

余次元は物理として意味があるだろうか

中西 襄^{*1}

余次元理論の歴史を簡単に述べた後、このような考え方が物理の理論としていかに不自然なものであるかについて議論する。さらに、カルーツァ・クライン型の余次元理論はすでに明白に観測結果と矛盾していて、実際上すべて排除されたと考えてよいという最近の報告を紹介する。

1 余次元とは

われわれは太古の昔から、空間には3つの独立な方向（縦方向、横方向、上下方向）があることを知っている。すなわち、われわれの住む空間は疑いもなく3次元空間であり、これ以上に確実な経験的事実はまずほかにないと言ってよいであろう。もちろん、相対論は空間の3次元と時間の1次元を対等に扱い、4次元時空として捉えるべきことを明らかにしたが、時間の存在自身も太古から知られていたことであり、新しい自由度を導入したわけではない。

「余次元」というのは、この4つの次元にさらに余分の次元をつけ加えることである。数学的に高次元の時空を考えることは極めて容易である。従って、余次元を議論するということが、それが物理的実在として意味があるのかということが中心問題となる。時間が2次元以上になると因果律の問題が難しいので、通常余次元は空間的余次元を考える。空間的余次元の数を d とすると、 $d \geq 1$ と考えることは物理的に意味があるかという問いになる。

ここで論ずるのはもちろん SF やオカルトではないので、余次元理論は科学的に検証可能であるか、少なくとも理論的に尤もと考えられるようなものでなくてはならない。今日までの経験的事実はすべて $d = 0$ を支持しているにもかかわらず、なぜ多くの物理学者が余次元を導入したかったのかについて、まず歴史的に簡単に振り返ってみよう。

2 余次元理論の歴史

20世紀初頭、原子の中のような微視的世界に関する物理は暗中模索の状況であった。当時知られていた基本的な力は重力と電磁力のみである。電磁力については19世紀からマックスウェル理論があり、重力についてはアインシュタインの一般相対論が出来上がった。両者を統合する統一場理論を構成しようという気運の中で、1921年カルーツァ¹⁾（そして1926年クライン²⁾）は、空間の次元を1つ増やした5次元理論を提起したのであった。一般相対論では、時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ は重力場でもあった。これを5次元に拡張すると、第5次元目の成分は4次元

^{*1} 京大名誉教授. nbr-nak@trio.plala.or.jp

時空から見ればベクトルのように見えるので、本質的にこれを 4 次元電磁場ポテンシャル $A_\mu(x)$ と同定しようというアイデアである。うまいことに、5 次元の一般座標変換はこの部分でちょうど A_μ のゲージ変換を引き起こす。しかしもちろんそのためには、第 5 次元目は特別扱いをして、他の次元の自由度とは混ざり合わないようしておかなければならない。つまり 5 次元理論とは言いながら、最初から第 5 次元は手で差別するのである。実際、第 5 次元は観測にかからないのだから、プランクの長さ (10^{-33}cm) くらいの極端に小さいサイズに丸まっていて見えないのだと仮定しなければならない。これは物理的に非常に不自然な仮定である。また数学的に考えても、ゲージ場と同類のものはアフィン接続であって計量テンソルではないから、ゲージ場を計量テンソルとくっつけるのは極めて不自然である。かくてカルーツァ・クラインの 5 次元理論は、当然のことながら見捨てられた。

1925 年に量子力学が登場して以来、微視的世界の理解は長足の進歩を遂げた。微視的世界では、重力はほとんど無視できるが、電磁力のほかに強い相互作用、弱い相互作用と呼ばれる 2 種類の到達範囲の狭い力が働く。自発的対称性の破れのメカニズムにより、電磁相互作用と弱い相互作用は統合されて電弱理論が作られた。他方、強い相互作用の理論は量子色力学によって記述されることが分かってきた。これらはいずれも 4 次元時空の特殊相対論の枠組みで構成されるゲージ場の量子論であって、くりこみ可能なので散乱振幅が原理的に計算が可能である。電弱理論と量子色力学を並立させたものを標準理論という。標準理論は 1970 年代の終わり頃大体確立し、わずかな修正を除き、それ以後のすべての実験的検証に耐えてきたすばらしい理論である。

