開弦の場の理論におけるBV形式について

岸本 功*

京都大学基礎物理学研究所

Abstract

ボゾニックな開弦の場の理論の Batalin-Vilkovisky(BV) 形式の枠組みでの記述をレビューする。従来知られている線形なゲージ固定条件は、場-反場とゲージ固定フェルミオンをうまく選ぶことで再現できる。また従来の他の流儀との関係や超弦の場合への拡張も議論する。

Contents

1 はじめに

通常、Yang-Mills 理論などゲージ理論の量子化を行う際、BRST 形式を用いることが多いが、より一般のゲージ理論を扱う処方箋としては Batalin-Vilkovisky(BV) 形式 [1] が知られている。弦の場の理論 (String Field Theory, SFT) は、相互作用を含めるとゲージ対称性の構造が複雑（次の節でみるように運動方程式を満たすところではゲージ変換が独立でない）になっており、特に BV 形式を適用するのにちょうど良い例となっている。

弦の場の理論に BV 形式を適用するということは、古くから議論されていることであるが、「BV 形式」自身にも一見異なって見える流儀があるため、弦の場の理論の専門家の間でもときどき互いに誤解を生じることがある。そこで、ここでは主に [2] に従って BV 形式をボゾニックな開弦の

*ikishimo アットマーク yukawa.kyoto-u.ac.jp

場の理論に適用する方法を紹介した後、弦の場の理論の文脈で用いられている BV 形式の別の流儀との関係についても述べる。(§3)

また、近年 Siegel ゲージ以外の consistent なゲージ固定条件として a-ゲージ [3] と呼ばれるかなり違う形のゲージ固定条件も提唱されており、これを（一般には弦場について線形なゲージ条件を）BV 形式の言葉で記述するとどうなるかということも議論する。さらに §4 では cubic な超弦の場の理論への拡張についても議論する。[1]

2　BV 形式による記述

ここでは [2] の convention[2]に従って、BV 形式をボゾニックな開弦の場の理論に適用する。

2.1　field-antifield と master 方程式

元々のゲージ不変な action を $S_0[A]$ とおく：

$$S_0[A] = -\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\langle A, QA\rangle + \frac{1}{3}\langle A, A*A\rangle\right); \quad g(A)=1, \quad s(A)=1. \tag{1}$$

$g(\ )$ は worldsheet ghost 数、$s(\ )(\mathrm{mod}\,2)$ は total の Grassmann 性を表すことにする。$S_0[A]$ はゲージ変換：

$$\delta_{\Lambda_0}A = Q\Lambda_0 + A*\Lambda_0 - \Lambda_0 * A; \quad g(\Lambda_0)=0, \quad s(\Lambda_0)=0, \tag{2}$$

のもとで不変であり、これは交換関係のもとで閉じている

$$[\delta_{\Lambda_0^{(1)}}, \delta_{\Lambda_0^{(2)}}]A \;=\; \delta_{[\Lambda_0^{(1)},\Lambda_0^{(2)}]_*}A \tag{3}$$

ものであるが、A のゲージ変換のゲージパラメータ Λ_0 の「ゲージ変換」

$$\delta_{\Lambda_{-1}}\Lambda_0 = Q\Lambda_{-1} + A*\Lambda_{-1} + \Lambda_{-1}*A; \quad g(\Lambda_{-1})=-1, \quad s(\Lambda_{-1})=1, \tag{4}$$

を考えると、A のゲージ変換の式は

$$\delta_{\Lambda_{-1}}(\delta_{\Lambda_0}A) \;=\; (QA + A*A)*\Lambda_{-1} - \Lambda_{-1}*(QA+A*A) \tag{5}$$

より A が $S_0[A]$ から導かれる運動方程式:

$$QA + A*A = 0 \tag{6}$$

を満たしているなら不変である。つまり Λ_0 による A のゲージ変換には up to $\frac{\partial}{\partial A}S_0[A]$ で不定性がある。同様に負の worldsheet ghost 数の場に対するゲージ変換

$$\delta_{\Lambda_{-n-1}}\Lambda_{-n} \;=\; Q\Lambda_{-n-1} + A*\Lambda_{-n-1} + (-1)^n\Lambda_{-n-1}*A, \tag{7}$$

$$g(\Lambda_{-n}) = -n, \quad s(\Lambda_{-n}) \equiv -n\,(\mathrm{mod}\,2), \tag{8}$$

$(n=0,1,2,\cdots)$ を考えると、それぞれ

$$\delta_{\Lambda_{-n-1}}(\delta_{\Lambda_{-n}}\Lambda_{-n+1}) \;=\; (QA+A*A)*\Lambda_{-n-1} - \Lambda_{-n-1}*(QA+A*A) \tag{9}$$

---

[1]文献によっては BV 形式を bosonic の場合と同様に適用できる、と簡単に言葉で済ませている場合もあるが、具体的なことは書かれていないように思われるので、ここで少し丁寧に書いておく。

[2]これは元々の [1] の convention に近い。

となることから、Λ_{-n} によるゲージ変換にはいつも up to $\frac{\partial}{\partial A}S_0[A]$ で不定性がある。以上より、$S_0[A]$ のゲージ変換は既約でなく、"∞-stage-reducible" である。このようなゲージ理論を BV 形式で考えるとき、各段階でのゲージ変換に対応して、ゲージパラメータ $\Lambda_{-n}(n=0,1,2,...)$ に対しゴースト場 $\mathcal{C}_n$ を導入する：

$$\mathrm{gh}(\mathcal{C}_n)=1+n,\ \ \epsilon(\mathcal{C}_n)\equiv 1+n\,(\mathrm{mod}\,2),\quad g(\mathcal{C}_n)=-n,\ \ s(\mathcal{C}_n)=1\,. \tag{10}$$

ここで gh( ) は BV 形式の spacetime のゴースト数を表し、$\epsilon(\ )$ は BV 形式の statistics ($\mathbb{Z}_2$-grading) である。元々の場 A については

$$\mathrm{gh}(A)=0,\ \ \epsilon(A)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2),\quad g(A)=1,\quad s(A)=1\,. \tag{11}$$

とする。形式的に $n=-1$ つまり $A=\mathcal{C}_{-1}$ と思ってもよい。ただし Grassmann 性については注意が必要である。具体的には $\Lambda_{-n}=\sum_\alpha \lambda^\alpha_{-n}|\alpha\rangle_{-n}$ （$|\alpha\rangle_{-n}$ は worldsheet ghost 数 $-n$ の基底。以下では添え字 α は運動量 p_μ も含んでいるとし、従って、$\sum_\alpha$ は p_μ の積分も含めているとみなす。）の形であり、λ^α_{-n} は Grassmann even な spacetime の場であるが、これに対応して Grassmann 性 $1+n\,(\mathrm{mod}\,2)$ な spacetime の場：$\mathcal{C}^\alpha_{-n}$ を導入して $\mathcal{C}_n=\sum\mathcal{C}^\alpha_{-n}|\alpha\rangle_{-n}$ としている。

さらに $\Phi^A=(A,\mathcal{C}_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ に対応してそれぞれの反場 (antifield) $\Phi^*_A=(A^*,\mathcal{C}^*_n)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ を導入する：

$$\mathrm{gh}(\mathcal{C}^*_n)=-2-n,\ \ \epsilon(\mathcal{C}^*_n)\equiv n\,(\mathrm{mod}\,2),\quad g(\mathcal{C}^*_n)=-n,\ \ s(\mathcal{C}^*_n)=0\,. \tag{12}$$

($n=-1,0,1,2,\cdots$, ここで $\mathcal{C}^*_{-1}:=A^*$ とした。) そして反括弧 (anti-bracket) $(\ ,\ )_{\mathrm{a.b.}}$ を以下のように定義する：

$$(X,Y)_{\mathrm{a.b.}}\ \ =\ \ \sum_A\left(\frac{\partial_r X}{\partial\Phi^A}\frac{\partial_l Y}{\partial\Phi^*_A}-\frac{\partial_r X}{\partial\Phi^*_A}\frac{\partial_l Y}{\partial\Phi^A}\right) \tag{13}$$

$\frac{\partial_r}{\partial\phi},\frac{\partial_l}{\partial\phi}$ はそれぞれ右微分、左微分を表す。このとき場と反場の汎関数としての action $S[\Phi^A,\Phi^*_A]$ に対する master 方程式は[3]

$$(S,S)_{\mathrm{a.b.}}=2\frac{\partial_r S}{\partial\Phi^A}\frac{\partial_l S}{\partial\Phi^*_A}=0 \tag{14}$$

であり、"proper solution" の境界条件としては

$$S[\Phi^A,\Phi^*_A]|_{\Phi^*_A=0}=S_0[A] \tag{15}$$

が課される。つまり、antifield を全部ゼロにすると、元のゲージ不変な作用に戻るという条件である。このような master 方程式の解が形式的には元の作用 (1) と同じ形で弦場 A を worldsheet ghost 数の制限を外したもの Ψ に置き換えた

$$S[\Phi^A,\Phi^*_A]=-\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\langle\Psi,Q\Psi\rangle+\frac{1}{3}\langle\Psi,\Psi*\Psi\rangle\right), \tag{16}$$

$$\Psi=\sum_{n=-1}^{\infty}\mathcal{C}_n+\sum_{n=-1}^{\infty}{}^*\mathcal{C}^*_n=\sum_{n\geq-1,\alpha}\mathcal{C}^\alpha_n|\alpha\rangle_{-n}+\sum_{n\geq-1,\alpha}\mathcal{C}^*_{n,\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle_{n+3}(-1)^n \tag{17}$$

で与えられることを確かめよう。ただし、$\mathcal{C}_{-1}\equiv A$, $\mathcal{C}^*_{-1}\equiv A^*$ であり、${}^*\mathcal{C}^*_{-1}$ は $\mathcal{C}^*_{-1}$ の基底を BPZ 内積に関する dual な基底に変えたものを意味する。つまり前者の基底を $|\alpha\rangle_{-n}$ とするとその dual

[3] ここでは classical master 方程式のみ考えることにする。

は $\langle|\tilde{\alpha}\rangle_{3+n}, |\beta\rangle_{-n}\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ となる $|\tilde{\alpha}\rangle_{n+3}$ で定義する。このような基底を $\{|\alpha\rangle_g, |\tilde{\alpha}\rangle_{3-g}\}_{g\le 1}$ と定めたとき、一般に Ψ の “string Hodge dual” を

$$ {}^*\Psi \quad = \quad \sum_{g\le 1,\alpha} (|\alpha\rangle_g\, {}_g\langle\alpha| + |\tilde{\alpha}\rangle_{3-g}\, {}_{3-g}\langle\tilde{\alpha}|)\Psi \tag{18} $$

のように定義しよう。左から作用させていることに注意する。また、* の作用は Grassmann odd である。ここで bra は ket の BPZ 共役で定義している、つまり

$$ {}_g\langle\alpha| \equiv \mathrm{bpz}(|\alpha\rangle_g), \qquad {}_{3-g}\langle\tilde{\alpha}| \equiv \mathrm{bpz}(|\tilde{\alpha}\rangle_{3-g})\,, \tag{19} $$

$$ \mathrm{bpz}(|\psi\rangle)|\phi\rangle = \langle R(1,2)|\psi\rangle_2|\phi\rangle_1 = \langle\psi,\phi\rangle \tag{20} $$

であり、今の bosonic open SFT の場合 reflector $\langle R(1,2)| = \langle R(2,1)|$ は Grassmann odd であることに注意する。さらに、完全性関係が

$$ 1 \quad = \quad \sum_{g\le 1,\alpha} (|\alpha\rangle_g\, {}_{3-g}\langle\tilde{\alpha}| + |\tilde{\alpha}\rangle_{3-g}\, {}_g\langle\alpha|) \tag{21} $$

とかけることから、string Hodge dual を続けて 2 回やると元に戻る：$^{**}\Psi = \Psi$ こともわかる。

(17) のようにかける Ψ のうち antifield に関する部分は

$$ \mathrm{gh}({}^*\mathcal{C}_n^*) = -2-n, \quad \epsilon({}^*\mathcal{C}_n^*) \equiv n\,(\mathrm{mod}\,2), \quad g({}^*\mathcal{C}_n^*) = 3+n, \quad s({}^*\mathcal{C}_n^*) = 1\,. \tag{22} $$

$(n = -1, 0, 1, 2, \cdots)$ となり特に Ψ は Grassmann odd: $s(\Psi) = 1$ である。また (21) を使うと

$$ (S,S)_{\mathrm{a.b.}} \quad = \quad 2\sum_{n\ge -1,\alpha} \frac{\partial_r S}{\partial\mathcal{C}_n^\alpha}\frac{\partial_l S}{\partial\mathcal{C}_{n,\alpha}^*} = \frac{1}{g^4}\langle Q\Psi + \Psi*\Psi, Q\Psi + \Psi*\Psi\rangle = 0 \tag{23} $$

となり、master 方程式を満たすことがわかる。最後の等式は

$$ (A*B)*C = A*(B*C), \quad Q^2 = 0, \quad Q(A*B) = QA*B + (-1)^{s(A)}A*QB, \tag{24} $$

$$ \langle QA, B\rangle = -(-1)^{s(A)}\langle A, QB\rangle, \quad \langle A, B\rangle = (-1)^{s(A)s(B)}\langle B, A\rangle, \tag{25} $$

を使った。さらに worldsheet ghost 数の保存を考慮すると $S[\Phi^A, \Phi_A^* = 0] = S_0[\sum_n \mathcal{C}_n] = S_0[\mathcal{C}_{-1}]$ となり (16) は proper solution の境界条件 (15) を満たしている。またこの $S[\Phi^A, \Phi_A^*]$ は

$$ \delta_{\mathrm{B}}\Psi \quad \equiv \quad (\Psi, S)_{\mathrm{a.b.}} = -\frac{1}{g^2}(Q\Psi + \Psi*\Psi) \tag{26} $$

