

カイラルランダム行列模型による QCD 相構造の研究*

佐野 崇[†]

平成 21 年 1 月 8 日

概要

QCD の有効理論としてのカイラルランダム行列 (ChRM) 模型を紹介する。特に、従来の ChRM 模型の持つ、相転移が N_f に依存しないという不満足点を明らかにする。我々は、 $U_A(1)$ 対称性を破る項が自然に現れ、かつ安定な基底状態を持つ新しい ChRM 模型を構築する。新しい ChRM 模型は、カイラル極限での有限温度相転移が、 $N_f = 2$ のときに二次相転移、 $N_f = 3$ のときに一次相転移になる。

目次

| | | |
|-------|-------------------------|----|
| 1 | イントロダクション | 3 |
| 2 | QCD カイラル相構造 | 5 |
| 2.1 | QCD 分配関数とカイラル対称性 | 6 |
| 2.2 | 有限温度密度 QCD | 8 |
| 2.2.1 | 有限温度相転移 | 9 |
| 2.2.2 | 有限温度密度相転移と $T - \mu$ 相図 | 11 |
| 3 | Dirac 準位統計とカイラルランダム行列理論 | 14 |
| 3.1 | Banks-Casher 関係式 | 14 |
| 3.1.1 | Dirac 演算子の対称性と固有値分布 | 14 |
| 3.1.2 | Banks-Casher 関係式 | 15 |
| 3.2 | カイラルランダム行列理論 | 17 |
| 3.3 | Global Dirac スペクトル | 19 |
| 3.4 | Microscopic Dirac スペクトル | 21 |

*東京大学に提出したものを改定。

[†]tsano@nt1.c.u-tokyo.ac.jp

| | | |
|----------|---------------------------------|-----------|
| 4 | カイラルランダム行列模型 | 24 |
| 4.1 | 真空模型 | 25 |
| 4.1.1 | 有効ポテンシャルの導出 | 25 |
| 4.1.2 | Dirac スペクトル | 28 |
| 4.2 | 有限温度模型 | 29 |
| 4.2.1 | 有限温度 Dirac 演算子 | 30 |
| 4.2.2 | 有限温度カイラル相転移 | 31 |
| 4.2.3 | Dirac スペクトル | 32 |
| 4.3 | 有限密度模型 | 33 |
| 4.3.1 | 有限密度 Dirac 演算子 | 33 |
| 4.3.2 | 有限密度カイラル相転移 | 34 |
| 4.4 | 有限温度有限密度相関 | 35 |
| 4.4.1 | $m = 0$ 平面における相関 | 37 |
| 4.4.2 | $m > 0$ における相関 | 38 |
| 4.5 | $\nu \neq 0$ セクタの効果 | 39 |
| 4.5.1 | 真空模型 | 41 |
| 4.5.2 | 有限温度模型 | 42 |
| 5 | カイラルランダム行列模型への行列式相互作用の導入 | 43 |
| 5.1 | 模型の定義 | 43 |
| 5.1.1 | 固定された N_+, N_- に対する分配関数 | 44 |
| 5.1.2 | N_+, N_- 分布関数 | 45 |
| 5.1.3 | 文献 [64] の模型との比較 | 47 |
| 5.1.4 | fixed- ν 分配関数と ν 分布 | 48 |
| 5.2 | 有限温度カイラル相転移 | 49 |
| 5.2.1 | $N_f = 2$ | 50 |
| 5.2.2 | $N_f = 3$ | 51 |
| 5.3 | メソン質量と感受率 | 52 |
| 5.3.1 | 位相感受率 | 52 |
| 5.3.2 | メソン質量 | 53 |
| 5.3.3 | スカラー・擬スカラー感受率 | 56 |
| 6 | まとめと展望 | 59 |

1 イントロダクション

量子色力学 (Quantum ChromoDynamics; QCD) は、原子核やハドロンを支配する強い相互作用の理論である。QCD は漸近自由な非可換ゲージ理論であり、電子核子の深部非弾性散乱におけるパートン模型の成立や、実験的に観測されていた Bjorken スケーリングの破れを、摂動論に基づいて正確に記述することができ、実験的にも高い精度で検証されている。一方で、QCD 真空の性質や、核子の構造、相互作用といった低エネルギーでの現象に対しては、強結合領域であるために、摂動論による解析を用いることができない。QCD の非摂動論的なダイナミクスを理解することは、未だに重要な課題である。

QCD の持つカイラル対称性は、QCD 真空を非摂動論的に理解する上で重要な手がかりである。QCD 真空がカイラル対称性を自発的に破っていることから、南部-Goldstone モードを用いた低エネルギー有効理論が構築される。これにより、軽いパイオン質量や、核子が質量を獲得する機構が自然に説明される。また、パイオンとその他のハドロンとの相互作用が一意に決定される [1]。

さらに、真空を温度密度ゼロの基底状態と考えると、有限温度密度クォーク物質に対する興味も自然である。このような研究は、QCD の発見前後から長く行われてきた [2]。QCD において興味があるのは、カイラル対称性やカラー閉じこめ現象である。格子 QCD を用いた有限温度の数値計算においても、相転移の存在は早くから指摘されている [3]。

原子核加速器によって高エネルギー物質を生成しようとする試みは、1980 年代から進められている。CERN 研究所は、Super Proton Synchrotron (SPS) において観測された J/ψ 粒子の異常抑制 [4][5] などを根拠に、2000 年二月には New State of Matter の生成をアナウンスした [6]。2000 年から稼働している、Brookhaven 国立研究所の Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) では、核子-核子当たりの衝突エネルギー 200 GeV を達成し、多くの新しい現象が報告され [7]、高エネルギー QCD 物質の物性研究が盛んになっている。特に RHIC では、完全流体模型によるデータ再現の成功が目ざされている [8]。流体模型の成功が局所熱平衡に達したプラズマの生成を意味するならば、そこへ至る熱平衡化の物理過程 [9] や、初期粒子生成機構の解明 [10] などの課題が提供され、局所平衡プラズマの物性やその時間発展と並んで、高エネルギー重イオン衝突物理において活発な研究対象となっている。重イオン衝突の物理に関するコンパクトな解説としては、例えば [11] に挙げたものがある。

このように、重イオン衝突の事象は極めて非平衡かつ動的なものであり、そこから状態方程式や相構造などの定常状態における物理を引き出すのは、複雑な課題である。一方で、QCD 多体問題を論じるにあたり、定常状態での相構造を明らかにすることは、非自明で重要であり、最も基本的な課題である。そこで、本論文では、温度 T 、クォーク化学ポテンシャル μ の平面上でのカイラル対称性の自発的破れと回復に焦点を絞り、QCD の相構造を、カイラルランダム行列模型 (ChRM 模型) [12] から考察する。ChRM 模型は、QCD の持つカイラル対称性を尊重しつつ、ゲージ場のダイナミクスを単純化した模型である。QCD とカイラル対称性が共通することから、ChRM 模型の解析によって、

QCD 相構造への示唆が得られると期待される。

QCD の分配関数は、Dirac 演算子の行列式をゲージ場について平均したものと解釈できる。この構造から、Dirac 演算子の固有値分布関数の、ゼロ固有値における密度が、カイラル対称性の破れのオーダパラメータになる (Banks-Casher 関係式)[13]。カイラルランダム行列理論 (ChRM 理論) では、ゲージ場の複雑なダイナミクスを逆手に取って、Dirac 演算子をカイラル対称性を持ったランダムな行列に置き換えてモデル化する [14]。このようにモデル化されると、従来のランダム行列理論の手法 [15] を用いて、Dirac 演算子の固有値分布関数を系統的に評価することができる。このような単純化を行っても、microscopic Dirac スペクトルなどの普遍性を持つ統計量は、厳密に計算されると考えられている。一方で、カイラル凝縮の値自体は普遍的ではなく、模型に依存する量である。この意味で、ChRM 模型はあくまでも QCD に対する一種の模型であることは認識されるべきである。しかし、温度や密度を導入した場合のカイラル凝縮の応答を、ChRM 模型の範囲内で調べることは、QCD に対しても有用な示唆を与えると期待される。

有限温度密度における、格子 QCD を用いた数値評価は、符号問題のために本質的な困難を抱えている。これまでは級数展開や虚数化学ポテンシャルを用いる方法などが開発され、相構造の研究に用いられているが、限定された領域での応用に留まっている。有効模型を用いた研究では、クォークフレーバ数 $N_f = 2$ に対しては、カイラル極限において三重臨界点の存在が示唆されている [16][17]。有限のクォーク質量が存在すると、三重臨界点は、一次相転移線の端点としての“QCD 臨界点”に移行する。このような振る舞いは、先行する ChRM 模型の研究でも確認されている [18]。

現実にはクォーク質量は非ゼロであるため、QCD 臨界点の存在が予想される。QCD 臨界点は、QCD 相図を実験的に探るための貴重な手がかりとしても興味を持たれている [19]。QCD 臨界点では、カイラル感受率だけでなく、クォーク感受率や比熱も特異性を持つ [20]。したがって、関連する粒子分布に異常が現れる可能性がある。しかし、時間発展する衝突事象において、どのように臨界揺らぎが成長するか [21] を定量的に評価することは、興味深く重要であるが、難しい課題である [22]。

また、相構造は熱力学に関係する有効なフレーバ数にも明確に依存する。Pisarski-Wilczek の議論 [23] によれば、カイラル極限における有限温度カイラル相転移は、 $N_f = 2$ のときに二次、 $N_f = 3$ のときに一次になると期待される。したがって、 $m_{ud} = 0$ の場合でも、ストレンジクォーク質量 m_s の大きさに応じて、有限温度相転移は一次または二次になりうる。すなわち、QCD 相構造、特に QCD 臨界点の存否は、 m_s に敏感であると考えられる。

$N_f = 3$ の場合についても、有効模型による研究がなされている。例えば NJL 模型を用いた研究では、 $U_A(1)$ アノマリーの効果として取り入れられる行列式相互作用項が、クォーク六点相互作用項を持ち込むために、平均場理論においても $N_f = 2$ の場合とは定性的に異なる振る舞いになる。この模型では、現実的なパラメータセットに対しては、相図上に臨界点があると予想されている。一方で、最近の格子 QCD による計算では、臨界点が存在しないという可能性も指摘されている [24]。

このような現状から、ChRM 模型を用いて、 $N_f = 3$ の場合の有限温度密度相構造を研究することは意義深い。ところが、従来の標準的な ChRM 模型は、 N_f に依存しない相図を与えることが知られている。その原因は、ChRM 模型が、アノマリーの効果を有効的に表す行列式相互作用項を取り込んでいない、平均場理論になっているからである。ChRM 模型に $U_A(1)$ アノマリーの効果を取り込むためには、非自明な位相電荷 ν を持つゲージ背景に対して、Dirac 演算子が厳密な ν 個のゼロ固有値を持つことに注目し、様々な ν のセクタからの寄与を取り入れる方法がある [25]。この方法を用いると、有限の位相感受率や擬スカラー感受率が計算され、ChRM 模型の範囲内での $U_A(1)$ 問題は解決される。ところが、非自明な ν に対しても、ギャップ方程式の解であるカイラル凝縮には $\mathcal{O}(\nu/V) \leq \mathcal{O}(1/V^{1/2})$ (V は体積) の補正しか現れないことが示せる。したがって、カイラル相転移の振る舞いについては、 $\nu \neq 0$ のセクタを考慮しても、 $\nu = 0$ のみを考えた場合とまったく同様になる。そこで、本論文では、行列式相互作用に相当する項が有効ポテンシャルに現れる、新しい ChRM 模型を提案する。新しい ChRM 模型では、インスタントン数 N_+ , N_- についての足し上げを行う。これにより、位相的に非自明なゲージ配位の寄与が取り込まれ、さらに、 $N_f = 3$ の場合に、クォーク六点相互作用に相当する項を導出できることが示される。

本論文の構成は以下のようになっている。第二節では、QCD の有限温度密度相図に対し、良く知られていることをまとめ、 $N_f = 3$ の ChRM 模型を研究する動機付けを行う。第三節では、Banks-Casher 関係式を導出し、カイラル凝縮と Dirac 固有値分布の関係を明らかにする。さらに、Dirac 統計量を計算する手法として、カイラルランダム行列理論を導入する。実例を見ることで、普遍的な統計量と、そうでない統計量の違いについて理解を得る。第四節では、カイラルランダム行列模型の先行研究を紹介する。第五節で、 $U_A(1)$ アノマリーの効果を取り込んだ、新しい ChRM 模型を導入し、特に有限温度の場合の振る舞いを研究する。第四節までがレビューであり、第五節がオリジナルな部分である。また、第三節は、有限温度密度 QCD の相構造を研究するという主題からはやや外れた題材を扱っている。ChRM 理論の普遍性に基づいた応用についてのより詳しい解説としては、例えば [26] がある。

2 QCD カイラル相構造

QCD は、基本表現で変換するクォークを含む $SU(3)$ カラーゲージ理論である。この節では、まず、QCD 作用がカイラル対称性を持つことを確認し、真空での対称性の実現の仕方、有限温度、有限密度での振る舞いについて簡単に解説する。有限温度密度 QCD に対しては、摂動論的場の理論の手法も発展させられているが、強結合領域、または相転移点近傍では非摂動的効果が本質となる。非摂動的なアプローチとして、主には格子 QCD や低エネルギー有効理論のアイデアに基づく有効模型が挙げられる。

主な参考文献としては、QCDにおけるカイラル有効理論については文献 [1] が、QCD 相構造については文献 [27][28] が挙げられる。

2.1 QCD 分配関数とカイラル対称性

Euclid QCD 分配関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} Z^{\text{QCD}}(m) &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A_\mu e^{-\int d^4x \bar{\psi}(D+m)\psi(x) - S_{\text{YM}}} \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) e^{-S_{\text{YM}}} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $D = \gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu)$ は Dirac 演算子、 $m = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$ はクォーク質量行列、 N_f はクォークフレーバ数である。

$m = 0$ (カイラル極限) では、QCD 作用は $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ 対称性をもつ。これをカイラル対称性という。カイラル変換は次のように定義される。

$$\psi_L \rightarrow U_L \psi_L, \quad \bar{\psi}_L \rightarrow \bar{\psi}_L U_L^\dagger, \quad (2)$$

$$\psi_R \rightarrow U_R \psi_R, \quad \bar{\psi}_R \rightarrow \bar{\psi}_R U_R^\dagger \quad (3)$$

ここで、 ψ_L, ψ_R を、射影演算子 $P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}$, $P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}$ を用いて

$$\psi_L \equiv P_L \psi, \quad \bar{\psi}_L \equiv \bar{\psi} P_R, \quad (4)$$

$$\psi_R \equiv P_R \psi, \quad \bar{\psi}_R \equiv \bar{\psi} P_L \quad (5)$$

と定義した。カイラル変換の下での QCD 作用の変換性は、 $P_L P_R = P_R P_L = 0$ と、 $D P_L = P_R D$ に注意して、次のようにクォーク作用を ψ_L, ψ_R を用いて書き直せば明らかになる。

$$S_F = \int d^4x \bar{\psi}(D + m)\psi(x) \quad (6)$$

$$= \int d^4x (\bar{\psi}_L D \psi_L + \bar{\psi}_R D \psi_R + \bar{\psi}_L m \psi_R + \bar{\psi}_R m \psi_L) \quad (7)$$

$m = 0$ の場合にカイラル対称性は厳密であり、有限の m が存在すると、カイラル対称性は近似的なものになる。

$U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ カイラル変換を、ベクトル部分 $U_V(N_f)$ と軸性ベクトル部分 $U_A(N_f)$ に分けておくと便利である。 $U(N_f)$ の生成子を \vec{t} とおき、 $U_L(N_f)$, $U_R(N_f)$ 変換の変換パラメータをそれぞれ $\vec{\theta}_L$, $\vec{\theta}_R$ とおく。ここで、 $\vec{\theta}_V = (\vec{\theta}_L + \vec{\theta}_R)/2$, $\vec{\theta}_A = (-\vec{\theta}_L + \vec{\theta}_R)/2$ とパラメータを定義すると、カイラル変換は次のように書き換えることができる。

$$\psi \rightarrow e^{i\vec{\theta}_V \cdot \vec{t}} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\vec{\theta}_V \cdot \vec{t}} \quad (8)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\vec{\theta}_A \cdot \vec{t}} \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\vec{\theta}_A \cdot \vec{t}} \quad (9)$$

変換 (8) をベクトル変換、(9) を軸性ベクトル変換と呼ぶ。クォーク質量行列 m が対角な場合、(6) 式からわかるように、作用はベクトル変換に対して不変である。一方、軸性ベクトル変換に対しては、 $\bar{\psi}\psi$ を含む質量項が存在すると、常に対称でない。

以上は作用の古典的な対称性であった。QCD 作用を量子化すると、 $U_A(1)$ 部分対称性を保ったまま正則化を行うことが不可能であることが知られている [29]。このことを量子異常という。したがって、量子効果を取り入れた QCD 有効ポテンシャルの持つ対称性は、カイラル極限で、 $U_V(1) \times SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$ である。

QCD の解析の出発点として、QCD 真空は (近似的な) $U_V(1) \times SU_V(N_f) \times SU_A(N_f)$ 対称性を $U_V(1) \times SU_V(N_f)$ まで自発的に破っている¹ と仮定する [31]。この仮定により、他のハドロンと比べ小さな質量を持つパイオンの存在や、クォーク質量に対して大きな核子の質量が自然に説明される [1]。例として、カイラル対称性の自発的破れに基づいた低エネルギー有効理論からは、次の Gell-Mann–Oakes–Renner 関係式 [32] が導かれる²。

$$f_\pi^2 m_{\pi^\pm}^2 = -\frac{m_u + m_d}{2} \langle \bar{\psi}_u \psi_u + \bar{\psi}_d \psi_d \rangle \quad (10)$$

この関係式は、荷電パイオン質量 m_{π^\pm} 、パイオン崩壊定数 f_π 、クォーク質量 m_u, m_d 、カイラル凝縮 $\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle, \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle$ を結びつけている。有限のクォーク質量と有限のカイラル凝縮が存在するために、パイオンが有限の質量を獲得することがわかる。 $\bar{\psi}\psi$ は $SU_A(N_f)$ 不変ではないため、その真空期待値であるカイラル凝縮が非ゼロの値を持つということは、真空が自発的にカイラル対称性を破っていることを意味する。言い換えると、カイラル凝縮はカイラル対称性のオーダーパラメータである。現実的な $m_{\pi^\pm}, f_\pi, m_u, m_d$ の値を用いると、(10) 式から、 $(\langle \bar{\psi}_u \psi_u \rangle + \langle \bar{\psi}_d \psi_d \rangle)/2 \sim (-250 \text{ MeV})^3$ と見積もられる。

QCD 分配関数 (1) からわかるように、形式的には、カイラル凝縮は分配関数をクォーク質量について対数微分すると求めることができる。

$$-\frac{\partial}{\partial m_f} \log Z(m) \Big|_{m=m_{\text{phys}}} = V_4 \langle \bar{\psi}^f \psi^f \rangle \quad (11)$$

f はフレーバの添字である。 m_{phys} は物理的な質量行列を意味する。真空の並進対称性から、 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ は時空座標 x に依存しないことに注意する。この関係は、熱力学的な視点からは、カイラル凝縮が示強変数 m に共役な示量変数 (の密度) であることを意味している。これは、磁性体の熱力学における外場 h (示強変数) と磁化 M (示量変数) の関係と同じである。

¹ベクトル対称性 $U_V(1) \times SU_V(N_f)$ は、自発的には破れないことが一般的に示されている [30]。

²これは Minkowski 時空での表式である。

2.2 有限温度密度 QCD

有限温度、有限バリオン数密度をもつ QCD 物質を考える。大カノニカル集団を用いると、分配関数は QCD ハミルトニアン H_{QCD} とクォーク数演算子 N とを用いて表すことができる。

$$Z(T, \mu) = \text{Tr} e^{-(H_{\text{QCD}} - \mu N)} \quad (12)$$

ここで μ はクォーク化学ポテンシャルであり、バリオン化学ポテンシャル μ_B とは、 $\mu = \frac{1}{3}\mu_B$ という関係がある。(12) 式のトレースは、汎関数積分の形式に直すことができる [33]。

$$\begin{aligned} Z(T, \mu) &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A_\mu e^{-\int_0^\beta dt \int d^3x \bar{\psi}(D + \gamma_0 \mu + m)\psi(x) - S_{\text{YM}}} \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \prod_f^{N_f} \det(D + \mu \gamma_0 + m_f) e^{-S_{\text{YM}}} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、虚時間 τ 方向の積分は、 $[0, \beta]$ ($\beta = 1/T$) に制限され、 τ 方向について、フェルミオン場には反周期的境界条件が、ゲージ場には周期的境界条件が課せられる。

$$\psi(\tau = 0, \vec{x}) = -\psi(\tau = \beta, \vec{x}), \quad A_\mu(\tau = 0, \vec{x}) = A_\mu(\tau = \beta, \vec{x}) \quad (14)$$

この境界条件から、直ちに ψ , A_μ を次のように Fourier 展開できる。

$$\psi(\tau, \vec{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n^F \tau} \tilde{\psi}_n(\vec{x}) \quad (15)$$

$$A_\mu(\tau, \vec{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n^B \tau} \tilde{A}_{\mu,n}(\vec{x}) \quad (16)$$

ここで、 ω_n^F , ω_n^B は、フェルミオン、ボゾンに対する松原周波数であり、それぞれ次のように定義される。

$$\omega_n^F = (2n + 1)\pi T, \quad \omega_n^B = 2n\pi T \quad (17)$$

有限温度密度分配関数は、(13) 式のように、汎関数積分の形式に書くことができるため、通常の場の理論と同様に系統的な摂動論が適用できる。しかし、強結合領域や、相転移点近傍など、非摂動的効果が本質的になる領域では、摂動論による解析は破綻する。分配関数 (13) を非摂動的に解析することは、一般には難しい。

漸近自由性から、単純には、高温ではクォークとグルーオンは自由な粒子として振る舞うと予想できる。この場合、カイラル凝縮は存在しない。したがって、QCD 物質の温度 T を上げていくと、カイラル対称性が回復すると期待できる。カイラル対称性の回復に伴う相転移を、カイラル相転移と呼ぶ。また、以下で述べるように、模型計算などによって、有限の μ に対するカイラル相転移も期待されている。

(13) 式の汎関数積分から、カイラル相転移の転移温度や次数を計算することは困難である。通常用いられるアプローチには、主に格子 QCD によるシミュレーションや、QCD の対称性を取り込んだ模型の解析がある。以下では、それらの研究を簡単に紹介し、QCD の相構造に対する理解をまとめる。

2.2.1 有限温度相転移

Pisarski-Wilczek による、普遍性に基ついた解析を解説する [23]。次のような Ginzburg-Landau 型のラグランジアンを導入する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = & \frac{1}{2} \text{tr} \partial_\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + \frac{a}{2} \text{tr} \Phi^\dagger \Phi + \frac{b_1}{4!} (\text{tr} \Phi^\dagger \Phi)^2 + \frac{b_2}{4!} \text{tr} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ & - \frac{c}{2} (\det \Phi + \det \Phi^\dagger) - \frac{1}{2} \text{tr} h (\Phi + \Phi^\dagger). \end{aligned} \quad (18)$$

$\Phi = \Phi_{fg} \sim \bar{\psi}^f P_L \psi^g$ は $N_f \times N_f$ 行列のオーダパラメータ場である。また、 $h \propto \text{diag}(m_u, m_d, m_s, \dots)$ はクォークの質量行列である。 Φ に対し、 $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ カイラル変換は、

$$\Phi \rightarrow U_L \Phi U_R^\dagger \quad (19)$$

と定義される。カイラル極限 $h = 0$ の場合の対称性を考える。 $c = 0$ のとき、 \mathcal{L}_{eff} は $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_A(1)$ 対称性を持つ。一方、 $c \neq 0$ のときには、行列式相互作用項 (小林-益川-'t Hooft 相互作用項 [34][35]) によって $U_A(1)$ 対称性が明示的に破られるため、 \mathcal{L}_{eff} は $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$ 対称性のみを持つ³。したがって、パラメータ c は、 $U_A(1)$ アノマリーの効果を表している。また、 $h \neq 0$ では、 $U_A(1)$ 対称性、 $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$ 対称性がそれぞれ明示的に破れられる。これは、QCD 分配関数 (1) における質量の役割を再現している。