しかしながら、素粒子論研究者たちは標準理論の成功で必ずしも満足できたわけではなかった。不満足と考えられる理由は次のような事柄である。

- 1) 電弱理論と量子色力学は統一されていない。
- 2) 実験で決めなければならないパラメータの数が多すぎる。
- 3) 自己エネルギーの 2 次発散があり、質量の補正項をプランクスケールでカットオフして計算すると、不自然に巨大になる。
- 4) 素粒子の質量スペクトルのあまりにも大きなバラツキや、その階層性が説明できない。
- 5) 重力の問題は全く埒外である。

1970 年代から、これらの問題の解決に向けていろいろな拡張の試みがなされるようになった。1) に対しては大統一理論が、3) については超対称性理論があるが、いずれも実験的支持はない。これらは 4 次元時空での理論である。

さて、以上のような状況をふまえて、余次元理論が半世紀ぶりにリバイバルすることになる。流行の口火をきったのは、1975 年のチョー・フロイントの論文³⁾であろう。5) の問題を扱う最も安直な方法が、カルーツァ・クライン理論を拡張することである。標準理論にしる、大統一理論にしる、ヤン・ミルズ場と呼ばれるゲージ場が用いられるが、そのリー群は 1 次元ではなく高次元なので、それを埋め込むためには d を 1 よりも大きくとる必要があるが、本質的には同じ手法が使える。このような方法で、4 種の力を統合する理論が作れるのではないかと考えられ、一時期大流行した。さらに一般相対論と超対称性理論を融合した理論である超重力理論も、11 次元時空 (すなわち $d = 7$) で考えるのが最も理論が自然になることから、カルーツァ・クライン

超重力が導入された。しかし、これは標準理論を含み得ないことがわかって捨てられた。

これらの理論が行き詰ってきた 1984 年頃、「究極理論の唯一の候補」というふれこみで超弦理論（超ひも理論）が登場することになる。弦理論はもともとヴェネチアーノの双対共鳴模型をラグランジアンから導くために構成されたものであり、ハドロンの力学を記述するものだった。しかし、それは結局うまくいかず、物理としては捨て去られた。グリーンとシュヴァルツは、超対称性を取り込んだ弦理論、すなわち超弦理論は、スケールを 20 桁ダウンさせると、重力をも含む素粒子の統一理論になる可能性があることを発見した。摂動論で計算すると発散の困難がないということである。しかし、弦理論はアノマリー・フリーという条件から、コンシステントに理論が構成できる特定の次元数（臨界次元）が要請される。超弦理論の場合は時空が 10 次元でなければならない。すなわち、余次元 d は 6 になる。そこで、4 次元時空と 6 次元空間に分離し、後者はプランク・スケールになっているものという仮定を持ち込まざるを得なくなった。しかしこの仮定を認めれば、余次元空間は内部空間として利用できるもので、統一理論の候補としては都合がよくなる。

超弦理論の流行は 1990 年頃いったん収束に向かうようにみえたが、1995 年ボルチンスキー⁴⁾ が D -ブレーンという概念を持ち込んだことから、流行が再燃した。 D -ブレーンは開弦の両端が乗っかるソリトンのようなものということで、 $D + 1$ 次元の時空のように振舞うと想定されているようである。具体的にどのように導出されるのかはよくわからない。 D -ブレーンの存在を認めると、余次元空間をプランク・スケールに丸めると仮定しなくても、 $D = 3$ の D -ブレーン（3-ブレーンという）の 1 つがわれわれの住む時空であると考えられる可能性がでてきた。閉弦は重力子に対応するので、重力だけがその 3-ブレーンの外へ自由に伝播できると考えられるらしい。