で与えられる offshell nilpotent な BRST 変換で不変である。成分場で書くとこの BRST 変換は

$$ \delta_{\mathrm{B}}\mathcal{C}_n^\alpha \quad = \quad \frac{\partial_l S}{\partial\mathcal{C}_{n,\alpha}^*} = -\frac{1}{g^2}\langle|\tilde{\alpha}\rangle_{n+3}, (Q\Psi + \Psi*\Psi)\rangle, \tag{27} $$

$$ \delta_{\mathrm{B}}\mathcal{C}_{n,\alpha}^* \quad = \quad -\frac{\partial_l S}{\partial\mathcal{C}_n^\alpha} = -\frac{(-1)^n}{g^2}\langle|\alpha\rangle_{-n}, (Q\Psi + \Psi*\Psi)\rangle, \tag{28} $$

で与えられる。

2.2 gauge fixing fermion と trivial pair

前節では元々のゲージ不変な作用 $S_0[A]$ にそのゲージ変換の構造に従って field-antifield を追加し、BV master 方程式の解である作用を求めた。次にその作用のゲージ固定を考えよう。そのために BV 形式の gauge fixing fermion Υ を用いて

$$\Phi^*_A \quad = \quad \frac{\partial \Upsilon[\Phi^A]}{\partial \Phi^A} \tag{29}$$

とう条件により antifield を消去することを考えよう。$\Upsilon[\Phi^A]$ は field（antifield ではない）の汎関数であり Grassmann odd なものである：

$$\mathrm{gh}(\Upsilon) = -1, \quad \epsilon(\Upsilon) = 1. \tag{30}$$

この条件を満たす Υ を構成するためには、前節で導入した field-antifield に加えてさらに負の space-time ghost 数をもつ field（antifield ではない）を導入する必要がある。今の場合、∞-stage-reducible なゲージ理論だったので、その各段階に応じて

$$(\bar{\mathcal{C}}^k_s, \bar{\pi}^k_s), \quad (s = 0, 1, 2, \cdots; k : \mathrm{even}, 0 \le k \le s), \tag{31}$$

$$(\mathcal{C}^k_s, \pi^k_s), \quad (s = 1, 2, 3, \cdots; k : \mathrm{odd}, 1 \le k \le s), \tag{32}$$

(s は各段階を表す添字、つまりは元々のゲージパラメータ Λ_{-s} によるゲージ変換に対応する) だけ trivial pair を導入し[4] proper solution である作用に S_{aux}:

$$S_{\mathrm{aux}} \quad = \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k:\mathrm{even}}}^{\infty} \sum_{s=k}^{\infty} \langle {}^*\bar{\pi}^k_s, \bar{\mathcal{C}}^{k*}_s \rangle + \sum_{\substack{k=1 \\ k:\mathrm{odd}}}^{\infty} \sum_{s=k}^{\infty} \langle {}^*\pi^k_s, \mathcal{C}^{k*}_s \rangle \tag{33}$$

を付け加える。ここで $\bar{\mathcal{C}}^{k*}_s, \mathcal{C}^{k*}_s$ はそれぞれ $\bar{\mathcal{C}}^k_s, \mathcal{C}^k_s$ の antifield であり、ゴースト数等は Table 1 のようになっている。各弦場は

	$\bar{\mathcal{C}}^k_s$	$\bar{\pi}^k_s$	$\mathcal{C}^k_s$	π^k_s	$\bar{\mathcal{C}}^{k*}_s$	$\mathcal{C}^{k*}_s$
gh( )	$k-s-1$	$k-s$	$s-k$	$s-k+1$	$s-k$	$k-s-1$
$\epsilon(\ )(\mathrm{mod}\,2)$	$s+1$	s	$s+1$	s	s	s
$g(\ )$	$1+k-s$	$1+k-s$	$1+k-s$	$1+k-s$	$1+k-s$	$1+k-s$
$s(\ )$	0	1	1	0	1	0

Table 1: trivial pair. $s = 0, 1, 2, \cdots$ であり bar($^-$) のついたものの添字 k は k : even, $(0 \le k \le s)$,bar($^-$) のついていないものの添字 k は k : odd, $(1 \le k \le s)$ である。action には $\bar{\pi}^{k*}_s, \pi^{k*}_s$ は含まれていないので省いた。また、action に付け加えた部分 S_{aux} に含まれる ${}^*\bar{\pi}^k_s, {}^*\pi^k_s$ はそれぞれ $\bar{\pi}^k_s, \pi^k_s$ の基底の string Hodge dual をとったものであり、 $g({}^*\bar{\pi}^k_s) = 3 - g(\bar{\pi}^k_s), g({}^*\pi^k_s) = 3 - g(\pi^k_s)$ および $s({}^*\bar{\pi}^k_s) = 0, s({}^*\pi^k_s) = 1$ となる。なお、この表において形式的に $k = -1$ の場合を考えて $\mathcal{C}^{-1}_s \equiv \mathcal{C}_s, \mathcal{C}^{-1*}_s \equiv \mathcal{C}^*_s$ $(s = -1, 0, 1, 2, \cdots)$ と書いても consistent になっている。

$$\mathcal{C}^k_s = \sum_\alpha \mathcal{C}^{k,\alpha}_s |\alpha\rangle_{1+k-s} = \sum_\alpha |\alpha\rangle_{1+k-s} \mathcal{C}^{k,\alpha}_s, \tag{34}$$

[4] 一般に master 方程式の proper solution に対し、$\mathrm{gh}(\Pi) = \mathrm{gh}(\Lambda)+1, \epsilon(\Pi) = \epsilon(\Lambda)+1(\mathrm{mod}\,2)$ を満たす field (Λ, Π)（とそれらの antifield (Λ^*, Π^*): $\mathrm{gh}(\Lambda^*) = -\mathrm{gh}(\Lambda) - 1, \epsilon(\Lambda^*) = \epsilon(\Lambda) + 1(\mathrm{mod}\,2), \mathrm{gh}(\Pi^*) = -\mathrm{gh}(\Pi) - 1, \epsilon(\Pi^*) = \epsilon(\Pi) + 1(\mathrm{mod}\,2)$ ）をさらに導入し、作用に $\int dx \Pi \Lambda^*$ を加えてもまた master 方程式と antifield をゼロにすると元に戻るという境界条件を満たすので、(Λ, Π) は trivial pair と呼ばれる。

$$\mathcal{C}_s^{k*} = \sum_\alpha \mathcal{C}_{s,\alpha}^{k*} |\alpha\rangle_{1+k-s} = \sum_\alpha |\alpha\rangle_{1+k-s} (-1)^s \mathcal{C}_{s,\alpha}^{k*}, \tag{35}$$

$$\pi_s^k = \sum_\alpha \pi_s^{k,\alpha} |\alpha\rangle_{1+k-s} = \sum_\alpha |\alpha\rangle_{1+k-s} (-1)^s \pi_s^{k,\alpha}, \tag{36}$$

$$\bar{\mathcal{C}}_s^k = \sum_\alpha \bar{\mathcal{C}}_{s,\alpha}^k |\alpha\rangle_{1+k-s} = \sum_\alpha |\alpha\rangle_{1+k-s} (-1)^{s+1} \bar{\mathcal{C}}_{s,\alpha}^k, \tag{37}$$

$$\bar{\mathcal{C}}_s^{k*} = \sum_\alpha \bar{\mathcal{C}}_s^{k*,\alpha} |\alpha\rangle_{1+k-s} = \sum_\alpha |\alpha\rangle_{1+k-s} \bar{\mathcal{C}}_s^{k*,\alpha}, \tag{38}$$

$$\bar{\pi}_s^k = \sum_\alpha \bar{\pi}_{s,\alpha}^k |\alpha\rangle_{1+k-s} = \sum_\alpha |\alpha\rangle_{1+k-s} \bar{\pi}_{s,\alpha}^k \tag{39}$$

のように展開されるとする。(この展開は $\mathcal{C}_s^k, \mathcal{C}_s^{k*}$ に対しては $k=-1$ のときも consistent である。) このとき、作用に付け加わる部分 $S_{\mathrm{aux}}(33)$ は

$$S_{\mathrm{aux}} = \sum_{\substack{k=0 \\ k:\mathrm{even}}}^\infty \sum_{s=k}^\infty \sum_\alpha \bar{\pi}_{s,\alpha}^k \bar{\mathcal{C}}_s^{k*,\alpha} + \sum_{\substack{k=1 \\ k:\mathrm{odd}}}^\infty \sum_{s=k}^\infty \sum_\alpha \mathcal{C}_{s,\alpha}^{k*} \pi_s^{k,\alpha} \tag{40}$$

となる。(作り方から当然であるがこの部分には $k=-1$ の場は入ってないことに注意しておく。)

以上のセットアップで、ここでは gauge fixing fermion Υ を $\bar{\pi}_s^k, \pi_s^k$ を含まないようにして、特に

$$\Upsilon = \sum_{\substack{k=0 \\ k:\mathrm{even}}}^\infty \sum_{s=k}^\infty \langle {}^*\bar{\mathcal{C}}_s^k, \mathcal{P}_{1+k-s} \mathcal{C}_{s-1}^{k-1} \rangle + \sum_{\substack{k=1 \\ k:\mathrm{odd}}}^\infty \sum_{s=k}^\infty \langle {}^*\mathcal{C}_s^k, \tilde{\mathcal{P}}_{1+k-s} \bar{\mathcal{C}}_{s-1}^{k-1} \rangle \tag{41}$$

の形をとることにする。(BV 形式の δ-function gauge fixing に対応。) ただし $\mathcal{P}_n, \tilde{\mathcal{P}}_n$ は worldsheet ghost 数 n の基底に作用する operator で $g(\mathcal{P}_n) = g(\tilde{\mathcal{P}}_n) = 0$ のものであり

$$\mathrm{bpz}(\mathcal{P}_n) = \tilde{\mathcal{P}}_{3-n}, \quad \mathcal{P}_n + \tilde{\mathcal{P}}_n = 1, \quad (\mathcal{P}_n)^2 = \mathcal{P}_n, \quad (\tilde{\mathcal{P}}_n)^2 = \tilde{\mathcal{P}}_n \tag{42}$$

を満たす projection であると仮定する。さらに各 worldsheet ghost 数の基底を $\mathcal{P}_n$ の固有状態にとったとする。つまり

$$\{|\alpha\rangle_g\} = \{|\beta\rangle_g, |\gamma\rangle_g\}, \quad \{|\tilde{\alpha}\rangle_{3-g}\} = \{|\tilde{\beta}\rangle_{3-g}, |\tilde{\gamma}\rangle_{3-g}\}, \quad (g \le 1), \tag{43}$$

$$\langle |\tilde{\beta}\rangle_{3-g}, |\beta'\rangle_g \rangle = \delta_{\beta,\beta'}, \quad \langle |\tilde{\gamma}\rangle_{3-g}, |\gamma'\rangle_g \rangle = \delta_{\gamma,\gamma'}, \tag{44}$$

$$\mathcal{P}_g |\beta\rangle_g = |\beta\rangle_g, \quad \tilde{\mathcal{P}}_g |\gamma\rangle_g = |\gamma\rangle_g, \quad \tilde{\mathcal{P}}_{3-g} |\tilde{\beta}\rangle_{3-g} = |\tilde{\beta}\rangle_{3-g}, \quad \mathcal{P}_{3-g} |\tilde{\gamma}\rangle_{3-g} = |\tilde{\gamma}\rangle_{3-g}. \tag{45}$$

このとき

$$\mathcal{P}_g = \sum_\beta |\beta\rangle_{g\,3-g}\langle\tilde{\beta}|, \quad \tilde{\mathcal{P}}_g = \sum_\gamma |\gamma\rangle_{g\,3-g}\langle\tilde{\gamma}|, \tag{46}$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_{3-g} = \sum_\beta |\tilde{\beta}\rangle_{3-g\,g}\langle\beta|, \quad \mathcal{P}_{3-g} = \sum_\gamma |\tilde{\gamma}\rangle_{3-g\,g}\langle\gamma| \tag{47}$$

と表すことができ ${}^*(\mathcal{P}_n|\alpha\rangle_n) = \tilde{\mathcal{P}}_{3-n}{}^*(|\alpha\rangle_n)$ となることに注意しておく。ゲージ固定条件 (29) より antifield は

$$\bar{\mathcal{C}}_s^{k*} = \mathcal{P}_{1+k-s} \mathcal{C}_{s-1}^{k-1} + (-1)^{s+1} \tilde{\mathcal{P}}_{1+k-s} \mathcal{C}_{s+1}^{k+1}, \quad (k = 0, 2, 4, \cdots; s \ge k) \tag{48}$$

$$\mathcal{C}_s^{k*} = (-1)^s \tilde{\mathcal{P}}_{1+k-s} \bar{\mathcal{C}}_{s-1}^{k-1} + \mathcal{P}_{1+k-s} \bar{\mathcal{C}}_{s+1}^{k+1}, \quad (k = 1, 3, 5, \cdots; s \ge k) \tag{49}$$

$$\mathcal{C}_s^* = \mathcal{P}_{-s} \bar{\mathcal{C}}_{s+1}^0, \quad (s \ge -1) \tag{50}$$

と表せる。今考えている total action である (16) と (33) の和：$S+S_{\rm aux}$ にゲージ固定条件 (29) を代入し、$\bar{\pi}_s^k, \pi_s^k$ を integrate out すると

$$\mathcal{P}_{1+k-s}\mathcal{C}_{s-1}^{k-1} + (-1)^{s+1}\tilde{\mathcal{P}}_{1+k-s}\mathcal{C}_{s+1}^{k+1} = 0\,, \qquad (k=0,2,4,\cdots; s\geq k) \tag{51}$$

$$(-1)^s\tilde{\mathcal{P}}_{1+k-s}\bar{\mathcal{C}}_{s-1}^{k-1} + \mathcal{P}_{1+k-s}\bar{\mathcal{C}}_{s+1}^{k+1} = 0\,, \qquad (k=1,3,5,\cdots; s\geq k) \tag{52}$$