この模型を用いた相転移の解析は、次の二つのステップに分けられる。第一に、平均場近似による解析を行う。これにより、相転移の様子 (次数) が平均場理論 (MFT) のレベルで求められる。次に、 ϵ 展開 [36] を用いた繰り込み群 (RG) による解析を行う。この方法により、ゆらぎに誘起された一次相転移の存在を調べることができる。ただし、ここで $\epsilon = 4 - d$ であり、今の場合、空間次元 $d = 3$ である⁴。結果を表 1 にまとめた。

表 1 に示したように、相転移の次数は、 $U_A(1)$ アノマリーの効果の有無と、フレーバ数 N_f に依存している。その理由を、平均場理論 (MFT) の場合に限って簡単に解説する。アノマリーの効果を無視した場合 ($c = 0$)、平均場理論の範囲内では、相転移は常に二次転移になる。これは、(18) 式から明らかのように、有効ポテンシャル (自由エネルギー) に、オーダパラメータに対して偶数次かつ、

³ $U_V(1)$ 対称性は常に存在するが、カイラル相転移には関与しないので、今は興味がない。今後も省くことが多い。

⁴QCD は 4 次元時空の理論だが、(13) 式で明らかのように、有限温度 QCD は 4 次元体積 βV_3 の理論である。今は $V_3 \rightarrow \infty$ の漸近系に興味があるので、有限の温度 β を考えている限り、理論は有効的に 3 次元である。

表 1: N_f と相転移の次数の関係

| | $c = 0$ | | $c \neq 0$ | |
|-----------|-----------|-----------|------------|-----------|
| | MFT | RG | MFT | RG |
| $N_f = 1$ | 2nd order | 2nd order | crossover | crossover |
| $N_f = 2$ | 2nd order | 1st order | 2nd order | 2nd order |
| $N_f = 3$ | 2nd order | 1st order | 1st order | 1st order |

最大で四次の項までしか現れないためである。一方で、アノマリーの効果を取り入れた場合 ($c \neq 0$) は、行列式相互作用項が、有効ポテンシャルに、オーダパラメータについて N_f 次の項を与える。この項によって、平均場理論の範囲内でも、二次相転移以外の相転移が可能になる。 $N_f = 1$ の場合は、アノマリーによって $U_A(1)$ 対称性がなくなるために、相転移は存在しなくなる。この振る舞いは、行列式相互作用項が、質量項と同様の効果を持つことから理解できる。 $N_f = 2$ の場合は、 $SU_L(2) \times SU_R(2) \sim O(4)$ より、理論を $O(4)$ ϕ^4 模型に直すことができる。これによって、二次相転移が見出される。 $N_f = 3$ の場合は、行列式相互作用によってもたらされるオーダパラメータについて三次の項のために、一次相転移になる。

同様の機構は、シグマ模型を用いた解析 [37] や、Nambu–Jona-Lasinio(NJL) 模型を用いた解析 [38] にも見ることができる。すなわち、 $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_A(1)$ 対称な相互作用項の他に、 $U_A(1)$ 対称性を破る行列式相互作用項を加えることで、平均場理論の範囲内において、 $N_f = 3$ での一次相転移を記述できる。

有効ラグランジアン (18) から得られる結果は、2+1 フレーバ ($m = \text{diag}(m_l, m_l, m_s)$) QCD に対して、図 1 に示した相図を示唆する。ここで、 $m_u \simeq m_d$ と考え、 $m_l = (m_u + m_d)/2$ とおいた。二次相転移は、小さな外場 (クォーク質量項) によって壊され、クロスオーバーになる。一方で、一次相転移は充分小さな外場に対しては安定である。外場を強くしていくと、ある臨界質量において、一次相転移は二次相転移になり、それ以上に外場を強くするとクロスオーバーになる。 $m_l = 0$ のとき、 $m_s \rightarrow 0$ の極限が $N_f = 3$ のカイラル極限に対応し (図左下)、 $m_s \rightarrow \infty$ の極限が $N_f = 2$ のカイラル極限に対応する (図左上)。それぞれの相転移は、表 1 に示したように、一次、二次であったから、 m_s を 0 から増加させていく場合、ある m_s において、相転移は一次から二次に変わる。したがって、 m_s 軸上には三重臨界点 (TCP) が存在すると予想できる。なお、全てのクォークが重い極限 ($N_f = 0$ 、図右上) での一次相転移は、中心対称性 $Z(3)$ に関するもの [39] であり、カイラル相転移とは直接関係はない。

有効ラグランジアン (18) を用いた理論は、普遍性に基いていた。したがって、転移温度 T_c や、

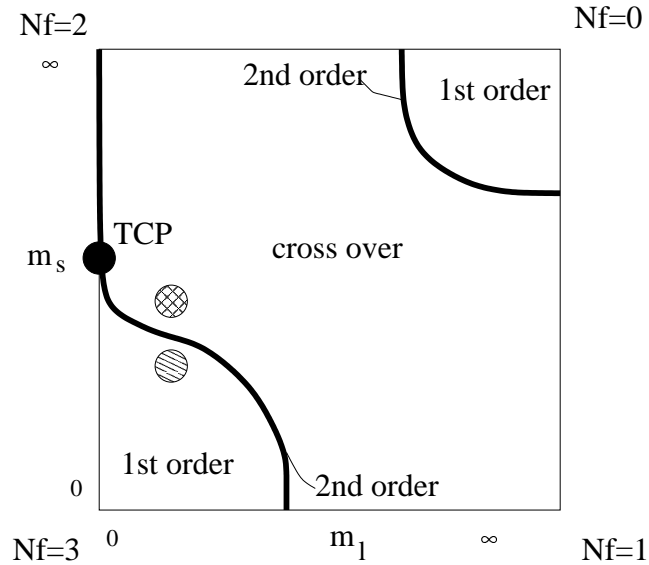


図 1: 相転移の次数の (m_l, m_s) 依存性

現実的なクォーク質量が図 1 のどの位置に相当するか、などの普遍的ではない問題については、何も結論できない。普遍的でない値には、主に格子 QCD 計算や、有効模型を用いてアプローチする必要がある。格子 QCD による計算では、現実的なクォーク質量に相当する相図上の点は、クロスオーバーの領域 (図 1 中の網掛け丸印) にあることが示唆されている [40]。疑似転移温度は、 $T_C \sim 170\text{MeV}$ 程度と見積もられている⁵。ただし、すべての格子計算で結果が一致しているわけではなく、一次相転移の領域 (図 1 中の斜線丸印) にある可能性も排除されてはいない。

2.2.2 有限温度密度相転移と $T - \mu$ 相図

有限の化学ポテンシャルが存在すると、分配関数 (13) のフェルミオン行列式が複素数の位相を持つ。これにより、(13) 式右辺の積分を、importance sampling によって見積もるという、通常の格子 QCD 計算の手法は使えなくなる。この問題をカバーする試みは複数存在するが、有限密度での格子 QCD 計算の結果は、有限温度の場合ほど多くはない。

バッグ模型 [41]、NJL 模型 [16]、カイラルランダム行列模型 [42] 等の有効模型による解析では、ゼロ温度で有限の化学ポテンシャルを増加させたときに、一次のカイラル相転移を示唆している⁶。また、QCD の Cornwall-Jackiw-Tomboulis ポテンシャルを用いる方法でも、ゼロ温度有限密度での一次相転移が見出されている [17]。

⁵クロスオーバー転移温度を疑似転移温度と呼ぶ。クロスオーバー転移は特異性を伴わないため、疑似転移温度は、例えば、スカラー感受率や Polyakov loop 感受率が極大値をとる温度として定義される。

⁶正確には、バッグ模型は、閉じ込め-非閉じ込め相転移を扱っている。

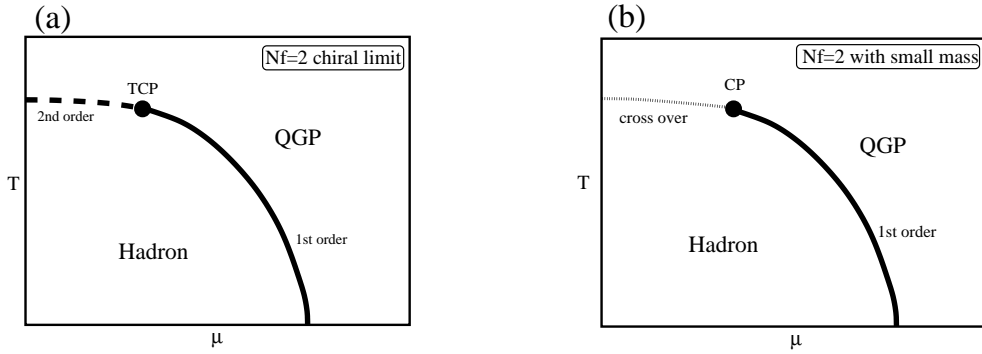


図 2: 模型計算から予想される相図 ($N_f = 2$)

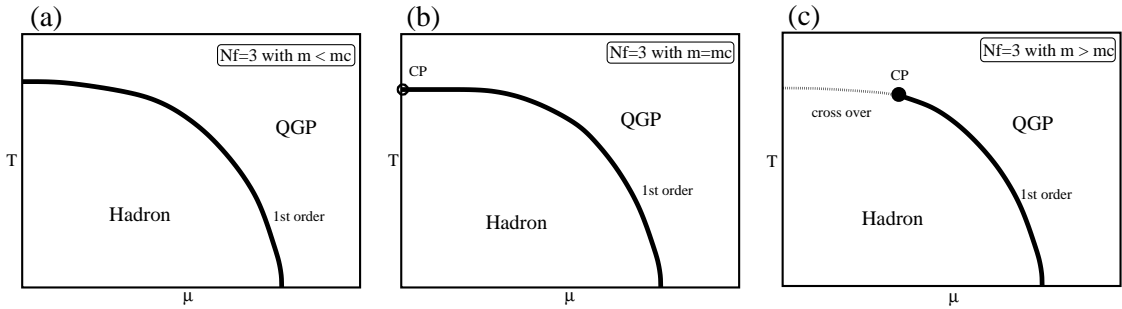


図 3: 模型計算から予想される相図 ($N_f = 3$)

このように、多くの模型解析や近似解析は、ゼロ温度有限密度での一次相転移を予想している。そこで、ここでは、QCD においてもゼロ温度有限密度での一次相転移を仮定する。その仮定に、有限温度ゼロ密度相転移の様子 (図 1) を組み合わせることで、 $T - \mu$ 平面での QCD 相図を予想する。表 1 や図 1 で示したように、有限温度ゼロ密度相転移は N_f に依存するため、相図も N_f に依存する。ここでは、簡単のために、すべてのフレーバで質量が等しく m であると仮定し、 $N_f = 2$ と $N_f = 3$ の場合についてそれぞれ考察する。

$N_f = 2$ の場合、図 2 に示したような相図が予想できる。初めに、 $m = 0$ の場合 (図 2(a)) に注目する。低温、高密度 (μ 軸上) では一次相転移である。密度を下げていくと、転移温度は一次相転移線に沿って上がって行き、ある密度において、一次相転移は二次相転移になる。この点 (T_3, μ_3) は三重臨界点であり、さらに密度を小さくしても、 $T - \mu$ 平面上では二次転移線が続いている。 T 軸上では二次相転移になる。ここにゼロでない質量 m を導入すると、相図は図 2(b) のように変わる。低密度での二次転移線は消え、二相はクロスオーバーになる。また、三重臨界点は、一次相転移線の端点としての臨界点 (T_c, μ_c) に移行する。

$N_f = 3$ の場合は図 3 に示した相図が予想できる。 $m = 0$ のときは、図 3(a) のように、相図上には一次相転移線のみが存在する。有限の質量 m が存在しても、ある臨界質量 m_c に対し、 $m < m_c$

である限り、相図は定性的には変わらない。 m を増加させていき、 $m = m_c$ に達すると、 T 軸上に二次相転移点 (臨界点) が現れる (図 3(b))。さらに m を増やすと、臨界点は T 軸から離れ、相図にクロスオーバーの領域が現れる (図 3(c))。

以上を踏まえて、2+1 フレーバの場合の相図を考察する。2+1 フレーバを $N_f = 2$ と $N_f = 3$ の中間的な状況であると考え、 $N_f = 2$ と $N_f = 3$ の二つの極限からアプローチして考察する。まず、 m_s が十分に重いと仮定する。すると、相図は $N_f = 2$ の場合 (図 2) に近く、 s クォークの存在は、補正としての効果しか持たないと考えられる。 u, d クォークは有限の質量を持つので、相図は図 2(b) に近いものになると予想できる。この相図には臨界点が存在する。次に、 m_l と m_s の差があまり大きくないと仮定する。このときは、相図は $N_f = 3$ の場合 (図 3) に近く、そこに m_l と m_s の差による補正を取り入れたものになる。この場合は、図 3(a) のような臨界点の存在しない相図も、図 3(c) のような臨界点の存在する相図もあり得る。このように、相図の定性的な構造、特に相図上の臨界点の存否は、 m_s の大きさに敏感に依存している。なお、格子 QCD 計算による、有限温度相転移がクロスオーバーであるという結果を採用すると、図 2(b) や、図 3(c) と同様の、臨界点の存在する相図が予想できる。

また、最近の格子 QCD 計算には、有限温度ゼロ密度での相転移がクロスオーバーであっても、相図上に臨界点が存在しない可能性を指摘しているものがある [24]。この結果は、相図上に相転移線は存在せず、全領域でクロスオーバーになっているとしているため、多くの模型計算が支持するゼロ温度有限密度での一次相転移を否定している。

このように、相図上の臨界点の存否は、未だに決着のついていない問題であり、さらなる研究が必要である。ここでは、カイラルランダム行列 (ChRM) 模型を用いて相構造の研究を行いたい。文献 [18] では、ChRM 模型を用いて $N_f = 2$ に対応する相図の解析が行われ、臨界点の存在が結論された。ところが、そこで用いられていた ChRM 模型では、4 節で解説するように、相転移が N_f に依存しない。したがって、同じ模型を用いて、2+1 フレーバでの相図を解析することはできない。上で議論したように、臨界点の存在、非存在を論じるには、模型がフレーバ数 N_f に依存した相転移を示すことが本質的に重要になるからである。したがって、ChRM 模型で臨界点の存否を考察するには、まず模型を改良し、相転移が N_f に依存するようになる必要がある。先に指摘したように、シグマ模型や NJL 模型を用いた解析で、平均場理論においても N_f に依存した相転移が得られるのは、アノマリーによる $U_A(1)$ 対称性の破れの効果を有効的に取り入れるために、行列式相互作用項が導入されるからである。したがって、これに相当する効果を ChRM 模型に取り込めば、 N_f に依存する相転移を示す ChRM 模型が構築できると期待できる。この試みについては、5 節で詳しく述べる。

3 Dirac 準位統計とカイラルランダム行列理論

本節では、最初に、Banks-Casher 関係式 [13] を導出し、Dirac 演算子の固有値分布 (Dirac スペクトル) と、カイラル凝縮との関係を明らかにする。Dirac スペクトルを QCD から直接計算することは一般に困難であるが、近似計算などによって Dirac スペクトルが与えられると、Banks-Casher 関係式により、直ちにカイラル凝縮の値を知ることができる。これは、カイラル対称性の自発的破れに対する興味深い視点である。

ところで、複雑な系のハミルトニアン⁷の準位統計を考察する手法として、ランダム行列理論 [15] がある。ランダム行列理論は、複雑なハミルトニアン⁷の行列要素を、対称性のみを残して完全にランダムなものとして扱う。このような単純化は、ある種の統計量は、行列要素の分布に依存しない (普遍的である) という性質を持つために正当化される。実際にランダム行列理論は、原子核のスペクトルを始めとする、多くの実験事実を説明する [43]。一方で、普遍的ではない量に対しては、ランダム行列理論は何も言うことができない。

ランダム行列理論において、ハミルトニアンを Dirac 演算子におきかえ、QCD の Dirac 準位統計に応用したものが、カイラルランダム行列 (ChRM) 理論 [12][44] である⁷。ランダム行列理論における普遍性の議論に従うと、Dirac スペクトルは普遍的ではない。普遍的なのは、Dirac スペクトルをスケール変換した、microscopic Dirac スペクトル $\rho_s(z)$ である。ChRM 理論から計算された $\rho_s(z)$ は、QCD から計算されるものと一致していると期待される。その厳密な証明はないが、Leutwyler-Smilga の和則 [51] を導くことや、格子 QCD の数値計算との比較など、有用性を裏付ける根拠は多い。

この節では ChRM 理論を導入し、microscopic Dirac スペクトル $\rho_s(z)$ の計算方法について概観する。さらに、ChRM 理論によって計算された $\rho_s(z)$ のもっともらしさを、いくつかの例を挙げて確認する。

3.1 Banks-Casher 関係式

3.1.1 Dirac 演算子の対称性と固有値分布

Dirac 演算子の固有値分布を調べる前に、対称性の情報から、Dirac 演算子がどのような固有値を持つのかを考察する。

Dirac 演算子は

$$D = \gamma_\mu (\partial_\mu + iA_\mu) \tag{20}$$

と定義される。Dirac 演算子は、なんらかの方法で正則化されているここでは考える。すなわち、有限の体積 V_4 において、Dirac 演算子は有限次数の行列として表示できる。熱力学極限 $V_4 \rightarrow \infty$ で

⁷カイラルランダム行列理論は QCD 以外にも応用されている [44]。

は、Dirac 演算子は加算無限次の行列になる。固有値の個数も同様である。

(20) 式において、 γ_μ はエルミートなので、Dirac 演算子は全体で反エルミートである。

$$D^\dagger = -D \quad (21)$$

また、フェルミオン作用のカイラル対称性は、Dirac 演算子に対しては、

$$\{D, \gamma_5\} = 0 \quad (22)$$

と書くことができる

この二つの大局的対称性から、Dirac 演算子の固有値には制限がつく。まず、反エルミート性 (21) から、Dirac 演算子の固有値はすべて純虚数 $i\lambda$ ($\lambda \in \mathbf{R}$) である。また、カイラル対称性 (22) から、非ゼロの固有値 $i\lambda$ に対して、 $-i\lambda$ もまた D の固有値であることが示される。したがって、非ゼロの固有値は $\pm i\lambda$ のペアで現れる。ただし、ゲージ場の非自明なトポロジーによって現れる厳密なゼロ固有値 [45] には、この制限は適用されず、ペアではなく単独で存在する。

したがって、Dirac 演算子の固有値 $i\lambda$ の分布関数は、実数 λ に対して定義するのが良い。Dirac スペクトル $\rho(\lambda)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) &= \left\langle \sum_n \delta(\lambda - \lambda_n) \right\rangle_{\text{QCD}} \\ &= \langle \text{tr} \delta(\lambda - iD) \rangle_{\text{QCD}} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle_{\text{QCD}}$ は、QCD 分配関数を用いた平均操作である。すなわち、任意の演算子 O について、次のように定義される。

$$\langle O \rangle_{\text{QCD}} \equiv \int \mathcal{D}A_\mu O \prod_f \det(D + m_f) e^{-S_{\text{YM}}} \quad (24)$$

3.1.2 Banks-Casher 関係式

古典的なゲージ場の配位は、整数の位相電荷 ν によって区別することができる [45]。配位に対して連続的なゲージ変換を施しても、位相電荷は変化しない。Dirac 演算子は、背景のゲージ場が位相電荷 ν を持つと、 ν 個の厳密なゼロ固有値を持つ。したがって、QCD 分配関数を Dirac 演算子の固有値によって表現するには、ゲージ場の積分を異なる ν に対して分割するのが便利である。位相電荷 ν を持つゲージ配位による分配関数を Z_ν とし、次のように定義する。

$$\begin{aligned} Z_\nu &= \int_\nu \mathcal{D}A_\mu \prod_f \det(D + m_f) e^{-S_{\text{YM}}} \\ &= \left\langle \prod_f \det(D + m_f) \right\rangle_\nu \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 $\int_{\nu} \mathcal{D}A_{\mu}$ は、位相電荷 ν を持つゲージ配位の集団で積分をすることを表している。また、任意の \mathcal{O} に対し、次のように $\langle \mathcal{O} \rangle_{\nu}$ を定義した。

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\nu} \equiv \int_{\nu} \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{O} e^{-S_{\text{YM}}} \quad (26)$$

QCD 分配関数は、 ν についての分布関数を用いて、 Z_{ν} を足し上げたものになる。 ν の分布関数を決定するために、ここでは ν の分散が体積 V に比例すると仮定する。すると、 ν は $\mathcal{O}(V^{1/2})$ で分布するために、中心極限定理から、充分大きな V に対し、分布関数はガウス型にして良い。したがって、QCD 分配関数は次のように表せる。

$$Z_{\text{QCD}} = \sum_{\nu} e^{-\frac{\nu^2}{2V\tau}} Z_{\nu} \quad (27)$$

ここで、 τ はクエンチ位相感受率である。

Z_{ν} は、Dirac 演算子の固有値を用いると、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} Z_{\nu} &= \left\langle \prod_f \prod_n (i\lambda_n + m_f) \right\rangle_{\nu} \\ &= \left\langle \prod_f m_f^{|\nu|} \prod_{\lambda_n > 0} (\lambda_n^2 + m_f^2) \right\rangle_{\nu} \end{aligned} \quad (28)$$

二行目では、非ゼロの固有値が $\pm i\lambda$ のペアで現れることを用いた。この分配関数を m_f で対数微分し、カイラル凝縮を計算する。

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}^f \psi^f \rangle &= -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial m_f} \log Z_{\nu} \\ &= -\left\langle \left(\frac{\nu}{m_f V} + \frac{1}{V} \sum_{\lambda_n > 0} \frac{2m_f}{\lambda_n^2 + m_f^2} \right) \prod_f m_f^{|\nu|} (\lambda_n^2 + m_f^2) \right\rangle_{\nu} \end{aligned} \quad (29)$$

(27) 式で仮定したように、 ν は高々 $\mathcal{O}(V^{1/2})$ の大きさである。したがって、(29) 式の $\frac{\nu}{m_f V}$ の項は $\mathcal{O}(V^{-1/2})$ であり、熱力学的極限 $V \rightarrow \infty$ では重要ではなくなる。よって、カイラル凝縮の値は ν に依存しない。

$V \rightarrow \infty$ において、(29) 式の和 $\sum_{\lambda_n > 0}$ は、積分に置き換えられる。ここで、Dirac スペクトルの定義 (23) を用いると、

$$\langle \bar{\psi}^f \psi^f \rangle = -\int_0^{\infty} d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{V} \frac{2m_f}{\lambda^2 + m_f^2} \quad (30)$$

のように、平均操作を Dirac スペクトルに含めることができる。ここで $m_f \rightarrow 0$ の極限をとると、デルタ関数が現れる。

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}^f \psi^f \rangle &= -\int_0^{\infty} d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{V} \pi \delta(\lambda) \\ &= -\pi \frac{\rho(0)}{V} \end{aligned} \quad (31)$$

したがって、カイラル凝縮は Dirac スペクトルの $\lambda = 0$ の密度と比例している。これを Banks-Casher 関係式という。

Banks-Casher 関係式から、直ちに次のことがわかる。自由場の理論では、Dirac 演算子は単純に微分演算子 ∂_μ に比例している。したがって、固有値 λ は運動量 $|p_\mu|$ であり、ヤコビアンに現れる $|p_\mu|^3$ が固有値分布になる。すなわち、 $\rho(\lambda) \propto \lambda^3$ である⁸。よって、 $\rho(0) = 0$ であり、Banks-Casher 関係式より、カイラル対称性は破れない。カイラル対称性の自発的破れが、ゲージ場のダイナミクスによって起きることが、Dirac 演算子の固有値分布という視点から再度確認できた。

Dirac スペクトルのゼロ付近に固有値が集積する機構には、QCD 真空のインスタントン模型がある [46][47]。この模型は簡単には次のように説明できる。1 インスタントンゲージ配位に対して、Dirac 演算子は厳密な一個のゼロ固有値を持つ。複数の N インスタントンを持つ配位に対しては、もともとのゼロ固有値は、一般にはゼロからずれるが、ゼロ近傍に N 個の固有値が存在する。よって、インスタントン数密度 N/V が有限だと仮定すれば、熱力学的極限 $V \rightarrow \infty$ において、Dirac スペクトルのゼロ近傍には、固有値のバンドが形成される。したがって、 $\rho(0)$ が有限になると期待できる。

