = \frac{1}{N_c!}\epsilon^{i_1,i_2,\ldots,i_{N_f}}\widetilde{Q}^1_{i_1}\widetilde{Q}^2_{i_2}\cdots\widetilde{Q}^{N_f}_{i_{N_f}} \tag{74}$$

で moduli 空間は記述される。しかし、“メソン ”M^i_j と “バリオン ”$B, \widetilde{B}$ は独立ではなく、

$$\det M - \widetilde{B}B = 0 \tag{75}$$

という関係がある。この “メソン ”M^i_j と “バリオン ”$B, \widetilde{B}$ でパラメトライズされる古典的 moduli 空間は, 上の関係が入るため、特異な部分空間（例えば $xy = 0$ の $x = 0$ または $y = 0$ のような空間)、

$$rank(M) \leq N_c - 2 \tag{76}$$

を持つ。物理的には特異な部分多様体上に対応する真空は、$SU(N_c - rank(M))$ のグルーオンという余計な質量 0 の自由度を反映している（古典的 moduli 空間上のほとんどの点は、ゲージ群が完全に破れているので、質量 0 のグルーオンは存在しない。）

量子論的には、まず、質量項 $W_{tree} = \mathrm{Tr}\ mM$ を加えた超対称 QCD を考える。すると、全てのフレーバーに質量がある場合には、一般的な N_f, N_c でも $N_f < N_c$ の時と同じように、

$$< M^i_j >= \left(\det m\Lambda^{3N_c - N_f}\right)^{\frac{1}{N_c}} \left(\frac{1}{m}\right)^i_j \tag{77}$$

が instanton 計算によって得られている [2]。また、

$$< \widetilde{B}B >= 0 \tag{78}$$

も示されている [2]。これの質量 0 の極限を様々な M^i_j の比に対してとることで、質量 0 の超対称 QCD を得るわけだが、$N_f = N_c$ の場合、m の値に依らずに、

$$\det < M >= \Lambda^{2N_c} \tag{79}$$

になることがわかる。これから量子論的 moduli 空間は古典的 moduli 空間と違って、“メソン ”M^i_j と “バリオン ”$B, \widetilde{B}$ の空間に、

$$\det < M > - < \widetilde{B}B >= \Lambda^{2N_c} \tag{80}$$

という関係をいれたものというがわかる [3]。(“バリオン ”に真空期待値を持たせることも、それに対するが外場をいれることによってできる。その時も、外場を 0 にする極限で上の関係が成り立つことも示されている。) また、この関係の右辺は 1-instanton 効果に比例している。

この量子論的 moduli 空間は、特異点のないスムースな空間となっている (これは先ほどの例でいえば、$xy = \Lambda$ と特異点を滑らかにしたようなものである。) 真空期待値が小さく強結合のところでは、量子論的補正で古典的 moduli 空間と大きく違う空間となっているが、Λ よりも真空期待値が非常に大きいところでは、古典的 moduli 空間とほとんど変わらない。(これは、弱結合領域なのでそうなるべきである。) また、質量を持たないグルーオンは量子論的 moduli 空間が滑らかなことから存在しないと考えられ、全ての真空で閉じこめ相 (前に述べたように Higgs 相でもある) にあることがわかる。

この理論の大域的対称性 $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B \times U(1)_R$ の自発的破れは、それぞれの真空でどうなるのだろうか。まず、$< M >=< B >=< \widetilde{B} >= 0$ は量子論的 moduli 空間には存在しないので、大域的対称性の一部は必ず破れる。moduli 空間のそれぞれの点は、違った対称性の破れのパターンを持っている。例えば、

$$
\begin{aligned}
M^i_j &= \Lambda \delta^i_j \\
B = \widetilde{B} &= 0
\end{aligned}
\tag{81}
$$

では、

$$
\begin{aligned}
SU(N_f)_L \times \quad SU(N_f)_R \quad &\times U(1)_B \times U(1)_R \\
\rightarrow \qquad & SU(N_f)_V \times U(1)_B \times U(1)_R
\end{aligned}
\tag{82}
$$

という破れ方をする。この時、カイラルな $U(1)_R$ は破れていない。そこで、'tHooft 量子異常釣り合い条件を適用する。

高エネルギー理論で現れているフェルミオンは、

$$
\text{クォーク}\,Q \quad (N_f)_{1,-1} \quad \times N_f \text{個}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{反クォーク}\widetilde{Q} & (\bar{N}_f)_{-1,-1} & \times N_f\text{個} \\
\text{ゲージーノ}\,W & (1)_{0,1} & \times({N_f}^2-1)\text{ 個}
\end{array}
\tag{83}
$$

である（超場 $Q, \widetilde{Q}, W$ に含まれているフェルミオン。）ここで、$(N_f)_{1,-1}$ は、$SU(N_f)_V$ で N_f の表現、$U(1)_B$ でチャージ１、$U(1)_R$ でチャージ (-1) などを表す。

低エネルギー理論で現れるフェルミオンは、“メソン ”M^i_j と “バリオン ”$B, \widetilde{B}$ の真空期待値 (81) からのゆらぎであるが、関係 (80) を真空期待値の関係だけではなく、自由度そのものに対する関係と見ると、$\mathrm{Tr}M$ が $\widetilde{B}B$ に吸収されて、

$$
\begin{array}{lll}
\text{“メソン ”}M & (N_f^2-1)_{0,-1} & \times 1\text{ 個} \\
\text{“バリオン ”}B & (1)_{-N_f,-1} & \times 1\text{ 個} \\
\text{“バリオン ”}\widetilde{B} & (1)_{N_f,-1} & \times 1\text{ 個}
\end{array}
\tag{84}
$$

となる。

’tHooft 量子異常釣り合い条件は、

$$
\begin{array}{rcl}
\text{対称性} & \text{高エネルギー} & \text{低エネルギー} \\
SU(N_f)_V^2 U(1)_R & -N_f d^{(2)}(N_f) - N_f d^{(2)}(\bar{N}_f) & = -d^{(2)}(N_f^2-1) \\
U(1)_R^3 & 2N_f^2(-1)^3 + (N_f^2-1) & = (N_f^2-1)(-1)^3 - 2 \\
U(1)_B^2 U(1)_R & -2N_f^2 & = -2N_f^2 \\
U(1)_R & -2N_f^2 + (N_f^2-1) & = -(N_f^2-1) - 2
\end{array}
\tag{85}
$$

でうまく合っている。ここで、$d^{(2)}(r)$ は、$SU(N_f)_V$ の r 表現の２次の Casimir 演算子であり、$d^{(2)}(N_f) = d^{(2)}(\bar{N}_f) = \frac{1}{2}$, $d^{(2)}(N_f^2-1) = N_f$ である。

この条件は非常に非自明で今まで述べてきたことが正しいことのチェックと考えられる。これから、関係 (80) は、場そのものに対する関係と考えられることがわかる。

他の moduli 空間の点、例えば、

$$
\begin{aligned}
M^i_j &= 0 \\
B = -\widetilde{B} &= \Lambda^{N_c}
\end{aligned}
\tag{86}
$$

でも、

$$\begin{aligned} SU(N_f)_L \times \quad SU(N_f)_R &\quad \times U(1)_B \times U(1)_R \\ \to &\qquad SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_R \end{aligned} \tag{87}$$

のような対称性の破れのパターンを示す。ここでも、前の例と同様に'tHooft 量子異常釣り合い条件は満たされている。

関係 (80) は、場そのものに対する関係と考えられることもわかったわけだが、それを有効 Lagrangian で表現したい。このためには、次のようにカイラル超場の Lagrange 乗数 A を使って、

$$W = A(\mathrm{det}M - \widetilde{B}B - \Lambda^{2N_c}) \tag{88}$$

とすればよい。また、“メソン ”の質量項による摂動を考えれば、上の Lagrange 乗数 A を使ったスーパーポテンシャルと合わせて計算すると、$N_f < N_c$ の結果である式 (72) や pure 超対称 Yang-Mills 理論の結果を再現できることがわかる。

4.3 $N_f = N_c + 1$ の場合

$N_f = N_c + 1$ の場合も、$N_f = N_c$ の場合と同様に、古典的にはゲージ不変な記述で見ると “メソン ”M_j^i と “バリオン ”

$$\begin{aligned} B_i &= \epsilon_{i\, j_1 j_2 \cdots j_{N_c}} Q^{j_1} Q^{j_2} \cdots Q^{j_{N_c}} \\ \widetilde{B}^i &= \epsilon^{i\, j_1 j_2 \cdots j_{N_c}} Q_{j_1} Q_{j_2} \cdots Q_{j_{N_c}} \end{aligned} \tag{89}$$

で moduli 空間は記述されるが（ゲージ群の足は左から順に $1, 2, \cdots, N_c$ だが、省略してある)、“メソン ”と “バリオン ”は独立ではなく、

$$\begin{aligned} \det M \left(\frac{1}{M}\right)_i^j - B_i \widetilde{B}^j &= 0 \\ M_j^i B_i = M_j^i \widetilde{B}^j &= 0 \end{aligned} \tag{90}$$

という関係がある。さらに、質量項をいれた場合、

$$\det M \left(\frac{1}{M}\right)_i^j - B_i \widetilde{B}^j = \Lambda^{2N_c-1} m_i^j \tag{91}$$

となるのが式 (77) からわかる。ここで演算子と、その真空期待値を同じ記号で表している。質量 0 の極限をとると、右辺が 0 となる。つまり、量子論的 moduli 空間は古典的 moduli 空間と同じものになる。

今の場合も $N_f = N_c$ の時と同じ様に、"メソン "と "バリオン "の間の関係式は、場そのものに対する関係なのだろうか。実は $N_f = N_c + 1$ では、"メソン "と "バリオン "は全て独立な場と考えられ、上の関係式は運動方程式の結果であることを今から議論する。このことは、質量 m を適当に選べば "メソン "と "バリオン "の真空期待値が任意の値を取れることからも予想される。

量子論的 moduli 空間が古典的 moduli 空間と同じものということは、量子論的 moduli 空間にも特異な部分空間が存在するということである。しかし、古典的な場合、特異な部分空間に存在する余計な質量 0 の場は Higgs 機構で破れなかったゲージ群のグルーオンであったが、量子論的には閉じこめが起こっていて質量 0 のグルーオンは存在しないと考えられる。量子論では、余計な質量 0 の場は、"メソン "と "バリオン "であると考えればよい。特に、最も特異な点である、

$$M = \widetilde{B} = B = 0 \tag{92}$$

では大域的対称性、

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B \times U(1)_R \tag{93}$$

が全て破れないで、全ての "メソン "と "バリオン "は質量 0 の独立な場となる。これがうまくいっていることを確かめるには、'tHooft 量子異常釣り合い条件を適用する。