が課されるが projection の性質から

$$\mathcal{C}_s^k = 0\,, \qquad (k=1,3,5,\cdots; s\geq k), \tag{53}$$

$$\bar{\mathcal{C}}_s^k = 0\,, \qquad (k=2,4,6\cdots; s\geq k), \tag{54}$$

$$\mathcal{C}_s^* = \bar{\mathcal{C}}_{s+1}^0, \quad \mathcal{P}_{-s}\mathcal{C}_s = 0, \quad \tilde{\mathcal{P}}_{-s}\bar{\mathcal{C}}_{s+1}^0 = 0, \quad (s\geq -1)\,, \tag{55}$$

となる。結局、ゲージ固定した作用は $\bar{\pi}_s^k, \pi_s^k$ を 消去後、$S_{\rm aux}$ は消えるので (16) の部分だけになり

$$S_{\rm fix} = -\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\langle\Psi_{\rm f}, Q\Psi_{\rm f}\rangle + \frac{1}{3}\langle\Psi_{\rm f}, \Psi_{\rm f}*\Psi_{\rm f}\rangle\right), \tag{56}$$

$$\Psi_{\rm f} = \sum_{n=-1}^{\infty}\mathcal{C}_n + \sum_{n=-1}^{\infty}{}^*\bar{\mathcal{C}}_{n+1}^0, \qquad \mathcal{P}_{-n}\mathcal{C}_n = 0, \ \ \mathcal{P}_{3+n}{}^*\bar{\mathcal{C}}_{n+1}^0 = 0, \ \ (n\geq -1) \tag{57}$$

となる。つまり、これで弦場について線形なゲージ固定条件を再現できたことになる。

具体的に知られているゲージ固定条件の場合を以下で見ていこう。最もよく使われている Siegel ゲージ ($b_0\Psi=0$) の場合は gauge fixing fermion Υ (41) を指定する projection を

$$\mathcal{P}_n = c_0 b_0, \quad n\in\mathbb{Z} \tag{58}$$

ととった場合である。

より一般に linear b-gauge [6] つまり

$$(\sum_m v_m^{(2k+1)}b_m)|\Phi\rangle_{2k+1} = 0, \qquad {\rm bpz}(\sum_m v_m^{(2k+1)}b_m)|\Phi\rangle_{2-2k} = 0 \tag{59}$$

の場合 (ここで $|\Phi\rangle_n$ は worldsheet ghost 数 n の部分である。)、$v_0\neq 0$ ならば

$$\mathcal{P}_{2k+1} = \frac{1}{v_0}c_0(\sum_m v_m^{(2k+1)}b_m), \qquad \mathcal{P}_{2-2k} = \frac{1}{v_0}c_0\,{\rm bpz}(\sum_m v_m^{(2k+1)}b_m) \tag{60}$$

ととった場合と等価になる。このとき $(\sum_m v_m^{(2k+1)}b_m)\mathcal{P}_{2k} = (\sum_m v_m^{(2k+1)}b_m)$, ${\rm bpz}(\mathcal{P}_{2k+1}) = 1-\mathcal{P}_{2-2k}$ などに注意しておく。

もっと複雑な式で与えられる Asano-Kato の a-ゲージの場合を考えよう。$a=\infty$ の場合も含めて（ただし摂動的に ill defined な $a=1$ を除いて）ゲージ固定条件は [4] の $S_{\rm GF}$ の補助場 $\mathcal{B}_{-n+4}$ を integrate out すると得られ

$$ {\rm bpz}(\mathcal{O}_a^{\langle -n+4\rangle})|\Phi\rangle_n = 0\,, \tag{61}$$

$$ {\rm bpz}(\mathcal{O}_a^{\langle n+4\rangle}) = \frac{1}{1-a}(b_0 + ab_0c_0W_{n+2}M^{n+1}\tilde{Q}), \qquad (n\geq -1)\,, \tag{62}$$

$$ {\rm bpz}(\mathcal{O}_a^{\langle 1-n\rangle}) = b_0(1-P_{n+1}) + \frac{1}{1-a}(b_0P_{n+1} + ab_0c_0\tilde{Q}M^{n+1}W_{n+2}), \qquad (n\geq -1) \tag{63}$$

となる。($M, \tilde{Q}, W_n, P_n$ については §A 参照。) このとき [4] にある propagator を含む関係式を使うと、projection として

$$\mathcal{P}_{-n} = \frac{Q}{L_0}{\rm bpz}(\mathcal{O}_a^{\langle n+4\rangle}), \quad n\in\mathbb{Z} \tag{64}$$

と選ぶことができる。ここで、L_0 が分母に現れるのが微妙かもしれないのでとりあえず $L_0 \neq 0$ の場合に限ると $b_0\mathcal{P}_{-n} = \mathrm{bpz}(\mathcal{O}_a^{\langle n+4\rangle})$ より、(57) は a-ゲージ条件と等価であり、BV 形式により得られたゲージ固定作用 (56) は [4] の S_{GF} の補助場 $\mathcal{B}_{-n+4}$ を integrate out した作用に他ならない。

なお、(64) を Siegel ゲージの場合の projection c_0b_0 (58) とは次のように関係づけることができる。まず、

$$e^{\frac{\tilde{Q}}{L_0}b_0}c_0e^{-\frac{\tilde{Q}}{L_0}b_0} = \frac{Q}{L_0} \tag{65}$$

とかけることに注意する。このとき、

$$\mathcal{P}_{-n} \;=\; \frac{Q}{L_0}\mathrm{bpz}(\mathcal{O}_a^{\langle n+4\rangle}) = e^{\frac{\tilde{Q}}{L_0}b_0}\mathcal{P}'_{-n}e^{-\frac{\tilde{Q}}{L_0}b_0} \tag{66}$$

とすると

$$\mathcal{P}'_{-n} = \begin{cases} c_0b_0 + \frac{a}{1-a}c_0W'_{n+2}M^{n+1}\tilde{Q} & (n \geq -1) \\ c_0b_0 + \frac{a}{1-a}c_0\tilde{Q}M^{-n-2}W_{-n-1} & (n \leq -2) \end{cases} = e^{\varphi_{-n}}c_0b_0e^{-\varphi_{-n}}, \tag{67}$$

$$\varphi_{-n} = \begin{cases} -\frac{a}{1-a}c_0W'_{n+2}M^{n+1}\tilde{Q} & (n \geq -1) \\ -\frac{a}{1-a}c_0\tilde{Q}M^{-n-2}W_{-n-1} & (n \leq -2) \end{cases}, \tag{68}$$

$$\mathcal{P}'_{-n} + \mathrm{bpz}(\mathcal{P}'_{n+3}) = 1 \tag{69}$$

が（worldsheet ghost 数 $-n$ の状態の上で）成り立つ。なお、

$$\varphi_{-n} \;=\; -\mathrm{bpz}(\varphi_{n+3}) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{70}$$

に注意しておく。まとめると

$$\mathcal{P}_{-n} \;=\; e^{\frac{\tilde{Q}}{L_0}b_0}e^{\varphi_{-n}}c_0b_0\,e^{-\varphi_{-n}}e^{-\frac{\tilde{Q}}{L_0}b_0} \tag{71}$$

のように similarity 変換で Siegel ゲージの場合とつながっており、

$$\mathcal{P}_{-n} \;=\; \mathrm{bpz}(e^{-\varphi_{n+3}}e^{-\frac{\tilde{Q}}{L_0}b_0})c_0b_0\,e^{-\varphi_{-n}}e^{-\frac{\tilde{Q}}{L_0}b_0} \tag{72}$$

とも書き直せる。また、

$$e^{-\varphi_{-n}}e^{-\frac{\tilde{Q}}{L_0}b_0}\mathcal{P}_{-n} = c_0b_0\,e^{-\varphi_{-n}}e^{-\frac{\tilde{Q}}{L_0}b_0} = c_0\mathrm{bpz}(\mathcal{O}_a^{\langle n+4\rangle}) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{73}$$

という関係もある。

以上の BV 形式による記述で Υ (41) でゲージ固定した場合 (antifield を (48),(49),(50) で消去した場合で ($\bar{\pi}_s^k, \pi_s^k$ を消去する前)) の BRST 変換 $\delta_{\mathrm{B}\Upsilon}$ を一般に

$$\delta_{\mathrm{B}\Upsilon}X = (X, S+S_{\mathrm{aux}})_{\mathrm{a.b.}}|_{\Phi^*_A=\frac{\partial\Upsilon}{\partial\Phi^A}} \tag{74}$$

とした場合、[5] ゲージ固定作用はこの変換のもとで不変であり：

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{B}\Upsilon}S_\Upsilon \;&=\; (S_\Upsilon, S+S_{\mathrm{aux}})_{\mathrm{a.b.}}|_{\Phi^*_A=\frac{\partial\Upsilon}{\partial\Phi^A}} = 0, \\ S_\Upsilon \;&\equiv\; (S+S_{\mathrm{aux}})|_{\Phi^*_A=\frac{\partial\Upsilon}{\partial\Phi^A}} \end{aligned} \tag{75}$$

[5] ここでの anti-bracket $(\ ,\ )_{\mathrm{a.b.}}$ は Φ^A, Φ^*_A として trivial pair も全部含めて定義した (13) である。

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\langle\Psi_\Upsilon, Q\Psi_\Upsilon\rangle + \frac{1}{3}\langle\Psi_\Upsilon, \Psi_\Upsilon * \Psi_\Upsilon\rangle\right) \\
&\quad + \sum_{\substack{k=0\\ k:\text{even}}}^{\infty}\sum_{s=k}^{\infty}\langle{}^*\bar{\pi}_s^k, (\mathcal{P}_{1+k-s}\mathcal{C}_{s-1}^{k-1} + (-1)^{s+1}\tilde{\mathcal{P}}_{1+k-s}\mathcal{C}_{s+1}^{k+1})\rangle \\
&\quad + \sum_{\substack{k=1\\ k:\text{odd}}}^{\infty}\sum_{s=k}^{\infty}\langle{}^*\pi_s^k, ((-1)^s\tilde{\mathcal{P}}_{1+k-s}\bar{\mathcal{C}}_{s-1}^{k-1} + \mathcal{P}_{1+k-s}\bar{\mathcal{C}}_{s+1}^{k+1})\rangle, \qquad (76)
\end{aligned}
$$

$$
\Psi_\Upsilon \equiv \sum_{n\geq -1}\mathcal{C}_n^{-1} + \sum_{n\geq -1}\tilde{\mathcal{P}}_{n+3}{}^*\bar{\mathcal{C}}_{n+1}^0, \qquad (77)
$$

場に対しては次のように変換する：

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}\mathcal{C}_n^{-1,\alpha} &= -\frac{1}{g^2}\langle|\tilde{\alpha}\rangle_{n+3}, (Q\Psi_\Upsilon + \Psi_\Upsilon * \Psi_\Upsilon)\rangle, \quad (n\geq -1), && (78)\\
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}\mathcal{C}_n^{k,\alpha} &= \pi_n^{k,\alpha}, \quad (k=1,3,5,\cdots; k\leq n), && (79)\\
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}\pi_n^{k,\alpha} &= 0, \quad (k=1,3,5,\cdots; k\leq n), && (80)\\
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}\bar{\mathcal{C}}_{n,\alpha}^{k} &= (-1)^n\,\bar{\pi}_{n,\alpha}^k, \quad (k=0,2,4,\cdots; k\leq n), && (81)\\
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}\bar{\pi}_{n,\alpha}^{k} &= 0, \quad (k=0,2,4,\cdots; k\leq n). && (82)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}\Psi_\Upsilon = -\frac{1}{g^2}(Q\Psi_\Upsilon + \Psi_\Upsilon * \Psi_\Upsilon) - \sum_{n\geq -1,\alpha}|\tilde{\alpha}\rangle_{n+3}\frac{\partial_r S_\Upsilon}{\partial\mathcal{C}_n^{-1,\alpha}} \qquad (83)
$$

となることに注意してこの BRST 変換を 2 回やると

$$
\begin{aligned}
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}^2\mathcal{C}_n^{-1,\alpha} &= \frac{1}{g^2}\sum_{m\geq -1,\alpha'}\langle|\tilde{\alpha}\rangle_{n+3}, (\Psi_\Upsilon * |\tilde{\alpha}'\rangle_{m+3} + (-1)^m|\tilde{\alpha}'\rangle_{m+3} * \Psi_\Upsilon)\rangle\frac{\partial_r S_\Upsilon}{\partial\mathcal{C}_m^{-1,\alpha'}}, && (84)\\
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}^2\mathcal{C}_n^{k,\alpha} &= 0, \quad (k=1,3,5,\cdots; k\leq n), && (85)\\
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}^2\pi_n^{k,\alpha} &= 0, \quad (k=1,3,5,\cdots; k\leq n), && (86)\\
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}^2\bar{\mathcal{C}}_{n,\alpha}^{k} &= 0, \quad (k=0,2,4,\cdots; k\leq n), && (87)\\
\delta_{\mathrm{B}_\Upsilon}^2\bar{\pi}_{n,\alpha}^{k} &= 0, \quad (k=0,2,4,\cdots; k\leq n). && (88)
\end{aligned}
$$

つまり、up to gauge fixed action の運動方程式:

$$
\frac{\partial_r S_\Upsilon}{\partial\mathcal{C}_n^{-1,\alpha}} = \frac{1}{g^2}\langle|\alpha\rangle_{-n}, (Q\Psi_\Upsilon + \Psi_\Upsilon * \Psi_\Upsilon)\rangle + \langle|\alpha\rangle_{-n}, \tilde{\mathcal{P}}_{n+3}{}^*\bar{\pi}_{n+1}^0\rangle, \quad (n\geq -1) \qquad (89)
$$