1998 年、この重力以外の相互作用がすべてわれわれの時空である 3-ブレーンに閉じ込められているという仮説を、超弦理論からはなれてカルーツァ・クライン型余次元理論に持ち込めば、余次元空間はプランク・スケールではなくて巨視的サイズでもいいという「大きな余次元」の理論が、アルカニハメド・ディモプロス・ドヴァリ⁵⁾ により提起された。4 次元理論である標準理論が実験的に確かめられている 10^{-17} cm くらいまでは、余次元の存在が素粒子の相互作用に顔を出すわけにはいかないが、重力だけは 10^{-1} cm 程度までしかニュートンの万有引力の法則が確かめられていないので、余次元空間のサイズはそれくらい以下だったら差し支えないというのである。大きな余次元空間を考えれば、上記の 3) の問題を解決するスケールを無理なく理論に持ち込める可能性があるというのである。さらにランドール・サンドラム⁶⁾ は、小さな余次元空間でも 10^{-17} cm くらいのスケールが実現できるようなモデルを提起した。彼らの 5 次元モデルでは、計量のブレーン部分に第 5 次元座標の指数関数である「ワーブ因子」を持ち込むが、われわれの住む 3-ブレーンでは、このときプランク・スケールに余次元空間のサイズ L の指数因子がかかるので、無理のない値の L で間に合うという。また指数因子のおかげで 4) の階層性の問題が解決できる可能性があるというわけである。

最近では、宇宙の暗黒物質の正体の解明にも余次元理論からのアプローチが提言されている。

3 余次元理論批判

余次元理論というものは、果たして物理として意味のあるものだろうか。まず理論的立場から検討してみよう。

はじめに述べたように、空間が3次元、時間が1次元であることは太古から知られている最も明白な物理的事実である。これに余剰の d 次元を付け加えることは、式の上では至極簡単なことだ。しかし、これは出発点そのものが自己矛盾した考え方なのである。もし余次元が通常の4次元時空と全く異質なものであるならば、それは単なる内部自由度の空間に過ぎないから、それを余次元と呼ぶのは正当ではない。従って、余次元が本当に余次元であるためには、 $4+d$ 次元という高次元空間における対称性がなくてはならない。しかし、もしそのような高次元対称性があれば、明白に現実と矛盾する。出発点の作用積分が完全に高次元対称であっても、自発的対称性の破れによって余次元が見えなくなるというような夢物語は、まず実現不可能であろう。これが極めて難しいのは、4次元時空と d 次元内部空間との単純な積空間が実現しなければならないからである。つまり、4次元時空の各点における内部空間の構造が全く同一である理由を示すのは至難のわざである。

従って余次元理論の出発点は、結局中途半端なものにならざるを得ない。つまり、スタートするラグランジアン密度としては、 $4+d$ 次元対称なもの、たとえば $4+d$ 次元のアインシュタイン・ヒルベルトのラグランジアン密度を採用する。しかしながら、 d 次元に対しては、カルーツァ・クラインのように、全くなんらの論理的根拠もなく、都合のよいよう勝手に境界条件を課する。境界条件は、 $4+d$ 次元対称性をあからさまに壊すので、何のためにラグランジアンを $4+d$ 次元対称に選んだのか全くわけがわからない。作用積分が不変でないのならラグランジアン密度の方も不変でなくてもいいじゃないかと言っても、絶対にそれに対してまともな回答は返ってこないのである。つまり、余次元理論は、最初からつぎはぎ理論である。^{*2}

さらに、 $4+d$ 次元のような高次元の時空を考えると、 d の値とともに場の量子論の摂動論における紫外発散が強烈になっていく。4次元時空での重力場の量子論は、その摂動論がくりこみ不可能だから困るというのが超弦理論提起のさいの殺し文句だったはずだが、高次元時空では、重力場はおろか通常の素粒子の場に対する摂動論もくりこみ不可能になり、使い物にならなくなる。余次元理論ではすべて非摂動的に計算するのだというのなら、4次元の重力場の量子論は、摂動論でくりこみ不可能だから物理的意味がないなどと言うべきではないだろう。余次元理論の精神的支柱として超弦理論があるのだという言い分もあるらしいが、超弦理論のまともな非摂動的定式化は存在しないのだから、話にならない。