高エネルギー理論で現れているフェルミオンは、

$$\begin{array}{rcl} \text{クォーク}\,Q & (N_f, 1)_{1,-\frac{N_c}{N_f}} & \times N_c\text{個} \\ \text{反クォーク}\,\widetilde{Q} & (1, \bar{N}_f)_{-1,-\frac{N_c}{N_f}} & \times N_c\text{個} \\ \text{ゲージーノ}\,W & (1,1)_{0,1} & \times (N_c^2 - 1)\text{ 個} \end{array} \tag{94}$$

である（超場$Q, \widetilde{Q}, W$に含まれているフェルミオン。）ここで、$(N_f, 1)_{1,-\frac{N_c}{N_f}}$ は、$SU(N_f)_L$ で N_f の表現、$SU(N_f)_R$ で 1 の表現、$U(1)_B$ でチャージ１、$U(1)_R$ でチャージ $(-\frac{N_c}{N_f})$ などを表す。

低エネルギー理論で現れるフェルミオンは、"メソン "M^i_j と "バリオン "$B_i, \widetilde{B}^j$ が全て独立な物理的な場なので、

$$\begin{array}{rll} \text{“メソン ”}M & (N_f, \bar{N}_f)_{0,1-\frac{2N_c}{N_f}} & \times 1\text{ 個} \\ \text{“バリオン ”}B & (\bar{N}_f, 1)_{N_f-1,-\frac{1}{N_f}} & \times 1\text{ 個} \\ \text{“バリオン ”}\widetilde{B} & (1, N_f)_{-N_f+1,-\frac{1}{N_f}} & \times 1\text{ 個} \end{array} \tag{95}$$

となる。

'tHooft 量子異常釣り合い条件は、

$$\begin{array}{rl} \text{対称性} & \\ SU(N_f)^3 & (N_f-1)\, d^{(3)}(N_f) \\ SU(N_f)^2 U(1)_R & -\dfrac{(N_f-1)^2}{N_f}\, d^{(2)}(N_f) \\ U(1)_R^3 & -N_f^2 + 6N_f - 12 + \dfrac{8}{N_f} - \dfrac{2}{N_f^2} \\ U(1)_B^2 U(1)_R & -2(N_f-1)^2 \\ SU(N_f)^2 U(1)_B & (N_f-1)\, d^{(2)}(N_f) \\ U(1)_R^2 U(1)_B & 0 \\ U(1)_R & -N_f^2 + 2N_f - 2 \end{array} \tag{96}$$

と計算できうまく合っていることがわかる。ここで、対称性の欄の $SU(N_f)$ は $SU(N_f)_L$、または、$SU(N_f)_R$ を表す。また、$d^{(3)}(N_f)$ は、$SU(N_f)$ の N_f 表現の 3 次の Casimir を表し、$d^{(3)}(N_f) = -d^{(3)}(\bar{N}_f)$ である。

$M = \widetilde{B} = B = 0$ からはずれると、"メソン "と "バリオン "が質量を持つ。そこで、低エネルギー有効理論でスーパーポテンシャルが生成される。その形は、

1　正則性を持ち、全ての大域的対称性で不変。

2　関係 (90) を運動方程式にの結果として導出する。

3　$M = \widetilde{B} = B = 0$ で全ての “メソン ”と “バリオン ”は質量 0。

4　$M = \widetilde{B} = B = 0$ からはずれると、準古典近似と合うように質量を持つ。

5　質量項などを加えた時、$N_f < N_c + 1$ の超対称 QCD を再現する。

という要求から一意的に決まり、

$$W_{eff} = \frac{1}{\Lambda^{2N_c - 1}} \left(M^i_j B_i \widetilde{B}^j - \det M \right) \tag{97}$$

となる。これが実際に上の条件を満たすことはすぐ示せる。高エネルギー理論では、正則性と対称性などから、スーパーポテンシャルは存在しないことを前にかいたが、低エネルギーまで（今の場合はスケール Λ より下まで）繰り込み群で降りてくると、閉じこめが起こり、上のスーパーポテンシャルが生成されることがわかった。このスーパーポテンシャルは “メソン ”と “バリオン ”を複合場ではなく、クォーク超場 $Q, \widetilde{Q}$ の積とみると消えてしまう。

結局、$N_f = N_c + 1$ の超対称 QCD は、強結合領域の $M = \widetilde{B} = B = 0$ でカイラル対称性の破れのない閉じこめ相が実現されている [3]。そして、弱結合領域に滑らかにつながっている。そこでは、“メソン ”と “バリオン ”が大きな真空期待値を持ち、Higgs 相と考えるのが自然である（前に述べたように超対称 QCD では、閉じこめ相と Higgs 相の厳密な区別はない。）

4.4　$N_f > N_c + 1$ の場合

$N_f > N_c + 1$ でも $N_f = N_c + 1$ の時と同様の考察を行えば、古典的 moduli 空間と量子論的 moduli 空間は一致することがわかる。しかし、その特異部分空間は “メソン ”や “バリオン ”が質量 0 になることに対応するわけではない。このことは、そう考えると、’tHooft 量子異常釣り合い条件が満たせないことや、許される有効作用を考えると必ず特異性を

持ってしまうことから従う。実は、$N_f > N_c + 1$ はさらに三つの相に分かれている。そして、その物理は全て、双対性が重要な役割を果たすことが知られている。そこで、それぞれの相を順に見ていく。

4.4.1 $N_f \geq 3N_c$

この N_f, N_c の範囲の超対称 QCD は、漸近自由でない。つまり、チャージの screening によって、低エネルギーでクォークとグルーオンがそのまま現れる。この相は Coulomb 相よりもチャージ間のポテンシャルが弱く、低エネルギーの極限で、自由なクォークとグルーオンが存在する相になっている。そこで、この相は non-Abelian free electric 相と呼ばれる [7]。

もちろん、この理論は漸近自由でないので、非摂動的な意味で場の理論として存在しないと考えられる。しかし、この理論を他の理論の低エネルギー有効理論とみなすことは可能である。

4.4.2 $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$

この N_f, N_c の範囲の超対称 QCD は、漸近自由である。つまり、低エネルギーに行くに従い、ゲージ結合定数はどんどん大きくなる。通常の QCD などの場合はゲージ結合定数が Λ に相当するスケールに達するとクロスオーバーを起こし、閉じこめ相を記述すると考えられている。しかし、今の超対称 QCD の場合、ゲージ結合定数は無限大にはならずに、有限の値に収束すると考えられる。つまり、繰り込み群で低エネルギーに降りていくと、固定点にどんどん近づく。その固定点は赤外固定点なので、四次元の相互作用する共形場理論で記述される（超対称性もあるので超共形場理論で記述される。）このことは証明された事実というわけではないが、後でいう双対性と関連して、いろいろな理論の間の整合性から正しいだろうと思われている [35]。

さらに、超対称 QCD の β 関数は、

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}\,\frac{3N_c - N_f + N_f\gamma(g^2)}{1 - N_c\frac{g^2}{8\pi^2}}$$

$$\gamma(g^2) = -\frac{g^2}{8\pi^2}\,\frac{N_c^2-1}{N_c} + O(g^2) \tag{98}$$

で与えられた。ここで、$\gamma(g^2)$ は質量の異常次元である。すると、β 関数に対する 1-loop の寄与はマイナスで、2-loop の寄与は、

$$N_f > \frac{3N_c^3}{2N_c^2-1} \tag{99}$$

の時プラスの寄与を与えるので、そこでは β 関数が 0 になるようなゲージ結合定数 g の値があるのではないかと思える（もちろん $g=0$ は除く。）実際、$N_c\,g^2$ と $\frac{N_f}{N_c}=3-\epsilon$ を固定したまま、N_c, N_f を無限大に持っていけば、

$$N_c g_*^2 = \frac{8\pi^2}{3}\epsilon + O(\epsilon^2) \tag{100}$$

で β 関数が 0 になることがいえる。そこで、N_c が大きく、$\epsilon = 3-\frac{N_f}{N_c} \ll 1$ では非自明な固定点が存在する。また、$\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の全ての N_f, N_c に対しても非自明な固定点が存在するという議論がある [7]。

そこで、$\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ では、低エネルギー理論は非自明な四次元超共形場理論になっていて、クォークとグルーオンが相互作用する質量 0 の場として閉じこめられずに現れる。この理論の electric チャージの間のポテンシャルは、Abelian Coulomb 相と同じく、

$$V \sim \frac{1}{R} \tag{101}$$

となると考えられるので、この相を non-Abelian Coulomb 相と呼ぶ [7]。

固定点直上での四次元超共形場理論は、超共形代数という超対称性よりも強い対称性を記述する代数によって支配される。この代数は $\theta, \bar{\theta}$ にチャージ (1,-1) を与える R 対称性を含む。しかも、共形場理論の対称性の生成子は次元を数える dilatation を含み、超共形代数の性質から、

$$D \geq \frac{3}{2}|R| \tag{102}$$

の関係がある [37]。この不等式が等式となるのは、カイラル超場か反カイラル超場の場合で、それぞれ、$D=\frac{3}{2}R, D=-\frac{3}{2}R$ となる。これから、二次元の N=2 超対称理論の時と同様

に、カイラルリングが定義できる。これはどういうものかというと、まず、二つのカイラル演算子の積 $O_1(x)O_2(0)$ は R チャージ $R = R(O_1)+R(O_2)$ を持つので、$D \geq D(O_1)+D(O_2)$ が言える。すると、$O_1(x)O_2(0)$ の $x=0$ のまわりの演算子積展開は特異性を持てない。そこで、二つの場の演算子の積を単に x を 0 にする極限で定義できる。この演算子が 0 でなければ、それはカイラル演算子で、$D = D(O_1) + D(O_2)$ の次元を持つ。この様にしてカイラル演算子に積の構造をいれたものがカイラルリングである。