3.2 カイラルランダム行列理論

ChRM 理論においては、Dirac 演算子を、Dirac 演算子と同じ大局的な対称性を持ち、要素がランダムに分布する行列に置き換える。先に述べたように、Dirac 演算子は、反エルミート性 $D^\dagger = -D$ とカイラル対称性 $\{D, \gamma_5\} = 0$ を持っている。この二つの対称性は、次のような行列のブロック構造として表現することができる。

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

ただし、 $\gamma_5 = \text{diag}(+1, +1, -1, -1)$ ととっている (カイラル基底)。 W は一般に $m \times n$ の長方形複素行列である。Dirac 行列のサイズは $N = n + m$ である。

一般に行列 W に対して、特異値分解 $W = U\Lambda V^{-1}$ を行うことができる。ここで U, V はそれぞれ m, n 次のユニタリー行列であり、 Λ は次のようなブロック構造を持つ $m \times n$ 実行列である ($m > n$ の場合)。

$$\Lambda = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

⁸この分布関数を積分すると収束しない。これは、正則化を行っていないためである。正則化するには、例えば、大きい運動量 (固有値) に対してカットオフを入れる。Banks-Casher 関係式より、固有値の小さいところでの Dirac スペクトルのみがカイラル凝縮に効果をもつため、正則化によってこの部分の議論は変更を受けない。

Y は W の特異値を対角成分に持つ実 $n \times n$ 対角行列である。したがって、Dirac 行列 (32) は、ユニタリー変換により次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 0 & i\Lambda \\ i\Lambda^T & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

明らかに、この行列は $2n$ 個の固有値 $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_n$ と、 ν 個の厳密なゼロ固有値を持つ。 $n > m$ の場合も同様の議論が成立し、 $|\nu| = n - m$ 個の厳密なゼロ固有値の存在がいえる。位相電荷 ν のセクタでは、Dirac 演算子は $|\nu|$ 個の厳密なゼロ固有値を持つ。したがって、 $\nu \neq 0$ のゲージ配位の寄与は、長方形の W を用いることで取り入れられることがわかった。

Dirac 行列 (32) を用いて、ChRM 理論の分配関数は次のように導入される [14]。

$$Z_\nu^{\text{RM}}(m) = \int \mathcal{D}W \prod_f^{N_f} \det(D + m_f) e^{-\frac{N\beta}{4} \Sigma^2 \text{tr}(W^\dagger W)} \quad (35)$$

ここで、積分の測度は、

$$\int \mathcal{D}W \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i,j} dW_{ij}^R dW_{ij}^I \quad (36)$$

と定義される。すなわち、 W の実部と虚部について独立に全区間で積分する。 $\text{tr}W^\dagger W = \sum_{ij} (|W_{ij}^R|^2 + |W_{ij}^I|^2)$ に注意すると、分配関数 (35) では、 W の各要素の実部と虚部を、それぞれ独立にガウス分布させ、Dirac 行列式の平均操作を行っていることがわかる。分布平均は 0 である。分散を決めるパラメータとして Σ を導入した。また、 β は Dyson 指数であり、ここでは $\beta = 2$ ととる⁹。熱力学的極限は、比 N/V を固定し、 $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ と取ることにする。

以下では、 $m > n$ の場合を考える。我々が興味を持っているのは、Dirac 演算子の固有値の分布である。ここで、 $n \times n$ 非負定値エルミート行列 $W^\dagger W$ の n 個の固有値 $\{x_i\}$ を用いて、Dirac 演算子の非ゼロ固有値を、 $\pm i\lambda_i = \pm i\sqrt{x_i}$ と表すことができることに注意する。したがって、 $\{x_i\}$ の分布がわかれば、Dirac スペクトルを計算するには充分である。そこで、特異値分解 $W = U\Lambda V$ に注意して、分配関数 (35) の積分変数を、 W から x_i と U, V に変換することを考える。今の場合、ユニタリー行列 U, V についての積分は定数倍のみを与える。したがって、分配関数 (35) は、 x_i についての積分の形に表示できる [44]。

$$Z_\nu^{\text{RM}}(m) = \int_0^\infty dx_1 \dots dx_n \Delta^2(x) \prod_i x_i^{|\nu|} \prod_f^{N_f} m_f^{|\nu|} \prod_i^n (\lambda_i^2 + m_f^2) e^{-\frac{N}{2} \Sigma^2 \sum_i x_i} \quad (37)$$

⁹ ランダム行列は、反ユニタリー対称性の有無、正負に応じて三つのクラスに分類できる。Dyson 指数 β は、その三つに対して $\beta = 1, 2, 4$ の値を取る [15]。ランダム行列の要素は、それぞれ、実、複素、実四元数である。カラー SU(3) の QCD は $\beta = 2$ に対応する対称性クラスに入るが、カラー SU(2) の理論や、随伴表現にフェルミオンを持つ理論に対応する ChRM 理論は、それぞれ $\beta = 1, \beta = 4$ の対称性クラスに属する [48]。

ここで $\Delta(x)$ は Vandermonde 行列式である。

$$\Delta(x) = \prod_{i>j}^n (x_i - x_j) \quad (38)$$

したがって、 n 個の固有値が同時に (x_1, \dots, x_n) という値をとる確率分布 $P(x_1, \dots, x_n)$ は、次のように与えられる。

$$P(x_1, \dots, x_n) = C \Delta^2(x) \prod_i x_i^{|\nu|} \prod_f m_f^{|\nu|} \prod_i (\lambda_i^2 + m_f^2) e^{-\frac{N}{2} \Sigma^2 \Sigma_i^n x_i} \quad (39)$$

ここで、 C は規格化定数である。

ランダム行列理論において本質的なのは、ランダムな固有値を考えるのではなく、ランダムな行列要素を考えている点である。そのために、固有値は相関を持つ。その効果は、(39) 式においては、変数変換のヤコビアンとして現れた $\Delta^2(x)$ によって表されている。すなわち、 $\{x_i\}$ の中に同じ値を持つ固有値が二つ以上存在すると、 $\Delta^2(x)$ はゼロになり、分布関数 P もゼロになる。これは、準位間の反発を意味している。このように、行列要素が互いに相関を持たない場合でも、固有値間には相関がある。

また、分布関数の変数を $\{x_i\}$ から $\{\lambda_i\}$ に変換すると、ヤコビアンが現れることに注意する。

$$P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \prod_i (2\lambda_i) P(x_1 = \lambda_1^2, \dots, x_n = \lambda_n^2) d\lambda_1 \dots d\lambda_n \quad (40)$$

これは、準位反発の言葉を用いると、 n 個の固有値 $\{\lambda_i\}$ は、お互いが反発しあうだけでなく、 $\lambda = 0$ に存在する仮想的な固有値とも反発して分布する、と行うことができる。したがって、単純には、 λ_i は 0 にはなり得ず、 $\lambda = 0$ での準位密度はゼロになるように思える。その予想は n が有限ならば正しい。しかし、 $n \rightarrow \infty$ の極限では、 $\lambda = 0$ における準位密度は有限の値を取る。この事実は、一点関数 (Dirac スペクトル) の場合について、次に詳しく見る。分布中心 $\lambda = 0$ が特別であるというこの性質は、ChRM 理論に特有なものであり、カイラルでない普通のランダム行列理論には存在しない。

3.3 Global Dirac スペクトル

固有値分布関数 $P(x_1, \dots, x_n)$ を元にして、各種の統計量は計算される。この節では、Global Dirac スペクトル $\rho(\lambda) = 2\lambda \tilde{\rho}(x = \lambda^2)$ を計算する。

一般に、 k 点固有値相関関数 $\tilde{\rho}(x_1, \dots, x_k)$ は、 $P(x_1, \dots, x_n)$ を用いると次のように表すことができる。

$$\tilde{\rho}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{c_n} \frac{n!}{(n-k)!} \int_0^\infty dx_{k+1} \dots dx_n P(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (41)$$

ここで、規格化定数 c_n は、

$$c_n = \int_0^\infty dx_1 \dots dx_n P(x_1, \dots, x_n) \quad (42)$$

である。(41) 式の積分は、 P が Vandermonde 行列式を含んでおり、複雑であるが、ランダム行列理論において発展させられた直交多項式の方法を用いることで、実行することができる [15]。導出の詳細は [44] などに譲り、ここでは主に結果のみを与える。

k 点固有値相関は、Kernel 関数 $K(x, y)$ を用いて表される。

$$\tilde{\rho}(x_1, \dots, x_k) = \det_{i,j=1,\dots,k} [K(x_i, x_j)] \quad (43)$$

特に、一点相関 (スペクトル関数) は、次のようになる。

$$\tilde{\rho}(x) = \lim_{y \rightarrow x+0} K(x, y) \quad (44)$$

ここで、 $K(x, y)$ は次のように与えられる。

$$K(x, y) = \sqrt{w(x)w(y)} \frac{1}{h_{n-1}} \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{x - y} \quad (45)$$

$P_n(x)$ は、最高次 x^n の係数が 1 で、重み $w(x)$ を持つノルム h_n の直交多項式である。

$$\int_0^\infty dx w(x) P_m(x) P_n(x) = h_n \delta_{nm} \quad (46)$$

重み関数 $w(x)$ は、分布関数 $P(x)$ (39) より、次のように定義される。

$$w(x) = x^{|\nu|} \prod_{f=1}^{N_f} m_f^{|\nu|} (x + m_f^2) e^{-n\Sigma^2 \sum_i x_i} \quad (47)$$

簡単な場合として、 $\nu = 0, m_f = 0$ の場合を考える。このとき、直交多項式 $P_n(x)$ は、Laguerre 多項式 $L_n^\alpha(x)$ を用いて表すことができる。

$$P_n(x) = (-1)^n n! L_n^{N_f} (n\Sigma^2 x) \quad (48)$$

$$h_n = \frac{\Gamma(N_f + n + 1) \Gamma(n + 1)}{(N\Sigma^2/2)^{N_f+1}} \quad (49)$$

したがって、 $K(x, y)$ と $\tilde{\rho}(x)$ は次のように計算される。

$$K(x, y) = \frac{(n\Sigma^2)^2 n!}{\Gamma(\alpha + n)} X^{N_f} e^{-X} \frac{L_{n-1}^{N_f}(X) L_n^{N_f}(Y) - L_n^{N_f}(X) L_{n-1}^{N_f}(Y)}{X - Y} \quad (50)$$

$$\tilde{\rho}(x) = \frac{n\Sigma^2 n!}{\Gamma(\alpha + n)} X^{N_f} e^{-X} \left(L_n^{N_f}(X)^2 - L_n^{N_f-1}(X) L_n^{N_f+1}(X) \right) \quad (51)$$

ここで、 $X = n\Sigma^2 x, Y = n\Sigma^2 y$ を定義した。

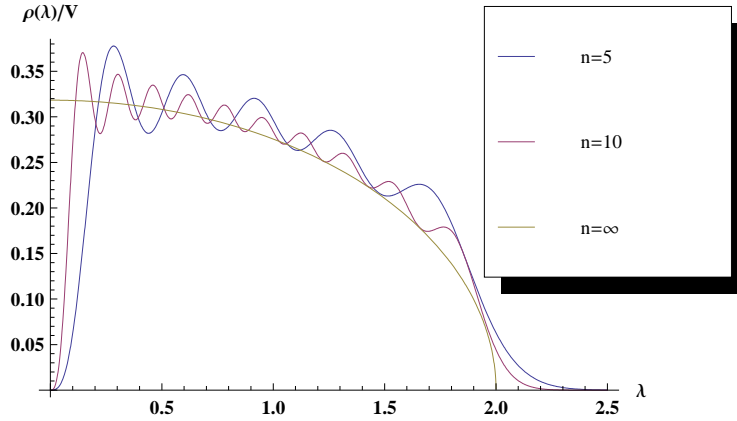


図 4: Global Dirac スペクトル ($N_f = 1$)

スペクトル関数 $\rho(\lambda)/V$ を図示すると図 4 のようになる。有限体積 (有限の n) に対しては、 $\rho(0) = 0$ である。よって、Banks-Casher 関係式に従うと、カイラル対称性は破れていないことになる。これは、有限系においては対称性は自発的に破れない、ということを表している。 $n \rightarrow \infty$ の極限では、Laguerre 多項式の漸近系を用いることで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\rho}(x)}{2n} = \frac{\Sigma}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\Sigma\lambda}{2}\right)^2} \quad (\text{for } \lambda \leq \sqrt{\frac{2}{\Sigma}}) \quad (52)$$

を示すことができる。これは、ランダム行列理論に特徴的な半円型のスペクトル関数である (Wigner の半円則)。これより、 $\rho(0)/(2n) = \Sigma/\pi$ であり、Banks-Casher 関係式より、 $|\langle \bar{\psi}\psi \rangle| = \Sigma > 0$ を得る。したがって、ChRM 理論は、熱力学的極限において、カイラル対称性の破れた系を記述している。

ただし、初めに述べたように、ChRM 理論で計算された Dirac スペクトル $\rho(\lambda)$ は、普遍性を持たず、QCD から計算されたものとは一般に一致しない。

3.4 Microscopic Dirac スペクトル

Microscopic Dirac スペクトル $\rho_s(z)$ は、global Dirac スペクトル $\rho(\lambda)$ に対して、

$$\rho_s(z) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\Sigma} \rho\left(\frac{z}{N\Sigma}\right) \quad (53)$$

と定義される。ここで、極限は $z \equiv N\Sigma\lambda$ を一定に保ちつつとる。すなわち、 λ は $1/N$ のオーダーで小さくする必要がある。定義から明らかなように、 $\rho(0) > 0$ でないと非自明な $\rho_s(z)$ は得られない。

(51) 式を用いると、 $\nu = 0$, $m_f = 0$ の場合の $\rho_s(z)$ を求めることができる [49]。

$$\rho_s(z) = \frac{z}{2} \left(J_{N_f}^2(z) - J_{N_f+1}(z)J_{N_f-1}(z) \right) \quad (54)$$

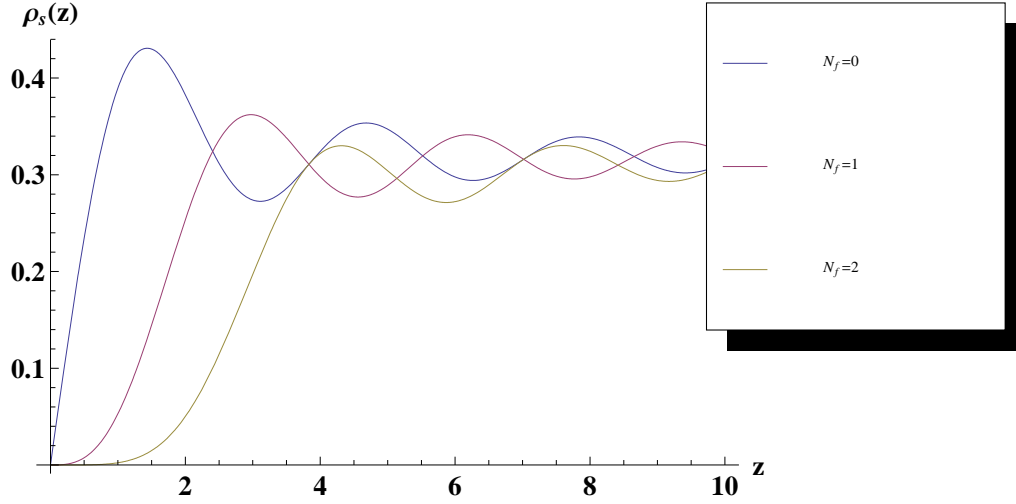


図 5: Microscopic Dirac スペクトル

$J_n(x)$ は Bessel 関数である。 $\rho_s(z)$ を、図 5 に示した。

(54) 式の結果が普遍的であることは、直感的には次のように説明される。(35) 式で用いた分布関数は、 W のユニタリー不変性を仮定すると、次のように一般化される。

$$\exp\left(-\frac{N\beta}{4}\text{tr}v(W^\dagger W)\right) \quad (55)$$

ここで $v(\phi)$ は次のように展開できる関数である。

$$v(\phi) = \Sigma^2\phi + \sum_{k \geq 2} a_k \phi^k \quad (56)$$

最低次のみを取ると、ガウス型分布に帰着する。 $k \geq 2$ の高次項の寄与を考える。 $\text{tr}W^\dagger W = \sum_i \lambda_i^2$ に注意すると、高次項からは $\mathcal{O}(\lambda_i^{2k})$ ($k \geq 2$) の寄与がある。ところが、microscopic Dirac スペクトルは、 $N\Sigma\lambda$ を固定して $N \rightarrow \infty$ の極限を取っているため、 λ は $\mathcal{O}(1/N)$ の量である。したがって、 v の高次項からの寄与は、最低次の項と比べて無視できる。よって、ガウス分布で計算された microscopic Dirac スペクトル (54) は分布関数に依存せず、普遍的であると期待される。実際に、microscopic Dirac スペクトルの普遍性は厳密に証明されている [50]。また、この説明から明らかのように、microscopic Dirac スペクトルに限らず、固有値 λ の $1/N$ 程度のオーダーでの振る舞いに対する統計量 (例えば microscopic Dirac 相関関数) は一般に普遍的である。

Microscopic Dirac スペクトル $\rho_s(z)$ の普遍性が、QCD から計算された $\rho_s(z)$ と ChRM 理論から計算された $\rho_s(z)$ とが一致することを直ちに意味しないことは注意すべきである。QCD の Dirac スペクトル (の一部分) を論じるのに、(35) 式のような、有限次元の Dirac 演算子を用いて簡単化した

分配関数を用いてよいということは、厳密には正当化されていない。しかし、文献 [14] で用いられているように、QCD 真空のインスタントン模型 [46] は、このような取扱いの正しさを支持している。

(54) 式の $\rho_s(z)$ の正しさを検証するために、次のような Dirac 固有値の和を考える。

$$\sum_i \frac{1}{N^{2p} \lambda_i^{2p}} \quad (57)$$

熱力学的極限 $N \rightarrow \infty$ を考えているので、和に寄与する λ_i は、 $1/N$ のオーダーのもののみであることを注意する。この和は、 $\rho(\lambda)$, $\rho_s(z)$ を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{N^{2p} \lambda_i^{2p}} &= \int_0^\infty d\lambda \frac{\rho(\lambda)}{N^{2p} \lambda^{2p}} \\ &= \Sigma^{2p} \int_0^\infty dz \frac{\rho_s(z)}{z^{2p}} \end{aligned} \quad (58)$$

ここで、 $\rho_s(z)$ の定義 (53) を用いた。ChRM 理論によって計算された $\rho_s(z)$ (54) を代入して積分を実行すると、

$$\sum_i \frac{1}{N^{2p} \lambda_i^{2p}} = \left(\frac{\Sigma}{2}\right)^{2p} \frac{\Gamma(2p-1)\Gamma(N_f-p+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(p)\Gamma(N_f+p)} \quad (59)$$

を得る。これは、任意の次数の Leutwyler-Smilga 和則 [51] を再現している。ただし、この場合は $\nu = 0$ に対応している。Leutwyler-Smilga 和則は、カイラル極限では、 $V \rightarrow \infty$ の極限での QCD 低エネルギー有効理論から導かれるため、ChRM 理論とは無関係に成立する。したがって、この結果は、ChRM 理論によって計算された $\rho_s(z)$ が、QCD で計算された $\rho_s(z)$ と一致していることを示唆している。

その他にも、格子 QCD から計算された $\rho_s(z)$ との比較研究も多く行われている [52][53]。両者は良い一致を見せており、互いの正当性を支えあっていると考えられる。

我々は、staggered フェルミオンを用いて、強結合 SU(2) 格子ゲージ理論によって $\rho_s(z)$ を計算した。図 6 に、格子理論の結果と ChRM 理論の結果を比較した。両者は良く一致している。なお、対称性クラスはカラー SU(2) とカラー SU(3) とで異なるため、ChRM 理論の $\rho_s(z)$ は、(54) 式のものではなく、次のような $\beta = 4$ の表式を用いた¹⁰ [54]。

$$\rho_s(z) = 2z^2 \int_0^1 du u^2 \int_0^1 dv [J_0(2uvz)J_1(2uz) - vJ_0(2uz)J_1(2uvz)] \quad (60)$$

staggered フェルミオンを用いた格子 QCD と ChRM 理論の比較についての先行研究には、[55] などがある。

ここではカイラル極限での $\rho_s(z)$ しか議論しなかったが、クォークが有限の質量 m_f を持つ場合にも、ChRM 理論から $\rho_s(z)$ を求めることができる [56][57]。ただし、その結果は $N \ll 1/m_f$ の領域で正しい。このような領域は、しばしば ϵ 領域と呼ばれる。

¹⁰staggered フェルミオンは特殊であり、カラー SU(2) での Dirac 演算子は、 $\beta = 1$ ではなく $\beta = 4$ の対称性クラスに属する。

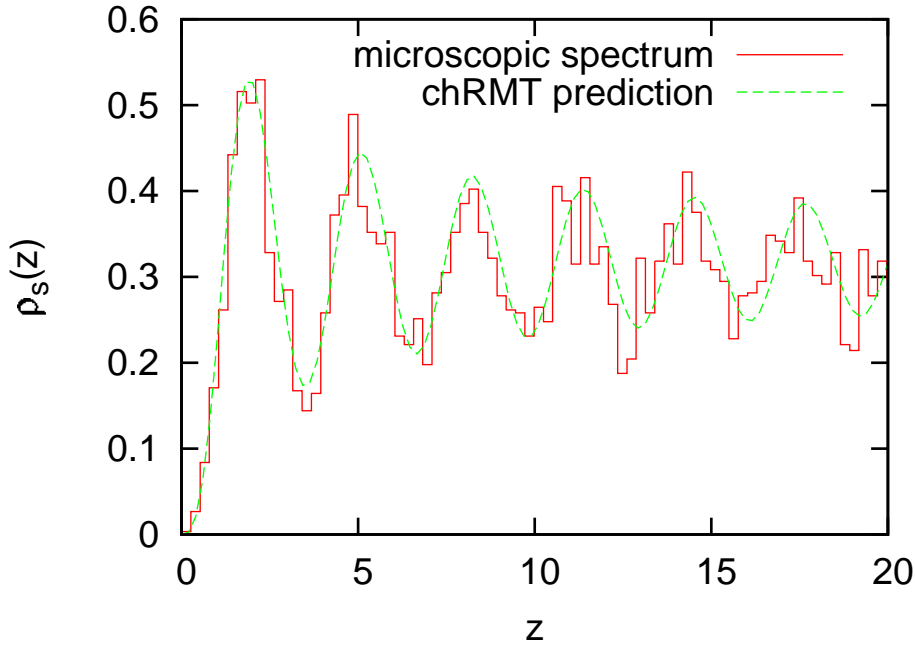


図 6: 強結合 SU(2) 格子ゲージ理論と ChRM 理論の $\rho_s(z)$

4 カイラルランダム行列模型

3節で紹介したように、microscopic Dirac スペクトル $\rho_s(z)$ は普遍的な統計量であり、ChRM 理論から計算された関数形は、QCD から計算されたものと一致していると期待されている。一方、カイラル対称性の自発的破れを特徴づけるカイラル凝縮の値は、Banks-Casher 関係式によれば、global な Dirac スペクトルの、ゼロ固有値密度 $\rho(\lambda = 0)$ と比例している。 $\rho(\lambda)$ は普遍的な統計量ではないために、ChRM 理論から、カイラル凝縮の値に対しては、普遍性を用いた予言をすることはできない。

しかし、ChRM 理論で用いられる、Dirac 演算子の要素をランダムな変数に置き換える手法は、強結合領域の QCD に対する模型的な取扱いとしては興味深い。例えば、ランダム行列に対して非ランダムな“外場”行列を加えると、カイラル対称性の回復を記述することができる (4.2 節)。そのような模型を、ここではカイラルランダム行列模型 (ChRM 模型) と呼ぶことにする。ChRM 模型の有用性は、分配関数に現れる積分がガウス型になるために、多くの場合、計算が解析的に行えることにある。しかし、ガウス分布の仮定を、普遍性から正当化することはできない点には注意する必要がある。この意味で、ChRM 模型は、あくまでも QCD に対する一種の模型である。ChRM 模型を用いることで、カイラル対称性の側面から、QCD 相転移に対して知見が得られると期待する。