で nilpotent (つまり onshell nilpotent) である。

ここで比較のため、Asano-Kato [3] のゲージ固定作用：

$$
S_{\mathrm{GF}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle\Phi_n, Q\Phi_{2-n}\rangle - \frac{g}{3}\sum_{l+n+m=3}\langle\Phi_l, \Phi_m * \Phi_n\rangle + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle(\mathcal{O}\mathcal{B})_{3-n}, \Phi_n\rangle \qquad (90)
$$

を考えよう。これは

$$
\eta\delta_B\Phi_n = \eta(\mathcal{O}\mathcal{B})_n \quad (n>1), \qquad (91)
$$

$$\eta\delta_B\Phi_n = \eta(Q\Phi_{n-1} + g\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Phi_{n-k} * \Phi_k), \quad (n \le 1), \tag{92}$$

$$\eta\delta_B\mathcal{B}_n = 0 \tag{93}$$

という BRST 変換のもとで $\langle(\mathcal{OB})_n, (\mathcal{OB})_{3-n}\rangle = 0$ なら不変である。この BRST 変換を 2 回やると

$$\delta_B^2\Phi_n = 0 \quad (n > 1), \tag{94}$$

$$\delta_B^2\Phi_n = g\sum_{k>1}\left(\frac{\partial S_{\mathrm{GF}}}{\partial\Phi_{3-k}} * \Phi_{n-k} - \Phi_{n-k} * \frac{\partial S_{\mathrm{GF}}}{\partial\Phi_{3-k}}\right), \quad (n \le 1), \tag{95}$$

$$\frac{\partial S_{\mathrm{GF}}}{\partial\Phi_{3-k}} \equiv -Q\Phi_{k-1} - g\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Phi_{k-m} * \Phi_m + (\mathcal{OB})_k, \tag{96}$$

$$\delta_B^2\mathcal{B}_n = 0 \tag{97}$$

となり、やはり onshell nilpotent である。

2.3 gauge fixing fermion の consistency について

ここでは前節で与えた gauge fixing fermion Υ (41) によるゲージ固定に関して、BV 形式における rank の条件を考えよう。

antifield は (48),(49),(50) により消去されるが、今 S_{aux} (33) の形からゲージ条件としては (51),(52) が課されることになり、結局 (53),(54),(55) に帰着する。つまり、(53),(54) の部分は完全に消去される。残る部分 (55) に関して考えるために、元々のゲージ理論 $S_0[A](1)$ の（運動方程式 $QA + A * A = 0$ のある解 A_0 のまわりの）ゲージ変換の独立な自由度を考えよう。$\mathcal{C}_s^{\alpha_s}$ $(s = -1, 0, 1, 2, \cdots)$ の場の数つまりそれぞれの α_s の数を（形式的に）m_s と書く。（今 SFT なので一般には通常の時空の場の無限個分あるが。）§2.1 にあるようにそれぞれゲージ変換による不定性があるので、$\mathcal{C}_s^{\alpha_s}$ の独立な場の数 n_s は m_s より少なく、

$$n_s = \sum_{t=s}^{\infty}(-1)^{t-s}m_t \tag{98}$$

で与えられる。この数とゲージ条件のうち (55) の $\mathcal{P}_{-s}\mathcal{C}_s = 0$ の consistency から

$$\mathrm{rank}(\mathcal{P}_{-s}) = m_s - n_s = n_{s+1}, \tag{99}$$

$$\mathrm{rank}(\mathcal{P}_{-s}Q_{\mathrm{A}_0}\tilde{P}_{-s-1}) = n_{s+1}, \quad (s = -1, 0, 1, 2, \cdots), \tag{100}$$

$$Q_{A_0}\Phi \equiv Q\Phi + A_0 * \Phi - (-1)^{s(\Phi)}\Phi * A_0 \tag{101}$$

という条件になる。2 番目の rank の条件はゲージ変換で unique にゲージ条件をみたすようにできる、ということからくる。つまり、これは

$$\delta\mathcal{C}_s = Q_{A_0}\mathcal{C}_{s+1}, \quad (s = -1, 0, 1, 2, \cdots) \tag{102}$$

というそれぞれの場の「ゲージ変換」の自由度を固定する条件、ということになり (少なくとも $L_0 \neq 0$ に限れば) a-ゲージの場合の $\mathcal{P}_{-n}$ で $A_0 = 0$ のまわりでは consistency が満たされることは [3] で示されているゲージ条件の consistency よりわかる。このとき (55) より $\tilde{\mathcal{P}}_{-s}\bar{\mathcal{C}}_{s+1}^0 = 0$ から $\bar{\mathcal{C}}_{s+1}^0$ の独立な場の数は $m_s - \mathrm{rank}(\tilde{\mathcal{P}}_{-s}) = \mathrm{rank}(\mathcal{P}_{-s}) = n_{s+1}$ 個になる。

このとき古典解 A_0 まわりの作用で (53),(54),(55) の条件を課したものの運動項は

$$-\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\langle\mathcal{C}_{-1}, (\mathcal{P}_2Q_{A_0}\tilde{\mathcal{P}}_1)\mathcal{C}_{-1}\rangle + \sum_{s\ge-1}\langle{}^*\bar{\mathcal{C}}_{s+1}^0, (\mathcal{P}_{-s}Q_{A_0}\tilde{\mathcal{P}}_{-s-1})\mathcal{C}_{1+s}\rangle\right) \tag{103}$$

という形をしていて、残った独立な自由度が propagate する。

3 別の convention について

前節までのようなゲージ条件、つまり projection $\mathcal{P}_n, \mathrm{bpz}(\mathcal{P}_n) = 1 - \mathcal{P}_{3-n} \equiv \tilde{\mathcal{P}}_{3-n}$ で定まる線形ゲージ条件

$$\mathcal{P}_n|\Phi\rangle_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{104}$$

が consistent なゲージ条件を与えているとしよう。このとき trivial pair を導入する前の proper solution $S[\Phi^A, \Phi^*_A]$ (16) における弦場 Ψ (17) の成分場を (43) の基底を用いて次のように書き換えてみる：

$$\begin{aligned}\Psi &= \sum_{m\geq -1}\left(\sum_\gamma (\mathcal{C}'^\gamma_m|\gamma\rangle_{-m} + (-1)^m \mathcal{C}'^*_{m,\gamma}|\tilde{\gamma}\rangle_{3+m})\right)\\ &\quad + \sum_{m\geq -1}\left(\sum_\beta (\mathcal{C}'^\beta_m|\tilde{\beta}\rangle_{3+m} + (-1)^{m+1}\mathcal{C}'^*_{m,\beta}|\beta\rangle_{-m})\right).\end{aligned} \tag{105}$$

つまり、(17) の成分場と比べると、

$$\mathcal{C}'^\gamma_m = \sum_\alpha {}_{3+m}\langle\tilde{\gamma}|\alpha\rangle_{-m}\mathcal{C}^\alpha_m, \tag{106}$$

$$\mathcal{C}'^*_{m,\gamma} = \sum_\alpha {}_{-m}\langle\gamma|\tilde{\alpha}\rangle_{3+m}\mathcal{C}^*_{m,\alpha}, \tag{107}$$

$$\mathcal{C}'^\beta_m = (-1)^m\sum_\alpha {}_{-m}\langle\beta|\tilde{\alpha}\rangle_{3+m}\mathcal{C}^*_{m,\alpha}, \tag{108}$$

$$\mathcal{C}'^*_{m,\beta} = (-1)^{m+1}\sum_\alpha {}_{3+m}\langle\tilde{\beta}|\alpha\rangle_{-m}\mathcal{C}^\alpha_m, \tag{109}$$

という線形な変換をしていることになる。前節で定義した時空のゴースト数 gh と Grassmann 性 ϵ の関係をみると

$$\mathrm{gh}(\mathcal{C}'^\gamma_m) + \mathrm{gh}(\mathcal{C}'^*_{m,\gamma}) = -1, \quad \mathrm{gh}(\mathcal{C}'^\beta_m) + \mathrm{gh}(\mathcal{C}'^*_{m,\beta}) = -1, \tag{110}$$

$$\epsilon(\mathcal{C}'^\gamma_m) + \epsilon(\mathcal{C}'^*_{m,\gamma}) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 2), \quad \epsilon(\mathcal{C}'^\beta_m) + \epsilon(\mathcal{C}'^*_{m,\beta}) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 2) \tag{111}$$

という形をしているので、$(\mathcal{C}'^\gamma_m, \mathcal{C}'^\beta_m)$ を field とみなし、$(\mathcal{C}'^*_{m,\gamma}, \mathcal{C}'^*_{m,\beta})$ をそれぞれに対応する antifield とみなすことにしよう。このとき (108),(109) においては元の場と比べて field-antifield が逆になっていることに注意しておく。するとこの線形変換 (106),(107),(108),(109) は anti-bracket を保つ正準変換になっている：

$$\begin{aligned}(X,Y)_{\mathrm{a.b.}} &\equiv \sum_{n\geq -1,\alpha}\left(\frac{\partial_r X}{\partial \mathcal{C}^\alpha_n}\frac{\partial_l Y}{\partial \mathcal{C}^*_{n,\alpha}} - \frac{\partial_r X}{\partial \mathcal{C}^*_{n,\alpha}}\frac{\partial_l Y}{\partial \mathcal{C}^\alpha_n}\right)\\ &= \sum_{n\geq -1,\gamma}\left(\frac{\partial_r X}{\partial \mathcal{C}'^\gamma_n}\frac{\partial_l Y}{\partial \mathcal{C}'^*_{n,\gamma}} - \frac{\partial_r X}{\partial \mathcal{C}'^*_{n,\gamma}}\frac{\partial_l Y}{\partial \mathcal{C}'^\gamma_n}\right) + \sum_{n\geq -1,\beta}\left(\frac{\partial_r X}{\partial \mathcal{C}'^\beta_n}\frac{\partial_l Y}{\partial \mathcal{C}'^*_{n,\beta}} - \frac{\partial_r X}{\partial \mathcal{C}'^*_{n,\beta}}\frac{\partial_l Y}{\partial \mathcal{C}'^\beta_n}\right)\\ &\equiv (X,Y)'_{\mathrm{a.b.}}.\end{aligned} \tag{112}$$

プライム ($'$) のついた field-antifield を基準としても、ゲージ固定する前の BRST 変換を $\delta_{\mathrm{B}}X = (X,S)_{\mathrm{a.b.}}$ で定義する限り、作用 S (16) は master 方程式を満たし、Ψ は同じ変換になる：

$$(S,S)_{\mathrm{a.b.}} = \frac{1}{g^4}\langle Q\Psi + \Psi * \Psi, Q\Psi + \Psi * \Psi\rangle = 0, \tag{113}$$

$$\delta_{\rm B}\Psi \;=\; -\frac{1}{g^2}(Q\Psi+\Psi*\Psi). \tag{114}$$

つまり、作用は BRST 不変で $\delta_{\rm B}$ は offshell nilpotent になる：

$$\delta_{\rm B}S=0, \qquad \delta_{\rm B}^2\Psi=0. \tag{115}$$

さて、このとき (弦場の worldsheet ghost 数の制限を外した) 作用 S (16) に対し、次のようなゲージ変換を考えよう：

$$\delta_\Lambda\Phi^A \;=\; \sum_B\frac{\partial_l\partial_r S}{\partial\Phi^*_A\partial\Phi^B}\Lambda^B+\sum_B\frac{\partial_l\partial_r S}{\partial\Phi^*_A\partial\Phi^*_B}\Lambda^*_B, \tag{116}$$

$$\delta_\Lambda\Phi^*_A \;=\; -\sum_B\frac{\partial_l\partial_r S}{\partial\Phi_A\partial\Phi^B}\Lambda^B-\sum_B\frac{\partial_l\partial_r S}{\partial\Phi_A\partial\Phi^*_B}\Lambda^*_B. \tag{117}$$

($\Phi^A=(\mathcal{C}'^{\gamma}_m,\mathcal{C}'^{\beta}_m)$, $\Phi^*_A=(\mathcal{C}'^*_{m,\gamma},\mathcal{C}'^*_{m,\beta})$) すると作用 S (16) は master 方程式よりこのゲージ変換のもとで不変である：

$$\delta_\Lambda S \;=\; -\frac{1}{2}\sum_B(S,S)_{\rm a.b.}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi^B}\Lambda^B-\frac{1}{2}\sum_B(S,S)_{\rm a.b.}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi^*_B}\Lambda^*_B=0. \tag{118}$$

このとき Ψ のゲージ変換の式は

$$\delta_\Lambda\Psi=\sum_A(\delta_{\rm B}\Psi)\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi^A}\Lambda^A+\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi^*_A}\Lambda^*_A\right)=Q\Lambda+\Psi*\Lambda-\Lambda*\Psi \tag{119}$$

と書ける。ただし、最後の等号で Φ_A と Λ_A, Φ^*_A と Λ^*_A はそれぞれ Grassmann 性が逆であるとし、

$$\Lambda \;=\; -\frac{1}{g^2}\sum_A\Psi\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi^A}\Lambda^A+\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\Phi^*_A}\Lambda^*_A\right) \tag{120}$$

とおいた。

次にこの convention におけるゲージ固定を考える。gauge fixing fermion Υ' を用いて antifield $(\mathcal{C}'^*_{m,\gamma},\mathcal{C}'^*_{m,\beta})$ を消去しよう。ここでは $\Upsilon'\equiv 0$ とする。つまり、ゲージ固定条件は単に antifield のほうをゼロにとる：$(\mathcal{C}'^*_{m,\gamma}=0,\mathcal{C}'^*_{m,\beta}=0)$. すると、ゲージ固定作用 $S_{\Upsilon'}$ は

$$S_{\Upsilon'} \;=\; -\frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{2}\langle\Psi_{\Upsilon'},Q\Psi_{\Upsilon'}\rangle+\frac{1}{3}\langle\Psi_{\Upsilon'},\Psi_{\Upsilon'}*\Psi_{\Upsilon'}\rangle\right), \tag{121}$$

$$\Psi_{\Upsilon'} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{\mathcal{P}}_n\Psi=\sum_{m\geq-1}\left(\sum_\gamma\mathcal{C}'^{\gamma}_m|\gamma\rangle_{-m}+\sum_\beta\mathcal{C}'^{\beta}_m|\tilde{\beta}\rangle_{3+m}\right). \tag{122}$$