超共形代数に現れる R 対称性は、超対称 QCD では以前に出てきた $U(1)_R$ に対応するはずである。これは、この R 対称性が、カイラル量子異常をもたず、$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B$ と可換でなければならないためである（これは、超共形代数に現れる R 対称性がフレーバーに対する対称性とは明らかに関係がなく、Q と $\widetilde{Q}$ を同等に扱うはずだからである。）すると、

$$
\begin{aligned}
D(\widetilde{Q}Q) &= \frac{3}{2}R(\widetilde{Q}Q) = 3\frac{N_f - N_c}{N_f} \\
D(B) &= D(\widetilde{B}) = \frac{3N_c(N_f - N_c)}{2N_f}
\end{aligned}
\tag{103}
$$

と "メソン" と "バリオン" の赤外固定点での次元がわかる。この結果は、式 (98) から導かれる β 関数がゼロになるところでの質量の異常次元 $\gamma = -3\frac{N_c}{N_f} + 1$ に $\widetilde{Q}Q$ の正準次元 2 を加えた次元 $D = \gamma + 2 = 3\frac{N_f - N_c}{N_f}$ と一致している。

さらに、四次元超共形代数のユニタリー表現は完全に分類できていて [37]、理論の解析に使える。それは、スカラーの超共形代数のユニタリー表現は恒等表現でなければ、

$$
D \geq 1 \tag{104}
$$

であるというものである。しかも、$D=1$ は自由場の場合に限る [38]。（自由場は $D=1$ である。）ここで、$\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ から、フレーバー数を減らしていくことを考える。すると、固定点でのゲージ結合定数 g_* は大きくなって、徐々に強く結合する理論になるだろう。"メソン" $\widetilde{Q}Q$ の固定点での次元 $D(\widetilde{Q}Q) = 3\frac{N_f - N_c}{N_f}$ に注目すると、$N_f < \frac{3}{2}N_c$ で $D < 1$ になりユニタリー表現の制限を越えてしまう。さらに、$N_f = \frac{3}{2}N_c$ では $D=1$ な

ので、その時は固定点で“メソン ”$\widetilde{Q}Q$ は自由場となる。そこで、“メソン ”$M=\widetilde{Q}Q$ は $N_f<\frac{3}{2}N_c$ でも自由場となっていると考えられる。そこで、フレーバー数を減らしていくと、$N_f\leq\frac{3}{2}N_c$ で超対称 QCD は、non-Abelian Coulomb 相からもっと強く相互作用する相に移るだろうと思える。この相は、次に双対性などを説明してから議論する。

4.4.3 双対性

ここで述べる N=1 超対称 QCD における双対性とは、その赤外固定点での物理が、異なるゲージ群を用いた“magnetic”な記述と同等であるというもので、non-Abelian 双対性と呼ばれている [7]。これは完全に証明された事実ではないが、non-Abelian 双対性が実際に存在するという様々な証拠がある。この non-Abelian 双対性が具体的にどういうものかを今から説明する。

まず始めに、元のゲージ群が $SU(N_c)$ でフレーバー数が N_f の超対称 QCD （これを“electric”理論と呼ぶ）に対して、ゲージ群が $SU(N_f-N_c)$ でフレーバー数が N_f の“magnetic”

クォーク $q_i,\widetilde{q}^i$ （添字 i はフレーバーの足であり、ゲージ群の足は省略している）を持つ超対称 QCD にゲージ不変な場 M^i_j （つまり、今のところ相互作用しない自由場）を加えた理論を用意する。この理論は $\frac{3}{2}N_c<N_f<3N_c$ の範囲では、non-Abelian Coulomb 相にある。これは、$\frac{3}{2}N_c<N_f<3N_c$ は、$\frac{3}{2}(N_f-N_c)<N_f<3(N_f-N_c)$ と書き換えられるためである（もちろん M^i_j は相互作用しないので無視できる。）

ここで、スーパーポテンシャル

$$W=\frac{1}{\mu}M^i_jq_i\widetilde{q}^j \tag{105}$$

を加える。これは、赤外固定点では、前に得られた結果 $D(q\widetilde{q})=\frac{3N_c}{N_f}$ から $D(W)=1+\frac{3N_c}{N_f}<3$ で、relevant な演算子である。そこで、このスーパーポテンシャルを持った理論（これを“magnetic”理論と呼ぶ）は赤外で新しい固定点を持つ。すると、実は、このスーパーポテンシャルをいれた“magnetic”理論の固定点は“electric”理論の赤外固定点と一致する。

これが non-Abelian 双対性である。このように、低エネルギーで二つの違った作用が同じ物理を記述する例は二次元では quantum equivalence として良く知られている [40]。また、四次元でも、発散のない有限な理論と考えられている、N=4 超対称 Yang-Mills 理論や [41] ある種の N=2 超対称 QCD などでも同様な双対性があることが知られており [6]、この N=1 超対称理論での non-Abelian 双対性は、その漸近自由な理論への一般化と見れる。

"magnetic"理論と "electric"理論は異なるゲージ対称性を持っている。そこで、この二つの理論が（低エネルギー極限で）同一の物理を記述するのは不可能に思えるが、ゲージ対称性は実際には理論の対称性ではなく、物理を記述するのに必要な余計な自由度なので良い。しかし、グルーオンの数が変わることはできない様に思える。これに対しては、今の non-Abelian Coulomb 相では、粒子描像を与える漸近場が定義できないと考えられるので、グルーオン（質量 0 の ”粒子 ”）の数が違う理論でも同じ赤外固定点の物理を記述することができる。

このゲージ対称性と違い、大域的対称性はゲージ不変な物理的な演算子で生成されるので、"magnetic"理論と "electric"理論は同じ大域的対称性を持たねばならない。今の場合は、"electric"理論の大域的対称性は、

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B \times U(1)_R \tag{106}$$

である（カイラル量子異常を持つ対称性は除いた。）"magnetic"理論でも "electric"理論と同じ群を持つ（カイラル量子異常を持たない）大域的対称性があることはすぐにわかる。さらに、"magnetic"理論に現れる場の大域的対称性での変換性は、

$$\begin{array}{cccc}
\text{場} & SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B \times U(1)_R & \text{数} \\
q \quad in & (\bar{N}_f, 1, \frac{N_c}{N_f - N_c}, \frac{N_c}{N_f}) & \times (N_f - N_c)\,\text{個} \\
\tilde{q} \quad in & (1, N_f, -\frac{N_c}{N_f - N_c}, \frac{N_c}{N_f}) & \times (N_f - N_c)\,\text{個} \\
M \quad in & (N_f, \bar{N}_f, 0, 2\frac{N_f - N_c}{N_f}) & \times 1\,\text{個}
\end{array} \tag{107}$$

とする。この表式で、M は "electric"理論の "メソン "$\widetilde{Q}Q$ と同じ変換性を持つこと、"バリオン "数 $U(1)_B$ で "magnetic"クォーク $q, \tilde{q}$ は分数のチャージを持つこと、つまり、$q, \tilde{q}$

は$Q, \widetilde{Q}$の多項式としては表せないこと、$q(\widetilde{q})$と$\widetilde{Q}(Q)$はフレーバー$SU(N_f)$でそれぞれの複素共役の変換性を持つことなどに注意する。また、$U(1)_R$チャージはフェルミオンのものではなく、超場に対するものを示してある。（もちろん、フェルミオンの$U(1)_R$チャージは超場の$U(1)_R$チャージから1を引けばよい。）この変換性は'tHooft 量子異常釣り合い条件によって支持される。実際、

$$
\begin{array}{rl}
\text{対称性} & \\
SU(N_f)^3 & N_c\, d^{(3)}(N_f) \\
SU(N_f)^2 U(1)_R & -\dfrac{N_c^2}{N_f}\, d^{(2)}(N_f) \\
U(1)_R^3 & N_c^2 - 1 - \dfrac{2N_c^4}{N_f^2} \\
U(1)_B^2 U(1)_R & -2N_c^2 \\
SU(N_f)^2 U(1)_B & N_c\, d^{(2)}(N_f) \\
U(1)_R^2 U(1)_B & 0 \\
U(1)_R & -N_c^2 - 1
\end{array}
\tag{108}
$$

で "electric" 理論と "magnetic" 理論は、'tHooft 量子異常釣り合い条件を満たす。また、式 (105) のスーパーポテンシャルは大域的対称性で不変であり、対称性を破らない。

大域的対称性が一致することに加えて、"electric" 理論と "magnetic" 理論が同じ物理を記述するためには、ゲージ不変な場が二つの理論で一致している必要がある。"electric" 理論に現れるゲージ不変な場は、"メソン" $M_j^i = \widetilde{Q}Q$ と "バリオン" $B^{i_1,\dots,i_{N_c}} = Q^{i_1}\cdots Q^{i_{N_c}}$、$\widetilde{B}_{i_1,\dots,i_{N_c}} = \widetilde{Q}_{i_1}\cdots\widetilde{Q}_{i_{N_c}}$ であった。一方、"magnetic" 理論のゲージ不変な場は、まず、ゲージ群で一重項の M_i^j がある。これは、"メソン" $M_j^i = \widetilde{Q}Q$ に対応する。次に "magnetic" 理論の "バリオン"、

$$
\begin{aligned}
b_{i_1,\dots,t_{N_c}} &= q_{i_1}\cdots q_{i_{N_c}} \\
\widetilde{b}^{i_1,\dots,i_{\bar{N}_c}} &= \widetilde{q}^{i_1}\cdots\widetilde{q}^{i_{\bar{N}_c}}
\end{aligned}
\tag{109}
$$

が存在する（ここで、ゲージ群の足は省略した。）$\bar{N}_c = N_f - N_c$ で "magnetic" 理論のカラー数である。これらは、"electric" 理論の "バリオン" と対応しないように見えるが、実は、

$$
\begin{aligned}
B^{i_1,\dots,i_{N_c}} &= C\, \epsilon^{i_1,\dots,i_{N_c},j_1,\dots,j_{\bar{N}_c}}\, b_{j_1,\dots,j_{\bar{N}_c}} \\
\widetilde{B}_{i_1,\dots,i_{N_c}} &= C\, \epsilon_{i_1,\dots,i_{N_c},j_1,\dots,j_{\bar{N}_c}}\, \widetilde{b}^{j_1,\dots,j_{\bar{N}_c}}
\end{aligned}
\tag{110}
$$

で大域的対称性も含めて完全に対応がつく。ここで、定数 $C = \sqrt{-(-\mu)^{N_c-N_f}\Lambda^{3N_c-N_f}}$ である。定数 C の導出には対称性などの議論を使うが、ここではその導出は省略する。