この節では、有限温度密度効果を取り込んだ ChRM 模型を導入する。特に、ChRM 模型によって

記述される相転移の振る舞いが、フレーバ数 N_f に依存しないことを明らかにする。また、 (T, μ, m) 空間における相構造を具体的に示す。さらに、非自明な位相電荷 ν セクタからの効果を、 $U_A(1)$ 問題と関連させて論じる。

4.1 真空模型

最も簡単な ChRM 模型として、真空での模型を考察する。この模型の有効ポテンシャルの形を見ておくことは、ChRM 模型の基本的な構造を知る上で有益であり、有限温度密度模型との比較の意味でも興味深い。真空での ChRM 模型の分配関数は、3 節の ChRM 理論と同じである。

$$Z^{\text{RM}}(m) = \int \mathcal{D}W \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) e^{-N \Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \quad (61)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

ここで W は $N \times N$ 正方行列である。すなわち、分配関数 (62) は $\nu = 0$ のセクタで定義されている。 $\nu \neq 0$ のセクタを含めた取扱いは、 $U_A(1)$ 問題と関連して、4.5 節で解説する。また、熱力学的極限は、 $2N/V_4$ を固定した上で、 $N \rightarrow \infty$ ととる。ここでは簡単のために $2N/V_4 = 1$ ととる。

この模型の基底状態がカイラル対称性を自発的に破っていることを、3 節とは異なるアプローチで考察する。ここでは分配関数を直接計算し、有効ポテンシャルを導出する。有効ポテンシャルの最小値を与える状態として、基底状態は求められる。

4.1.1 有効ポテンシャルの導出

初めに行列式部分を Grassmann 積分で表示する。それぞれ $N \times N_f$ 成分を持つ、独立な Grassmann 数ベクトル $\psi_L, \psi_R, \psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger$ を用いると、(61) 式の行列式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & \prod_f \det(D + m_f) \\ &= \int \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi \prod_{f=1}^{N_f} \exp \left[-\psi_L^{\dagger f} iW \psi_L^f - \psi_R^{\dagger f} iW^\dagger \psi_R^f - \psi_L^{\dagger f} m_f \psi_R^f - \psi_R^{\dagger f} m_f \psi_L^f \right] \end{aligned} \quad (63)$$

次にランダム行列 W で積分を行う。ここでは、次のガウス積分公式を用いる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dz^R dz^I \exp(\beta_1 z + \beta_2 z^*) e^{-\alpha |z|^2} = \exp(\beta_1 \beta_2 / \alpha) \quad (64)$$

ここで z^R, z^I はそれぞれ複素数 z の実部、虚部を表す。また、 $\alpha > 0$ であり、 β_1, β_2 は任意の数である。 α に依存した定数は、積分測度に含めている。これを用いて、ランダム行列 W の成分 W_{ij} ごとに積分を行う。

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}W e^{-N\Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \prod_f^{N_f} \exp \left[-\psi_L^{\dagger f} iW \psi_L^f - \psi_R^{\dagger f} iW^\dagger \psi_R^f - \psi_L^{\dagger f} m_f \psi_R^f - \psi_R^{\dagger f} m_f \psi_L^f \right] \\
&= \int \mathcal{D}W e^{-N\Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \prod_f^{N_f} \prod_{i,j} \exp \left[-\psi_{L_i}^{\dagger f} iW_{ij} \psi_{L_j}^f - \psi_{R_j}^{\dagger f} iW_{ji}^* \psi_{R_i}^f - \psi_{L_i}^{\dagger f} m_f \psi_{R_i}^f - \psi_{R_i}^{\dagger f} m_f \psi_{L_i}^f \right] \quad (65) \\
&= \exp \left[\frac{1}{N\Sigma^2} \psi_L^{\dagger f} \psi_R^g \psi_R^{\dagger g} \psi_L^f - \psi_L^{\dagger f} m_f \psi_R^f - \psi_R^{\dagger f} m_f \psi_L^f \right] \\
&= \exp \left[\frac{1}{4N\Sigma^2} \left((\psi_L^{\dagger f} \psi_R^g + \psi_R^{\dagger g} \psi_L^f)^2 + (i\psi_L^{\dagger f} \psi_R^g - i\psi_R^{\dagger g} \psi_L^f)^2 \right) - \psi_L^{\dagger f} m_f \psi_R^f - \psi_R^{\dagger f} m_f \psi_L^f \right]
\end{aligned}$$

$\psi_i^\dagger \psi_i = \psi^\dagger \psi$ のように、暗黙のうちにゼロモードの足¹¹ について和を取っていることに注意する。ランダム行列についての積分を行った結果、フェルミオンに対して、4点頂点が現れた。

次に、ボゾン場を導入することで、4点頂点を打ち消す (Hubbard-Stratonovitch 変換)。そのため、次の公式を用いる。

$$\exp \left(\frac{1}{4\alpha} \text{tr} C C^T \right) = \int \mathcal{D}\sigma \exp \left(-\alpha \text{tr} \sigma \sigma^T - \text{tr} (C \sigma^T) \right) \quad (66)$$

ここで σ は実正方行列であり、積分範囲と測度は $\int \mathcal{D}\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{ij} d\sigma_{ij}$ である。(139) 式の、 $(\psi_L^{\dagger f} \psi_R^g + \psi_R^{\dagger g} \psi_L^f)$, $(i\psi_L^{\dagger f} \psi_R^g - i\psi_R^{\dagger g} \psi_L^f)$ を、それぞれ $N_f \times N_f$ 行列とみなし、対応する補助場を σ, π とする。(139) 式は次のようにボゾン化される。

$$\begin{aligned}
& \exp \left[\frac{1}{4N\Sigma^2} \left((\psi_L^{\dagger f} \psi_R^g + \psi_R^{\dagger g} \psi_L^f)^2 + (i\psi_L^{\dagger f} \psi_R^g - i\psi_R^{\dagger g} \psi_L^f)^2 \right) - \psi_L^{\dagger f} m_f \psi_R^f - \psi_R^{\dagger f} m_f \psi_L^f \right] \\
&= \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi e^{-N\Sigma^2 \text{tr} (\sigma \sigma^T + \pi \pi^T)} \\
&\quad \times \exp \left[-(\psi_L^{\dagger f} \psi_R^g + \psi_R^{\dagger g} \psi_L^f) \sigma_{gf} - i(\psi_L^{\dagger f} \psi_R^g - \psi_R^{\dagger g} \psi_L^f) \pi_{gf} - \psi_L^{\dagger f} m_f \psi_R^f - \psi_R^{\dagger f} m_f \psi_L^f \right] \\
&= \int \mathcal{D}S e^{-N\Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \exp \left[-(\psi_L^\dagger (S + m) \psi_R + \psi_R^\dagger (S^\dagger + m) \psi_L) \right] \quad (67)
\end{aligned}$$

ここで、 $N_f \times N_f$ 複素行列 S を、 $S = \sigma^T + i\pi^T$ により導入した。また、 $m = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_{N_f})$ は質量行列である。

最後に、残った Grassmann 数を積分する。

$$\begin{aligned}
Z^{\text{RM}}(m) &= \int \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi \mathcal{D}S e^{-N\Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \exp \left[-(\psi_L^\dagger (S + m) \psi_R + \psi_R^\dagger (S^\dagger + m) \psi_L) \right] \\
&= \int \mathcal{D}S e^{-N\Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \det^N [(S + m)(S^\dagger + m)] \\
&= \int \mathcal{D}S e^{-2N\Omega(S; m)} \quad (68)
\end{aligned}$$

¹¹ ランダム行列 W の足をゼロモードの足と呼ぶことがある。

ここで有効ポテンシャル Ω を次のように定義した。

$$\Omega(S; m) = \frac{1}{2} \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S - \frac{1}{2} \log \det(S + m)(S^\dagger + m) \quad (69)$$

熱力学極限 $N \rightarrow \infty$ では、(68) 式の積分は、有効ポテンシャル $\Omega(S; m)$ の最小値を与える $S = \bar{S}$ によって支配される (鞍点法)。鞍点 $S = \bar{S}$ の満たす鞍点方程式 (ギャップ方程式) は、 $\Omega(S; m)$ を S について微分し、ゼロと置いたものである。

$$\Sigma^2 S(S^\dagger + m) = 1 \quad (70)$$

鞍点解 \bar{S} を用いると、カイラル凝縮は次のように表される。

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}^f \psi^f \rangle &= -\frac{1}{2N} \frac{\partial}{\partial m_f} \log Z(m) \\ &= -\frac{1}{2} \left[(\bar{S} + m)_{ff}^{-1} + (\bar{S}^\dagger + m)_{ff}^{-1} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \Sigma^2 (\bar{S}_{ff} + \bar{S}_{ff}^*) \\ &= -\Sigma^2 \text{Re}(\bar{S}_{ff}) \end{aligned} \quad (71)$$

フレーバの添字 f については和はとっていないことに注意する。カイラル凝縮は S と比例しており、 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ の代わりに S をカイラル対称性のオーダパラメータとして扱って良い。

簡単な場合として、すべてのフレーバが同じ質量を持つ場合 ($m = m \times 1_{N_f \times N_f}$) を考える。このとき、オーダパラメータ行列も、フレーバに依存しない実対角行列であると仮定する ($S = \phi \times 1_{N_f \times N_f}$)。

この場合の有効ポテンシャルは、(69) 式より、

$$\Omega(\phi, m) = \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{2} \log(\phi + m)^2 \quad (72)$$

と計算される。鞍点方程式は、有効ポテンシャルを ϕ で微分することで求まる。

$$\Sigma^2 \phi - \frac{1}{\phi + m} = 0 \quad (73)$$

鞍点方程式がもはや N_f に依存していない点に注意する。その理由は、有効ポテンシャルの表式 (72) において、フレーバ数 N_f がポテンシャルを定数倍する因子としてしか現れないからである¹²。

$m = 0$ の場合、鞍点方程式は解 $\phi = \pm 1/\Sigma$ を持つ。すぐ後に述べる理由より、用いるべき解は $\phi = 1/\Sigma$ である。よって、(71) 式より、カイラル凝縮は非ゼロの値 $-\Sigma$ を持つことがわかる。したがって、(61) 式で定義された ChRM 模型では、カイラル対称性が自発的に破れる。

¹²質量がフレーバに依存する場合 ($m = \text{diag}(m_1, m_2, \dots)$) は、オーダパラメータ行列を $S = \text{diag}(\phi_1, \phi_2, \dots)$ のように対角にとれば、有効ポテンシャルは各フレーバに対する有効ポテンシャルの和になる (i.e. $\Omega = \Omega_1(\phi_1, m_1) + \Omega_1(\phi_2, m_2) + \dots$, Ω_1 は 1 フレーバの有効ポテンシャル)。よって、鞍点方程式は各フレーバごとに (73) 式と同じになり、フレーバ数に依存した振る舞いは見出せない。これは、有限温度密度でも同様である。

$m > 0$ の場合も、鞍点方程式 (73) は二次方程式であるため、解くことができる。解は次のようになる。

$$\phi = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + 1/\Sigma^2} \quad (74)$$

二つの解のうち、よりポテンシャルを小さくするほうが正しい真空解である。それを決めるためには次のように考えるとよい。ポテンシャル (72) の第一項 $\propto \phi^2$ は、 $\phi = 0$ に対して対称な関数であり、 $|\phi|$ について単調に増加する。一方、第二項 $\propto -\log(\phi + m)^2$ は、 $\phi = -m$ に対して対称な関数であり、 $|\phi + m|$ について単調に減少する。したがって、 $m > 0$ であれば、 $\phi > 0$ の解の方がよりポテンシャルを小さくする。よって、選ぶべき解は (74) の + 符号の解である。この解に対して $m \rightarrow 0$ の極限をとると $1/\Sigma$ を得る。これにより、 $m = 0$ での解の符号は決定されていた。

小さな m に対する、 ϕ の変化を考察する。解 (74) を m について展開する。

$$\phi = \frac{1}{\Sigma} - \frac{m}{2} + \frac{\Sigma m^2}{8} + \mathcal{O}(m^4) \quad (75)$$

すなわち、小さな m は ϕ (\propto カイラル凝縮) を減少させる。これは通常の模型とは異なった振る舞いである。一方、NJL 模型における構成子クォーク質量に相当するものは、ChRM 模型では $\phi + m$ であり、これは小さな m に対して増加する。

4.1.2 Dirac スペクトル

ChRM 模型の Dirac スペクトルを求める。ここでは、前節とは異なり、resolvent を用いた手法で Dirac スペクトルの計算を行う。

resolvent $\Sigma(z)$ は、複素変数 z の関数として、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \Sigma(z) &= \frac{1}{2N} \frac{1}{Z^{\text{RM}}} \int \mathcal{D}W \text{tr} \frac{1}{D+z} \prod_f^{N_f} \det(D + m_f) e^{-N\Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \\ &\equiv \frac{1}{2N} \left\langle \left\langle \text{tr} \frac{1}{D+z} \right\rangle \right\rangle \end{aligned} \quad (76)$$

$\langle \langle \dots \rangle \rangle$ は、Dirac 行列式も含めた平均操作であることに注意する。簡単のため、ここでも m_f はすべて等しく m と置くことにする。

resolvent $\Sigma(z)$ が z の関数としてわかると、Dirac スペクトルは、 $\Sigma(z)$ の虚軸上の不連続性として計算される。

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\text{Re}\Sigma(-i\lambda + \epsilon) &= \frac{1}{2N} \left\langle \left\langle \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_n -i \left(\frac{1}{\lambda_n - \lambda - i\epsilon} - \frac{1}{\lambda_n - \lambda + i\epsilon} \right) \right\rangle \right\rangle \\ &= \frac{2\pi}{2N} \left\langle \left\langle \sum_n \delta(\lambda - \lambda_n) \right\rangle \right\rangle = 2\pi \frac{\rho(\lambda)}{2N} \end{aligned} \quad (77)$$

ここで、デルタ関数に関する公式 $\frac{1}{x-i\epsilon} - \frac{1}{x+i\epsilon} = 2\pi i\delta(x)$ を用いた。

一方で、 $\Sigma(z)$ は、定義 (76) がカイラル凝縮と類似していることに注目すると求めることができる。

$$\begin{aligned}\Sigma^2\phi(m) &= \frac{1}{2NN_f} \frac{\partial}{\partial m} \log Z^{\text{RM}}(m) \\ &= \frac{1}{2N} \frac{1}{Z^{\text{RM}}(m)} \int \mathcal{D}W \text{tr} \frac{1}{D+m} \det^{N_f}(D+m) e^{-N\Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \\ &= \frac{1}{2N} \frac{\left\langle \text{tr} \frac{1}{D+m} \det^{N_f}(D+m) \right\rangle_{\text{RM}}}{\left\langle \det^{N_f}(D+m) \right\rangle_{\text{RM}}}\end{aligned}\quad (78)$$

$\langle \dots \rangle_{\text{RM}}$ は、ランダム行列の重みのみによる平均であり、 $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ とは異なることに注意する。ここで、分配関数が鞍点法によって計算されていることに注意すると、平均操作 $\langle \dots \rangle_{\text{RM}}$ は、統計集団に対する無限和 (積分) のうち、もっとも効果を持つ一つの項で表されている。すなわち、任意の統計量 A, B に対し $\langle AB \rangle_{\text{RM}} = \langle A \rangle_{\text{RM}} \langle B \rangle_{\text{RM}}$ が成り立つ。したがって、(78) 式の $\det^{N_f}(D+m)$ の項は分子と分母でキャンセルする。よって、(78) 式において、単純に $m \rightarrow z$ と置き換えると、鞍点法を用いている限り、次のように変形できる。

$$\Sigma^2\phi(z) = \frac{1}{2N} \frac{\left\langle \text{tr} \frac{1}{D+z} \det^{N_f}(D+z) \right\rangle_{\text{RM}}}{\left\langle \det^{N_f}(D+z) \right\rangle_{\text{RM}}}\quad (79)$$

$$= \frac{1}{2N} \frac{\left\langle \text{tr} \frac{1}{D+z} \det^{N_f}(D+m) \right\rangle_{\text{RM}}}{\left\langle \det^{N_f}(D+m) \right\rangle_{\text{RM}}}\quad (80)$$

$$= \left\langle \left\langle \frac{1}{2N} \text{tr} \frac{1}{D+z} \right\rangle \right\rangle = \Sigma(z)\quad (81)$$

したがって、resolvent $\Sigma(z)$ は、(74) で求められた解 $\phi(m)$ に対して、 $m \rightarrow z$ の置き換えをしたものに他ならない。Dirac スペクトルは、(74) 式と (77) 式から、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\frac{\rho(\lambda)}{2N} &= \frac{1}{\pi} \text{Re} \Sigma(-i\lambda + \epsilon) \\ &= \frac{\Sigma}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\Sigma\lambda}{2}\right)^2}\end{aligned}\quad (82)$$

したがって、前節と同じ結果が得られた。 $\lambda = 0$ での値 $\rho(0) = \Sigma/\pi$ を用いて、Banks-Casher 関係式からカイラル凝縮を計算すると、 $-\pi\rho(0) = -\Sigma$ となり、正しい値を再現している。

4.2 有限温度模型

ここでは、有限温度場の理論 (松原形式) を用いて、温度効果を取り入れた Dirac 演算子を導入する [58]。異なるアプローチとして、インスタントン分子相関の考察から温度効果を取り込む考え方もある [60]。両者は結果的にほぼ同じ模型を与えることが知られている。

4.2.1 有限温度 Dirac 演算子

Dirac 演算子が、有限温度効果によって、どのような変更を受けるか考察する。有限温度場の理論 [33] における Dirac 演算子を、次のように分離する。

$$D = \gamma_4 \partial_\tau + R \quad (83)$$

第一項が虚時間についての微分であり、第二項がその他の部分である。温度 T の効果は第一項から、虚時間 τ に対する $1/T$ の周期性として取り込まれる。

温度効果を具体的に見るために、 ∂_τ の固有関数 $\phi(\tau)$ を導入する。 $\phi(\tau)$ は、 τ 方向については、反周期的であるため、次のように展開できる。

$$\phi(\tau) = \sum_n e^{i\omega_n \tau} \tilde{\phi}_n \quad (84)$$

ここで、松原振動数 ω_n は、整数 n に対して定義される。

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T \quad (85)$$

単位演算子 $1 = \int d\tau \phi(\tau) \phi^\dagger(\tau)$ を (83) 式の左右から作用させると、次のように書き換えることができる。

$$D = \sum_n i\omega_n \gamma_4 \tilde{\phi}_n \tilde{\phi}_n^\dagger + R \quad (86)$$

$\tilde{\phi}_n$ は温度には依存しないので、Dirac 演算子の温度依存性は、 ω_n のみに現れる。また、 $\tilde{\phi}_n \tilde{\phi}_n^\dagger$ は単純な射影演算子である。第二項の R をランダムな行列に置き換えると、有限温度の ChRM 模型の Dirac 演算子を得る。

通常有限温度 ChRM 模型においては、相転移点近傍において、(86) 式の和のうち、最低次の πT 、 $-\pi T$ のみが主要な寄与をするという近似を用いる [58][59]。この近似の意味を、Dirac 演算子の固有値分布から説明すると、次のようになる。Banks-Casher 関係式によれば、カイラル凝縮の値に影響を与えるのは、Dirac 演算子のゼロ付近の固有値である。したがって、Dirac 演算子 (86) をゼロ付近の固有値を与える部分のみに truncate して考えれば、カイラル相転移を扱うには充分である。いま、truncate されてきた部分空間の恒等演算子を $1_{z.m.}$ とする。このとき、最低次の松原周波数のみがカイラル凝縮に主要な寄与を与えるということは、次のような意味を持っている。

$$\sum_{\text{lowest modes}} \tilde{\phi}_n \tilde{\phi}_n^\dagger \sim 1_{z.m.} \quad (87)$$

$\sum_{\text{lowest modes}}$ は最低次の松原周波数に対応する n のみについて和をとることを意味する。以上の近似のもとで、Dirac 演算子は次のようになる。

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + it \\ iW^\dagger + it & 0 \end{pmatrix} \quad (88)$$

ここで、 $t = \pi T$ は有効温度である。松原周波数の負符号は、ランダム行列との相対的な符号としてのみ効くため、ランダム行列要素を再定義して吸収している。

分配関数は、真空の場合 (61) と同様に導入される。

$$Z^{\text{RM}}(m, t) = \int \mathcal{D}W \prod_f \det(D + m_f) e^{-N \Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \quad (89)$$

温度の効果は、Dirac 演算子の対称性 (反エルミート性とカイラル対称性) を破らずに、非ランダムな“外場”行列 $it\gamma_4$ を導入することで取り入れられている。

有効ポテンシャルの導出は、真空の場合とほぼ同様に行うことができる。異なるのは、非ランダムな外場行列 $\gamma_4 it$ が現れることのみであるが、この部分は、質量項と同様に、ランダム行列による積分には関与しない。分配関数 (89) は次のように計算される。

$$\begin{aligned} Z^{\text{RM}}(m, t) &= \int \mathcal{D}S e^{-N \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \det^N \begin{pmatrix} S + m & it \\ it & S^\dagger + m \end{pmatrix} \\ &= \int \mathcal{D}S e^{-2N \Omega(S; m, t)} \end{aligned} \quad (90)$$

ここで、有効ポテンシャル $\Omega(S; m, t)$ を、

$$\Omega(S; m) = \frac{1}{2} \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S - \frac{1}{2} \log \det [(S + m)(S^\dagger + m) + t^2] \quad (91)$$

と定義した。

4.2.2 有限温度カイラル相転移

有限温度の場合も、すべてのクォークの質量が等しい場合 ($m_f = m$) について議論する。オーダパラメータ行列も対角に取る ($S = \phi \times 1_{N_f \times N_f}$)。 (91) 式より、有効ポテンシャルは次のようになる。

$$\Omega(\phi; t, m) = \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{2} \log [(\phi + m)^2 + t^2] \quad (92)$$

真空の場合と同様に、フレーバ数 N_f は、ポテンシャルを定数倍する効果しか持っていないことに注意する。したがって、ギャップ方程式は N_f に依存しない。

$$\Sigma^2 \phi - \frac{\phi + m}{(\phi + m)^2 + t^2} = 0 \quad (93)$$

カイラル凝縮は、ギャップ方程式の解 $\bar{\phi}$ によって表すことができる。

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\Sigma^2 \bar{\phi} \quad (94)$$

これは、真空の場合の表式 (71) と同様である。したがって、 ϕ をカイラル対称性の破れのオーダパラメータとして扱う。

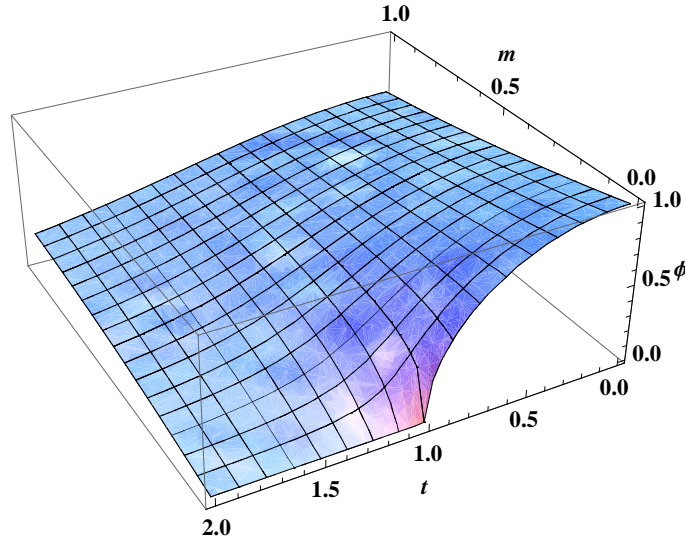


図 7: ϕ の t, m 依存性

まず、 $m = 0$ の場合を考える。(93) 式は、 $\phi = 0$ の他に、次の解を持つ。

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{\Sigma^2} - t^2} \quad (95)$$

よって、温度を $t = 0$ から増加していくと、 ϕ は $1/\Sigma$ から減少していき、 $t = t_c \equiv 1/\Sigma$ で連続的に 0 になる。転移温度 t_c 付近での ϕ の 0 への近づき方は $\phi \propto |t - t_c|^{1/2}$ であるから、 $t = t_c$ での傾きが発散している。すなわち、 t_c は二次相転移点である。また、臨界指数 $\beta = 1/2$ であり、平均場理論の値を再現している。