ここで projection $\tilde{\mathcal{P}}_n$ は (46), (47) の意味で書いている。(項別に各 worldsheet ghost 数の部分に作用する。) $\Psi_{\Upsilon'}$ はゲージ固定条件 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{P}_n\Psi_{\Upsilon'}=0$ を満たす。これは、(56) の $S_{\rm fix}$ に他ならない。[6] ゲージ固定したあとでの BRST 変換 $\delta_{{\rm B}_{\Upsilon'}}$ は

$$\delta_{{\rm B}_{\Upsilon'}}\Psi_{\Upsilon'}=(\Psi_{\Upsilon'},S)_{\rm a.b.}|_{\Phi'^*_A=0}=-\frac{1}{g^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{\mathcal{P}}_n(Q\Psi_{\Upsilon'}+\Psi_{\Upsilon'}*\Psi_{\Upsilon'}). \tag{123}$$

[6] この $S_{\Upsilon'}$ は master 方程式の解 S において antifield を全部ゼロにして得られたものなので、表面上は (15) と違う境界条件を満たすことになるが、こうして得られた作用 $S_{\Upsilon'}$ は前節までのやり方で最終的に得た $S_{\rm fix}$ と同じである。この節でのプライムつきの field-antifield は BV 形式において gauge fixed basis と呼ばれるものである。

特に、Siegel ゲージの場合 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{\mathcal{P}}_n = b_0c_0$ であり、この式は Hata-Shinohara [5] に書いてある BRST 変換の式と等価である。この変換の元で、ゲージ固定した作用は不変である：

$$\delta_{\mathrm{B}_{\Upsilon'}} S_{\Upsilon'} = (S_{\Upsilon'}, S)_{\mathrm{a.b.}}|_{\Phi'^*_A=0} = \frac{1}{2g^4}\langle Q\Psi_{\Upsilon'} + \Psi_{\Upsilon'} * \Psi_{\Upsilon'}, Q\Psi_{\Upsilon'} + \Psi_{\Upsilon'} * \Psi_{\Upsilon'}\rangle = 0. \quad (124)$$

(bpz $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{\mathcal{P}}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{P}_n = 1 - \sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{\mathcal{P}}_n$ に注意する。) また、場に対し 2 回変換すると

$$\delta^2_{\mathrm{B}_{\Upsilon'}}\Psi_{\Upsilon'} = -\frac{1}{g^2}\sum_n \tilde{\mathcal{P}}_n\left(Q\frac{\partial S_{\Upsilon'}}{\partial\Psi_{\Upsilon'}} + \Psi_{\Upsilon'} * \frac{\partial S_{\Upsilon'}}{\partial\Psi_{\Upsilon'}} - \frac{\partial S_{\Upsilon'}}{\partial\Psi_{\Upsilon'}} * \Psi_{\Upsilon'}\right), \quad (125)$$

$$\frac{\partial S_{\Upsilon'}}{\partial\Psi_{\Upsilon'}} \equiv -\frac{1}{g^2}\sum_n \mathcal{P}_n(Q\Psi_{\Upsilon'} + \Psi_{\Upsilon'} * \Psi_{\Upsilon'}) \quad (126)$$

となり onshell nilpotent である。

4 超弦の場の理論への拡張

以下では cubic な超弦の場の理論の場合に BV 形式を適用することを考える。ここで扱う理論は modified cubic superstring field theory (SSFT) である。スター積と「積分」の定義を少し変えると、見た目は bosonic のときとほとんど同じものになる。弦場を NS sector の弦場 A と R sector の弦場 Ψ をまとめて $\mathcal{A} = (A, \Psi)$ と書き、それらのスター積 ($\star$ 積) を

$$\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2 = (A_1 * A_2 + \bar{X}\Psi_1 * \Psi_2, A_1 * \Psi_2 + \Psi_1 * A_2) \quad (127)$$

と定義する。$\bar{X} \equiv X(-i)$ は $z = -i$ においた picture changing operator X であり

$$X(z) = \{Q, \xi(z)\} \quad (128)$$

で与えられる。これは Q と可換で picture 数 1 をもつ。（Q は NSR 定式化の BRST operator である。）$*$ 積は bosonic の場合と全く同様に、（つまり何も挿入しない LPP vertex で）定義されるものである：

$$|\alpha\rangle * |\beta\rangle = \sum_\gamma |\gamma\rangle\langle|\tilde{\gamma}\rangle, |\alpha\rangle * |\beta\rangle\rangle = \sum_\gamma |\gamma\rangle\langle f_{(1)}[\mathcal{O}_{\tilde{\gamma}}] f_{(2)}[\mathcal{O}_\alpha] f_{(3)}[\mathcal{O}_\beta]\rangle, \quad (129)$$

$$f_{(r)}(z) = h^{-1}(e^{(1-r)\frac{2\pi}{3}i}h(z)^{\frac{2}{3}}), \quad h(z) = \frac{1+iz}{1-iz}. \quad (130)$$

ここで $\{|\gamma\rangle\}$ は完全系であり、$|\tilde{\gamma}\rangle$ はその BPZ 内積に関する dual：$\langle|\tilde{\gamma}\rangle, |\gamma'\rangle\rangle = \delta_{\gamma,\gamma'}$ であり、conformal vacuum $|0\rangle$ に対して $|\alpha\rangle = \mathcal{O}_\alpha|0\rangle$ のように書いている。また、作用を書き下すため、$\mathcal{A} = (A, \Psi)$ の「積分」$\oint$ を以下のように定義しよう:

$$\oint \mathcal{A} = \langle\mathcal{I}|Y_{-2}|A\rangle. \quad (131)$$

ここで $\langle\mathcal{I}|$ は identity state であり、$Y_{-2} \equiv Y(i)Y(-i)$ は double step inverse picture changing operator である。[7] これは

$$Y_{-2}\bar{X} = \bar{X}Y_{-2} = Y \equiv Y(i) \quad (132)$$

という性質をもつ、Q と可換で picture 数 -2 のものとする。また $Y(z)$ は inverse picture changing operator であり、

$$Y(z) = c\partial\xi e^{-2\phi}(z) \quad (133)$$

[7] 実は Y_{-2} の取り方として chiral なものも知られているが、よく用いられている non-chiral なものを挙げた。

で与えられ Q と可換で picture 数 -1 をもつ。また上記の積分について、

$$\oint \mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2 = \langle \mathcal{I}|Y_{-2}|A_1 * A_2\rangle + \langle \mathcal{I}|Y|\Psi_1 * \Psi_2\rangle = \langle A_1, Y_{-2}A_2\rangle + \langle \Psi_1, Y\Psi_2\rangle \tag{134}$$

が成り立つことにも注意しておく。

以上の準備のもと、modified cubic SSFT の作用は

$$\begin{aligned} S_0[\mathcal{A}] &= \oint \left(\frac{1}{2}\mathcal{A}\star Q\mathcal{A} + \frac{1}{3}\mathcal{A}\star\mathcal{A}\star\mathcal{A}\right) &(135)\\ &= \frac{1}{2}\langle A, Y_{-2}QA\rangle + \frac{1}{3}\langle A, Y_{-2}A*A\rangle + \frac{1}{2}\langle\Psi, Y\Psi\rangle + \langle A, Y\Psi*\Psi\rangle &(136)\end{aligned}$$

と書かれるものであり、これはゲージ変換

$$\delta_{\Lambda_0}\mathcal{A} = Q\Lambda_0 + \mathcal{A}\star\Lambda_0 - \Lambda_0\star\mathcal{A} \tag{137}$$

あるいは NS, R 成分で書くと

$$\begin{aligned} \delta_{\Lambda_0}A &= Q\lambda_0 + A*\lambda_0 - \lambda_0 * A + \bar{X}(\Psi*\chi_0 - \chi_0*\Psi), &(138)\\ \delta_{\Lambda_0}\Psi &= Q\chi_0 + A*\chi_0 - \chi_0*A + \Psi*\lambda_0 - \lambda_0*\Psi, &(139)\end{aligned}$$

の元で不変である。ここで S_0 の中に入っている、弦場 $\mathcal{A}=(A,\Psi)$ は worldsheet ghost 数は 1 をもち、Grassmann 性は odd であるとする。(ゲージ変換の弦場 $\Lambda_0 = (\lambda_0, \chi_0)$ は worldsheet ghost 数 0 Grassmann even である。) また、picture 数は NS sector は 0, R sector は $-1/2$ に限っている。bosonic の場合と同様に Λ_0 のゲージ変換を考えよう。ghost 数 -1, Grassmann odd の弦場 $\Lambda_{-1} = (\lambda_{-1}, \chi_{-1})$ を用いて

$$\delta_{\Lambda_{-1}}\Lambda_0 = Q\Lambda_{-1} + \mathcal{A}\star\Lambda_{-1} + \Lambda_{-1}\star\mathcal{A} \tag{140}$$

あるいは NS, R 成分で書くと、

$$\begin{aligned} \delta_{\Lambda_{-1}}\lambda_0 &= Q\lambda_{-1} + A*\lambda_{-1} + \lambda_{-1}*A + \bar{X}(\Psi*\chi_{-1} + \chi_{-1}*\Psi), &(141)\\ \delta_{\Lambda_{-1}}\chi_0 &= Q\chi_{-1} + A*\chi_{-1} + \chi_{-1}*A + \Psi*\lambda_{-1} + \lambda_{-1}*\Psi, &(142)\end{aligned}$$

という変換を (137) に施すと

$$\delta_{\Lambda_{-1}}(\delta_{\Lambda_0}\mathcal{A}) = (Q\mathcal{A} + \mathcal{A}\star\mathcal{A})\star\Lambda_{-1} - \Lambda_{-1}\star(Q\mathcal{A}+\mathcal{A}\star\mathcal{A}) \tag{143}$$

あるいは NS, R 成分で書くと、それぞれ

$$\begin{aligned} \delta_{\Lambda_{-1}}(\delta_{\Lambda_0}A) &= (QA + A*A + \bar{X}\Psi*\Psi)*\lambda_{-1} - \lambda_{-1}*(QA + A*A + \bar{X}\Psi*\Psi)\\ &\quad + \bar{X}[(Q\Psi + A*\Psi + \Psi*A)*\chi_{-1} - \chi_{-1}*(Q\Psi + A*\Psi + \Psi*A)], &(144)\\ \delta_{\Lambda_{-1}}(\delta_{\Lambda_0}\Psi) &= (QA + A*A + \bar{X}\Psi*\Psi)*\chi_{-1} - \chi_{-1}*(QA + A*A + \bar{X}\Psi*\Psi)\\ &\quad + (Q\Psi + A*\Psi + \Psi*A)*\lambda_{-1} - \lambda_{-1}*(Q\Psi + A*\Psi + \Psi*A), &(145)\end{aligned}$$

となる。相互作用がなければ、$Q^2=0$ より、$\delta_{\Lambda_{-1}}(\delta_{\Lambda_0}\mathcal{A})$ は恒等的にゼロであるが相互作用がある場合、$Q\mathcal{A}+\mathcal{A}\star\mathcal{A}=0$ ならゼロである。素朴にはこれは運動方程式に見えるが、作用の積分の定義に Y_{-2} が入っているので作用の変分は

$$\frac{\delta S_0}{\delta A} = Y_{-2}(QA + A*A + \bar{X}\Psi*\Psi), \quad \frac{\delta S_0}{\delta \Psi} = Y(Q\Psi + A*\Psi + \Psi*A), \tag{146}$$

となることに注意する。つまり、運動方程式は NS, R 成分でそれぞれ書くと

$$Y_{-2}(QA+A*A+\bar{X}\Psi*\Psi)=0, \quad Y(Q\Psi+A*\Psi+\Psi*A)=0 \tag{147}$$

である。従って、worldsheet ghost 数 2 の部分で NS sector の Y_{-2} の kernel, R sector の Y の kernel の部分だけ、運動方程式は $Q\mathcal{A}+\mathcal{A}\star\mathcal{A}=0$ とは異なることになる。これは (144),(145) は、ゲージ変換 δ_{Λ_0} に（up to $\mathrm{Ker}_{\mathrm{NS}}(Y_{-2})$, $\mathrm{Ker}_{\mathrm{R}}(Y)$ で）onshell で不定性があることになる。同様に worldsheet ghost 数 $-n-1$ をもつ弦場 $\Lambda_{-n-1}=(\lambda_{-n-1},\chi_{-n-1})$ による $\Lambda_{-n}=(\lambda_{-n},\chi_{-n})$ のゲージ変換を

$$\delta_{\Lambda_{-n-1}}\Lambda_{-n} \;=\; Q\Lambda_{-n-1}+\mathcal{A}\star\Lambda_{-n-1}-(-1)^{n+1}\Lambda_{-n-1}\star\mathcal{A} \tag{148}$$

で定義すると

$$\delta_{\Lambda_{-n-1}}(\delta_{\Lambda_{-n}}\Lambda_{-n+1}) \;=\; (Q\mathcal{A}+\mathcal{A}\star\mathcal{A})\star\Lambda_{-n-1}-\Lambda_{-n-1}\star(Q\mathcal{A}+\mathcal{A}\star\mathcal{A}). \tag{149}$$