これで、“magnetic”理論のゲージ不変な場と “electric”理論のゲージ不変な場との間に完全に対応がついたわけだが、“magnetic”理論には、まだ、”magnetic メソン ”$q_i\tilde{q}^j$ が存在する。しかし、このゲージ不変な場は式 (105) のスーパーポテンシャルを考慮すると、M を定数ずらすことにより余計な場であることがわかるので、ゲージ不変な場の対応はうまくいっている。このことから、式 (105) のスーパーポテンシャルは “magnetic”理論が “electric”理論の双対理論であるために必要なことがわかる。

さて、“magnetic”理論のスーパーポテンシャル (105) だが、そこには次元 1 のスケール μ が入れてある。スケール μ が次元 1 を持つのは場の 3 次のスーパーポテンシャルの係数であるため不自然に思える。しかし、“electric”理論では M^i_j は、紫外固定点で $M^i_j = Q^i\tilde{Q}_j$ であるので次元 2 を持ち、赤外固定点では式 (103) のスケーリング次元を持つ。一方、“magnetic”理論でのゲージ不変な M_m という場は、複合場ではなく素な場なので、紫外固定点で次元 1 を持つ。そこで、次元 1 のスケール μ が必要で、$M = \mu M_m$ の関係があるはずである。これがスケール μ の出所である。スーパーポテンシャル (105) を M_m で書き直せば、次元を持たない結合定数を持つ（その大きさは μ の定義に含むので 1 としている。）

さらに、“magnetic”理論を特徴づけるスケール $\tilde{\Lambda}$ と、“electric”理論を特徴ずけるスケール Λ と、M_m と M の関係を決めるスケール μ の間にはある関係がある。それは、

$$\Lambda^{3N_c-N_f}\tilde{\Lambda}^{3(N_f-N_c)-N_f} = (-1)^{N_f-N_c}\mu^{N_f} \qquad (111)$$

という関係で [39]、scale matching relation と呼ばれる。その導出はここでは省略する。

この scale matching relation には、位相 $(-1)^{N_f-N_c}$ が入っているが、後で見るように、クォークの質量項での摂動などで scale matching relation が満たされるために必要である。

さらに、この関係は、“electric”理論が強く相互作用する時、“magnetic”理論は弱く相互作用する事、また、その逆を示している。これは、有限な理論での $g \to \frac{1}{g}$ の漸近自由な理論への拡張とみれる。

また、固定点の近くで“electric”理論の作用を $\log\Lambda$ で微分して、“magnetic”理論に対しても scale matching relation を使って $\log\Lambda$ で微分してやれば、

$$W_\alpha^2 = -\widetilde{W}_\alpha^2 \tag{112}$$

という関係がでる。ここで、$\widetilde{W}_\alpha$ は“magnetic”理論のベクトル超場である。これは、$F^2 = -\widetilde{F}^2$ を含むので、電磁気理論の $E^2 - B^2 = -(\widetilde{E}^2 - \widetilde{B}^2)$ と類似の関係である。今の場合は、$W_\alpha^2 = -\widetilde{W}_\alpha^2$ は $\lambda\lambda = -\widetilde{\lambda}\widetilde{\lambda}$ も意味する。

ここで、scale matching relation 関連して、双対の双対ということを考える。つまり、“magnetic”理論に対する双対理論を考える。すると、そのゲージ群は $SU(N_f - (N_f - N_c)) = SU(N_c)$ で、ゲージ不変な場 M_i^j と $N_i^j = q_i\widetilde{q}^j$ と、クォーク $d^i, \widetilde{d}_j$ を持つ。この時の scale matching relation は、$\widetilde{\widetilde{\Lambda}}^{3N_c - N_f}\widetilde{\Lambda}^{3(N_f - N_c) - N_f} = (-1)^{N_f - (N_f - N_c)}\widetilde{\mu} = (-1)^{N_c}\widetilde{\mu}$ となり、$\widetilde{\widetilde{\Lambda}} = \Lambda$ とすれば、

$$\widetilde{\mu} = -\mu \tag{113}$$

が成り立つ。すると、この時のスーパーポテンシャルは、

$$W = \frac{1}{\widetilde{\mu}} N_i^j d^i \widetilde{d}_j + \frac{1}{\mu} M_j^i N_i^j = \frac{1}{\mu} N_i^j (-d^i \widetilde{d}_j + M_j^i) \tag{114}$$

となる。この最初の項は、“magnetic”理論に対する双対をとる時に出てくる項で、二番目の項は“magnetic”理論に元々あるスーパーポテンシャルである。このスーパーポテンシャル見ると、M, N は質量を持つことがわかるので積分する。結果は、$N_i^j = 0$ と $M_j^i = d^i\widetilde{d}_j$ で $W = 0$ である。これから、$d^i, \widetilde{d}_j$ が $Q^i, \widetilde{Q}_j$ と考えられ、元の“electric”理論を再現する。

4.4.4 $N_c + 2 \le N_f \le \frac{3}{2}N_c$

non-Abelian free electric 相にある $N_f \ge 3N_c$ から、N_c を固定して N_f を減らしていくと、相互作用が強くなっていき $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ まで、N_f が減ると違う相である non-Abelian Coulomb 相に入る。さらに、$N_c + 2 \le N_f \le \frac{3}{2}N_c$ の領域まで N_f が減ると違う相に入るということを前に述べた。この事情は“magnetic”理論で見れば明らかである。ま

ず、“magnetic”理論は、non-Abelian Coulomb 相から、N_f が減って $N_f \geq 3(N_f - N_c)$ まで行くと, “electric”理論と比べて余計なスーパーポテンシャルがあることの寄与を考えなければ、non-Abelian free electric 相を “magnetic”で書き直した相になるはずである。実際、ここでは “magnetic”理論は漸近自由ではなく、余計なスーパーポテンシャルは赤外固定点での次元を見れば irrelevant になっていることがわかるので、それが言える。すると、低エネルギーで現れる場は $q, \widetilde{q}, M$ であり、赤外固定点で自由な場となっていることがわかる（粒子描像も成り立つ。）すると、ここでも双対性が成り立つことを仮定すれば（実は “electric”理論は低エネルギーの良い記述でないので紫外固定点での理論と赤外固定点の理論の間の双対性）、“electric”理論は $N_c + 2 \leq N_f \leq \frac{3}{2}N_c$ の領域では、非常に強く相互作用するため低エネルギーの記述には使うことができず、新しいゲージ対称性を持った “magnetic”理論で記述されることがわかる。つまり、“magnetic”理論は “electric”理論の複合場（または、集団運動）で記述された理論と考えられ、元々の理論では見えなかったゲージ対称性が低エネルギーの記述に現れることになる。この相は、non-Abelian free magnetic 相と呼ばれる。また、$N_f = N_c + 1$ まで N_f が下がると、“magnetic”理論はゲージ群が $SU(N_f - N_c) = SU(1)$ となる。この場合は次節で考察する。

4.4.5 双対理論の変形

この節では二つの互いに双対な理論の、クォークの質量項と flat directios での変形を考える。これは、双対性の正しさの証拠も与えることがわかる。

まず始めに、“electric”理論の最後の N_f 番目のフレーバーに $W_{tree} = mM^{N_f}_{N_f}$ によって大きい質量を与えてみる。この時の低エネルギー理論は N_f 番目のフレーバーが落ちて、$SU(N_c)_{N_f-1}$ の超対称 QCD となる。そのスケール Λ_L は高エネルギーの $SU(N_c)_{N_f}$ のスケール Λ と、$\Lambda_L^{3N_c-(N_f-1)} = m\Lambda^{3N_c-N_f}$ の関係で結ばれている。これから、低エネルギー $SU(N_c)_{N_f-1}$ 理論は高エネルギー $SU(N_c)_{N_f}$ 理論より、強く相互作用していることがわかる。

次に "magnetic" 理論に $W_{tree} = mM_{N_f}^{N_f}$ を加えると、

$$W = \frac{1}{\mu} M_i^j q_j \tilde{q}^i + mM_{N_f}^{N_f} \tag{115}$$

となる（非摂動効果はないとしている。）$M_{N_f}^{N_f}, M_{N_f}^j, M_i^{N_f}, q_{N_f}, \tilde{q}^{N_f}$ の運動方程式から、

$$q_{N_f}\tilde{q}^{N_f} = -\mu m, \quad q_i\tilde{q}^{N_f} = q_{N_f}\tilde{q}^i = 0 \tag{116}$$

$$M_{N_f}^{N_f} = M_{N_f}^j = M_i^{N_f} = 0 \tag{117}$$

が導かれる。式 (116) は "magnetic" 理論が Higgs 機構によって $SU(N_f - N_c - 1)_{N_f-1}$（つまり、フレーバー数とカラー数が１ずつ減る）のゲージ群とフレーバー数を持つ低エネルギー理論になることを示している。低エネルギーでのスーパーポテンシャルは、

$$W = \frac{1}{\mu} \widehat{M}_i^j \hat{q}_j \hat{\tilde{q}}^i \tag{118}$$

で、$\widehat{M}, \hat{q}, \hat{\tilde{q}}$ は $SU(N_f - N_c - 1)_{N_f-1}$ に現れる軽い場である。フレーバー数が $N_f - 1$ なので、$i, \tilde{i} = 1, \ldots, N_f - 1$ である。すると、このスーパーポテンシャルから、低エネルギーでの "electric" 理論の双対性が質量項を加える変形で保たれることがわかる（もちろんゲージ群も $SU(N_c)_{N_f-1}$ と $SU(N_f - N_c - 1)_{N_f-1} = SU((N_f - 1) - N_c)_{N_f-1}$ で双対性を保つ。）"magnetic" 理論における低エネルギー理論のスケールと高エネルギー理論のスケールには $\tilde{\Lambda}_L^{3((N_f-N_c)-1)-(N_f-1)} = \frac{\tilde{\Lambda}^{(3N_f-N_c)-N_f}}{<q_{N_f}\tilde{q}^{N_f}>} = -\frac{\tilde{\Lambda}^{(3N_f-N_c)-N_f}}{\mu m}$ の関係がある。この関係は "magnetic" 理論では低エネルギー理論は高エネルギー理論より、強く相互作用する理論となっていることを意味する。さらに、低エネルギー理論の双対理論の間の scale matching relations が満たされていることがわかる。

今行った議論は $N_f = N_c + 2$ の場合には明らかに完全ではない。それは、この場合 "magnetic" 理論は Higgs 機構によって完全にゲージ群が破れてしまい、instanton 効果が非摂動的にスーパーポテンシャルを生成する可能性があるからである。これを計算してやれば、

$$W_{inst} = \frac{\tilde{\Lambda}_L^{6-N_c+2} det(\frac{1}{\mu}\widehat{M})}{q_{N_f}\tilde{q}^{N_f}} = -\frac{\det\widehat{M}}{\Lambda_L^{3N_c-(N_c+1)}} \tag{119}$$