臨界点での ϕ の m への応答についての臨界指数 δ も求めることができる。定義から、小さい ϕ, m に対して $m \sim \phi^\delta$ だから、これをギャップ方程式 (93) へ代入して、 ϕ について最低次で等式が成り立つよう δ を選ぶ。すると、 $\delta = 3$ を得る。これも平均場理論の値を再現している。

$m \neq 0$ では、二次相転移は壊され、クロスオーバーになる。図 7 に、 ϕ の t, m 依存性を示した。

4.2.3 Dirac スペクトル

有限温度 Dirac 演算子 (83) の固有値分布関数は、真空の場合と同様に resolvent を用いる方法で求めることができる [61]。有限温度の場合の resolvent は、鞍点方程式 (93) で、 $m \rightarrow z$ と置き換えたものの解である。虚軸上での不連続性から、スペクトル関数は t の関数として求めることができる。

スペクトル関数を図 8 に図示した ($\Sigma = 1$ とした)。 $t = 0$ のときは、真空の場合の、半円型のスペクトル関数 (82) を再現している。有限の t が導入されると、スペクトルは $\lambda = 0$ を中心として、 λ の

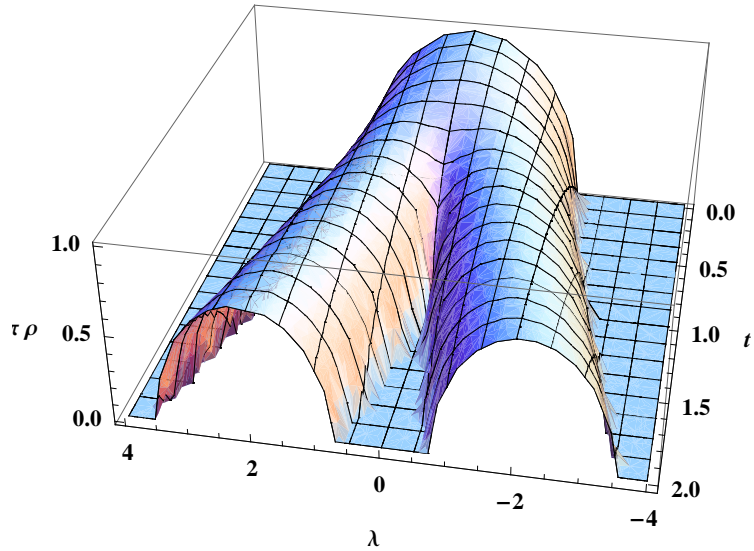


図 8: 有限の t に対するスペクトル密度

正、負方向に、対称に分かれる。転移温度 $t = 1 (= 1/\Sigma)$ では、 $\rho(\lambda = 0) = 0$ となり、カイラル対称性が回復する。さらに t を大きくしていくと、 λ の正、負方向に、それぞれ半円型のスペクトルが作られる。それぞれの中心は、 t の増加に伴って、 $\lambda = 0$ から遠ざかる。

4.3 有限密度模型

有限密度効果を取り込んだ ChRM 模型を導入する [42]。

4.3.1 有限密度 Dirac 演算子

大分配関数 (12) の表式から、Dirac 演算子は、化学ポテンシャル μ に対して、 $\partial_4 \rightarrow \partial_4 + \mu$ の置き換えをすることで得られる。

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + \mu \\ iW^\dagger + \mu & 0 \end{pmatrix} \quad (96)$$

この形は、有限温度模型 (86) において、 $it \rightarrow \mu$ という置き換えをしたものに他ならない。ただし、有限温度の場合と異なり、有限の化学ポテンシャルは、Dirac 演算子の反エルミート性を壊すことに注意する。したがって、Dirac 演算子の固有値は、純虚数のみではなく、一般に複素平面に分布する。また、Dirac 演算子の行列式にも、一般に複素数の位相が現れる。

この Dirac 演算子を用いると、分配関数は

$$Z^{\text{RM}}(m, \mu) = \int \mathcal{D}W \prod_f \det(D + m_f) e^{-N \Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \quad (97)$$

と導入される。真空、有限温度の場合と同様の方法で、積分変数をボゾン化し、有効ポテンシャルを導出することができる。

$$Z^{\text{RM}}(m, \mu) = \int \mathcal{D}S e^{-N \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \det^N \begin{pmatrix} S + m & \mu \\ \mu & S^\dagger + m \end{pmatrix} \quad (98)$$

$$= \int \mathcal{D}S e^{-2N \Omega(S; m, \mu)} \quad (99)$$

ここで、有効ポテンシャル $\Omega(S; m, \mu)$ を、

$$\Omega(S; m) = \frac{1}{2} \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S - \frac{1}{2} \log \det [(S + m)(S^\dagger + m) - \mu^2] \quad (100)$$

と定義した。

簡単のため、すべてのクォーク質量が等しい場合 ($m_f = m$) を考える。また、鞍点解を単位行列に比例した形 ($S = \phi \times 1_{N_f \times N_f}$) に仮定する。有効ポテンシャルは次のようになる。

$$\Omega(\phi; m, \mu) = \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{2} \log [(\phi + m)^2 - \mu^2] \quad (101)$$

有限温度模型と同様に、有限密度模型の場合も、フレーバ数 N_f は単純にポテンシャルを定数倍する効果しか持たない。鞍点方程式も N_f に依存しない形で求まる。

$$\Sigma^2 \phi - \frac{\phi + m}{(\phi + m)^2 - \mu^2} = 0 \quad (102)$$

鞍点解 $\bar{\phi}$ を用いてカイラル凝縮を表すことができる。

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\Sigma^2 \bar{\phi} \quad (103)$$

4.3.2 有限密度カイラル相転移

$m = 0$ の場合、鞍点方程式 (102) の解は、 $\phi = 0$ と、

$$\phi = \sqrt{1 + \mu^2} \quad (104)$$

である。簡単のため、 $\Sigma = 1$ とした。どの解が基底状態として実現されるかを知るには、有効ポテンシャルの大小を比べる必要がある。

$$\Omega(\phi, m = 0, \mu) = \begin{cases} -\frac{N_f}{2} \log(\mu^2) & (\text{for } \phi = 0) \\ \frac{N_f}{2} (1 + \mu^2) & (\text{for } \phi = \sqrt{1 + \mu^2}) \end{cases} \quad (105)$$

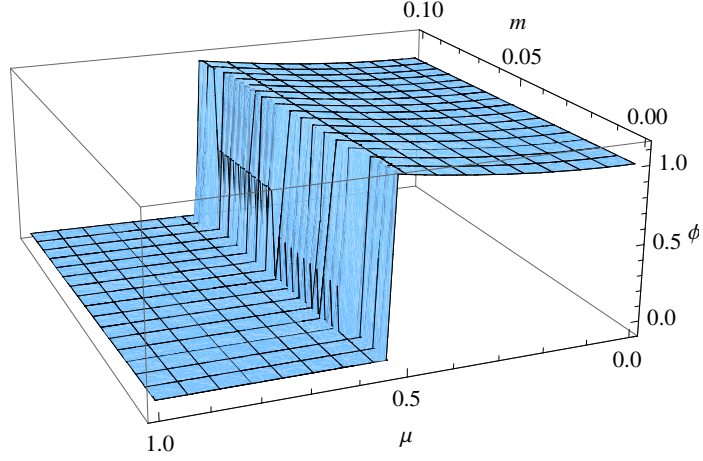


図 9: ϕ の μ, m 依存性

従って、小さな μ に対しては $\phi = \sqrt{1 + \mu^2}$ が、大きな μ に対しては $\phi = 0$ が基底状態である。両者は、臨界化学ポテンシャル μ_c において不連続に移り変わる。したがって、化学ポテンシャルを増加させると、 $\mu = \mu_c$ において一次相転移が起きることがわかった。 μ_c は、(105) の二つの有効ポテンシャルが等しくなる点として決定される。

$$-\log(\mu_c^2) = 1 + \mu_c^2 \quad (106)$$

これを数値的に解くと、 $\mu_c \simeq 0.53$ を得る。

一般に $m > 0$ の場合、 $\phi(m, \mu)$ を図 9 に示した。小さな m が存在しても、一次相転移は壊されずに保たれることを確認できる。

4.4 有限温度有限密度相図

有限温度 T 、有限密度 μ の効果を取り入れた Dirac 演算子は、ここまでの考察から、次のように導入される [18]。

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + iC \\ iW^\dagger + iC & 0 \end{pmatrix} \quad (107)$$

ここで、 iC は媒質効果を現す行列である。

$$C_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}(t - i\mu) & (i = 1, \dots, N/2) \\ \delta_{ij}(-t - i\mu) & (i = N/2 + 1, \dots, N) \end{cases} \quad (108)$$

有限温度ゼロ密度 (4.2 節) の場合とは異なり、最低次の松原周波数 πT , $-\pi T$ は、 μ との相対的な符号に注意して取り入れられている。

分配関数 $Z^{\text{RM}}(t, \mu, m)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
Z^{\text{RM}}(t, \mu, m) &= \int \mathcal{D}W \prod_f^{N_f} \det(D + m_f) e^{-N\Sigma^2 \text{tr}} \\
&= \int \mathcal{D}S e^{-N\Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \det^{N/2} \begin{pmatrix} S + m & it + \mu \\ it + \mu & S^\dagger + m \end{pmatrix} \\
&\quad \times \det^{N/2} \begin{pmatrix} S + m & -it + \mu \\ -it + \mu & S^\dagger + m \end{pmatrix} \\
&= \int \mathcal{D}S e^{-2N\Omega(S; m, t, \mu)} \tag{109}
\end{aligned}$$

ここで、有効ポテンシャル $\Omega(S; m, t, \mu)$ を定義した。

$$\begin{aligned}
\Omega(S; m, t, \mu) &= \frac{1}{2} \text{tr} \Sigma^2 S^\dagger S - \frac{1}{4} \ln((S + m)(S^\dagger + m) - (\mu + it)^2) \\
&\quad - \frac{1}{4} \ln((S + m)(S^\dagger + m) - (\mu - it)^2) \tag{110}
\end{aligned}$$

有効ポテンシャルを解析することで、この模型の相構造は、すべて求めることができる。

ここでも簡単のために、質量行列を $m = m \times 1_{N_f \times N_f}$ 、オダパラメータ行列を $S = \phi \times 1_{N_f \times N_f}$ と取ることとする。有効ポテンシャルは次のようになる。

$$\begin{aligned}
\Omega(\phi; m, t, \mu) &= \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{4} \ln((\phi + m)^2 - (\mu + it)^2) \\
&\quad - \frac{N_f}{4} \ln((\phi + m)^2 - (\mu - it)^2) \tag{111}
\end{aligned}$$

鞍点方程式は、有効ポテンシャルを ϕ で微分してゼロと置くことで、

$$\Sigma^2 \phi - \frac{1}{2} \frac{\phi + m}{(\phi + m)^2 - (\mu + it)^2} - \frac{1}{2} \frac{\phi + m}{(\phi + m)^2 - (\mu - it)^2} = 0 \tag{112}$$

と求まる。ここまでに登場した ChRM 模型と同じように、有限温度密度の場合でも鞍点方程式は N_f に依存しない。また、カイラル凝縮は、鞍点解 $\bar{\phi}$ を用いて、次のように表される。

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\Sigma^2 \bar{\phi} \tag{113}$$

ここまでの、模型の含むパラメータはすべて無次元であるとしてきた。ここでは、次元を持ったパラメータの扱いについて考察する。

今までは、ゼロモード数 $2N$ と体積 V の比を $2N/V = 1$ ととっていた。いま、次元を考慮して、質量次元 4 を持つゼロモード密度 $n \equiv N/V_4$ を導入すると、 $t = 0$, $\mu = 0$ でのカイラル凝縮は、(71)

式より、次のように表される。

$$\begin{aligned} |\langle \bar{\psi} \psi \rangle| &= 2n\Sigma^2 \bar{\phi} \\ &= 2n\Sigma \end{aligned} \quad (114)$$

カイラル凝縮 $|\langle \bar{\psi} \psi \rangle|$ は $(250\text{MeV})^3$ 程度と見積もられる。ここで、 n として、インスタントン数密度 $0.5\text{fm}^{-4} \sim 0.5 \times (200\text{MeV})^4$ [46] を用いると $\Sigma \sim (100\text{MeV})^{-1}$ を得る¹³。

Σ を、模型の持つ唯一の次元を持ったパラメータとすることができることに注意する。それを確認するには、上記の考察から、 Σ が次元 -1 を、 ϕ が次元 $+1$ を持つことに注意して、有効ポテンシャル (111) を、次のように書き換える。

$$\begin{aligned} \Omega(\phi; m, t, \mu) &= \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{4} \ln \Sigma^2 ((\phi + m)^2 - (\mu + it)^2) \\ &\quad - \frac{N_f}{4} \ln \Sigma^2 ((\phi + m)^2 - (\mu - it)^2) \end{aligned} \quad (115)$$

したがって、無次元パラメータ $\Sigma\phi$, Σm , Σt , $\Sigma\mu$ のみで有効ポテンシャルを表すことができる。よって、 $\Sigma = 1$ の単位系で計算し、次元を持った m , t , μ を考察したいときには、適宜 Σ で割って補えばよい。ここからの解析では、 $\Sigma = 1$ の単位系をとる。また、文献 [46] では、模型に現れる m に対して、 m/Σ を、対応する次元を持った物理的な質量としている。一方、 t , μ は、それぞれ有効温度、有効化学ポテンシャルであり、 t/Σ , μ/Σ は、対応する次元を持った物理量とは必ずしも等しくはない。すなわち、物理量と対応させるには、さらに無次元の係数倍が必要である。この係数は、以下で見えていくように、転移温度、転移化学ポテンシャルをインプットとすることで決める必要がある。

4.4.1 $m = 0$ 平面における相図

$m = 0$ の場合、鞍点方程式は自明な解 $\phi = 0$ を持つ。それ以外の解は、次の四次方程式を満たす。

$$\phi^4 - (2(\mu^2 - t^2) + 1)\phi^2 + (\mu^2 + t^2)^2 + \mu^2 - t^2 = 0 \quad (116)$$

まず、二次相転移の起きる条件を考える。鞍点方程式から、ポテンシャルの変曲点は $\phi = 0$ を含めて最大で 5 箇所である。また、有効ポテンシャルの表式 (111) より、充分大きな $|\phi|$ に対しては、ポテンシャルは正の無限大になることに注意する。

変曲点が三箇所ある場合、すなわち、四次方程式 (116) の四解のうち、二解が複素解である場合、 $\phi = 0$ はポテンシャルの極大を与える。このとき、(116) の実の二解が $\phi = 0$ に近付き、対称相での

¹³相転移に関与するゼロモードが、インスタントン起源のゼロモードのみであるかどうかは、自明ではない問題である。実際に、5 節では、これに反するアイデアで新しい模型を導入する。ここでは、単純な見積りとして、原論文と同様にインスタントン数密度を用いることにする。

解 $\phi = 0$ の周りでポテンシャルが $\Omega(\phi) \sim \mathcal{O}(\phi^4)$ と振る舞う点が、二次相転移点である。すなわち、二次相転移の起きる条件は、次のように表される。

$$-2(\mu^2 - t^2) - 1 \geq 0 \quad (117)$$

$$(\mu^2 + t^2)^2 + \mu^2 - t^2 = 0 \quad (118)$$

変曲点が五箇所ある場合、 $\phi = 0$ は必ずポテンシャルの極小になる。したがって、 $\Omega(\phi) \sim \mathcal{O}(\phi^4)$ の振る舞いを与える条件は、二次相転移ではなく、 $\phi = 0$ が準安定状態 (極小) から、不安定状態 (極大) へ移る点を与える。

(118) 式の条件により、 $T - \mu$ 平面における二次相転移線が決定される。同時に、二次相転移線の終点として、三重臨界点が存在していることがわかる。三重臨界点は、(118) 式から直ちに求めることができる。

$$t_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + 1} \sim 0.776 \quad (119)$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1} \sim 0.322 \quad (120)$$

次に、一次相転移の起きる条件を考察する。一次相転移の前後では、ポテンシャルは三箇所の極小を持っている必要がある。三箇所の極小のうち、 $\phi = 0$ と、方程式 (116) の最大の解 $\phi = \phi_{\max}$ におけるポテンシャルの値が一致すること ($\Omega(\phi = 0) = \Omega(\phi = \phi_{\max})$) が、一次相転移の条件である。この条件は、 ϕ_{\max} を解析的に求めることができるため、次のように書き下すことができる。

$$\begin{aligned} \mu^2 - t^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 16\mu^2 t^2} \\ - \frac{1}{2} \log \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 16\mu^2 t^2} \right] + \log(\mu^2 + t^2) = 0 \end{aligned} \quad (121)$$

これにより一次相転移線が決定される。

ここまでの考察で得られた結果を、図 10 にまとめた。 T 軸上 ($\mu = 0$) の転移温度が $t = t_c = 1$ 、 μ 軸上 ($T = 0$) の転移化学ポテンシャルが $\mu = \mu_c \sim 0.53$ と、それぞれ、4.2 節、4.3 節の結果を再現していることに注意する。また、転移温度 $t_c \sim 160\text{MeV}$ 、転移バリオン化学ポテンシャル $\mu_c \sim 1200\text{MeV}$ という値を用いると、三重臨界点 (t_3, μ_3) は、 $t_3/t_c = 0.76$ 、 $\mu_3/\mu_c = 0.61$ の比から、 $(t_3, \mu_3) \sim (120\text{MeV}, 700\text{MeV})$ となる。

4.4.2 $m > 0$ における相図

有限の質量 m が存在すると、鞍点方程式 (112) の対称相の解は一般に $\phi = 0$ からずれる。したがって、解くべき方程式は五次方程式になり、数値的な取扱いが必要になる。

小さな $m = 0.07$ に対して、相図は図 11 のように得られる。このパラメータは、 $\Sigma = (100\text{MeV})^{-1}$ を用いると、 $m = 7\text{MeV}$ に相当している。 $m = 0$ のときに存在していた二次相転移線と三重臨界点は消え、代わりに一次相転移線の端点としての臨界点が現れる。

(t, μ, m) 空間では、 $m > 0$ において、臨界点が繋がって二次相転移線になっている様子を見ることができる (図 12)。二次相転移線は、 $m = 0$ において三重臨界点に一致し、なめらかに $m = 0$ 平面の二次相転移線につながる。

4.5 $\nu \neq 0$ セクタの効果

ここまでの ChRM 模型は、位相電荷 $\nu = 0$ のセクタの分配関数によって議論されてきた。しかし、アノマリーによる $U_A(1)$ 対称性の破れは、位相的に非自明なゲージ場の配位によってもたらされる [35] ため、 $\nu \neq 0$ のセクタで、ChRM 模型がどのように振る舞うかを考察することは重要である。ここでは、真空模型と、有限温度模型を例として、 $\nu \neq 0$ セクタからの寄与を議論する。

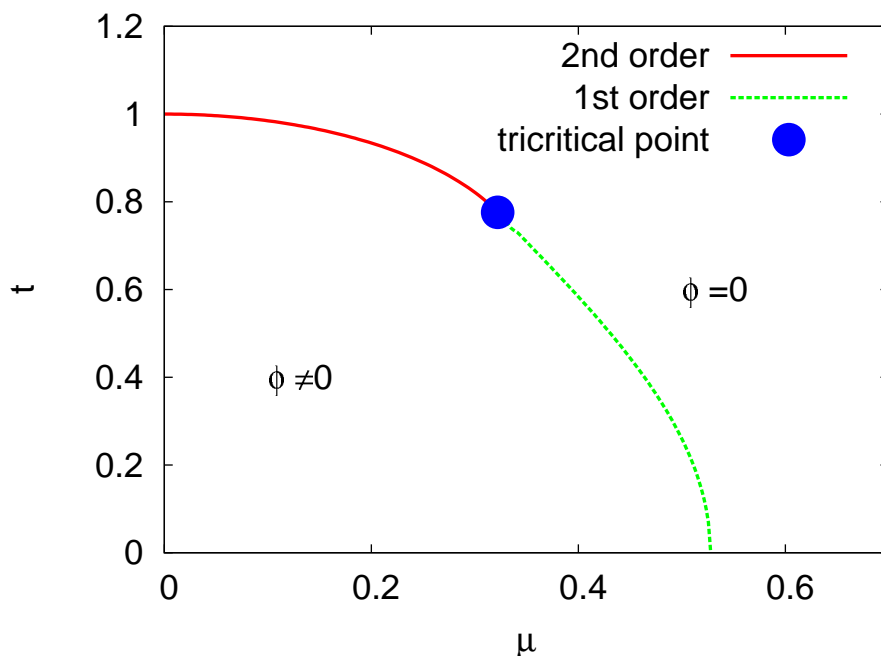


図 10: $m = 0$ 平面における相図

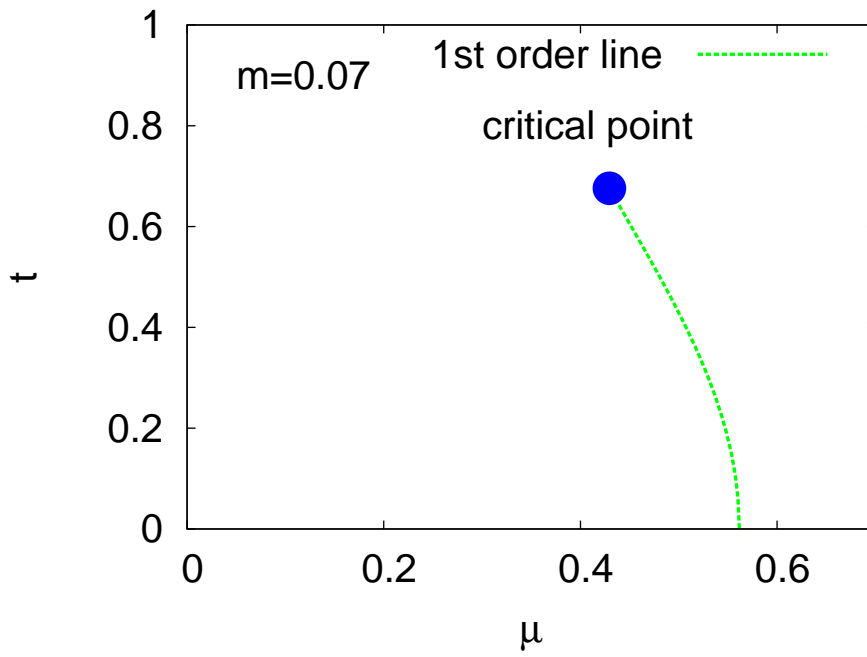


図 11: $m = 0.07$ 平面における相図

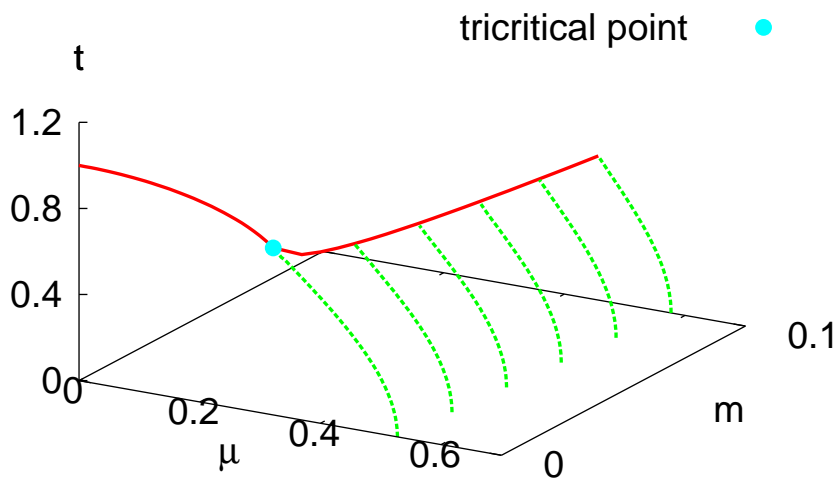


図 12: (t, μ, m) 空間での相構造

4.5.1 真空模型

任意の ν のセクタにおける分配関数 Z_ν は、一般に長方形の $N_+ \times N_-$ ランダム行列 W を要素に持つ Dirac 演算子

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (122)$$

を用いて与えられる。

$$Z_\nu^{\text{RM}} = \int \mathcal{D}W e^{-N \text{tr} W^\dagger W} \det^{N_f} (D + m) \quad (123)$$