あるいは NS, R 成分で書くと、

$$\begin{aligned}\delta_{\Lambda_{-n-1}}(\delta_{\Lambda_{-n}}\lambda_{-n+1}) \;=\;& (QA+A*A+\bar{X}\Psi*\Psi)*\lambda_{-n-1}-\lambda_{-n-1}*(QA+A*A+\bar{X}\Psi*\Psi)\\ &+\bar{X}[(Q\Psi+A*\Psi+\Psi*A)*\chi_{-n-1}-\chi_{-n-1}*(Q\Psi+A*\Psi+\Psi*A)],\end{aligned} \tag{150}$$

$$\begin{aligned}\delta_{\Lambda_{-n-1}}(\delta_{\Lambda_{-n}}\chi_{-n+1}) \;=\;& (QA+A*A+\bar{X}\Psi*\Psi)*\chi_{-n-1}-\chi_{-n-1}*(QA+A*A+\bar{X}\Psi*\Psi)\\ &+(Q\Psi+A*\Psi+\Psi*A)*\lambda_{-n-1}-\lambda_{-n-1}*(Q\Psi+A*\Psi+\Psi*A),\end{aligned} \tag{151}$$

となり、やはりゲージ変換 $\delta_{\Lambda_{-n}}$ に（up to $\mathrm{Ker}_{\mathrm{NS}}(Y_{-2})$, $\mathrm{Ker}_{\mathrm{R}}(Y)$ で）onshell で不定性があることになる。よって $\mathrm{Ker}_{\mathrm{NS}}(Y_{-2})$, $\mathrm{Ker}_{\mathrm{R}}(Y)$ が無視できるとすると、bosonic のときと全く同様にゲージ変換が onshell で ∞-stage reducible ということになる。そこで以下では Y_{-2}, Y の kernel を除く projection をそれぞれ $\wp_{Y_{-2}}$, $\wp_Y$ と書くことにしよう。（$\wp_{Y_{-2}}^2=\wp_{Y_{-2}}, \wp_Y^2=\wp_Y$ が成り立つとする。）すると、運動方程式は

$$\wp_{Y_{-2}}(QA+A*A+\bar{X}\Psi*\Psi)=0, \quad \wp_Y(Q\Psi+A*\Psi+\Psi*A)=0 \tag{152}$$

と等価である。ここで、$Y(z)=c(z)\delta'(\gamma(z))$ とも書けることから $\mathrm{Ker}(Y(\pm i))$ が

$$c(\pm i)|\phi\rangle, \qquad (\gamma(\pm i))^2|\phi\rangle \tag{153}$$

の形だけである ($|\phi\rangle$ は任意の「適切な」状態) とすると何も挿入しない 3 弦 LPP vertex $\langle V_3|$ は

$$\langle V_3(1,2,3)|\wp_{Y_{-2}}^{(r)}=\langle V_3(1,2,3)|, \quad \langle V_3(1,2,3)|\wp_Y^{(r)}=\langle V_3(1,2,3)|, \tag{154}$$

$(r=1,2,3)$ を満たす。([7] あるいは (231) 参照。）よって

$$(\wp_{Y_{-2}}A)*B=A*(\wp_{Y_{-2}}B)=A*B, \tag{155}$$

$$(\wp_Y A)*B=A*(\wp_Y B)=A*B \tag{156}$$

が成り立つことがわかる。従って、(150), (151) において $*$ 積のところに $\wp_{Y_{-2}}, \wp_Y$ が挟まっていると思えることになり、この意味で bosonic のときと同様に onshell で ∞-stage reducible ということになる。

各 stage のゲージ変換の弦場 $\Lambda_{-n}=(\lambda_{-n},\chi_{-n})$ $(n=0,1,2,3,\cdots)$ に対応して spacetime の ghost 場 $\mathcal{C}_{-n}=(c_{-n},d_{-n})$ を導入しよう。より具体的には弦場の ket 表示でゲージ変換の弦場 $\Lambda_{-n}=(\lambda_{-n},\chi_{-n})$ をそれぞれ

$$|\lambda_{-n}\rangle=\sum_\alpha \lambda^\alpha_{-n}|\alpha\rangle^{(0)}_{-n}, \quad |\chi_{-n}\rangle=\sum_\alpha \chi^\alpha_{-n}|\alpha\rangle^{(-1/2)}_{-n} \tag{157}$$

のように展開したとき（ここで R sector の χ_n の添字 α は spacetime spinor の足も含んでいる)、worldsheet ghost 数 g, picture 数 pic, spacetime(係数場) の Grassmann 性 ϵ, total(弦場全体) の Grassmann 性 s はそれぞれ

$$g(\lambda_{-n}) = -n, \quad \mathrm{pic}(\lambda_{-n}) = 0, \quad \epsilon(\lambda_{-n}) = 0 \,(\mathrm{mod}\, 2), \quad s(\lambda_{-n}) = n \,(\mathrm{mod}\, 2), \tag{158}$$
$$g(\chi_{-n}) = -n, \quad \mathrm{pic}(\chi_{-n}) = -\frac{1}{2}, \quad \epsilon(\chi_{-n}) = 1 \,(\mathrm{mod}\, 2), \quad s(\chi_{-n}) = n \,(\mathrm{mod}\, 2), \tag{159}$$

である。これらに対応して spacetime の Grassmann 性を n-stage の n に応じて変えた場 $\mathcal{C}_n = (c_n, d_n)$ を導入する。ket 表示では

$$|c_n\rangle = \sum_\alpha c_n^\alpha |\alpha\rangle_{-n}^{(0)}, \quad |d_n\rangle = \sum_\alpha d_n^\alpha |\alpha\rangle_{-n}^{(-1/2)}, \tag{160}$$

のように展開したとき、spacetime ghost 数 gh は

$$\mathrm{gh}(c_n) = \mathrm{gh}(d_n) = n + 1 \tag{161}$$

とし、

$$g(c_n) = -n, \quad \mathrm{pic}(c_n) = 0, \quad \epsilon(c_n) = n + 1 \,(\mathrm{mod}\, 2), \quad s(c_n) = 1 \,(\mathrm{mod}\, 2), \tag{162}$$
$$g(d_n) = -n, \quad \mathrm{pic}(d_n) = -\frac{1}{2}, \quad \epsilon(d_n) = n \,(\mathrm{mod}\, 2), \quad s(d_n) = 1 \,(\mathrm{mod}\, 2), \tag{163}$$

となる。また、もともとの場も形式的に $n = -1$ の場合とみなして、$\mathcal{A} = \mathcal{C}_{-1} = (c_{-1}, d_{-1})$ と書くことにする。これら $\mathcal{C}_n$ $(n \geq -1)$ の (spacetime) field それぞれに対して、antifield $\mathcal{C}_n^* = (c_n^*, d_n^*)$ を導入する。つまりそれぞれ

$$|c_n^*\rangle = \sum_\alpha c_{n,\alpha}^* |\alpha\rangle_{-n}^{(0)}, \quad |d_n^*\rangle = \sum_\alpha d_{n,\alpha}^* |\alpha\rangle_{-n}^{(-1/2)}, \tag{164}$$

のように展開したとすると、spacetime の ghost 数、Grassmann 性、を BV 形式に則って割り当てて、spacetime ghost 数 gh は

$$\mathrm{gh}(c_n^*) = \mathrm{gh}(d_n^*) = -n - 2 \tag{165}$$

とし、

$$g(c_n^*) = -n, \quad \mathrm{pic}(c_n^*) = 0, \quad \epsilon(c_n^*) = n \,(\mathrm{mod}\, 2), \quad s(c_n^*) = 0 \,(\mathrm{mod}\, 2), \tag{166}$$
$$g(d_n^*) = -n, \quad \mathrm{pic}(d_n^*) = -\frac{1}{2}, \quad \epsilon(d_n^*) = n + 1 \,(\mathrm{mod}\, 2), \quad s(d_n^*) = 0 \,(\mathrm{mod}\, 2), \tag{167}$$

となる。

bosonic の場合と全く同様に「一つの弦場」で field-antifield を worldsheet ghost 数の制限を外したものとしてまとめて表したいと思うと、$\mathcal{C}_n^* = (c_n^*, d_n^*)$ の "string Hodge dual" をとるとよいと思われるが、NS, R sector の picture はそれぞれ 0, $-1/2$ という制限は保ちたいので、単なる BPZ 内積ではなく $\oint A \star B$ つまり、NS sector は $\langle A, Y_{-2} B\rangle$, R sector は $\langle A, YB\rangle$ に関する dual をとることにする。そうすれば dual を取ったあとも picture 数を変えない。

ここで注意すべきことは、Y_{-2} あるいは Y が BPZ 内積に挟まっているために、それらの kernel は自明に落ちてしまうことである。dual を一意に定義するためには、これらの kernel の部分を除いておかねばならない。NS sector については worldsheet state の基底 $\{|\alpha\rangle_g^{(0)}\}$ のかわりに、Y_{-2} の kernel を除く $\wp_{Y_{-2}}$ をかけた空間を張る worldsheet state の基底を $\{|\hat{\alpha}\rangle_g^{(0)}\}$ と書くことにし、R sector については worldsheet state の基底 $\{|\alpha\rangle_g^{(-1/2)}\}$ のかわりに、Y の kernel を除く $\wp_Y$ をかけた

空間を張る worldsheet state の基底を $\{|\hat{\alpha}\rangle_g^{(-1/2)}\}$ と書くことにしよう。そして、$|\hat{\alpha}\rangle_g^{(0)}$, $|\hat{\alpha}\rangle_g^{(-1/2)}$, $(g \leq 1)$ の string Hodge dual をそれぞれ

$$\langle|\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{3-g}^{(0)}, Y_{-2}|\hat{\alpha}'\rangle_g^{(0)}\rangle = \delta_{\hat{\alpha},\hat{\alpha}'}, \qquad \langle|\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{3-g}^{(-1/2)}, Y|\hat{\alpha}'\rangle_g^{(-1/2)}\rangle = \delta_{\hat{\alpha},\hat{\alpha}'}, \tag{168}$$

を満たす $|\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{3-g}^{(0)}$, $|\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{3-g}^{(-1/2)}$ であるとする。一般には弦場 $\Phi = (\phi, \psi)$ の string Hodge dual ${}^*\Phi = ({}^*\phi, {}^*\psi)$ は

$$\begin{aligned} {}^*\Phi \ &\equiv \ \Bigg(\sum_{g\leq 1,\hat{\alpha}} \big(|\hat{\alpha}\rangle_g^{(0)} \ {}_g^{(0)}\langle\hat{\alpha}|Y_{-2} + |\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{3-g}^{(0)} \ {}_{3-g}^{(0)}\langle\tilde{\hat{\alpha}}|Y_{-2} \big)\phi, \\ &\qquad + \sum_{g\leq 1,\hat{\alpha}} \big(|\hat{\alpha}\rangle_g^{(-1/2)} \ {}_g^{(-1/2)}\langle\hat{\alpha}|Y + |\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{3-g}^{(-1/2)} \ {}_{3-g}^{(-1/2)}\langle\tilde{\hat{\alpha}}|Y \big)\psi \Bigg) \end{aligned} \tag{169}$$

で定義することにする。ここで、bra はそれぞれ対応する ket の BPZ 共役で定義している。今、small Hilbert space を考えているため、BPZ 内積は $\langle 0|e^{-2\phi}\partial^2 c\partial cc(0)|0\rangle \neq 0$ で、Y_{-2}, Y は Grassmann even とする。ここで conformal vacuum $|0\rangle$ も Grassmann even とすると、その bra $\langle 0|$ は Grassmann odd である。従って、BPZ 共役をとると偶奇性が逆になるので、この左から作用させる、上記の string Hodge dual は bosonic のときと同様に Grassmann odd である。

この string Hodge dual を 2 回続けてやると、一般に

$$\begin{aligned} {}^{**}\Phi \ &= \ \Bigg(\sum_{g\leq 1,\hat{\alpha}} \big(|\hat{\alpha}\rangle_g^{(0)} \ {}_{3-g}^{(0)}\langle\tilde{\hat{\alpha}}|Y_{-2} + |\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{3-g}^{(0)} \ {}_g^{(0)}\langle\hat{\alpha}|Y_{-2} \big)\phi, \\ &\qquad + \sum_{g\leq 1,\hat{\alpha}} \big(|\hat{\alpha}\rangle_g^{(-1/2)} \ {}_{3-g}^{(-1/2)}\langle\tilde{\hat{\alpha}}|Y + |\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{3-g}^{(-1/2)} \ {}_g^{(-1/2)}\langle\hat{\alpha}|Y \big)\psi \Bigg) \end{aligned} \tag{170}$$

$$= \ (\wp_{Y_{-2}}\phi, \wp_Y\psi), \tag{171}$$

となる。初めから projection をかけておくと、string Hodge dual 2 回で元に戻る、つまり

$${}^{**}(\wp_{Y_{-2}}\phi, \wp_Y\psi) = (\wp_{Y_{-2}}\phi, \wp_Y\psi). \tag{172}$$

さらに projection $\wp_{Y_{-2}}, \wp_Y$ はそれぞれ kernel を落とすという定義から

$$Y_{-2}\wp_{Y_{-2}} = Y_{-2}, \qquad Y\wp_Y = Y \tag{173}$$

であるが、これらの BPZ 共役をとることで

$$\mathrm{bpz}(\wp_{Y_{-2}})Y_{-2}\wp_{Y_{-2}} = Y_{-2}, \qquad \mathrm{bpz}(\wp_Y)Y\wp_Y = Y \tag{174}$$

を満たすことがわかる。さらに、Y_{-2}, Y は Q と可換であることから、

$$\mathrm{bpz}(\wp_{Y_{-2}})Y_{-2}Q\wp_{Y_{-2}} = Y_{-2}Q, \qquad \mathrm{bpz}(\wp_Y)YQ\wp_Y = YQ \tag{175}$$

となる。このことと、(154) より元のゲージ不変な作用 $S_0[\mathcal{A} = (A, \Psi)]$ (136) の中の弦場は projection が初めからかかっている $\hat{\mathcal{A}} = (\wp_{Y_{-2}}A, \wp_Y\Psi)]$ とみなしてよい：

$$S_0[\mathcal{A}] \ = \ S_0[\hat{\mathcal{A}}]. \tag{176}$$

さらに projection について (173) より

$$\wp_{Y_{-2}}Q\wp_{Y_{-2}} = \wp_{Y_{-2}}Q, \qquad \wp_Y Q\wp_Y = \wp_Y Q, \tag{177}$$