となる。この効果も加えれば、スーパーポテンシャルは、

$$W = \frac{1}{\Lambda_L^{2N_c-1}}(\widehat{M}^i_j q_i \widetilde{q}^j - \mathrm{det}\widehat{M}) \tag{120}$$

である（ここで、$q, \widetilde{q}$ はゲージ群が完全に破れれいるのでゲージ群の足を持たず、相互作用も上のスーパーポテンシャルでのみ与えられることに注意する。）これに対する “electric” 理論は低エネルギーでカラー数とフレーバー数が $N_f = N_c + 1$ を満たす閉じこめ相にある理論で、“バリオン ”を $B_i = q_i$ や $\widetilde{B}^j = \widetilde{q}^j$ と見なせば、スーパーポテンシャル (120) を持つことを知っている。結局、$N_f = N_c + 2$ の場合も質量項による変形で双対性が保たれることがわかった。しかも、元の “electric”理論の “バリオン ”は “magnetic”理論ではクォークに対応する。この “magnetic”理論のクォークは “electric”理論の”磁気単極子 ”と思えるので、QCD のバリオンはパイオンのラグランジアンのソリトンと思えるという考えをある意味で実現している。さらに、スーパーポテンシャル (120) は、“electric”理論ではその表式に Λ_L の負のべきを含むことからわかるとおり強結合での非摂動効果であるが、“magnetic”理論では loop を含まない寄与と instanton 効果から導出され、弱結合で評価したものである。

次に “electric”理論に出てくる場に、flat directions の方向に真空期待値を持たすことを考える。簡単のため、$< Q^{N_f} >=< \widetilde{Q}_{N_f} >$ が非常に大きく準古典的に扱えるとする（ゲージ場の足は適当に決めた一つの足についてのみ上の真空期待値を持つとする、つまり正確に書けば $< Q^{N_f}_{N_c} >=< \widetilde{Q}^{N_c}_{N_f} >$。）すると、低エネルギーでの “electric”理論は、$SU(N_c)_{N_f}$ から Higgs 機構で $SU(N_c-1)_{N_f-1}$ になる。その低エネルギー理論と高エネルギー理論の間のスケールの関係は、$\Lambda_L^{3(N_c-1)-(N_f-1)} = \frac{\Lambda^{3N_c-N_f}}{<Q^{N_f}\widetilde{Q}_{N_f}>}$ であり、低エネルギーで “electric” 理論は弱く相互作用していることがわかる。

これに対して “magnetic”理論では、$< M^{N_f}_{N_f} >$ が大きい値を取るので、スーパーポテンシャルから $q_{N_f}, \widetilde{q}^{N_f}$ に大きい質量を与える。そこで、“magnetic”理論は低エネルギーでは $SU(N_f-N_c)_{N_f-1}$ になり、低エネルギー “electric”理論の双対理論となっていることがわかる。その低エネルギー理論と高エネルギー理論の間のスケールの関係は、$\widetilde{\Lambda}_L^{3(N_f-N_c)-(N_f-1)} = \frac{1}{\mu} < M^{N_f}_{N_f} > \widetilde{\Lambda}^{3(N_f-N_c)-N_f}$ であり、低エネルギーで “magnetic”理論は強く相互作用して

いることがわかる。しかも、$\Lambda_L^{3(N_c-1)-(N_f-1)}\widetilde{\Lambda}_L^{3(N_f-N_c)-(N_f-1)}=\frac{1}{\mu}\Lambda^{3N_c-N_f}\widetilde{\Lambda}^{3(N_f-N_c)-N_f}=(-1)^{N_f-N_c}\mu^{N_f-1}$ となり、scale matching relations を満たす。同様にして “バリオン ”が真空期待値を持つような flat directions に対しても同様なことが行えて（この時は、“electric”理論も “magnetic”理論もゲージ群が破れ、共に弱結合領域にある）双対性と矛盾のない結果を与える。

古典的には、または摂動論の全ての有限な次数までの議論では、“electric”理論と “magnetic”理論は違った moduli 空間を持っている。つまり、これを量子論的に一致させるのは非摂動効果だけである。例えば、“electric”理論では古典的には “メソン ”は $rank < M > \leq N_c$ という制限がある。“magnetic”理論では M は摂動論では制限を受けないこともすぐわかる。つまり、“magnetic”理論では上の “メソン ”の制限は非摂動論的な量子効果によってもたらされる。これは以下のような議論で実際に確かめられる。まず、M の運動方程式から $N_i^j = q_i\widetilde{q}^j$ として $< N_i^j >= 0$ が与えられる。しかし、スーパーポテンシャルの形から、N_f フレーバーの内、$rank < M >$ のフレーバーだけ質量を得ることがわかるので、低エネルギーでは “magnetic”理論は $N_f - rank < M >< N_f - N_c$ の時、真空を無限大に飛ばすようなスーパーポテンシャルが非摂動効果によって生成されることを知っている。すると、$N_f - rank < M > < N_f - N_c$ の時、$< N_i^j >= 0$ の真空は得られない。そこで、“magnetic”理論でも $rank < M >\leq N_c$ が満たされることになる。さらに、$rank < M >= N_c$ の時は、“magnetic”理論は質量 0 のフレーバーを $N_f - rank < M >= N_f - N_c = \widetilde{N_c}$ だけ持つので、量子論的に補正された関係式、

$$\det N - b\widetilde{b} = \widetilde{\Lambda}_L^{2\widetilde{N_c}} \tag{121}$$

が成り立つ。ここで、$\widetilde{\Lambda}_L$ は低エネルギーのスケールで $\widetilde{\Lambda}_L^{2\widetilde{N_c}} = \det' < \frac{1}{\mu}M > \widetilde{\Lambda}^{3\widetilde{N_c}-N_f}$ の関係がある。$\det'$ は 0 でない固有値の積を取るという意味である。式 (121) に $b, \widetilde{b}$ と $B, \widetilde{B}$ の関係と $< N_i^j >= 0$ と scale matching relations と上の式を入れてやれば、

$$< B\widetilde{B} >= \det' < M > \tag{122}$$

が導かれる。これは “electric”理論で見れば古典的な関係（量子論的にも正しい関係）であ

る。これが、双対理論では非摂動的量子効果から導かれた。つまり、逆に見れば古典的な関係から、非摂動的量子効果が評価できることを示している。これは、もちろん non-Abelian 双対性の存在の証拠にもなる。このようなことは、この例に限らず双対性を持った理論に一般的に現れる現象であり、非常に興味深い。

これで、全ての N_f, N_c で超対称 QCD がどういう相にあるかがわかったので、表にまとめると、

	相	赤外固定点での振る舞い、コメント
$N_f \geq 3N_c$	$non-Abelian free\ electric$	“$electric$”が自由場、 “$magnetic$”は無限に強く相互作用。 $N_c+2 \leq N_f \leq \frac{3}{2}N_c$と双対
$\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$	$non-Abelian Coulomb$	相互作用する共形場理論。 “$electric$”と“$magnetic$”はこの相の中で双対
$N_c+2 \leq N_f \leq \frac{3}{2}N_c$	$non-Abelian free\ magnetic$	“$magnetic$”が自由場、 “$electric$”は無限に強く相互作用。 $N_f \geq 3N_c$と双対
$N_f = N_c+1$	閉じこめ（$Higgs$ でもある）	古典的 $moduli$ 空間 = 量子論的 $moduli$ 空間、 カイラル対称性の破れのない真空が存在。
$N_f = N_c$	閉じこめ（$Higgs$ でもある）	古典的 $moduli$ 空間の特異性が 量子論的 $moduli$ 空間で消える、 カイラル対称性の一部は必ず破れる。
$N_f < N_c$	真空が存在しない	$instanton$、ゲージーノ凝縮による W_{eff}
$N_f = 0$	閉じこめ	N_c個の真空。 $pure$ 超対称 $Yamg-Mills$ 理論

となる。また、双対理論が元の理論と同じゲージ群を持つ、つまり自己相対になるのは、

$$N_f = 2N_c \tag{123}$$

であるが、このフレーバー数は N=2 超対称 QCD が有限な理論になるところである（ただし、フレーバー数が一致しているだけである。）これから、N=1 non-Abelian 双対性を有限な N=2 超対称 QCD と関係づけようという話がある [42]。

5　超対称QCD+随伴表現カイラル超場X

この章では超対称QCDにさらにゲージ群の随伴表現のカイラル超場である $X_i^j(\mathrm{Tr}X=0)$ を加えた理論を考察する。

この理論はスーパーポテンシャルがなければ（$N_f>0$ の場合は $QX\tilde{Q}$ の形のスーパーポテンシャルを含めれば)、N=2 の超対称性を持つことが知られている。この N=2 の超対称性を持つゲージ理論は最近の Seiberg と Witten の仕事以来、非常に良く調べられており、N=1 の場合と比べてカイラル超場の運動項（Kähler ポテンシャル）も厳密に導出できる。

しかし、ここでは N=1 の超対称性を持つ、スーパーポテンシャル

$$W=\frac{s_0}{k+1}\mathrm{Tr}X^{k+1} \tag{124}$$

を持つ理論を考える。この模型はKutasovとSchwimmerによって初めて考察された[12][13]。この理論も超対称 QCD と同様に双対理論を持つことを次節から議論する。

5.1　“electric”理論

今から考察する理論（これを “electric” 理論と呼ぶ）は、ゲージ群 $SU(N_c)$ を持った超ゲージ理論で、ゲージ群の基本表現と反基本表現に属する N_f 個のカイラル超場、$Q_\alpha^i, \tilde{Q}_{\tilde{j}}^\beta;\ \alpha,\beta=1,\cdots,N_c;\ i,\tilde{j}=1,\cdots,N_f$、とゲージ群の随伴表現に属するカイラル超場、$X_\alpha^\beta;\ \alpha,\beta=1,\cdots,N_c;\ \mathrm{Tr}X=0$、を持つものである。さらに、スーパーポテンシャル

$$W=\frac{s_0}{k+1}\mathrm{Tr}X^{k+1} \tag{125}$$

を持つ理論を考える。このスーパーポテンシャルは $k>2$ の場合には次元が 3 より大きくなるので、irrelevant 演算子のように思える。しかし、実はこの演算子は dangerously irrelevant 演算子と呼ばれる演算子で、スーパーポテンシャルを持たない理論の赤外固定点の近くでは、異常次元のため relevant 演算子となっている。