ただし、 $\Sigma = 1$ ととっている。また、 $2N = N_+ + N_-$, $\nu = N_+ - N_-$ と定義した。

すべての ν のセクタからの寄与の足し上げは、ガウス分布を用いて行う。

$$Z^{\text{RM}}(\theta) = \sum_\nu e^{i\theta\nu} e^{-\frac{\nu^2}{2N\tau}} Z_\nu \quad (124)$$

τ はクエンチ位相感受率である。また、 θ 角を導入した。

分配関数 Z_ν のボゾン化は (62) 式から (68) 式を導出したのと同じ方法で、直ちに行うことができる。

$$Z_\nu^{\text{RM}} = \int \mathcal{D}S e^{-N \text{tr} S^\dagger S} \det^{N_+} (S + m) \det^{N_-} (S^\dagger + m) \quad (125)$$

$m = 0$ のとき、この分配関数は、 S に対する $\text{SU}_L(N_f) \times \text{SU}_R(N_f)$ 変換 $S \rightarrow U_L^\dagger S U_R$ に対して不変である。一方、 $U_A(1)$ 変換 $S \rightarrow e^{i\theta} S$ に対しては、 $e^{i\theta\nu}$ の位相が現れ、 $\nu = N_+ - N_- \neq 0$ の場合は不変ではないことがわかる。

すべてのフレーバに対し、質量が等しい ($m = m \times 1_{N_f \times N_f}$) とする。また、オーダパラメータ行列を $S = \phi \times 1_{N_f \times N_f}$ ととる。このとき、有効ポテンシャルは次のようになる。

$$\Omega(\phi, \phi^*, m) = \frac{N_f}{2} \phi \phi^* - \frac{N_f}{2} \log(\phi + m)(\phi^* + m) - \frac{N_f \nu}{2N} \log \left(\frac{\phi + m}{\phi^* + m} \right)^{1/2} \quad (126)$$

ν は ν/N の組合せで現れる。 ν は $\mathcal{O}(N^{1/2})$ 程度の量なので、 $N \rightarrow \infty$ では、この項は寄与しなくなるように見える。実際に、鞍点解 $\bar{\phi}$ は、 $\mathcal{O}(N^0)$ までは、すべての ν のセクタで一致した値をとる。一方で、位相感受率 $\chi_{\text{top}} \equiv \langle \nu^2 \rangle / (2N)$ を、求めるためには、各 ν のセクタからの寄与を $\mathcal{O}(\nu/N)$ まで正しく評価する必要がある。実際、鞍点法で計算された分配関数の肩を、鞍点解 $\bar{\phi}$, $\bar{\phi}^*$ も ν/N に依存することに注意して ν/N のべきで展開すると

$$Z_\nu^{\text{RM}} = \exp(-N(a + b(\nu/N)^2 + \dots)) \quad (127)$$

であるから、 $(\nu/N)^2$ の係数 b を求めることで $\langle \nu^2 \rangle \sim \mathcal{O}(N)$ は正しく評価される。

文献 [25] では、ダイアグラムを用いた系統的な方法で、ChRM 模型における χ_{top} が求められた。結果は次のようになる。

$$\frac{1}{\chi_{\text{top}}} = \frac{1}{\tau} + \frac{N_f}{m\sqrt{4 + m^2 + m^2}} \quad (128)$$

$N_f = 0$ の場合、位相感受率はクエンチ位相感受率 τ に帰着する。また、 $m = 0$ では、 $\chi_{\text{top}} = 0$ となり、位相感受率は完全に遮蔽される。この振る舞いは、有効理論 [51] から予想される自然なものである。

また、擬スカラー感受率 χ_{ps} も同じ方法で計算され、 $m \rightarrow 0$ の極限で χ_{ps} は有限になることが示されている。擬スカラー感受率は、 $U_A(1)$ チャンネルに存在する粒子の質量の逆数に相当するため、この結果は $U_A(1)$ 対称性の自発的破れに伴う南部-Goldstone ボゾンが存在しないことを意味している。すなわち、(124) 式によって与えられた ChRM 模型は、長方形の行列を用いて非自明な位相電荷を持つゲージ配位の効果を取り込んだことで、 $U_A(1)$ 問題を解決している。

4.5.2 有限温度模型

有限温度模型に対しても、真空模型と同様の考察を行う。一般の ν に対する Dirac 演算子は、次のように定義される [58]。

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iW + i\tilde{t} \\ iW^\dagger + i\tilde{t}^T & 0 \end{pmatrix} \quad (129)$$

ここで、 W, \tilde{t} は $N_+ \times N_-$ 行列である。 $N_+ > N_-$ のとき、 \tilde{t} は次のように定義される。

$$\tilde{t} = \begin{pmatrix} t \times 1_{N_- \times N_-} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (130)$$

$N_+ < N_-$ のときは $N_+ \rightarrow N_-$, $N_- \rightarrow N_+$, $\tilde{t} \rightarrow \tilde{t}^T$ の置き換えをすればよい。この Dirac 演算子を用いて分配関数は定義される。ボゾン化は直ちに行うことができる。

$$Z_\nu^{\text{RM}}(t, m) = \int \mathcal{D}S e^{-N \text{tr} S^\dagger S} \det^{N-|\nu|/2} \begin{pmatrix} S + m & it \\ it & S^\dagger + m \end{pmatrix} \det^{|\nu|} (S + m) \quad (131)$$

ただし、 $\nu < 0$ のときは、最後の項の S を S^\dagger に置き換える必要がある。明らかに、 ν は有効ポテンシャルには ν/N の組合せで現れ、基底状態 $\bar{\phi}$ や相転移には関与しない。従って、有限温度相転移は $\nu = 0$ の場合とまったく同じように振る舞う。

また、この模型で位相感受率を計算しようとするとき問題があることが指摘されている [62]。分配関数は ν について偶関数であるが、その依存性が

$$Z_\nu(t, m) = \exp(-N(a|\nu|/N + b(\nu/N)^2 + \dots)) \quad (132)$$

のように現れるため、位相感受率は $\langle \nu^2 \rangle / 2N \sim \mathcal{O}(1/N)$ のように抑制されてしまう。これは明らかに非物理的である。文献 [62] では、この問題点を回避した、修正された分配関数が提案されている。

$$Z_\nu^{\text{mod}} = \int \mathcal{D}S e^{-N \text{tr} S^\dagger S} \det^N \begin{pmatrix} S + m & it \\ it & S^\dagger + m \end{pmatrix} \left(\frac{\det(S + m)}{\det(S^\dagger + m)} \right)^{\nu/2} \quad (133)$$

この分配関数は、温度に依存した、物理的にもっともらしい位相感受率を与える。ただし、分配関数の基礎付けの点では不満が残る。また、ここでは有効ポテンシャルに対して $\mathcal{O}(\nu/N)$ の修正を行ったので、相転移の振る舞いには影響を与えない点に注意する。すなわち、この修正された有限温度模型を用いて、 $\nu \neq 0$ セクタの効果を適切に取り入れでも、 N_f に依存した有限温度相転移の振る舞い(特に一次相転移)は記述できない。

5 カイラルランダム行列模型への行列式相互作用の導入

4節で議論したように、標準的な ChRM 模型において、有限温度カイラル相転移の次数は、フレーバ数 N_f に依存せず、常に二次相転移になる。これは、通常相転移を扱うのに用いられる ChRM 模型が、 $U_A(1)$ アノマリーの効果を取り込んでいない平均場理論になっているからである。

一方で、一般の位相電荷 $\nu \neq 0$ セクタからの寄与によって、ChRM 模型における $U_A(1)$ 問題は解決される。しかし、 ν は、有効ポテンシャルに ν/N の形に入るために、熱力学極限において基底状態 $\bar{\phi} (\propto \langle \bar{\psi} \psi \rangle)$ へは寄与しない。よって、カイラル相転移の次数にも影響を与えない。

ChRM 模型に修正を行って、フレーバ数に依存した有限温度相転移を示すようにするためには、有効ポテンシャルに対して $\mathcal{O}(N^0)$ の変更が施される必要がある。そのような試みは、文献 [64] において、行列式相互作用項がどのように有効ポテンシャルに現れるべきかを、NJL 模型と比較して考察することによって行われた。ところが、5.1.3 節で述べるように、そのようにして得られる有効ポテンシャルには問題点がある。

この節では、文献 [64] で与えられた模型を修正した、行列式相互作用を取り込んだ ChRM 模型を提案する。模型は直ちに有限温度密度に拡張できるが、ここでは主に有限温度の場合について解析を行う。我々の模型は、カイラル極限において、 $N_f = 2$ のときに二次相転移を、 $N_f = 3$ のときに一次相転移を示す¹⁴。

5.1 模型の定義

初めに、一般の媒質効果がある場合の、新しい ChRM 模型を定義する。有効ポテンシャルは直ちに求めることができる。その後、[64] で与えられた模型との比較を行う。

¹⁴本節の内容は文献 [63] にまとめられた。

5.1.1 固定された N_+, N_- に対する分配関数

有限の体積 V を考える。通常の ChRM 模型と同様に、与えられた V の中には、 N_+, N_- 個の、それぞれインスタントン、反インスタントンに対応する位相的ゼロモードがあると仮定する。さらに、その他に、ダイナミクスに付随した、準ゼロモードが $2N$ 個あると仮定する。

$2N + N_+ + N_-$ 次行列として表示される Dirac 演算子の要素を、通常の ChRM 模型と同様に、ランダムな値に置き換える。分配関数は次のように定義される [64]。

$$Z_{N_{\pm}}^N = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}B \mathcal{D}X \mathcal{D}Y e^{-N \Sigma^2 \text{tr}(AA^\dagger + BB^\dagger + XX^\dagger + YY^\dagger)} \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) \quad (134)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & iA + C & 0 & iX \\ iA^\dagger + C & 0 & iY & 0 \\ 0 & iY^\dagger & 0 & iB \\ iX^\dagger & 0 & iB^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (135)$$

A, B, X, Y はそれぞれ $N \times N$, $N_+ \times N_-$, $N \times N_-$, $N \times N_+$ 次の複素ランダム行列である。 X, Y により、準ゼロモードと位相的ゼロモードの間の hopping が記述される。

C は、温度 T や化学ポテンシャル μ に依存する、媒質効果を表した非ランダム行列である。 C は準ゼロモード部分のみに入っている。 $C = 0$ では、Dirac 行列 D が反エルミート性とカイラル対称性 $\{D, \gamma_5\} = 0$, $\gamma_5 = \text{diag}(\underbrace{1}_N, \underbrace{-1}_N, \underbrace{1}_{N_+}, \underbrace{-1}_{N_-})$ を満たすようなブロック構造を持っている点に注意する。

分配関数 (134) をボゾン化する。そのためには、(134) 式の行列式が次のように書けることに注目すると良い。

$$\begin{aligned} \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) &= \prod_{f=1}^{N_f} \det \begin{pmatrix} m_f & 0 & iA + C & iX \\ 0 & m_f & iY^\dagger & iB \\ iA^\dagger + C & iY & m_f & 0 \\ iX^\dagger & iB^\dagger & 0 & m_f \end{pmatrix} \\ &= \prod_{f=1}^{N_f} \det \begin{pmatrix} m_f & iR + \tilde{C} \\ iR^\dagger + \tilde{C} & m_f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (136)$$

ここで、 $(N + N_+) \times (N + N_-)$ 次ランダム行列 R と、 $(N + N_+) \times (N + N_-)$ 次媒質効果行列をそれぞれ次のように定義した。

$$R = \begin{pmatrix} A & X \\ Y^\dagger & B \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (137)$$

このように表示すると、4節で用いたボゾン化の手法をそのまま用いることができることがわかる。行列式 (136) を Grassmann 数積分によって表示すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \prod_{f=1}^{N_f} \det(D + m_f) \\ &= \int d\psi^\dagger d\psi \prod_{f=1}^{N_f} \exp \left[-\psi_L^{\dagger f} (iR + \tilde{C}) \psi_L^f - \psi_R^{\dagger f} (iR^\dagger + \tilde{C}) \psi_R^f - \psi_L^{\dagger f} m_f \psi_R^f - \psi_R^{\dagger f} m_f \psi_L^f \right] \end{aligned} \quad (138)$$

ここで、 $\psi_L^{\dagger f}, \psi_R^f$ は $N + N_+$ の、 $\psi_R^{\dagger f}, \psi_L^f$ は $N + N_-$ のゼロモードの足を持つ Grassmann 数である。また、 f はフレーバの添字である。

次にランダム行列による積分を実行する。ガウス積分についての公式 (64) を用いる

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}R e^{-N\Sigma^2 \text{tr} R^\dagger R} \\ & \quad \times \prod_{f=1}^{N_f} \exp \left[-\psi_L^{\dagger f} (iR + \tilde{C}) \psi_L^f - \psi_R^{\dagger f} (iR^\dagger + \tilde{C}) \psi_R^f - \psi_L^{\dagger f} m_f \psi_R^f - \psi_R^{\dagger f} m_f \psi_L^f \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{N\Sigma^2} \psi_L^{\dagger f} \psi_R^g \psi_R^{\dagger g} \psi_L^f - \psi_L^{\dagger f} \tilde{C} \psi_L^f - \psi_R^{\dagger f} \tilde{C} \psi_R^f - \psi_L^{\dagger f} m_f \psi_R^f - \psi_R^{\dagger f} m_f \psi_L^f \right] \end{aligned} \quad (139)$$

ここで現れたフェルミオン 4 点頂点は、Hubbard-Stratonovitch 変換 ((66) 式) により、 $N_f \times N_f$ 複素行列 S を用いて次のようにボゾン化される。

$$\begin{aligned} & \exp \left[\frac{1}{N\Sigma^2} \psi_L^{\dagger f} \psi_R^g \psi_R^{\dagger g} \psi_L^f - \psi_L^{\dagger f} \tilde{C} \psi_L^f - \psi_R^{\dagger f} \tilde{C} \psi_R^f - \psi_L^{\dagger f} m_f \psi_R^f - \psi_R^{\dagger f} m_f \psi_L^f \right] \\ &= \int \mathcal{D}S e^{-N\Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \exp \left[-(\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger) \begin{pmatrix} S + m & \tilde{C} \\ \tilde{C} & S^\dagger + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (140)$$

したがって、分配関数 $Z_{N_\pm}^N$ は、 \tilde{C} の要素に注意して Grassmann 積分を実行することで計算できる。

$$Z_{N_\pm}^N = \int \mathcal{D}S e^{-N\Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \det^N \begin{pmatrix} S + m & C \\ C & S^\dagger + m \end{pmatrix} \det^{N_+} (S + m) \det^{N_-} (S + m) \quad (141)$$

ここで、 $C \propto 1_{N \times N}$ を仮定した。分配関数 $Z_{N_\pm}^N$ は、 $m = 0$ かつ C がフレーバ対角なときに、 $SU_L(N_f) \times SU_R(N_f)$ 変換 $S \rightarrow U_L^\dagger S U_R$ で対称である。一方、 $U_A(1)$ 変換 $S \rightarrow e^{i\theta} S$ に対しては、 $e^{i\theta\nu}$ の位相が現れる ($\nu = N_+ - N_-$)。したがって、 $\nu \neq 0$ であるかぎり、 $U_A(1)$ 対称性は破れている。

5.1.2 N_+, N_- 分布関数

有限の体積 V 中のゲージ場を考える。ゲージ背景についての ensemble を考えると、(反) インスタントン数 $N_+(N_-)$ は、ある平均値のまわりで、有限の分散を持って分布していると考えられる。そ

ここで、ChRM 模型をより実際の QCD に近づけるために、 N_{\pm} の分布関数を用いて、 N_{\pm} を固定した分配関数 (141) の分布平均を取りたい。この平均操作によって、様々な位相電荷 $\nu = N_+ - N_-$ セクタからの寄与も、同時に取り込むことができる。

N_{\pm} の分布関数 $P(N_{\pm})$ を考察する。ここでは、格子ガス模型のアナロジーを用いる。すなわち、(反) インスタントンは、十分に離れていれば自由粒子として扱えるが、斥力芯を持つために近距離には近づけないとする。この状況を定量的に表すために、全体積 V を、 γN 個のサイトに分割する。ここで、 γ は $O(V^0)$ の定数である。 $N \propto V$ だから、各サイトは $O(V^0)$ の大きさを持つ。簡単のために、 $2N/V = 1$ のように単位を選ぶと、各サイトの大きさは $2/\gamma$ である。これが (反) インスタントンの斥力芯のサイズに対応している。斥力芯のために、各サイトには一つまでしか (反) インスタントンが存在できないと仮定する。一つの (反) インスタントンが存在する確率を p とおくと、(反) インスタントンの存在しない確率は $1 - p$ である。

以上の考察をもとにすると、全体積 V に N_{\pm} 個の (反) インスタントンが存在する確率分布は、二項分布で与えられる。

$$P(N_{\pm}) = \gamma_N C_{N_{\pm}} p^{N_{\pm}} (1-p)^{\gamma N - N_{\pm}} \quad (142)$$

分布平均は $\langle N_{\pm} \rangle = \gamma p N$ であり、 $\langle N_{\pm} \rangle / V = \gamma p = O(V^0)$ の有限の密度を与えることに注意する。

この分布を用いて、分配関数 (141) を平均する。平均操作は解析的に行うことができる。

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{N_+, N_-} P(N_+) P(N_-) e^{i(N_+ - N_-)\theta} Z_{N_{\pm}}^N \\ &= \sum_{N_+, N_-} \gamma_N C_{N_+} p^{N_+} (1-p)^{\gamma N - N_+} \gamma_N C_{N_-} p^{N_-} (1-p)^{\gamma N - N_-} e^{i(N_+ - N_-)\theta} Z_{N_{\pm}}^N \\ &= \int \mathcal{D}S e^{-N \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \det^N \begin{pmatrix} S + m & C \\ C & S^\dagger + m \end{pmatrix} (p e^{i\theta} \det(S + m) + (1-p))^{\gamma N} \\ &\quad \times (p e^{-i\theta} \det(S^\dagger + m) + (1-p))^{\gamma N} \end{aligned} \quad (143)$$

ここで、二項和の公式 $\sum_m {}_n C_m b^m = (1+b)^n$ を用いた。また、 θ 角を導入した。分配関数から、有効ポテンシャルを得る。

$$Z = \int \mathcal{D}S e^{-2N \Omega(S; m, \theta, C)} \quad (144)$$

$$\begin{aligned} \Omega(S; m, \theta, C) &= \frac{1}{2} \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S - \frac{1}{2} \ln \det \begin{pmatrix} S + m & C \\ C & S^\dagger + m \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{\gamma}{2} \ln (\alpha e^{i\theta} \det(S + m) + 1) - \frac{\gamma}{2} \ln (\alpha e^{-i\theta} \det(S^\dagger + m) + 1) \end{aligned} \quad (145)$$

ここで、パラメータ $\alpha = p/(1-p)$ を定義した。また、ポテンシャルの定数項を無視していることに注意する。

分布関数 $P(N_{\pm})$ を用いたことにより、有効ポテンシャルには、新たに α (または p) と γ というパラメータが現れた。これらの物理的意味は 5.1.4 節で説明する。

(145) 式の γ に比例した項は、今までの ChRM 模型には存在していなかったことに注意する。この項が、 N_f に依存した相転移の振る舞いを与える。それは、オーダパラメータ S が小さいときに $\log(\alpha \det S + 1) \sim \alpha \det S$ と展開できることから理解できる。 $\det S$ は一般にオーダパラメータについて N_f 次の項を与える。よって、例えば $N_f = 3$ の場合にはポテンシャルに 3 次の項が現れ、一次相転移が起きる可能性がある。詳細は 5.2 節で有限温度の場合に議論する。

5.1.3 文献 [64] の模型との比較

文献 [64] では、NJL 模型からの類推を用い、 $U_A(1)$ アノマリーの効果を考慮したランダム行列模型の“あるべき”形として、

$$Z = \int \mathcal{D}S e^{-N \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \det^N \begin{pmatrix} S + m & C \\ C & S^\dagger + m \end{pmatrix} e^{Ng(\det S + \det S^\dagger)} \quad (146)$$

という分配関数が提案された。

まず、この模型の問題点を指摘する。分配関数 (146) から得られる有効ポテンシャルには、オーダパラメータについて N_f 次の項が $\det S$ から現れる。したがって、鞍点方程式は N_f 依存性を持つ。ところが、 $N_f = 3$ では、ポテンシャルがオーダパラメータについて 3 次の振る舞いをするため、ポテンシャルが下界を失い、安定ではなくなる。

一方で、我々の模型から導かれる有効ポテンシャル (145) は、オーダパラメータが小さいところでは、 $\ln(\alpha \det S + 1) \sim \alpha \det S$ なので、(146) 式で定義された模型と同様に、ポテンシャルは N_f 次の振る舞いをする。一方で、オーダパラメータが大きいところでは、 $S^2 \gg |\ln(\alpha \det S + 1)|$ より、ポテンシャルは S^2 で下から支えられている。したがって、この意味において、我々の模型は (146) 式の模型の改良になっている。

このような改良が、どのように基礎づけられるかを考察する。そのために、分配関数 (146) を次のように展開する。

$$Z = \sum_{N_+, N_-} \frac{(gN)^{N_+}}{N_+!} \frac{(gN)^{N_-}}{N_-!} \tilde{Z}_{N_{\pm}}^N \quad (147)$$

ここで、 $\tilde{Z}_{N_{\pm}}^N$ は、この模型の N_{\pm} を固定した分配関数である。

$$\tilde{Z}_{N_{\pm}}^N = \int \mathcal{D}S e^{-N \Sigma^2 \text{tr} S^\dagger S} \det^N \begin{pmatrix} S + m & C \\ C & S^\dagger + m \end{pmatrix} \det^{N_+} S \det^{N_-} S^\dagger \quad (148)$$

まず、(147) 式に注目する。ここでは、 N_{\pm} の分布に、ポアソン分布が用いられていることがわかる。一方で、(143) 式では、二項分布 (142) を用いていた。ここで、二項分布は、有限の N に対して、 $N\gamma p$ を有限の値に固定しつつ $\gamma \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ の極限を取ることで、

$$\gamma_N C_{N_{\pm}} p^{N_{\pm}} (1-p)^{\gamma N - N_{\pm}} \propto \frac{(p\gamma N)^{N_{\pm}}}{N_{\pm}!} \quad (149)$$

のようにポアソン分布に帰着する。このとき、 γp が (147) 式の g に対応している。この極限の取り方は、物理的には次のような意味を持っている。二項分布において、単位サイトの大きさは $2/\gamma$ で与えられていた。したがって、インスタントンは $2/\gamma$ 程度の体積の斥力芯を持っているとここでは仮定している。よって、 $\gamma \rightarrow \infty$ の極限は、インスタントンの斥力芯を無限小に近づけることに対応している。一方で、ここでは、UV 正則化の行われた理論を考えているので、無限に小さいインスタントンは自然ではない。インスタントンのサイズは、典型的には、カットオフの逆数程度の有限値であるはずである。この意味において、二項分布は、ポアソン分布と比較して、より物理的でもっともらしい N_{\pm} の分布であると期待できる。

N_{\pm} の固定された分配関数に対しても、変更を行っている。 $Z_{N_{\pm}}^N$ ((141) 式) と $\tilde{Z}_{N_{\pm}}^N$ ((148) 式) を比較するとわかるように、両者には、 $U_A(1)$ 対称性を破る項に、質量行列 m が入っているか否かという違いがある。我々の模型 (141) では質量行列を入れることが選択されている。その理由は、真空 ($C = 0$) において、 $Z_{N_{\pm}}^N$ を、通常の ChRM 模型の分配関数 (61) に帰着させるためである。

5.1.4 fixed- ν 分配関数と ν 分布

分配関数 (143) は、すべての N_+ , N_- について和をとっているため、すべての位相電荷 $\nu = N_+ - N_-$ のセクタからの寄与を足し上げている。そこで、(143) 式が、固定された位相電荷 ν セクタでの分配関数 Z_{ν} に対して、どのような重みを用いた和になっているのかを考える。