が成り立つことにも注意すると、[8] ゲージ変換や n-stage ゲージ変換の弦場 Λ_n についても NS sector には $\wp_{Y_{-2}}$, R sector には $\wp_Y$ をかけておくことにすれば、onshell で ∞-stage reducible ということになる。したがって、対応する ghost およびそれらの antifield たちについても弦場に projection がかかっていると考えればよい。つまり、field としては $\hat{\mathcal{C}}_n=(\hat{c}_n,\hat{d}_n)$ $(n\geq -1)$:

$$|\hat{c}_n\rangle=\wp_{Y_{-2}}|c_n\rangle=\sum_{\hat{\alpha}}c_n^{\hat{\alpha}}|\hat{\alpha}\rangle_{-n}^{(0)},\quad |\hat{d}_n\rangle=\wp_Y|d_n\rangle=\sum_{\hat{\alpha}}d_n^{\hat{\alpha}}|\hat{\alpha}\rangle_{-n}^{(-1/2)},\tag{178}$$

antifield としては $\hat{\mathcal{C}}_n^*=(\hat{c}_n^*,\hat{d}_n^*)$ $(n\geq -1)$:

$$|\hat{c}_n^*\rangle=\wp_{Y_{-2}}|c_n^*\rangle=\sum_{\hat{\alpha}}c_{n,\hat{\alpha}}^*|\hat{\alpha}\rangle_{-n}^{(0)},\quad |\hat{d}_n^*\rangle=\wp_Y|d_n^*\rangle=\sum_{\hat{\alpha}}d_{n,\hat{\alpha}}^*|\hat{\alpha}\rangle_{-n}^{(-1/2)},\tag{179}$$

を取ることにしよう。そして antifield のほうを string Hodge dual で 1 対 1 に ${}^*\hat{\mathcal{C}}_n^*=({}^*\hat{c}_n^*,{}^*\hat{d}_n^*)$:

$${}^*|\hat{c}_n^*\rangle=\sum_{\hat{\alpha}}c_{n,\hat{\alpha}}^*|\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{n+3}^{(0)}(-1)^n,\quad {}^*|\hat{d}_n^*\rangle=\sum_{\hat{\alpha}}d_{n,\hat{\alpha}}^*|\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{n+3}^{(-1/2)}(-1)^{n+1},\tag{180}$$

に map し、まとめて $\hat{\Psi}=(\hat{\phi},\hat{\psi})$：

$$\hat{\Psi}=\sum_{n\geq -1}\hat{\mathcal{C}}_n+\sum_{n\geq -1}{}^*\hat{\mathcal{C}}_n^*;\qquad \hat{\phi}=\sum_{n\geq -1}\hat{c}_n+\sum_{n\geq -1}{}^*\hat{c}_n^*,\quad \hat{\psi}=\sum_{n\geq -1}\hat{d}_n+\sum_{n\geq -1}{}^*\hat{d}_n^*,\tag{181}$$

を考えよう。これは NS sector, R sector にそれぞれ projection $\wp_{Y_{-2}}$, $\wp_Y$ をかけた picture 数 0, $-1/2$ の、worldsheet ghost 数の制限をはずした worldsheet の state に total の Grassmann 性が odd になるように spacetime の係数場をかけた弦場である。anti-bracket は (13) において、$\Phi^A=(c_n^{\hat{\alpha}},d_n^{\hat{\alpha}})$, $\Phi_A^*=(c_{n,\hat{\alpha}}^*,d_{n,\hat{\alpha}}^*)$ と見なすことで定義する。さて、この anti-bracket を用いた master 方程式 $(S,S)_{\mathrm{a.b.}}=0$ を考えよう。bosonic の場合と全く同様になっている、と期待して (176) において、$\hat{\mathcal{A}}$ を ghost 数の制限を外した上記の $\hat{\Psi}$ で置き換えた作用

$$\begin{aligned} S[\hat{\Psi}] &\equiv S_0[\hat{\Psi}]=\oint\left(\frac{1}{2}\hat{\Psi}\star Q\hat{\Psi}+\frac{1}{3}\hat{\Psi}\star\hat{\Psi}\star\hat{\Psi}\right) &(182)\\ &= \frac{1}{2}\langle\hat{\phi},Y_{-2}Q\hat{\phi}\rangle+\frac{1}{3}\langle\hat{\phi},Y_{-2}\hat{\phi}*\hat{\phi}\rangle+\frac{1}{2}\langle\hat{\psi},Y\hat{\psi}\rangle+\langle\hat{\phi},Y\hat{\psi}*\hat{\psi}\rangle &(183)\end{aligned}$$

を考えその anti-bracket を計算しよう。まず、

$$\begin{aligned} \frac{\partial_r S}{\partial c_n^{\hat{\alpha}}} &= \langle|\hat{\alpha}\rangle_{-n}^{(0)},Y_{-2}(Q\hat{\phi}+\hat{\phi}*\hat{\phi}+\bar{X}\hat{\psi}*\hat{\psi})\rangle, &(184)\\ \frac{\partial_r S}{\partial d_n^{\hat{\alpha}}} &= \langle|\hat{\alpha}\rangle_{-n}^{(-1/2)},Y(Q\hat{\psi}+\hat{\phi}*\hat{\psi}+\hat{\psi}*\hat{\phi})\rangle, &(185)\\ \frac{\partial_l S}{\partial c_{n,\hat{\alpha}}^*} &= \langle|\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{n+3}^{(0)},Y_{-2}(Q\hat{\phi}+\hat{\phi}*\hat{\phi}+\bar{X}\hat{\psi}*\hat{\psi})\rangle, &(186)\\ \frac{\partial_l S}{\partial d_{n,\hat{\alpha}}^*} &= \langle|\tilde{\hat{\alpha}}\rangle_{n+3}^{(-1/2)},Y(Q\hat{\psi}+\hat{\phi}*\hat{\psi}+\hat{\psi}*\hat{\phi})\rangle, &(187)\end{aligned}$$

と (171) に注意すると、

$$(S,S)_{\mathrm{a.b.}}=2\sum_{n\geq -1,\hat{\alpha}}\frac{\partial_r S}{\partial c_n^{\hat{\alpha}}}\frac{\partial_l S}{\partial c_{n,\hat{\alpha}}^*}+2\sum_{n\geq -1,\hat{\alpha}}\frac{\partial_r S}{\partial d_n^{\hat{\alpha}}}\frac{\partial_l S}{\partial d_{n,\hat{\alpha}}^*}\tag{188}$$

[8]実際、（より強い条件を満たす）Q と可換である projection の具体形は R sector については [7] で NS sector については [8] で与えられている。

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n\geq -1,\hat\alpha}\Big(\langle Y_{-2}(Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi),|\hat\alpha\rangle^{(0)}_{-n}\rangle\langle Y_{-2}|\tilde{\hat\alpha}\rangle^{(0)}_{n+3},(Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi)\rangle \\
&\quad +\langle Y_{-2}(Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi),|\tilde{\hat\alpha}\rangle^{(0)}_{n+3}\rangle\langle Y_{-2}|\hat\alpha\rangle^{(0)}_{-n},(Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi)\rangle\Big) \\
&\quad + \sum_{n\geq -1,\hat\alpha}\Big(\langle Y(Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi),|\hat\alpha\rangle^{(-1/2)}_{-n}\rangle\langle Y|\tilde{\hat\alpha}\rangle^{(-1/2)}_{n+3},(Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi)\rangle \\
&\quad +\langle Y(Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi),|\tilde{\hat\alpha}\rangle^{(-1/2)}_{n+3}\rangle\langle Y|\hat\alpha\rangle^{(-1/2)}_{-n},(Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi)\rangle\Big) \\
&= \langle Y_{-2}(Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi),\wp_{Y_{-2}}(Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi)\rangle \\
&\quad +\langle Y(Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi),\wp_{Y}(Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi)\rangle \\
&= \langle (Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi),Y_{-2}(Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi)\rangle \\
&\quad +\langle (Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi),Y(Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi)\rangle \\
&= \oint (Q\hat\Psi+\hat\Psi\star\hat\Psi)\star(Q\hat\Psi+\hat\Psi\star\hat\Psi)=0.
\end{aligned} \tag{189}
$$

と計算される。ここで最後の等式では bosonic の場合と同様の公式

$$
(A\star B)\star C = A\star(B\star C),\quad Q^2=0,\quad Q(A\star B)=QA\star B+(-1)^{s(A)}A\star QB, \tag{190}
$$

$$
\oint QA=0,\qquad \oint A\star B=(-1)^{s(A)s(B)}\oint B\star A, \tag{191}
$$

を用いた。つまり、(183) の作用は master 方程式の解である。また、これは antifield をゼロにすると worldsheet ghost 数の保存より元に戻る：

$$
S[\hat\Psi]|_{c^*_{n,\hat\alpha}=0,d^*_{n,\hat\alpha}=0}=S_0[\hat{\mathcal{A}}] \tag{192}
$$

という境界条件を満たすことにも注意しておこう。

このとき、(184), (185), (186), (187) を用いると、BV 形式における BRST 変換は anti-bracket で

$$
\begin{aligned}
\delta_{\rm B}\hat\Psi &= (\hat\Psi,S)_{\rm a.b.} \\
&= \Bigg(\sum_{n\geq -1,\hat\alpha}\big(|\hat\alpha\rangle^{(0)}_{-n}(c^{\hat\alpha}_n,S)_{\rm a.b.}+|\tilde{\hat\alpha}\rangle^{(0)}_{n+3}(c^*_{n,\hat\alpha},S)_{\rm a.b.}\big), \\
&\qquad \sum_{n\geq -1,\hat\alpha}\big(|\hat\alpha\rangle^{(-1/2)}_{-n}(d^{\hat\alpha}_n,S)_{\rm a.b.}+|\tilde{\hat\alpha}\rangle^{(-1/2)}_{n+3}(d^*_{n,\hat\alpha},S)_{\rm a.b.}\big)\Bigg) \\
&= \Bigg(\sum_{n\geq -1,\hat\alpha}\big(|\hat\alpha\rangle^{(0)}_{-n}\langle Y_{-2}|\tilde{\hat\alpha}\rangle^{(0)}_{n+3},(Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi)\rangle \\
&\qquad +|\tilde{\hat\alpha}\rangle^{(0)}_{n+3}\langle Y_{-2}|\hat\alpha\rangle^{(0)}_{-n},(Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi)\rangle\big), \\
&\qquad \sum_{n\geq -1,\hat\alpha}\big(|\hat\alpha\rangle^{(-1/2)}_{-n}\langle Y|\tilde{\hat\alpha}\rangle^{(-1/2)}_{n+3},(Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi)\rangle \\
&\qquad +|\tilde{\hat\alpha}\rangle^{(-1/2)}_{n+3}\langle Y|\hat\alpha\rangle^{(-1/2)}_{-n},(Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi)\rangle\big)\Bigg) \\
&= \big(\wp_{Y_{-2}}(Q\hat\phi+\hat\phi*\hat\phi+\bar X\hat\psi*\hat\psi),\wp_Y(Q\hat\psi+\hat\phi*\hat\psi+\hat\psi*\hat\phi)\big)
\end{aligned} \tag{193}
$$

のように計算される。これは off-shell nilpotent である。また、もし projection が Q と可換、つまり $\wp_{Y_{-2}}Q=Q\wp_{Y_{-2}}$, $\wp_Y Q=Q\wp_Y$ ならば $\delta_{\rm B}\hat\Psi=Q\hat\Psi+\hat\Psi\star\hat\Psi$ となる。

謝辞

いろいろと議論し重要なコメントをくださった畑浩之氏、九後汰一郎氏、国友浩氏、高橋智彦氏に感謝します。

A　W_n 等について

ここでは a-ゲージ条件を考える際に使う $M, \tilde{Q}, W_n, P_n$ の定義・性質を挙げておく。([3], [4])

Kato-Ogawa の BRST 演算子 Q を ghost zeromode b_0, c_0 に関して展開すると (b_0c_0 あるいは c_0b_0 を含む項は含まれていないので)

$$Q = \tilde{Q} + c_0 L_0 + b_0 M \tag{194}$$

となる。$L_0 = \{Q, b_0\}$ は total Virasoro generator の zeromode であり、

$$M = -2\sum_{n=1}^{\infty} n c_{-n} c_n, \quad \tilde{Q} = \sum_{n\neq 0} c_{-n} L_n^{\mathrm{mat}} + \frac{1}{2}\sum_{m,n,m+n\neq 0}(m-n) c_m c_n b_{-m-n}, \tag{195}$$

である。Q の nilpotency $Q^2 = 0$ から

$$[L_0, M] = [\tilde{Q}, M] = [L_0, M] = 0, \quad \tilde{Q}^2 = -L_0 M, \tag{196}$$

が成り立つことがわかる。また、

$$M^- = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} b_{-n} b_n\,, \tag{197}$$

とおくと ghost charge から b_0, c_0 部分を除いて作れる[9]

$$M_z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(c_{-n}b_n - b_{-n}c_n) \tag{198}$$

とともに、$su(1,1)$ 代数を成す：

$$[M, M^-] = 2M_z, \quad [M_z, M] = M, \quad [M_z, M^-] = -M^-. \tag{199}$$

これらを用いて

$$W_n \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{((n+i)!)^2} \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} M^i (M^-)^{n+i}, \tag{200}$$

$$W'_n \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{((n+i)!)^2} \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} (M^-)^{n+i} M^i \tag{201}$$

(ただし $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$.) と定義すると、$M$ と M^- の順序が違うが BPZ 共役の関係式

$$\mathrm{bpz}(M) = -M, \quad \mathrm{bpz}(M^-) = -M^-, \quad \mathrm{bpz}(M_z) = -M_z, \tag{202}$$