この理論の（量子異常を持たない）大域的対称性は、

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_B \times U(1)_R \tag{126}$$

であり、この対称性のもとでの場の変換性は、

$$\begin{array}{ll} Q & (N_f, 1\ ,\ 1,\ 1 - \frac{2}{k+1}\frac{N_c}{N_f}) \\ \tilde{Q} & (1\ , \bar{N}_f, -1, 1 - \frac{2}{k+1}\frac{N_c}{N_f}) \\ X & (1\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ \frac{2}{k+1}) \end{array} \tag{127}$$

である。ここで、$U(1)_R$ は R チャージである。

また、この理論の 1-loop 近似の β 関数は $-(2N_c - N_f)$ に比例するので、$2N_c < N_f$ の時、漸近自由でなくなる。

ゲージ不変なカイラル超場は、“メソン ”

$$(M_j)^i_{\tilde{i}} = \tilde{Q}_{\tilde{i}} X^{j-1} Q^i;\ j = 1, 2, \cdots, k \tag{128}$$

や、“バリオン ”

$$\begin{aligned} B^{(n_1, n_2, \cdots, n_k)} &= Q^{n_1}_{(1)} Q^{n_2}_{(2)} \cdots Q^{n_k}_{(k)} \\ \sum_{l=1}^{k} n_l &= N_c \end{aligned} \tag{129}$$

などがある。ゲージ群の足は “メソン ”の場合はそのままつぶしてあり、“バリオン ”の場合は $\epsilon^{1,2,\cdots,N_c}$ でつぶしてある。ここで、$Q_{(l)}$ は、

$$Q_{(l)} = X^{l-1} Q;\ l = 1, \cdots, k \tag{130}$$

で定義される。同様にして、” 反バリオン” も定義される。さらに、

$$\mathrm{Tr} X^j;\ 2 \leq j \leq k \tag{131}$$

がある。この j に対する制限はスーパーポテンシャル (125) が存在することから導かれる。

5.2 “magnetic”理論；双対性

ppp この理論は $2N_c > N_f > \frac{3}{2}\frac{N_c}{k}$ で non-Abelian Coulomb 相にあり、赤外固定点で双対理論を持つ。この双対性も non-Abelian 双対性である。また、この双対理論を “magnetic” 理論と呼ぶ。“magnetic”理論は、ゲージ群 $SU(\bar{N}_c)$; $\bar{N}_c = kN_f - N_c$ を持った超ゲージ理論で、ゲージ群の基本表現と反基本表現に属する N_f 個のカイラル超場、$q_i^\alpha, \tilde{q}_\beta^{\tilde{j}}$; $\alpha, \beta = 1, \cdots, \bar{N}_c$; $i, \tilde{j} = 1, \cdots, N_f$、とゲージ群の随伴表現に属するカイラル超場、$Y_\alpha^\beta$; $\alpha, \beta = 1, \cdots, \bar{N}_c$; $\mathrm{Tr} Y = 0$、に加えて、ゲージ不変なカイラル超場である “メソン ”、

$$(M_j)_{\tilde{i}}^{i} = \tilde{Q}_{\tilde{i}} X^{j-1} Q^i;\ j = 1, 2, \cdots, k \tag{132}$$

を持つ。この “メソン ”の式の右辺は “electric”理論のカイラル超場との対応を示す。

“magnetic”理論でも大域的対称性は “electric”理論と同一の式 (126) であることがわかり、場の変換性は、

$$\begin{array}{ll}
q & \left(\bar{N}_f, 1, \dfrac{N_c}{kN_f - N_c}, 1 - \dfrac{2}{k+1}\dfrac{kN_f - N_c}{N_f}\right) \\
\tilde{q} & \left(1, N_f, -\dfrac{N_c}{kN_f - N_c}, 1 - \dfrac{2}{k+1}\dfrac{kN_f - N_c}{N_f}\right) \\
Y & \left(1, 1, 0, \dfrac{2}{k+1}\right) \\
M_j & \left(N_f, \bar{N}_f, 0, 2 - \dfrac{4}{k+1}\dfrac{N_c}{N_f} + \dfrac{2}{k+1}(j-1)\right)
\end{array} \tag{133}$$

で与えられる。すると、“electric”理論と “magnetic”理論の間の’tHooft 量子異常釣り合い条件は、

$$\begin{array}{rl}
SU(N_f)^3 & N_c d^{(3)}(N_f) \\
SU(N_f)^2 U(1)_R & -\dfrac{2}{k+1}\dfrac{N_c^2}{N_f} d^{(2)}(N_f) \\
SU(N_f)^2 U(1)_B & N_c d^{(2)}(N_f) \\
U(1)_R & -\dfrac{2}{k+1}(N_c^2 - 1) \\
U(1)_R^3 & \left((\dfrac{2}{k+1} - 1)^3 + 1\right)(N_c^2 - 1) - \dfrac{16}{(k+1)^3}\dfrac{N_c^4}{N_f^2}
\end{array}$$

$$U(1)_B^2 U(1)_R \qquad \frac{4}{k+1}N_c^2 \tag{134}$$

と合っていることがわかる。

“magnetic”理論のスーパーポテンシャルは、

$$W_{mag} = \frac{\bar{s_0}}{k+1}\mathrm{Tr}Y^{k+1} + \frac{s_0}{\mu^2}\sum_{j=1}^{k} M_j \tilde{q} Y^{k-j} q \tag{135}$$

で与えられる。$\bar{s_0}$ はYを適当に規格化することによって、$\bar{s_0} = -s_0$ とする。このスーパーポテンシャルの第二項は係数の自由度があるようだが、実は、双対性からこの形に一意的に決まってしまうことが知られている [14]。

“electric”理論と”magnetic” 論のゲージ不変なカイラル超場の間にも

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}Y^j &= -\mathrm{Tr}X^j;\ j = 2, \cdots, k-1 \\
\mathrm{Tr}Y^k &= \frac{\bar{N}_c}{N_c}\mathrm{Tr}X^k \\
(M_j)^i_{\tilde{i}} &= \tilde{Q}_{\tilde{i}} X^{j-1} Q^i;\ j = 1, 2, \cdots, k \\
B_{el}^{(n_1, n_2, \cdots, n_k)} &\sim B_{mag}^{(m1, m2, \cdots, m_k)}; \\
& \qquad m_l = N_f - n_{k+1-i};\ l = 1, 2, \cdots, k
\end{aligned} \tag{136}$$

のように対応がつく。B_{mag} は “magnetic”理論で “electric”理論の “バリオン ”と同様の操作をしてつくられた演算子である。ここで、この対応が一対一になるために、スーパーポテンシャル (125) が必要なことに注意する。また、“バリオン ”の対応は、$\sum_{l=1}^{k} n_l = N_c$, $\sum_{l=1}^{k} m_l = \bar{N}_c$ に加えて、$Q_{(l)}$ のボーズ対称性のために $0 \leq n_l \leq N_f,\ 0 \leq m_l \leq N_f$ の制限があるのでうまくいっている。$\sum_{l=1}^{k} m_l = \bar{N}_c$ の条件も、$\sum_{l=1}^{k} n_l = N_c$ から

$$\sum_{l=1}^{k} m_l = \sum_{l=1}^{k} (N_f - n_{k+1-i}) = kN_f - \sum_{l=1}^{k} n_{k+1-i} = kN_f - N_c = \bar{N}_c \tag{137}$$

と整合性を持っている。逆も同様である。また、$\mathrm{Tr}Y^j$ の形の演算子の規格化定数は非自明な形を取っているが、これは双対性が整合性を保つという条件から、この形に決めることができる。“バリオン” の規格化定数も決められるが [14]、ここではそれらの導出は省略する。

このようにして、この理論で双対理論が存在するだろうということがわかった。この双対性は k=1 としてやれば、“electric”理論のスーパーポテンシャルは X の質量項となり、低エネルギーで超対称 QCD となる。その時、ここで述べた双対性は前章で述べた超対称 QCD の双対性と一致していることがわかる。さらに、双対性が存在することのチェックとして次節で k が 1 でないときのスーパーポテンシャルの質量項による変形などを考える。

5.3 理論の変形

まず、始めに “electric”理論の一つの ”フレーバー ”に質量を与えることを考える。この時 “electric”理論のスーパーポテンシャルは、

$$W_{el} = s_0 \text{ Tr } X^{k+1} + m\widetilde{Q}_{N_f} Q^{N_f} \tag{138}$$

で、低エネルギーでは $(N_c, N_f) \to (N_c, N_f - 1)$ とフレーバー数の一つ減った同様の理論になる。この理論の双対理論は $(kN_f - N_c - k, N_f - 1)$ である。実際、“magnetic”理論のスーパーポテンシャルは、

$$W_{mag} = \frac{\bar{s_0}}{k+1}\text{Tr}Y^{k+1} + \frac{s_0}{\mu^2}\sum_{j=1}^{k} M_j \tilde{q} Y^{k-j} q + m(M_1)^{N_f}_{N_f} \tag{139}$$

となり、質量を持った場を積分すれば、

$$q_{N_f} Y^{l-1} \widetilde{q}^{N_f} = -\delta_{l,k} m; \; l = 1, 2, \cdots, k \tag{140}$$

という等式が要求される。すなわち、質量を持った場が

$$\begin{aligned} \widetilde{q}^{N_f}_{\alpha} &= \delta_{\alpha,1} \\ q^{\alpha}_{N_f} &= \delta^{\alpha,k} \\ Y^{\alpha}_{\beta} &= \delta^{\alpha}_{\beta+1} \qquad \beta = 1, \cdots, k-1 \\ & \quad 0 \quad \text{その他の場合} \end{aligned} \tag{141}$$

という真空期待値を持つ。そこで、Higgs 機構によって、$(kN_f - N_c, N_f) \to (kN_f - N_c - k, N_f - 1)$ となり、“electric”理論の一つの ”フレーバー ”に質量を与えた時の低エネルギー理論も双対性を満たす。