そのために、二項分布 (142) が、 $N \rightarrow \infty$ において、分布頂点付近でガウス近似できることを用いる。

$$\gamma_N C_{N_{\pm}} p^{N_{\pm}} (1-p)^{\gamma N - N_{\pm}} \sim \exp \left[-\frac{(N_{\pm} - \gamma p N)^2}{2\gamma N p (1-p)} \right] \quad (150)$$

ここで、変数変換 $M = N_+ + N_-$, $\nu = N_+ - N_-$ を用いて、 N_+ , N_- 分布を M, ν 分布に変換する。

$$\begin{aligned} & \sum_{N_+, N_-} \gamma_N C_{N_+} p^{N_+} (1-p)^{\gamma N - N_+} \gamma_N C_{N_-} p^{N_-} (1-p)^{\gamma N - N_-} \\ & \sim \int_0^{\infty} dM \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \exp \left[-\frac{(M - 2\gamma p N)^2}{2(2N)\gamma p (1-p)} \right] \exp \left[-\frac{\nu^2}{2(2N)\gamma p (1-p)} \right] \end{aligned} \quad (151)$$

したがって、分布頂点付近では、全インスタント数 M は平均 $2N\gamma p$ 、分散 $2N\gamma p(1-p)$ で、位相電荷 ν は平均 0、分散 $2N\gamma p(1-p)$ で、ガウス分布している。したがって、この近似のもとでは、全

体の分配関数 Z は、 ν を固定した分配関数 Z_ν の和として、次のように表される。

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{-\frac{\nu^2}{2(2N)\tau}} Z_\nu, \quad (152)$$

$$Z_\nu = \int_0^{\infty} dM \exp \left[-\frac{(M - 2\gamma p N)^2}{2(2N)\gamma p(1-p)} \right] Z_{N_\pm}^N \quad (153)$$

ここで、クエンチ位相感受率 τ は、 ν の分布より、

$$\tau = \frac{2N}{V} \gamma p(1-p) \quad (154)$$

と読み取れる。また、平均全インスタントン数密度は

$$\frac{\langle N_+ + N_- \rangle}{V} = \frac{2\gamma p N}{V} \quad (155)$$

である。

我々は、準ゼロモード数 $2N$ は、体積 V が与えられると揺らぐずに一定の値を取るという立場をとっている¹⁵。そこで、 $2N/V = 1$ と取ると便利である。この単位系では、クエンチ位相感受率と平均全インスタントン数密度はそれぞれ、

$$\tau = \gamma p(1-p) \quad (156)$$

$$\frac{\langle N_+ + N_- \rangle}{V} = \gamma p \quad (157)$$

と表される。我々の模型のもつ二つのパラメータ γ, p にはこのような物理的意味がある。

5.2 有限温度カイラル相転移

ここからは、有限温度効果のみを取り扱う。媒質効果の行列 C は、有効温度 t を用いて $C = it$ とする。また、すべてのフレーバでクォーク質量が等しい場合を考える ($m = m \times 1_{N_f \times N_f}$)。同様に、鞍点を与えるオーダパラメータ行列は対角であると仮定する ($S = \phi \times 1_{N_f \times N_f}$)。 ϕ は一般には複素数である。このときの有効ポテンシャルは次のようになる。

$$\begin{aligned} \Omega(\phi, \phi^*; m, t) = & \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi \phi^* - \frac{N_f}{2} \ln [(\phi + m)(\phi^* + m) + t^2] \\ & - \frac{\gamma}{2} \ln [\alpha e^{i\theta} (\phi + m)^{N_f} + 1] - \frac{\gamma}{2} \ln [\alpha e^{-i\theta} (\phi^* + m)^{N_f} + 1] \end{aligned} \quad (158)$$

特に $\theta = 0$ の場合は、ポテンシャルはさらに簡単になる。

$$\Omega(\phi; m, t) = \frac{N_f}{2} \Sigma^2 \phi^2 - \frac{N_f}{2} \ln [(\phi + m)^2 + t^2] - \gamma \ln [\alpha (\phi + m)^{N_f} + 1] \quad (159)$$

¹⁵これは文献 [64] と同じ立場である。一方、[65] では、 N も揺らぐとしている。

ここで、 $\phi^* = \phi$ とおいた。このときの鞍点方程式 (ギャップ方程式) は次のようになる。

$$\Sigma^2 \phi - \frac{\phi + m}{(\phi + m)^2 + t^2} - \gamma \frac{\alpha(\phi + m)^{N_f - 1}}{\alpha(\phi + m)^{N_f} + 1} = 0 \quad (160)$$

このギャップ方程式は、明らかに N_f に依存している。カイラル凝縮は、ギャップ方程式の解 $\bar{\phi}$ を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= -\frac{1}{N_f V} \frac{\partial}{\partial m} \ln Z(m) \\ &= -\Sigma^2 \phi \end{aligned} \quad (161)$$

したがって、 ϕ をカイラル相転移のオーダーパラメータとみなして良い。

以下で $N_f = 2, 3$ の場合に、有限温度カイラル相転移を具体的に考察する。

5.2.1 $N_f = 2$

$N_f = 2$, $m = 0$ のとき、ギャップ方程式は次のようになる。

$$\phi(\phi^4 + B(t)\phi^2 + C(t)) = 0 \quad (162)$$

$$B(t) = (\alpha \Sigma^2 t^2 + \Sigma^2 - \alpha - \gamma \alpha) / (\Sigma^2 \alpha) \quad (163)$$

$$C(t) = ((\Sigma^2 - \gamma \alpha)t^2 - 1) / (\Sigma^2 \alpha) \quad (164)$$

このギャップ方程式は厳密に解ける。 $\phi \neq 0$ の解は次のように与えられる。

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{B^2 - 4C} - B \right)} \quad (165)$$

この解は $C(t) = 0$ のときに 0 になる。したがって、転移温度 t_c は、

$$t_c = \frac{1}{\sqrt{\Sigma^2 - \gamma \alpha}} \quad (166)$$

と求まる。相転移は二次相転移である。(166) 式より、 $\gamma \alpha \nearrow \Sigma^2$ のときに転移温度が発散することに注意する。ここでは、常に $\gamma \alpha < \Sigma^2$ となるようにパラメータをとることにする。

臨界指数は次のように求めることができる。 $\epsilon = (t - t_c) / t_c$ とおくと、 ϵ の小さい極限では、 $C(t) \sim 2t_c^2 \epsilon$ であり、一方 $B(t = t_c) \neq 0$ であることに注意すると、 $\phi^2 \sim 2t_c^2 \epsilon$ と展開できる。すなわち、臨界指数 $\beta = 1/2$ である。また、 $m \propto \phi^\delta$ を鞍点方程式へ代入し、 $t = t_c$ の場合に、 m の最低次で方程式が成立することを要請すると、 $\delta = 3$ を得る。したがって、平均場理論の臨界指数が得られた。

いくつかの m に対する ϕ の変化を図 13 に示した。有限の m に対して、二次相転移は壊され、クロスオーバー転移を示す。

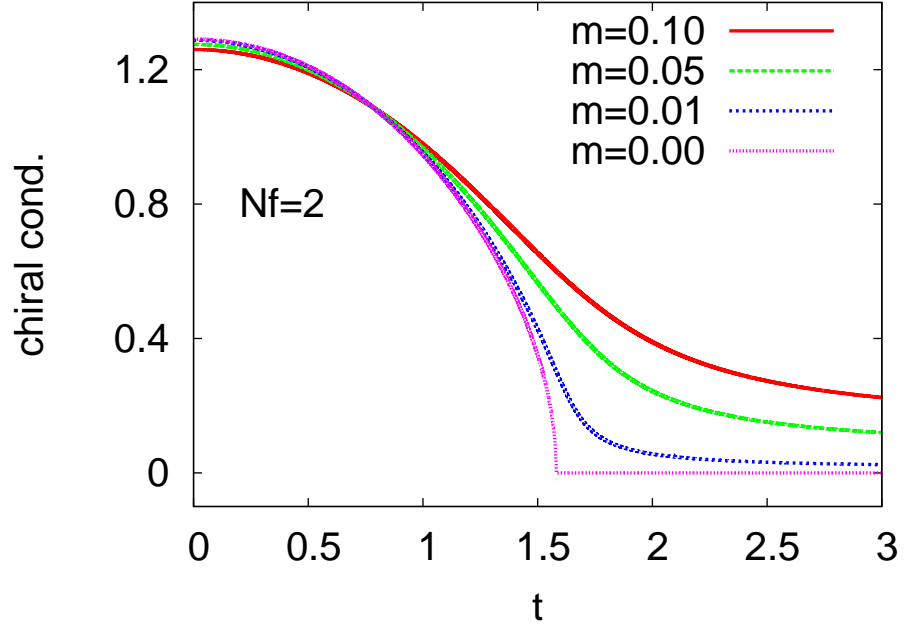


図 13: $N_f = 2$ の場合の ϕ の温度依存性 ($\Sigma = 1, \alpha = 0.3, \gamma = 2$)

5.2.2 $N_f = 3$

$N_f = 3, m = 0$ のとき、ギャップ方程式は、次のようになる。

$$\phi(\alpha\Sigma^2\phi^5 + (\alpha\Sigma^2t^2 - \alpha\gamma - \alpha)\phi^3 + \Sigma^2\phi^2 - \gamma\alpha t^2\phi + \Sigma^2t^2 - 1) = 0. \quad (167)$$

$\phi = 0$ 以外の解は数値的に求められる。ここで、次の事実に注意する。

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Omega \right|_{\phi=0} = 2N_f \left(\Sigma^2 - \frac{1}{t^2} \right) \quad (\text{for } N_f \geq 3) \quad (168)$$

したがって、ギャップ方程式の解 $\phi = 0$ は、 $t < 1/\Sigma$ ではポテンシャルの極大を与えるが、温度を上げていくと $t > 1/\Sigma$ からは極小に変わり、準安定状態を与える。充分高温では $\phi = 0$ が安定状態になると予想できる。

いくつかの m に対する ϕ の t 依存性を図 14 に示した。 $m = 0$ において、模型は一次相転移を示す。 m を 0 から増やしていくと、ある臨界質量 m_c において、相転移は一次相転移から二次相転移に移る。 m を m_c 以上に大きくすると、クロスオーバー転移になる。 $\Sigma = 1, \alpha = 0.3, \gamma = 2$ のパラメータに対して、 $m_c = 0.0265$ である。

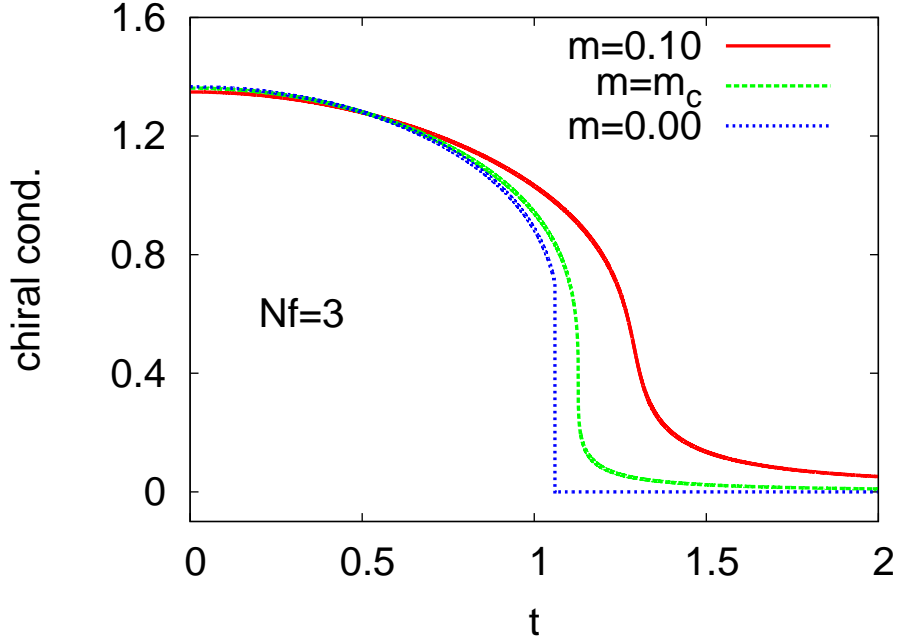


図 14: $N_f = 3$ の場合の ϕ の温度依存性 ($\Sigma = 1$, $\alpha = 0.3$, $\gamma = 2$)

5.3 メソン質量と感受率

5.3.1 位相感受率

位相感受率は、 θ に依存した分配関数を用いて定義できる。

$$\chi_{\text{top}} = -\frac{1}{2N} \frac{d^2}{d\theta^2} \log Z(\theta) \Big|_{\theta=0} \quad (169)$$

θ 微分を実行して χ_{top} を計算するには、鞍点解 $\bar{\phi}$, $\bar{\phi}^*$ も θ に依存していることに注意する必要がある。

$$\chi_{\text{top}} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta \partial \bar{\phi}} \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta \partial \bar{\phi}^*} \frac{d\bar{\phi}^*}{d\theta} \quad (170)$$

各項では微分した後で $\theta = 0$ と置いている。ところで、 $\bar{\phi}$, $\bar{\phi}^*$ は鞍点方程式

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\phi}} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\phi}^*} = 0 \quad (171)$$

の解であるから、辺々を θ で微分し、 $\theta = 0$ とおくと、次の二式を得る。

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta \partial \bar{\phi}} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{\phi}^2} \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{\phi} \partial \bar{\phi}^*} \frac{d\bar{\phi}^*}{d\theta} = 0, \quad (172)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta \partial \bar{\phi}^*} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{\phi} \partial \bar{\phi}^*} \frac{d\bar{\phi}}{d\theta} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{\phi}^{*2}} \frac{d\bar{\phi}^*}{d\theta} = 0 \quad (173)$$

この連立方程式を $\frac{d\bar{\phi}}{d\theta}$, $\frac{d\bar{\phi}^*}{d\theta}$ について解き、(170) 式に代入すると、次のような表式を得る。

$$\chi_{\text{top}} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta^2} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta \partial \bar{\phi}}, \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta \partial \bar{\phi}^*} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{\phi}^2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{\phi}^* \partial \bar{\phi}} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{\phi} \partial \bar{\phi}^*} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \bar{\phi}^{*2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta \partial \bar{\phi}} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \theta \partial \bar{\phi}^*} \end{pmatrix} \quad (174)$$

ここにポテンシャル Ω の各微分を代入して計算することで、位相感受率を求めることができる。結果は次のようになる。

$$\frac{1}{\chi_{\text{top}}} = \frac{1}{\tau_{N_f}} + \frac{1}{\tau_m} \quad (175)$$

ここで、

$$\tau_{N_f} = \frac{\gamma \alpha (\phi + m)^{N_f}}{[\alpha (\phi + m)^{N_f} + 1]^2}, \quad \tau_m = \frac{\Sigma^2 m (\phi + m)}{N_f} \quad (176)$$

である。 ϕ は $\theta = 0$ のときのギャップ方程式 (160) の解である。 ϕ を通じて、 χ_{top} は温度に依存する。

従来の有限温度 ChRM 模型に存在していた、位相感受率の非物理的な抑制 [62] が、いまの場合起こっていないことに注意する。

いくつかの極限に対して、位相感受率がどのような値を取るかを考察する。質量 $m = 0$ の極限では、 $\tau_m \rightarrow 0$ より、 $\chi_{\text{top}} \rightarrow 0$ となる。すなわち、質量ゼロのフェルミオンのために、位相感受率は完全に遮蔽されている。これは、位相感受率に対する一般的な考察 [51] と一致した結果である。また、クォークフレーバ数 $N_f = 0$ の極限では、 $\tau_m \rightarrow \infty$, $\tau_{N_f} \rightarrow \frac{\gamma \alpha}{(\alpha + 1)^2}$ 、すなわち、 $\chi_{\text{top}} \rightarrow \gamma p(1-p) = \tau$ のように、クエンチ感受率を再現する。これは当然期待される結果である。

$N_f = 2, 3$ の場合の位相感受率の温度変化を、図 15、16 に示した。カイラル相転移点付近で値が急速に減少している様子が観察される。これは、格子 QCD での結果 [66] と矛盾しない。

5.3.2 メソン質量

有効ポテンシャルを、鞍点解 $\bar{\phi}$ の周りで、 $S = \bar{\phi} + \lambda^a (\sigma_a + i\pi_a)$ と展開する。ここで、 σ_a, π_a はそれぞれ実のパラメータ、 λ^a は、 $\text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta_{ab}$, ($a = 0, \dots, N_f^2 - 1$) と規格化された $U(N_f)$ の生成子である。有効ポテンシャルの応答を、 $\Omega = \Omega(S = \bar{\phi}) + M_{\text{sa}}^2 \sigma_a^2 + M_{\text{psa}}^2 \pi_a^2 + \dots$ と表したとき、 $M_{\text{sa}}, M_{\text{psa}}$ をそれぞれスカラーメソン質量、擬スカラーメソン質量と呼ぶ。これらを計算するには、展開公式 $\det(1 + \epsilon X) = 1 + \epsilon \text{tr} X + \frac{1}{2} \epsilon^2 [(\text{tr} X)^2 - \text{tr} X^2] + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ が有用である。

一重項チャンネルのメソン質量は次のようになる (鞍点解を意味する $\bar{\phi}$ は省略して ϕ と表記した)。

$$M_{\text{so}}^2 = \Sigma^2 - \frac{1}{(\phi + m)^2 + t^2} + \frac{2(\phi + m)^2}{[(\phi + m)^2 + t^2]^2} + \gamma \frac{\alpha (\phi + m)^{N_f - 2}}{\alpha (\phi + m)^{N_f} + 1} - N_f \gamma \frac{\alpha^2 (\phi + m)^{N_f - 2}}{[\alpha (\phi + m)^{N_f} + 1]^2} \quad (177)$$

$$M_{\text{ps0}}^2 = \Sigma^2 - \frac{1}{(\phi + m)^2 + t^2} - \gamma \frac{\alpha (\phi + m)^{N_f - 2}}{\alpha (\phi + m)^{N_f} + 1} + N_f \gamma \frac{\alpha^2 (\phi + m)^{N_f - 2}}{[\alpha (\phi + m)^{N_f} + 1]^2} \quad (178)$$

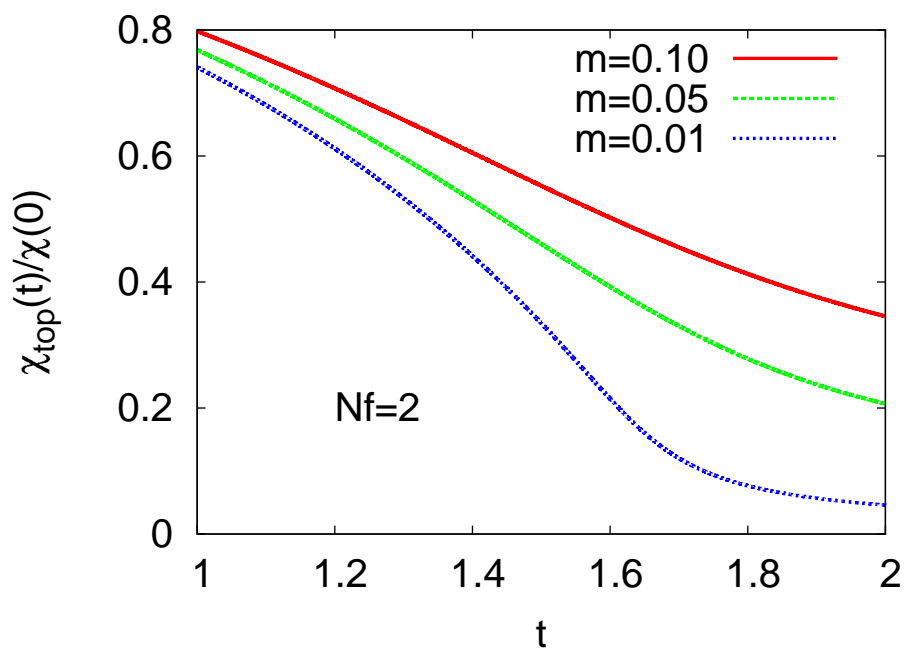


図 15: $t = 0$ の値によって規格化された位相感受率 ($N_f = 2$)

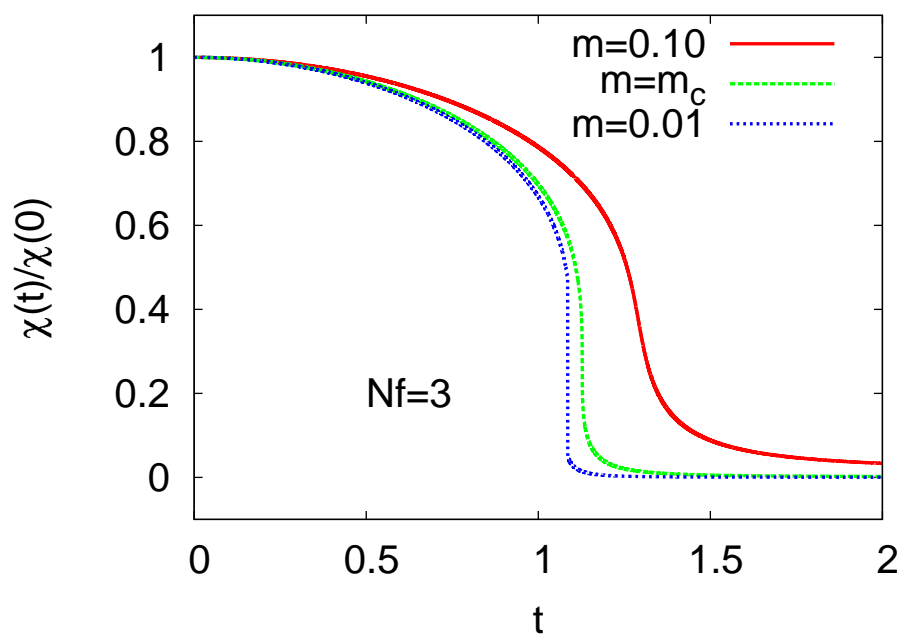


図 16: $t = 0$ の値によって規格化された位相感受率 ($N_f = 3$)

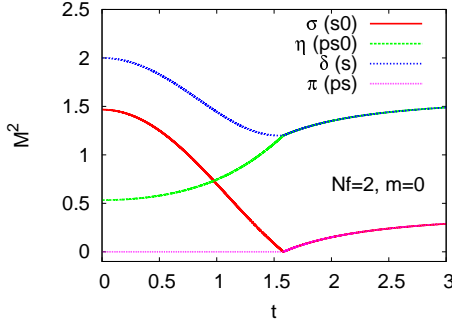


図 17: メソン質量 ($N_f = 2, m = 0$)

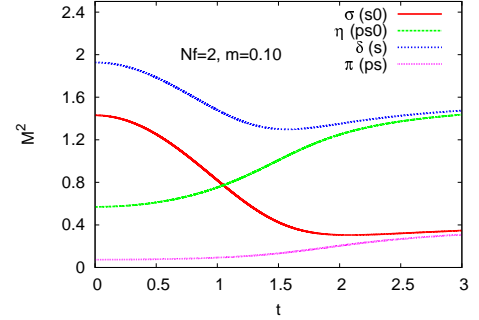


図 18: メソン質量 ($N_f = 2, m = 0.1$)

特に $m = 0$ のとき、非対称相での解が $\phi \neq 0$ であることに注意して、鞍点方程式 (160) を用いると、 M_{ps0}^2 を次のように変形できる。

$$M_{ps0}^2 = N_f \gamma \frac{\alpha \phi^{N_f-2}}{\alpha \phi^{N_f} + 1} \quad (179)$$

すなわち、 $U_A(1)$ チャンネルのボゾンの質量は、非対称相においてゼロではない。したがって、 $U_A(1)$ 対称性の破れの効果が適切に取り込まれていることを確認できた。

多重項チャンネルのメソン質量は次のようになる。

$$M_s^2 = \Sigma^2 - \frac{1}{(\phi + m)^2 + t^2} + \frac{2(\phi + m)^2}{[(\phi + m)^2 + t^2]^2} + \gamma \frac{\alpha(\phi + m)^{N_f-2}}{\alpha(\phi + m)^{N_f} + 1} \quad (180)$$

$$M_{ps}^2 = \Sigma^2 - \frac{1}{(\phi + m)^2 + t^2} - \gamma \frac{\alpha(\phi + m)^{N_f-2}}{\alpha(\phi + m)^{N_f} + 1} \quad (181)$$