余次元空間がプランク・スケールにコンパクト化すると仮定する代わりに、4次元時空が高次

^{*2} このようなつぎはぎ理論がなぜ流行するのか不思議に思えるかもしれないが、次のように考えれば納得できる。すでに成功した理論を拡張する場合、単純に余分の自由度を導入するのは最も簡単な方法である。これなら誰にでもできる。しかも理論は最初からつぎはぎであるから、さらに勝手な仮定を追加することにもあまり抵抗感がない。従って、後からまた困ったことが出てきても、適当に辻褃合わせをやって逃れることができる。おまけに、大胆な仮説を導入した新理論であるとしてマスコミに宣伝できる。

元空間の中に浮かぶ 3-ブレインだと考える余次元理論でも、手で余次元を差別していることには変わりはない。だいたい超弦を考えないのに、3-ブレインだけをそこから無断で拝借してくるといのは理解できない。場の量子論の枠内でこういうことを考えるとどうなるだろうか。

さいわい、固体物理で現われる量子ホール効果^{*3}がこの問題の参考になる。量子ホール効果は空間 2 次元の電子系であって、3 次元時空の量子電磁力学によって実験結果を正しく説明することができる。この意味で 3 次元空間から 2 次元空間への相互作用の閉じ込めが実現している例とみなせる。しかし、ここに重要な例外がある。それはクーロン力である。クーロン力は空間の次元数を D とすると、 $1/r^{D-1}$ に比例するが、量子ホール効果の場合、 $D = 2$ の $1/r$ でなく $D = 3$ の $1/r^2$ に比例するクーロン力が働くとしなければ実験に合わない。つまり、クーロン力だけは 2 次元空間に閉じ込められないのである。なぜこのような違いがでるのだろうか。それは、クーロン力を伝達するのは、観測にかかる横波の光子ではなくて、絶対に観測にかからない縦波とスカラーの光子だからである。電磁場の共変的量子論によれば、これらの光子は観測にかかる確率が正確に 0 であることが証明されるのである。^{*4}この事実はブラックホールの場合にも見ることができる。ブラックホールの強大な重力のため、ブラックホール内で起こるいかなる物理的事象の情報も外には出られないが、しかしそれには 3 つだけ例外がある。それは、ブラックホールの質量と角運動量、それに電荷である。前 2 者の効果は観測にかからない重力子、後者の効果は観測にかからない光子によって伝達されるからである。^{*5}

結局、もしどうしても超弦理論の 3-ブレインのようなものを導入したければ、場の量子論としては、4 次元時空の理論に重力だけが伝播できる余次元空間をくっつけたようなものを考えるほかはないであろう。こんなおかしな場の量子論を作ろうと思ったら、重力場以外のすべての場は 4 次元時空 x^μ のみの関数で、重力場のみ余次元座標 y^m にも依存する $g_{MN}(x, y)$ (ここに $M = \{\mu, m\}$ など) であるとしても仮定するしかないと思われる。もしこのような理論を考えるのであれば、余次元理論などと言わずに、はじめから正直に重力場だけが内部自由度をもつ理論を考えると言明してほしいものである。

このタイプの理論では、余次元空間のサイズもしくは構造を利用して、 10^{-17} cm のオーダーの量を産み出すことができるのが、その利点と考えられている。だがそのためには、余次元方向にもわれわれの時空内で使っている尺度がそのまま使えるという仮定が必要である。しかし、重力以外のどんなものも使えない空間でどうやって距離を測ることができるのだろうか。まともな物理学的判断からすれば、このように絶対観測できない自由度がある場合は、その自由度はゲージ自由度のようにそれに依存しない結果のみが物理的に意味があるとするべきである。というこ

^{*3} 半導体-絶縁体界面や半導体のヘテロ接合などにより、電子が界面の 2 次元面内を運動するように設定し、その面に対して垂直方向から強磁場をかける。さらに、面内に電場をかけると、ローレンツ力により電流が流れるが、その比例係数である伝導度は一定間隔のとびとびの値しかとらない。これを量子ホール効果という。

^{*4} 電磁場の共変的量子論では、負ノルム状態の導入が不可避なので、負確率を避けるため補助条件というもので物理的状态を制限する。その結果、縦波光子とスカラー光子の特定の 1 次結合のみが物理的となる。この状態はノルムが 0、すなわち観測される確率は正確に 0 である。