から

$$W'_n = (-1)^n\, \mathrm{bpz}(W_n) \tag{203}$$

という関係にある。ここで

$$e^{\lambda M} M^- e^{-\lambda M} = M^- + 2\lambda M_z - \lambda^2 M, \qquad [M^m, M^-] = M^{m-1} m(2M_z + m - 1), \tag{204}$$

[9]通常の ghost charge N^g は conformal vacuum $|0\rangle$ を ghost 数ゼロ、つまり $N^g|0\rangle = 0$ とした場合は $N^g = \tilde{N}^g + c_0 b_0 + 1 = 2M_z + c_0 b_0 + 1$ という関係にある。

を使うと数学的帰納法により

$$[M^m, (M^-)^k] = \sum_{l=1}^{\mathrm{Min}(m,k)} (M^-)^{k-l} M^{m-l} \frac{m!k!}{l!(m-l)!(k-l)!} \prod_{n=0}^{l-1} (2M_z + m - k - n) \tag{205}$$

$(m, k = 1, 2, 3, \cdots)$ となることを示せる。この両辺の BPZ 共役をとって整理すると

$$[(M^-)^k, M^m] = \sum_{l=1}^{\mathrm{Min}(m,k)} M^{m-l} (M^-)^{k-l} \frac{m!k!}{l!(m-l)!(k-l)!} \prod_{n=0}^{l-1} (-2M_z + k - m - n) \tag{206}$$

となる。$2M_z = N^g - c_0 b_0 - 1$ (N^g は worldsheet ghost charge) であることを思い出すと

$$b_0 c_0 |g = n+1\rangle, \quad c_0 b_0 |g = n+2\rangle \in \mathcal{F}_{M_z = n/2} \tag{207}$$

($|g\rangle$ は $N^g = g$ の固有状態、$\mathcal{F}_{M_z=n/2}$ は $M_z = n/2$ の固有空間とする。) の上では (205) より

$$[M^i, (M^-)^{n+i}] \mathcal{F}_{M_z=n/2} = 0 \tag{208}$$

となる。したがって (200),(201) より

$$W_n \mathcal{F}_{M_z=n/2} = W'_n \mathcal{F}_{M_z=n/2} \tag{209}$$

となるので、結局 $b_0 c_0 |g = n+1\rangle, c_0 b_0 |g = n+2\rangle \in \mathcal{F}_{M_z=n/2}$ に作用する場合だけを考えるときは W_n と W'_n は等価である。さらに (205) を使うと、

$$\begin{aligned}
& M^n W_n \mathcal{F}_{M_z=n/2} = M^n W'_n \mathcal{F}_{M_z=n/2} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^i}{((n+i-l)!)^2} \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} (M^-)^{n+i-l} M^{n+i-l} \mathcal{F}_{M_z=n/2} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^i}{((l+i)!)^2} \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} (M^-)^{l+i} M^{l+i} \mathcal{F}_{M_z=n/2} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{i=k-n}^{k} \right) \frac{(-1)^i}{(k!)^2} \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ k-i \end{pmatrix} (M^-)^k M^k \mathcal{F}_{M_z=n/2} \\
&= \mathcal{F}_{M_z=n/2}.
\end{aligned} \tag{210}$$

最後の等式は

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ k-i \end{pmatrix} = \delta_{k,0}, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{211}$$

$$\sum_{i=k-n}^{k} (-1)^i \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ k-i \end{pmatrix} = 0, \qquad (k = n+1, n+2, \cdots) \tag{212}$$

を使った。同様に、(206) を使うと

$$\begin{aligned}
& W_n M^n \mathcal{F}_{M_z=-n/2} = W'_n M^n \mathcal{F}_{M_z=-n/2} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^i}{((n+i-l)!)^2} \begin{pmatrix} n+i-1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ l \end{pmatrix} M^{n+i-l} (M^-)^{n+i-l} \mathcal{F}_{M_z=-n/2}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^i}{((l+i)!)^2} \left(\begin{array}{c} n+i-1 \\ i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n \\ l \end{array} \right) M^{l+i}(M^-)^{l+i}\mathcal{F}_{M_z=-n/2}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{i=k-n}^{k} \right) \frac{(-1)^i}{(k!)^2} \left(\begin{array}{c} n+i-1 \\ i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n \\ k-i \end{array} \right) M^k(M^-)^k\mathcal{F}_{M_z=-n/2}$$
$$= \mathcal{F}_{M_z=-n/2}. \tag{213}$$

となる。

ここで $b_0c_0|g=n+1\rangle, c_0b_0|g=n+2\rangle \in \mathcal{F}_{M_z=n/2}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ に作用する operator として

$$P_n \quad = \quad -\frac{1}{L_0}\tilde{Q}M^nW_{n+1}\tilde{Q} \tag{214}$$

を考えると、(210), (213) よりこれは

$$\tilde{Q}P_n = \tilde{Q}, \qquad P_n^2 = P_n \tag{215}$$

という projection になっている。

B　Gauge invariant overlap と BRST 不変性

ここでは gauge invariant overlap $\mathcal{O}_V(\Psi)$[10]を作用に付け足すことを考える。(Shapiro-Thorn の open-closed vertex $\langle\hat{\gamma}|$ を用いて $\mathcal{O}_V(\Psi) = \langle\hat{\gamma}(1_{\rm c},2)|\phi_V\rangle_{1_{\rm c}}|\Psi\rangle_2$ などと書くことにする。) つまりゲージ不変な作用 S_V として $S_0[A]$ (1) にこの gauge invariant overlap を付け加えた

$$S_V[A] \quad = \quad S_0[A] + \mathcal{O}_V(A) \tag{216}$$

を考えよう。これはゲージ変換 $\delta_\Lambda A = Q\Lambda + A*\Lambda - \Lambda*A$, $(g(\Lambda)=0)$ の元で不変である。運動方程式は “closed string state”

$$|\Phi_V\rangle_1 \equiv \langle\hat{\gamma}(1_{\rm c},2)|\phi_V\rangle_{1_{\rm c}}|R(2,1)\rangle \tag{217}$$

の分だけ変更を受け

$$QA + A*A = g^2\Phi_V \tag{218}$$

となるが、on-shell closed state $|\phi_V\rangle_{1_{\rm c}}$ が local であるつまり $\phi_V(0)|0\rangle_{1_{\rm c}}$ の形である限り $V(i)|\mathcal{I}\rangle$ という形をしているので、(中点の微妙さを除くと) 形式的にはスター積の元で可換つまり $(V(i)|\mathcal{I}\rangle)*\Lambda = \Lambda*(V(i)|\mathcal{I}\rangle)$ が成り立つ。すると、(9) からわかるように同じゲージ変換の形のままで up to 運動方程式 $\frac{\partial}{\partial A}S_V[A]$ で ∞-stage reducible という状況になる。したがって、この作用においても全く同様に ghost for ghost... などとして field $\mathcal{C}_n$ とその antifield $\mathcal{C}_n^*$ を入れることにして、

$$\Psi = \sum_{n=-1}^{\infty}\mathcal{C}_n + \sum_{n=-1}^{\infty}{}^*\mathcal{C}_n^* = \sum_{n\geq-1,\alpha}\mathcal{C}_n^\alpha|\alpha\rangle_{-n} + \sum_{n\geq-1,\alpha}\mathcal{C}_{n,\alpha}^*|\tilde{\alpha}\rangle_{n+3}(-1)^n \tag{219}$$

とおくと、

$$\frac{\partial_r S_V}{\partial\mathcal{C}_n^\alpha} \quad = \quad -\frac{1}{g^2}\langle(Q\Psi + \Psi*\Psi), |\alpha\rangle_{-n}\rangle + \mathcal{O}_V(|\alpha\rangle_{-n}), \tag{220}$$

[10]詳細はたとえば [9] 参照。

$$\frac{\partial_l S_V}{\partial \mathcal{C}^*_{n,\alpha}} \quad = \quad -\frac{1}{g^2}\langle |\tilde{\alpha}\rangle_{n+3}, (Q\Psi + \Psi * \Psi)\rangle + \mathcal{O}_V(|\tilde{\alpha}\rangle_{n+3}), \tag{221}$$

と $g(\Phi_V) = 2,\ Q\Phi_V = 0,\ \langle \Phi_V, \Phi_V\rangle = 0$ および

$$\mathcal{O}_V(\psi * \phi) = (-1)^{s(\psi)s(\phi)}\mathcal{O}_V(\phi * \psi) \tag{222}$$

となることに注意すると

$$\begin{aligned}
(S_V, S_V)_{\text{a.b.}} &= 2\sum_{n\geq -1,\alpha} \frac{\partial_r S_V}{\partial \mathcal{C}^\alpha_n}\frac{\partial_l S_V}{\partial \mathcal{C}^*_{n,\alpha}} \\
&= \frac{1}{g^4}\langle (Q\Psi + \Psi * \Psi), (Q\Psi + \Psi * \Psi)\rangle - \frac{2}{g^2}\mathcal{O}_V(Q\Psi + \Psi * \Psi) + \langle \Phi_V, \Phi_V\rangle \\
&= -\frac{2}{g^2}\mathcal{O}_V(\Psi * \Psi) = 0
\end{aligned} \tag{223}$$

となり、master 方程式を満たす。この作用 S_V のもとで BRST 変換 $\delta_{\mathrm{B}_V} X \equiv (X, S_V)_{\text{a.b.}}$ は

$$\delta_{\mathrm{B}_V}\Psi \quad = \quad -\frac{1}{g^2}(Q\Psi + \Psi * \Psi) + \Phi_V \tag{224}$$

となる。master 方程式より $\delta_{\mathrm{B}_V} S_V = 0$ であるが

$$\delta_{\mathrm{B}_V}\mathcal{O}_V(\Psi) = \delta_{\mathrm{B}}\mathcal{O}_V(\Psi) = \mathcal{O}_V(\delta_{\mathrm{B}}\Psi) = 0 \tag{225}$$

となり $V = 0$ の BRST 変換 δ_{B} (26) のもとで gauge invariant overlap は不変であり、したがって作用 (216) も不変になっている：$\delta_{\mathrm{B}} S_V = 0$.

C LPP vertex と conformal factor

canonical な上半面を

$$h(z) \quad = \quad \frac{1 + iz}{1 - iz} \tag{226}$$

により単位円に map したときに対称になる n-string LPP vertex $\langle V_n|$:

$$\langle V_n|A_1\rangle_1 |A_2\rangle_2 \cdots |A_n\rangle_n \quad = \quad \langle f_{n,(1)}[\mathcal{O}_{A_1}] f_{n,(2)}[\mathcal{O}_{A_2}] \cdots f_{n,(n)}[\mathcal{O}_{A_n}]\rangle \tag{227}$$

を考える。ここで

$$f_{n,(r)}(z) \quad = \quad h^{-1}(e^{-\frac{2\pi r}{n}i} h(z)^{\frac{2}{n}}), \qquad (r = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{228}$$

である。conformal factor はこの map の微分

$$\frac{d}{dz} f_{n,(r)}(z) \quad = \quad \frac{8}{n}\frac{e^{-\frac{2\pi r}{n}i} h(z)^{\frac{2}{n}}}{1 + z^2}\left(1 + e^{-\frac{2\pi r}{n}i} h(z)^{\frac{2}{n}}\right)^{-2} \tag{229}$$

により与えられる。もし、conformal weight h の場 ϕ を用いて $|A_r\rangle = \phi(\pm i)|a\rangle$ となるものを (227) に代入したとすると、conformal factor として $(f'_{n,(r)}(\pm i))^h$ がかかることになる。ここで $z - (\pm i) \equiv \epsilon$ としたとき $|\epsilon| \ll 1$ では

$$f'_{n,(r)}(z)|_{z\sim \pm i} \quad \propto \quad \epsilon^{\frac{2}{n}-1} \tag{230}$$

と評価されるので、3 弦バーテックス以上の場合発散する

$$f'_{n,(r)}(\pm i) \quad = \quad \infty, \qquad (n > 2). \tag{231}$$

つまり、負の conformal weight をもつ $\phi(\pm i)$ （たとえば $c(\pm i)$ や $\gamma(\pm i)$）が前にかかっていると $|A_r\rangle = \phi(\pm i)|a\rangle$ のとき

$$\begin{aligned} &\langle V_n|A_1\rangle_1|A_2\rangle_2\cdots|A_r\rangle_r\cdots|A_n\rangle_n \\ &= (f'_{n,(r)}(\pm i))^h\langle f_{n,(1)}[\mathcal{O}_{A_1}]f_{n,(2)}[\mathcal{O}_{A_2}]\cdots f_{n,(r)}[\mathcal{O}_a]\cdots f_{n,(n)}[\mathcal{O}_{A_n}]\rangle \end{aligned} \tag{232}$$

となり、（右辺の CFT correlator が発散しなければ）3 弦バーテックス以上に寄与しないことになる。

References

[1] I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky, Phys. Rev. D **28**, 2567 (1983) [Erratum-ibid. D **30**, 508 (1984)].

[2] J. Gomis, J. Paris and S. Samuel, Phys. Rept. **259**, 1 (1995) [arXiv:hep-th/9412228].

[3] M. Asano and M. Kato, Prog. Theor. Phys. **117**, 569 (2007) [arXiv:hep-th/0611189].

[4] M. Asano and M. Kato, Nucl. Phys. B **807**, 348 (2009) [arXiv:0807.5010 [hep-th]].

[5] H. Hata and S. Shinohara, JHEP **0009**, 035 (2000) [arXiv:hep-th/0009105].

[6] M. Kiermaier, A. Sen and B. Zwiebach, JHEP **0803**, 050 (2008) [arXiv:0712.0627 [hep-th]].

[7] T. Kugo and H. Terao, Phys. Lett. B **208**, 416 (1988).

[8] C. R. Preitschopf, C. B. Thorn and S. A. Yost, Nucl. Phys. B **337**, 363 (1990).

[9] T. Kawano, I. Kishimoto and T. Takahashi, Nucl. Phys. B **803**, 135 (2008) [arXiv:0804.1541 [hep-th]].