次に、

$$W_{el}=\sum_{i=0}^{k}\frac{s_i}{k+1-i}\mathrm{Tr}\ X^{k+1-i} \tag{142}$$

の形でスーパーポテンシャルを変形する。ただし、$s_k\mathrm{Tr}X$ の項は、s_k をラグランジ乗数として、$\mathrm{Tr}X=0$ の制限をはずすために入れてある。まず始めに、簡単のために k=2 の場合を考える。この時のスーパーポテンシャルは記号 s_i を適当な記号に変えて、

$$W_{el}=\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{3}X^3+\frac{m}{2}X^2+\lambda X\right) \tag{143}$$

である。この時の X に対する真空の条件は、ゲージ変換の自由度を使えば、X が

$$x^2+mx+\lambda=0 \tag{144}$$

の解を固有値に持つ対角行列になることである。これは、スーパーポテンシャルからスカラーポテンシャル $V=|W'(X)|^2$ が導出されるからである。すると、この二次方程式は一般には二つの解 x^+,x^- を持つので、X の対角成分の内、それが x^+ である数 $r=0,1,\cdots,N_c$ でラベルされる N_c+1 個の真空が存在する。(x^- は N_c-r 個。)ただし、$r\to N_c-r$ という変換で関係づけられる二つの真空は同一の真空である。ラグランジ乗数 Λ は $\mathrm{Tr}X=rx^+(\Lambda)+(N_c-r)x^-(\Lambda)=0$ から決まる。また、r でラベルされた真空は、Higgs 機構でゲージ群が、

$$SU(N_c)\to SU(r)\times SU(N_c-r)\times U(1) \tag{145}$$

と破れている。これらの真空は X が質量を持つため、低エネルギーで超対称 QCD になる。

今度は “magnetic” 理論を考えてみると、“electric” 理論と同様の解析をすれば、$(2N_f-N_c)+1$ 個の真空を持ち、それぞれの真空で Higgs 機構でゲージ群が、

$$SU(2N_f-N_c)\to SU(l)\times SU(2N_f-N_c-r)\times U(1) \tag{146}$$

に破れていることがわかる。すると、真空の数が “electric” 理論と “magnetic” 理論で異なるので、双対性が保たれないように見える。しかし、ここで超対称 QCD の $N_c>N_f$ の場合、真空は安定ではないという性質を思い出してみると、$l\leq N_f$, $2N_f-N_c-l\leq N_f$ で

なければ真空は安定ではない。すると、

$$l = N_f - N_c, N_f - N_c - 1, \cdots, N_f \tag{147}$$

となり、“magnetic”理論でも “electric”理論と同じ数だけ真空が存在する。その時、超対称 QCD の双対性を使えば, $l = N_f - r$ の対応で低エネルギーで双対性が成り立つことがわかる。特に、“magnetic”理論でゲージ不変な二つの “メソン”M_1, M_2 は、適当な線形結合が二つの超対称 QCD の双対理論において要求されるゲージ不変な場に対応する。

最後に $k > 2$ の場合を簡単に考察する。この場合も k=2 の場合と同様に、k 次方程式 $W'(X) = 0$ の解を対角化したときの X がいくつ持つかによって真空がラベルされる。この方程式は一般には k 個の解を持つので、それを $x^l;\ l = 1, \cdots, k$ とすれば、X の対角成分が x^i を持つ数 i_l でラベルできることがわかる。ただし、$\sum_{l=1}^{k} i_l = N_c$ である。この時ゲージ群は、

$$SU(N_c) \to SU(i_1) \times SU(i_2) \times \cdots \times SU(i_k) \times U(1)^{k-1} \tag{148}$$

のように破れている。

“magnetic”理論も同様に、$\sum_{l=1}^{k} j_l = kN_f - N_c$ を満たす k 個の自然数 $j_l;\ l = 1, \cdots, k$ でラベルされる真空を持ち、ゲージ群が、

$$SU(kN_f - N_c) \to SU(i_1) \times SU(i_2) \times \cdots \times SU(i_k) \times U(1)^{k-1} \tag{149}$$

の様に破れている。ここでも、k=2 の場合と同様に超対称 QCD の安定性の議論を使えば、$j_l = N_f - i_l$ で双対性が成り立っていることがわかる。また、$N_f < \frac{N_c}{k}$ の時は真空が一つも存在しないことにも注意する。この事と、今考えている変形は X が大きいときの振る舞いを変えない変形であることを使えば、変形をしていない $W = \frac{s_o}{k+1}\mathrm{Tr}X^{k+1}$ も $N_f < \frac{N_c}{k}$ の時には真空が存在しないことがわかる。

さらに、$k > 2$ の場合には相互作用定数 s_l を調整すれば、$W'(X) = 0$ に重解を持たせることができる。つまり、

$$W'(x) = \prod_i (x - a_i)^{n_i};\ \sum n_i = k \tag{150}$$

で n_i を 1 以上にできる。r_i を X の固有値が a_i である数とすると、ゲージ群は、

$$SU(N_c) \to \prod_i SU(r_i) \times U(1)^{k-1}; \ \ \sum r_i = N_c \tag{151}$$

と破れる。スーパーポテンシャルは各 $SU(r_i)$ ごとに随伴表現カイラル超場 X_i が一つずつ質量 0 で残り、スーパーポテンシャルは

$$W_L = \sum_i W^{(n_i+1)}(a_i)\mathrm{Tr}X_i^{(n_i+1)} + X_i\text{について高次の項} \tag{152}$$

となる。$W^{(n_i+1)}(a_i)$ は W(x) の n_i 階微分で x=a_i とした値である。"magnetic"理論も同様に解析することができ、ゲージ群は、

$$SU(kN_f - N_c) \to \prod_i SU(\tilde{r}_i) \times U(1)^{k-1}; \ \ \sum \tilde{r}_i = kN_f - N_c \tag{153}$$

と破れている。さらに、$W = \frac{s_o}{k+1}\mathrm{Tr}X^{k+1}$ を持った理論の真空は、$N_f < \frac{N_c}{k}$ で不安定な事を使えば、この場合にも $\tilde{r}_i = n_i N_f - r_i$ で双対性が成り立つことがわかる。

また、ここではゲージ群 $SU(N_c)$ に基づく理論を考察してきたが、$SO(N), Sp(N)$ などのゲージ群に対しても、随伴表現カイラル超場 X を入れたこの理論や超対称 QCD と同様な理論が議論でき、non-Abelian 双対性を持つことが知られている [43][44]。

6 まとめ

本論文では、Seiberg 達による最近の研究の成果である、超対称ゲージ理論の低エネルギー有効スーパーポテンシャルの厳密な導出の方法と、その応用としての超対称 QCD と Kutasov-Schwimmer 模型の相構造の解析、特に、non-Abelian Coulomb 相で存在する non-Abelian 双対性という性質を紹介した。

まず、第二章では、四次元超対称ゲージ理論についての基本的な知識を解説した。特に四次元超対称ゲージ理論では、物理的に等価でない真空が存在することを言った。そこで、真空の Moduli 空間という概念を導入した。

第三章では、N=1 四次元超対称ゲージ理論の低エネルギー有効スーパーポテンシャルを決定する一般的な方法について解説した。ここでは、特に、スーパーポテンシャルのカイラル超場についての正則性、という条件が重要な役割を果たすことが理解された。また、低エネルギー理論のスペクトルを決定するのに重要な'tHooft 量子異常釣り合い条件も紹介した。以上、第二章、第三章で N=1 四次元超対称ゲージ理論を厳密に解析する準備が整った。

第四章では、前章の方法を超対称 QCD に対して適用した。それによって超対称 QCD の多様な相構造を決定できた。その中でも赤外固定点が超共形場理論で記述される $\frac{3}{2}N_c < N_f < 3N_c$ の場合には、non-Abelian 双対性と呼ばれる、異なるゲージ群を結ぶという著しい特徴を持つ双対性が存在することがわかった。この双対性は強結合の物理と弱結合の物理を変換するため、古典的、または、準古典的な解析が、双対理論では強結合の効果を評価する事になるという興味深いものである。

第五章では、超対称 QCD にゲージ群の随伴表現に属するカイラル超場を加えた模型である、Kutasov-Schwimmer 模型を考察した。ここでも non-Abelian 双対性が存在して重要な役割を果たすことが理解された。この Kutasov-Schwimmer 模型はさらに詳しく研究されている。特にその双対性は代数幾何学の特異点理論と関連して、非常に精密にチェックされている。しかし、未だこのチェックも完全には終わっておらず、今後の課題として残されている。

また、本論文の主題の一つである non-Abelian 双対性は本文中で述べたような様々な証拠から、存在することは確かだと考えられているが、実際に non-Abelian 双対性が存在することの証明はなされていない。そこで、non-Abelian 双対性の存在をさらに確かなものとするために、本文中で解説したようなものとは異なった証拠を見つけることが重要である。このような試みとしては、互いに双対な理論の非カイラル超場の間の対応づけることや [45]、有限な N=2 理論の双対性と関連させることによって non-Abelian 双対性を説明するものなどがあるが、まだ研究し始められたばかりなので、今後の発展を待つ段階である。また、直接、“electric”理論の場の自由度の集団運動として、“magnetic”理論の場の自由度がかければおもしろいが、今の所、“electric”理論の磁気単極子のようなもので “magnetic”理論の場の自由度に対応すると思われるものは見つかっていない [46]。しかも、N=1 の場合は準古典的に粒子と考えられる場の配位が、強結合領域で安定と考えられる議論はないので、このような対応が単純なものでない可能性が高い。しかし、この方向を研究することは、non-Abelian 双対性の物理的な理解に対して非常に重要と考えられるので、今後の課題としたい。

7 謝辞

本論文の執筆にあたり、多くの時間を論文指導に割いて戴き、貴重な助言をして梁成吉教授に深く感謝します。また、論文提出の間際まで快く論文を見て戴いた伊藤克司博士、研究のみならず様々な面でお世話になった研究室の先輩の方々にも心から感謝します。