^{*5} 万有引力を伝達する重力子がなぜブラックホールを脱出できるのか、よく分かっていない人が多いようである。これは電磁場の場合と同様に、重力波の重力子とは異なり、万有引力の重力子はノルムが 0 であるため、捉えられないからなのである。

とは、結局内部空間の存在は幻想であって、最初から手で 10^{-17}cm のスケールを持ち込むのと物理的に同じであるということになるのではないだろうか。

余次元を導入する人の言い分を聞いていると、積極的に余次元を導入すべき根拠は全くなくて、こういう仮定でなら余次元を考えても今のところまだ観測とは矛盾していないという消極的根拠のみである。物理学の進歩において、今までの理論になかった新しい概念を導入することは極めて大切である。しかしながら、そのためにはその新概念がもたらすご利益というか利点が十分大きなものでなくてはならない。余次元理論は、標準理論が含むパラメータの数を減らしたわけではなくて、別の形に言い方を変えただけである。いくつものパラメータを統一的に導出したという話は聞いたことがない。単なる言い換えのために見苦しい自由度を持ち込んだというのであれば、余計なお世話というものであろう。

4 余次元の存在への反証

余次元の効果が実験で全くつかまらなくても、「それを見るにはさらにエネルギーを上げる必要があります」と言って、いつまでもごまかし通せるものであろうか。直観的には、余次元の空間が十分小さければ、余次元がないのと同じに見えるはずだと信じられてきた。ところが最近、この信念は実は正しくないことが明らかになった。アインゴルン・ツークの画期的な論文^{7),8)}によれば、カルーツァ・クライン型の余次元理論（余次元空間は曲率が0の空間、すなわち d 次元トーラス）は、現在すでに確定している観測値によって、少なくとも重力の源が余次元方向の広がりを持たないとする場合、⁶⁾すべて排除されることが明らかになったのである。

よく知られているように、アインシュタインの一般相対論は、ニュートンの重力理論をその近似として含んでいるが、いくつかの現象でニュートン理論の値からのずれが予言される。その最も代表的なものは、水星の近日点移動である。水星の近日点移動はニュートン理論でも起こるが、その値は観測値とどうしても一致しないことが19世紀半ばルヴェリエによって指摘されていた。第一原理から論理的考察に基づいて構成され、なんらの新しいパラメータも導入しなかった一般相対論が、このずれ（角度にして100年間に約 $43''$ ）をピタリと導出したことは、まさに驚嘆すべきことであった。

アインゴルン・ツークは、この計算を空間が $D = 3 + d$ 次元の場合について行った。もちろん、余次元は天体観測にはありえないので、3次元空間の状況に引き戻して観測値と比較するわけである。彼らの結論によれば、水星の近日点移動は、余次元空間の体積には無関係であって、次元数 $3 + d$ のみに依存する（ d の有理関数）。そして、観測値は $d = 0$ 以外をすべて完全に排除するのである。具体的数値を挙げると、 $d = 0$ （4次元時空）のとき $42.94''$ 、 $d = 1$ （5次元時空）のとき $28.63''$ 、 $d = 6$ （超弦理論）のとき $18.40''$ ということで、 $d = 0$ 以外は観測値との不一致は誤差の範囲を大きく上回る。

⁶⁾ アインゴルン・ツーク⁸⁾ は、余次元方向の広がりがある場合についても議論している。この場合は観測と矛盾しないように調整する可能性をすべて否定するわけにはいかない。しかし、物体は余次元方向に広がりを持つということは、素粒子が余次元的方向を持つということである。すでに述べた如く、この可能性は標準理論により 10^{-17}cm まで排除されており、余次元理論のメリットは何もなくなる。