$m = 0$ の場合、鞍点方程式を用いると、非対称相では $M_{ps}^2 = 0$ となることが確認できる。すなわち、対称性の自発的破れに伴う南部-Goldstone ボゾンの質量が再現されている。

各メソン質量の温度依存性を、 $N_f = 2$ の場合は図 17、18 に、 $N_f = 3$ の場合は図 19、20 に示した。なお、パラメータは $\alpha = 0.3$, $\gamma = 2$, $\Sigma = 1$ とした。

温度が上昇し、対称相になると、 $N_f = 2$ においては、 M_{ps}^2 と M_{s0}^2 とが、 M_s^2 と M_{ps0}^2 とが、それぞれ縮退していく。このように、対称相でもスペクトルが二つに分かれているのは、アノマリーによる対称性の破れが有効であるためである。一方、 $N_f = 3$ では、すべてのチャンネルのメソン質量が縮退していく。これは、メソン質量へのアノマリーの寄与が、 ϕ^{N_f-2} の形で入ってくるためである。したがって、 $N_f = 3$ では、少なくともメソンの質量を見ている限り、対称相では有効的にアノマリーの寄与が小さくなる。

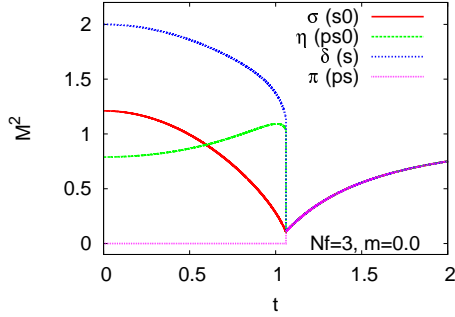


図 19: メソン質量 ($N_f = 3, m = 0$)

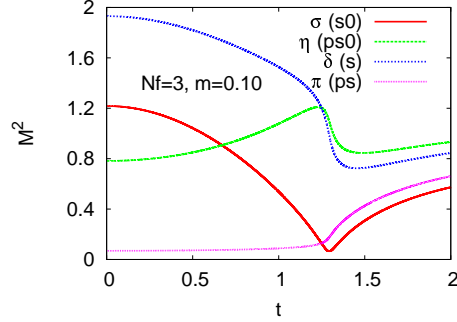


図 20: メソン質量 ($N_f = 3, m = 0.1$)

5.3.3 スカラー・擬スカラー感受率

分配関数 (134) において、質量行列を一般に $m \rightarrow m + P_R \mathcal{M} + P_L \mathcal{M}^\dagger$ と置き換えた模型を考える。ここで、 P_L, P_R は射影演算子である。複素質量行列は、 $\mathcal{M} = (s_a + ip_a) \lambda^a$ のように、 $U(N_f)$ 生成子 λ^a を用いて表すことができる。 s_a, p_a は実パラメータである。スカラー感受率 χ_s^a 、擬スカラー感受率 χ_{ps}^a はそれぞれ次のように定義される。

$$\chi_s^a = \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial s_a^2} \log Z \Big|_{s_a=p_a=0} \quad (182)$$

$$\chi_{ps}^a = \frac{1}{2N} \frac{\partial^2}{\partial p_a^2} \log Z \Big|_{s_a=p_a=0} \quad (183)$$

位相感受率の場合と同様に、鞍点解の s_a, p_a 依存性にも注意して微分を行う必要がある。

一重項の感受率は次のように計算される。

$$\chi_{s0} = \chi_{s0}^{(0)} \frac{\Sigma^2}{\Sigma^2 - \chi_{s0}^0}, \quad \chi_{ps0} = \chi_{ps0}^{(0)} \frac{\Sigma^2}{\Sigma^2 - \chi_{ps0}^0} \quad (184)$$

ここで、

$$\chi_{s0}^{(0)} = \Sigma^2 - M_{s0}^2, \quad \chi_{ps0}^{(0)} = \Sigma^2 - M_{ps0}^2 \quad (185)$$

である。 $N_f = 2, 3$ の場合の一重項スカラー感受率を図 21、23 に、擬スカラー感受率を図 22、24 に示した。ただし、パラメータは $\Sigma = 1, \alpha = 0.3, \gamma = 2$ とした。表式からも明らかなように、 $U_A(1)$ チャンネルのメソン質量は、アノマリーの効果によって、カイラル極限の非対称相でもゼロではなかったため、擬スカラー感受率 χ_{ps0} は有限の値を取る。また、この擬スカラー感受率は、ChRM 模型における軸性 Ward 恒等式 [25] を満たしている。

$$\chi_{\text{top}} = \frac{m}{N_f} \Sigma^2 \phi - \frac{m^2}{N_f} \chi_{ps0} \quad (186)$$

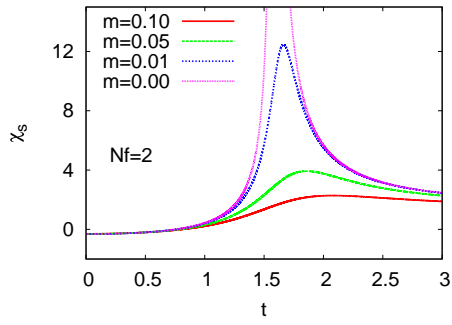


図 21: 一重項スカラー感受率 ($N_f = 2$)

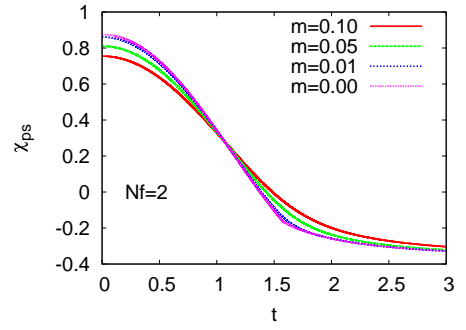


図 22: 一重項擬スカラー感受率 ($N_f = 2$)

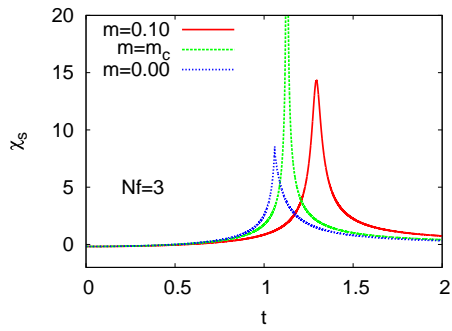


図 23: 一重項スカラー感受率 ($N_f = 3$)

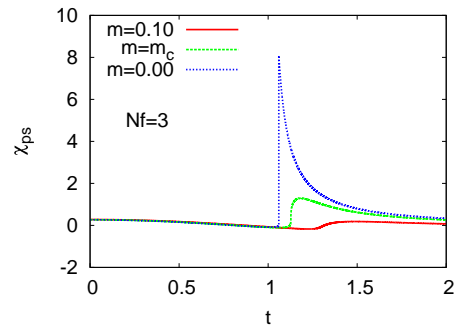


図 24: 一重項擬スカラー感受率 ($N_f = 3$)

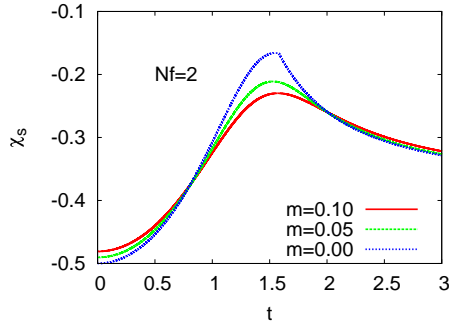


図 25: 三重項スカラー感受率 ($N_f = 2$)

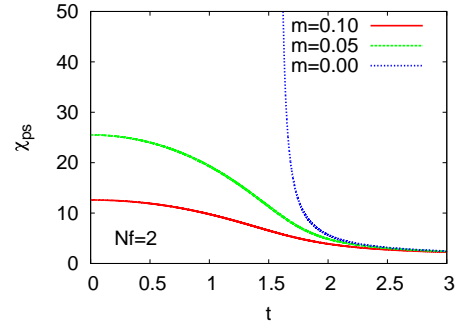


図 26: 三重項擬スカラー感受率 ($N_f = 2$)

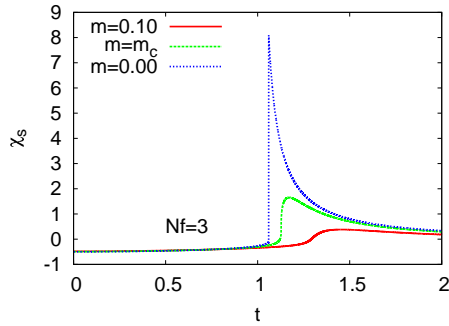


図 27: 八重項スカラー感受率 ($N_f = 3$)

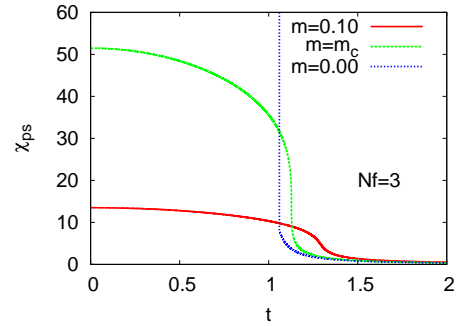


図 28: 八重項擬スカラー感受率 ($N_f = 3$)

図 21、23 から、二次相転移点において、スカラー感受率 (カイラル感受率) が発散している様子
わかる。

多重項の感受率は次のように計算される。

$$\chi_s = \chi_s^{(0)} \frac{\Sigma^2}{\Sigma^2 - \chi_s^{(0)}}, \quad \chi_{ps} = \chi_{ps}^{(0)} \frac{\Sigma^2}{\Sigma^2 - \chi_{ps}^{(0)}} \quad (187)$$

ここで

$$\chi_s^{(0)} = \Sigma^2 - M_s^2, \quad \chi_{ps}^{(0)} = \Sigma^2 - M_{ps}^2 \quad (188)$$

である。 $N_f = 2, 3$ の場合の多重項スカラー感受率を図 25、26 に、また、擬スカラー感受率を図 27、
28 に示した。

カイラル極限では、質量ゼロの南部-Goldstone ボゾンが存在するため、 χ_{ps} は非対称相で無限大に
発散している。また、多重項スカラー感受率 χ_s は、一重項のスカラー感受率と異なり、二次相転移
点で発散しない様子が確認できる。

6 まとめと展望

2節では、QCD 相構造に対する一般的な考察をまとめた。QCD 相構造は、フレーバ数 N_f に対して敏感に変化する。とくに、ストレンジクォーク質量 m_s によって、相図上の臨界点の存否が変化する。現実的な質量パラメータに対して、相図上に臨界点が存在するか否かを研究する手段として、ここでは ChRM 模型を用いることにした。しかし、従来の ChRM 模型は、 N_f に依存しない相転移の振る舞いを示す。したがって、このままでは臨界点の存否を論ずることができない。そこで、QCD 相構造の研究の第一段階として、 N_f に依存する相転移の振る舞いを示す ChRM 模型を構築することが目標になった。

3節では Banks-Casher 関係式を導入した。これによって、Dirac スペクトルとカイラル凝縮とを結びつけることができる。Dirac 演算子は、ハミルトニアンと違って観測可能な物理量ではないため、Banks-Casher 関係式は、Dirac 演算子の固有値分布に対して物理的な意味を与える重要な関係式である。

続いて、Dirac スペクトルを計算する手法としての、ChRM 理論が導入された。Dirac スペクトルは、固有値が体積の逆べき程度に小さい領域 (microscopic Dirac スペクトル) では普遍的であり、最も簡単なガウス型分布を仮定した ChRM 理論が厳密な計算結果を与えると期待されている。

一方で、普遍的でない量であるカイラル凝縮の値についても、ランダムな行列要素を持った Dirac 行列を用いるアプローチが有効であると考えられる。本論文では、そのような模型を ChRM 模型と呼んだ。4節で示したように、ChRM 模型による有限温度密度相図は、カイラル極限で三重臨界点を持ち、 $N_f = 2$ の QCD において期待される相構造を示す。

一方で、ChRM 模型は、フレーバ数 N_f に依存した相転移を記述することができなかった。その理由は、ChRM 模型が、アノマリーの効果を見逃した平均場理論になっているからである。非自明な位相電荷セクター $\nu \neq 0$ の効果を取り入れて、アノマリーによる $U_A(1)$ 対称性の破れを記述する方法はあるが、有効ポテンシャルへの寄与は $\mathcal{O}(\nu/V)$ であり、熱力学極限において、カイラル凝縮への寄与はない。

5節では、新しい ChRM 模型を導入した。この模型は本論文のオリジナルである。新しい模型では、有限温度相転移の振る舞いが N_f に依存する。この模型では、インスタントン数 N_{\pm} によって分布平均を取ることで、有効ポテンシャルに $\mathcal{O}(N^0)$ の変更が加えられていた。文献 [64] と同じ立場に立つと、この新しい ChRM 模型は、 $U_A(1)$ アノマリーの項が加えられた 0 次元の NJL 模型に相当していると考えられる。本論文では特に有限温度の場合についてのみ解析を行い、カイラル凝縮、メソン質量、感受率の温度依存性に対して、物理的でもっとも美しい結果を得た。

パラメータの意味付けや、インスタントン模型との類推など、模型の正当性を含めた議論はまだ続ける必要があるが、新しい ChRM 模型に対しては、幅広い応用や拡張が期待できる。従来の ChRM 模型を用いてなされた研究は、おそらくすべて、新しい ChRM 模型を用いて再度研究することがで

きる。

また、新しい ChRM 模型は、アノマリーの効果によって、 N_f に依存した振る舞いをするため、これまでの ChRM 模型でなされていた研究のみならず、アノマリーの効果や、それに伴う模型のフレーバ数依存性が重要になるような研究に対しても、新しい ChRM 模型は応用することができる。その典型的なものが、本論文でも紹介した、2+1 フレーバ有限温度密度相構造の研究である。

今後の展望としては、

- 2+1 フレーバへの拡張
- 有限温度密度相図
- アイソスピン化学ポテンシャル

などが考えられる。有限温度密度への拡張はほぼ自明であるため、新しい ChRM 模型を用いた 2+1 フレーバ相構造を解析することが、最も近い将来になされるべき研究課題である。

謝辞

本論文を作成するにあたり、松井哲男教授には、自由で雰囲気の良い研究環境を提供していただき、大変感謝しています。興味深い研究テーマを与えて下さり、熱心に指導していただき、何度も夜遅くまで議論につき合っ下さった藤井宏次助教に感謝します。杏林大学の太谷宗久講師には、研究上重要な文献をご教示いただき、また共同研究にご参加していただけたことに感謝します。駒場素粒子論グループの菊川芳夫准教授、高エネルギー研究機構の森松治准教授からは、貴重なご意見をいただくことができました。最後に、駒場原子核素粒子理論グループの皆様には、絶え間ないご支援と快適な環境を提供していただき、大変お世話になりました。

参考文献

- [1] S. Weinberg, “The Quantum Theory of Fields II,” (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [2] N. Itoh, Prog. Theor. Phys. **44**, 291 (1970);
T. D. Lee and G. C. Wick, Phys. Rev. D **9**, 2291 (1974);
J. C. Collins and M. J. Perry, Phys. Rev. Lett. **34**, 1353 (1975).
- [3] L. D. McLerran and B. Svetitsky, Phys. Lett. B **98**, 195 (1981);
L. D. McLerran and B. Svetitsky, Phys. Rev. D **24**, 450 (1981).

- [4] T. Matsui and H. Satz, Phys. Lett. B **178**, 416 (1986).
- [5] M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. B **410**, 337 (1997);
M. C. Abreu *et al.* [NA50 Collaboration], Phys. Lett. B **477**, 28 (2000).
- [6] CERN Press Release, PR01.00 10.02.00,
<http://press.web.cern.ch/press/PressReleases/Releases2000/PR01.00EquarkGluonMatter.html>
- [7] I. Arsene *et al.* [BRAHMS Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 1 (2005) [arXiv:nucl-ex/0410020];
K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 184 (2005) [arXiv:nucl-ex/0410003];
B. B. Back *et al.*, Nucl. Phys. A **757**, 28 (2005) [arXiv:nucl-ex/0410022];
J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 102 (2005) [arXiv:nucl-ex/0501009].
- [8] U. W. Heinz, arXiv:hep-ph/0407360;
T. Hirano and K. Tsuda, Phys. Rev. C **66**, 054905 (2002) [arXiv:nucl-th/0205043];
T. Hirano and Y. Nara, Phys. Rev. C **66**, 041901 (2002) [arXiv:hep-ph/0208029];
T. Hirano and Y. Nara, Phys. Rev. Lett. **91**, 082301 (2003) [arXiv:nucl-th/0301042].
- [9] S. Mrowczynski, Nucl. Phys. A **774**, 149 (2006);
H. Fujii and K. Itakura, Nucl. Phys. A **809**, 88 (2008) [arXiv:0803.0410 [hep-ph]];
A. Nishiyama, arXiv:0810.5003 [nucl-th].
- [10] N. Tanji, arXiv:0810.4429 [hep-ph].
- [11] T. Matsui, Prog. Theor. Phys. Suppl. **151**, 11 (2003) [arXiv:nucl-th/0305096];
Akiba-Hamagaki, 日本物理学会誌 **59**, 291 (2004);
Hirano-Hamagaki, 日本物理学会誌 **59**, 862 (2004).
- [12] J.J.M. Verbaarschot and T. Wettig, Ann. Rev. Nucl. Sci. **50** (2000), 343.
- [13] T. Banks and A. Casher, Nucl. Phys. B **169**, 103 (1980).
- [14] E. V. Shuryak and J. J. M. Verbaarschot, Nucl. Phys. A **560**, 306 (1993) [arXiv:hep-th/9212088].
- [15] M. L. Mehta, "Random Matrices," (Academic Press, San Diego, 1991).

- [16] M. Asakawa and K. Yazaki, Nucl. Phys. A **504**, 668 (1989).
- [17] A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto and G. Pettini, Phys. Lett. B **231**, 463 (1989);
A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto and G. Pettini, Phys. Rev. D **41**, 1610 (1990).
- [18] A. M. Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, M. A. Stephanov and J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. D **58**, 096007 (1998) [arXiv:hep-ph/9804290].
- [19] M. A. Stephanov, K. Rajagopal and E. V. Shuryak, Phys. Rev. Lett. **81**, 4816 (1998) [arXiv:hep-ph/9806219].
- [20] Y. Hatta and T. Ikeda, Phys. Rev. D **67**, 014028 (2003) [arXiv:hep-ph/0210284];
H. Fujii and M. Ohtani, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153**, 157 (2004) [arXiv:hep-ph/0401028].
- [21] H. Fujii, Phys. Rev. D **67**, 094018 (2003) [arXiv:hep-ph/0302167];
H. Fujii and M. Ohtani, Phys. Rev. D **70**, 014016 (2004) [arXiv:hep-ph/0402263];
D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. D **70**, 056001 (2004) [arXiv:hep-ph/0401052].
- [22] B. Berdnikov and K. Rajagopal, Phys. Rev. D **61**, 105017 (2000) [arXiv:hep-ph/9912274];
C. Nonaka and M. Asakawa, Phys. Rev. C **71**, 044904 (2005) [arXiv:nucl-th/0410078].
- [23] R. D. Pisarski and F. Wilczek, Phys. Rev. D **29**, 338 (1984).
- [24] P. de Forcrand and O. Philipsen, JHEP **0701**, 077 (2007) [arXiv:hep-lat/0607017].
- [25] R.A. Janik, M.A. Nowak, G. Papp and I. Zahed, Nucl. Phys. **B498**(1997), 313.
- [26] K. Takahashi, Soryushiron Kenkyu **96**(1998), 273.
- [27] M. A. Stephanov, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153**, 139 (2004) [Int. J. Mod. Phys. A **20**, 4387 (2005)] [arXiv:hep-ph/0402115].
- [28] K. Yagi, T. Hatsuda and Y. Miake, “Quark-Gluon Plasma” (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [29] S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969);
J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cim. A **60**, 47 (1969).
- [30] C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B **234**, 173 (1984).

- [31] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [32] M. Gell-Mann, R. J. Oakes and B. Renner, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968).
- [33] M. Le Bellac, “Thermal Field Theory” (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [34] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **44**, 1422 (1970);
M. Kobayashi, H. Kondo and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **45**, 1955 (1971).
- [35] G. 't Hooft, Phys. Rept. **142**, 357 (1986).
- [36] K. G. Wilson and J. B. Kogut, Phys. Rept. **12**, 75 (1974).
- [37] S. Gasiorowicz and D. A. Geffen, Rev. Mod. Phys. **41**, 531 (1969);
H. Goldberg, Phys. Lett. B **131**, 133 (1983).
- [38] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rept. **247** (1994), 221.
- [39] L.G. Yaffe and B. Svetitsky, Phys. Rev. **D26**(1982), 963.
- [40] E. Laermann and O. Philipsen, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **53**, 163 (2003) [arXiv:hep-ph/0303042].
- [41] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D **9**, 3471 (1974).
- [42] M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **76**, 4472 (1996) [arXiv:hep-lat/9604003].
- [43] T. Guhr, A. Muller-Groeling and H. A. Weidenmuller, Phys. Rept. **299**, 189 (1998) [arXiv:cond-mat/9707301].
- [44] T. Nagao, “ランダム行列の基礎,” (University of Tokyo Press, Tokyo, 2005).
- [45] S. Coleman, “Aspects of symmetry: selected Erice Lectures of Sidney Coleman,” (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [46] T. Schafer and E. V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **70**, 323 (1998) [arXiv:hep-ph/9610451].
- [47] D. Diakonov, arXiv:hep-ph/9602375.
- [48] J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **72**, 2531 (1994) [arXiv:hep-th/9401059].
- [49] J. J. M. Verbaarschot and I. Zahed, Phys. Rev. Lett. **70**, 3852 (1993) [arXiv:hep-th/9303012].

- [50] G. Akemann, P. H. Damgaard, U. Magnea and S. Nishigaki, Nucl. Phys. B **487**, 721 (1997) [arXiv:hep-th/9609174].
- [51] H. Leutwyler and A. V. Smilga, Phys. Rev. D **46**, 5607 (1992).
- [52] J. J. M. Verbaarschot, Phys. Lett. B **368**, 137 (1996) [arXiv:hep-ph/9509369].
- [53] H. Fukaya *et al.*, Phys. Rev. D **76**, 054503 (2007) [arXiv:0705.3322 [hep-lat]].
- [54] T. Nagao and P. J. Forrester, Nucl. Phys. B **435** (1995) 401.
- [55] M. E. Berbenni-Bitsch, S. Meyer, A. Schafer, J. J. M. Verbaarschot and T. Wettig, Phys. Rev. Lett. **80**, 1146 (1998) [arXiv:hep-lat/9704018].
- [56] P. H. Damgaard and S. M. Nishigaki, Nucl. Phys. B **518**, 495 (1998) [arXiv:hep-th/9711023].
- [57] T. Wilke, T. Guhr and T. Wettig, Phys. Rev. D **57**, 6486 (1998) [arXiv:hep-th/9711057].
- [58] A.D. Jackson and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev. **D53** (1996), 7223.
- [59] A.D. Jackson, M.K. Şener and J.J.M. Verbaarschot, Nucl. Phys. **B479** (1996), 707.
- [60] T. Wettig, A. Schafer and H. A. Weidenmuller, Phys. Lett. B **367**, 28 (1996) [Erratum-ibid. B **374**, 362 (1996)] [arXiv:hep-ph/9510258].
- [61] M.A. Stephanov, Phys. Lett. **B375**(1996), 249.
- [62] M. Ohtani, C. Lehner, T. Wettig and T. Hatsuda, Mod. Phys. Lett. A **23** (2008), 2465.
- [63] T. Sano, H. Fujii and M. Ohtani, arXiv:0904.1860 [hep-ph].
- [64] R.A. Janik, M.A. Nowak and I. Zahed, Phys. Lett. B **397** (1997), 155.
- [65] R.A. Janik, M.A. Nowak, G. Papp and I. Zahed, AIP Conf. Proc. **494**(1999), 408; arXiv:hep-lat/9911024.
- [66] B. Alles, M. D'Elia and A.Di Giacomo, Phys. Lett. **B483**(2000), 139.