A　最も一般的な超対称代数

Poincarè 代数を含む交換関係または反交換関係からなる最も一般的な代数は、

$$
\begin{aligned}
[P_m, P_n] &= 0 \\
\left[P_m, Q_\alpha^L\right] &= \left[P_m, \widetilde{Q}_{\bar{\alpha}L}\right] = 0 \\
[P_m, B_l] &= \left[P_m, X^{LM}\right] = 0 \\
\left\{Q_\alpha^L, \widetilde{Q}_{\bar{\alpha}M}\right\} &= 2\sigma^m_{\alpha\bar{\alpha}} p_m \delta^L_M \\
\left\{Q_\alpha^L, Q_{\beta M}\right\} &= \epsilon_{\alpha\beta} X^{LM} \\
\left\{\widetilde{Q}_{\bar{\alpha}L}, \widetilde{Q}_{\bar{\beta}M}\right\} &= \epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} X^\dagger_{LM} \\
\left[X^{LM}, \widetilde{Q}_{\bar{\alpha}K}\right] &= \left[X^{LM}, Q_\alpha^K\right] = 0 \\
\left[X^{LM}, X^{KN}\right] &= \left[X^{LM}, B_l\right] = 0 \\
[B_l, B_m] &= i c^k_{lm} B_k \\
\left[Q_\alpha^L, B_l\right] &= S_l{}^L{}_M Q_\alpha^M \\
\left[\widetilde{Q}_{\bar{\alpha}L}, B_l\right] &= -S^{*l}{}_L{}^M \widetilde{Q}_{\bar{\alpha}M} \\
X^{LM} &= a^{l,LM} B_l
\end{aligned}
\tag{154}
$$

である。X^{LM} と $a^{l,LM}$ の足 L, M は反対称とする。また、B_l は内部対称性の生成子でスカラーであり、その構造定数は c^k_{lm} で与えられる。X^{LM} はここに現れる全ての生成子と交換するので、中心電荷と呼ばれる。すぐわかるように定数 $S_l{}^L{}_M$ は Jacobi 恒等式から内部対称性の生成子 B_l の表現行列でなければならない。Jacobi 恒等式からは、

$$
S_l{}^M{}_K a^{k,KL} = -a^{k,MK} S^{*l}{}_K{}^L \tag{155}
$$

も従う。これは、a が表現 S と $(-S^*)$ の intertwiner であることを示している。

Weyl spinor$Q$ と $\bar{Q}$ の数は等しく、その数は本文で述べたように超対称性の数と呼ばれる。それが 1 の場合 (N=1 超対称性) は中心電荷は存在しないことがわかる。また、Lorentz 変換の生成子とそれとの交換関係は自明なのでここでは省略した。

B　カイラル超場とKähler幾何

n 個のカイラル超場 Φ^i だけを使った超対称な模型は、

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi^i, \Phi^{\dagger j}) + \left[\int d^2\theta W(\Phi^i) + h.c.\right] \tag{156}$$

というラグランジアンで与えられる。この模型を超対称シグマ模型と呼ぶ。このラグランジアンを成分場であるスカラー A^i とスピノール χ^i で表すと（補助場は積分してある)、

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & -g_{ij^*}\partial_m A^i \partial^m A^{*j} - i g_{ij^*}\bar{\chi}^j \bar{\sigma}^m D_m \chi^i \\ & +\frac{1}{4} R_{ij^*kl^*}\chi^i\chi^k\bar{\chi}^j\bar{\chi}^l \\ & -\frac{1}{2} D_i D_j W \chi^i\chi^j - \frac{1}{2} D_{i^*} D_{j^*} W^* \bar{\chi}^i\bar{\chi}^j \\ & -g^{ij^*} D_i W D_{j^*} W^*\end{aligned} \tag{157}$$

$$\begin{aligned}D_i W &= \frac{\partial}{\partial A^i} W \\ D_i D_j W &= \frac{\partial^2}{\partial A^i \partial A^j} W - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial A^k} W\end{aligned} \tag{158}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}g_{ij^*} &= \frac{\partial}{\partial A^i}\frac{\partial}{\partial A^{*j}} K(A) \\ g_{ij^*,k} &= \frac{\partial}{\partial A^k} g_{ij^*} = g_{mj^*}\Gamma^m_{ik} \\ g_{ij^*,k*} &= \frac{\partial}{\partial A^{*k}} g_{ij^*} = g_{im^*}\Gamma^{m^*}_{i^*k^*}\end{aligned} \tag{159}$$

などと定義されている。この定義式から、g_{ij^*} は K を Kähler ポテンシャルとする Kähler 多様体のメトリックと解釈できることがわかる。また、Γ^m_{ik} などは接続と解釈できる。このことから、超対称シグマ模型の住む多様体は Kähler 多様体でなければならないことがわかる [47]。

C　Wess-Zumino ゲージに固定した後の超対称変換

本文でも述べたように、超対称ゲージ理論は非常に大きなゲージ対称性を持っているので、普通は Wess-Zumino ゲージに固定して、通常の意味のゲージ変換 $v_m \to v_m + \partial_m \chi$ だけを残す。しかし、このように Wess-Zumino ゲージに固定してしまうと、本文中で定義した超対称変換を行なった結果、Wess-Zumino ゲージではなくなってしまう。そこで、この場合にはもう一度、一般化されたゲージ変換を行って Wess-Zumino ゲージに戻してやることが必要になる。これを実際に実行すると、

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\Psi \\
\delta_\xi \Psi &= i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\mathcal{D}_m A + \sqrt{2}\xi F \\
\delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m\Psi + i2gT^{(a)}A\bar{\xi}\bar{\lambda}^{(a)} \\
\delta_\xi v_m^{(a)} &= -i\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\sigma}^m\xi + i\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\lambda^{(a)} \\
\delta_\xi \lambda^{(a)} &= \sigma^{mn}\xi v_{mn}^{(a)} + i\xi D^{(a)} \\
\delta_\xi D^{(a)} &= -\xi\sigma^m\mathcal{D}_m\bar{\lambda}^{(a)} - \mathcal{D}_m\lambda^{(a)}\sigma^m\bar{\xi}
\end{aligned}
\tag{160}
$$

となる。

参考文献

[1] S.Dimopoulos,S.Raby and F.Wilczek, *Phys. Rev.* **D24** (1981) 1681.

[2] D.Amati, K.Konishi, Y.Meurice, G.C.Rossi and G.Veneziano, *Phys. Rep.* **162** (1988) 169 and references therein.

[3] N.Seiberg, *Phys. Rev.* **D49** (1994)6857.

[4] K.Intriligator and N.Seiberg, *Nucl. Phys.* **B431** (1994) 551.

[5] K.Intriligator and N.Seiberg, *Nucl. Phys.* **B444** (1995) 125.

[6] N.Seiberg and E.Witten, *Nucl. Phys.* **B431** (1994) 484.

[7] N.Seiberg, *Nucl. Phys.* **B435** (1995) 129.

[8] K.Intriligator and R.G.Leigh and N.Seiberg, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 1092.

[9] K.Intriligator, *Phys. Lett.* **336B** (1994) 409.

[10] N.Seiberg and E.Witten, *Nucl. Phys.* **B426** (1994) 19.

[11] G.'tHooft: *in Recentdevelopments in Gauge Theoriees* ,eds. G.'tHooft et al.(Plenum Press, New York,1980).

[12] D.Kutasov, *Phys. Lett.* **351B** (1995) 230.

[13] D.Kutasov and A.Schwimmer, *Phys. Lett.* **354B** (1995) 315.

[14] D.Kutasov and A.Schwimmer and N.Seiberg, hep-th/9510222.

[15] K.Intriligator and R.G.Leigh and M.Strassler, hep-th/9506148.

[16] M.Berkooz, *Nucl.Phys.* **B452** (1995) 513.

[17] P.Pouliot, *Phys.Lett.* **359B** (1995) 108 ;P.Pouliot, hep-th/9510148; P. Pouliot and M.J. Strassler, hep-th/9510228.

[18] S.Coleman and J.Mandula, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251.

[19] R.Haag, J.Lopuszanski and M.Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.

[20] J.Wess and J.Bagger, *Supersymmetry And Supergravity* ,Princeton University Press(second edition,1992).

[21] E.Witten, *Nucl. Phys.* **B185** (1981) 513.

[22] H.P.Nilles, *Phys. Rep.* **110** (1984) 1 and references therein.

[23] J.Wess and B.Zumino, *Nucl. Phys.* **B70** (1974) 39.

[24] J.Wess and B.Zumino, *Nucl. Phys.* **B78** (1974) 1.

[25] S.Ferrara and B.Zumino, *Nucl. Phys.* **B79** (1974) 413.

[26] J.Bagger and E.Witten, *Phys.Lett.* **B118** (1982) 103.

[27] E.Witten, *Nucl. Phys.* **B202** (1982) 253.

[28] N.Seiberg, *Phys. Lett.* **318B** (1993) 469.

[29] M.A.Shifman and A.I.Vainshtein, *Nucl. Phys.* **B277** (1986) 456.

[30] M.A.Shifman and A.I.Vainshtein, *Nucl. Phys.* **B359** (1991) 571.

[31] M.T.Grisaru, M.Roček and W.Siegel, *Nucl. Phys.* **B159** (1979) 429.

[32] T.Banks and E.Rabinovici, *Nucl. Phys.* **B160** (1979) 349; E.Fradkin and S.Shenker, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 3682.

[33] I.Affleck, M.DIne, N.Seiberg, *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 493; *Nucl. Phys.* **B256** (1985) 557.

[34] D.Finnell and P.Pouliot, *Nucl. Phys.* **B453** (1995) 225.

[35] T.Banks and A.Zaks, *Nucl. Phys.* **B196** (1982) 189.

[36] V.Novikov, M.Shifman, A.Vainshtein and V.Zakharov, *Nucl. Phys.* **B229** (1983) 381.

[37] M.Flato and C.Fronsdal, *Lett. Math. Phys.* **8** (1984) 159; V.K.Dobrev and V.B.Petkova, *Phys. Lett.* **162B** (1985) 127.

[38] G.Mack, *Comm. Math. Phys.* **55** (1977) 1.

[39] K. Intriligator and N. Seiberg, hep-th/9509066.

[40] P.Goddard and D.Olive, *Int. J. Mod. Phys.* **A1** (1986) 303

[41] H.Osborn, *Phys. Lett.* **83B** (1979) 321; A.Sen, *Int. J. Mod. Phys.* **A9** (1994) 3707; *Phys. Lett.* **329B** (1994) 217; C.Vafa and E.Witten *Nucl. Phys.* **B431** (1994) 3.

[42] R.G. Leigh and M.J. Strassler, *Nucl. Phys.* **B447** (1995) 95.

[43] R.G. Leigh and M.J. Strassler *Phys. Lett.* **356B** (1995) 492.

[44] K. Intriligator and P.Pouliot, *Phys. Lett.* **353B** (1995) 471.

[45] M.Berkooz, hep-th/9512024.

[46] J.L.F.Barbón and S.Ramgoolam, hep-th/9512063.

[47] B.Zumino, *Phys. Lett.* **87B** (1979) 203.

[48] W.Siegel, *Phys. Lett.* **84B** (1979) 193.