なぜ、彼らの結果が余次元空間の体積 V に全く依存しないかという点、3次元のニュートンの万有引力定数は、余次元理論での重力定数を V で割ったものの定数倍だからである。つまり V は万有引力定数の定義の中に取り込まれてしまい、じかには現われない。ある種のくりこみのようなもので、 V が無限小であろうと無限大であろうと、結果に影響しないのである。それではなぜ彼らの結果が次元数には依存するのだろうか。それは、アインシュタイン方程式が微分方程式であることと、非線形方程式であることに依ると考えられる。微分方程式は局所的であるから、それは余次元空間がいかに小さくとも全く関係ないのである。他方、アインシュタイン方程式をその左辺がリッチ・テンソルのみになる形に書き直すと、計量テンソル $g_{MN}(x, y)$ のトレースから次元数が出てくる。^{*7} 余次元がいかに小さくとも、このようにトレースを通じてそれが関係してくるのは非線形性のためであって、線形理論ではありえないことである。

なお、アインゴルドン・ツーク⁸⁾によれば、一般相対論による光の湾曲についても同様な結果が得られるということである。

以上により、カルーツァ・クライン型の余次元理論はほぼ完全に排除されることが明らかになった。余次元空間が大きな曲率をもつ場合はまだ排除されていないが、そういう高次元時空を導入するのは、カルーツァ・クライン型よりもさらに不自然な仮定を持ち込まなくてはならないであろう。

やっぱり、時空は4次元なのである。それで何も困ることはないのだ。

文 献

- 1) Th. Kaluza, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1921), 966 [和訳: 素粒子論研究 **67** (1983), 270].
- 2) O. Klein, Z. Phys. **37** (1926), 895 [和訳: 素粒子論研究 **68** (1983), 125].
- 3) Y. M. Cho and P. G. O. Freund, Phys. Rev. **D12** (1975), 1711.
- 4) J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **75** (1995), 4724.
- 5) N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B429** (1998), 263; Phys. Rev. **D59** (1999), 086004.
- 6) L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 3370; 4690.
- 7) M. Eingorn and A. Zhuk, arXiv:0912.2698v1 (2009).
- 8) M. Eingorn and A. Zhuk, arXiv:1003.5690v1 (2010).

解説記事

- 田中正「多次元統一場理論と素粒子」物理学最前線7(共立出版, 1984), 93.
 加藤正昭「カルーツァ・クライン理論」日本物理学会誌 **40** (1985), 119.
 山口昌弘「時空は4次元か? - 余次元の物理の可能性 -」日本物理学会誌 **55** (2000), 612.
 坂東昌子・九後汰一郎「5次元目の時空は存在するか?」パリティ **16** (2001), 6.
 今村洋介「素粒子と統一理論と時空」数理科学 **45** (2007), 32.
 松本重貴・瀬波大土「高次元理論と暗黒物質」日本物理学会誌 **63** (2008), 265.

余次元理論批判

- 中西 襄「Extra dimension は存在しうるのか」素粒子論研究 **101** (2000), 320; **102** (2001), 43.
 中西 襄「高次元時空を信ずる人に問う」素粒子論研究 **116** (2008), 3.

^{*7} $g^{MN}g_{MN} = 4 + d$.

Problematic aspect of extra dimensions (Ref. 7)

We show that in multidimensional Kaluza-Klein models the formula of the perihelion shift is $D\pi m'^2 c^2 r_g^2 / [2(D-2)M^2]$ where D is a total number of spatial dimensions. This expression demonstrates good agreement with experimental data only in the case of ordinary three-dimensional ($D = 3$) space. This result does not depend on the size of the extra dimensions. Therefore, considered multidimensional Kaluza-Klein models face a severe problem.

Classical tests of multidimensional gravity: negative result (Ref. 8)

In Kaluza-Klein model with toroidal extra dimensions, we obtain the metric coefficients in a weak field approximation for delta-shaped matter sources. These metric coefficients are applied to calculate the formulas for frequency shift, perihelion shift and deflection of light. In the leading order of approximation, the formula for frequency shift coincides with well known general relativity expression. However, for perihelion shift and light deflection we obtain formulas $D\pi r_g / [(D-2)a(1-e^2)]$ and $(D-1)r_g / [(D-2)\rho]$ respectively, where D is a total number of spatial dimensions. These expressions demonstrate good agreement with experimental data only in the case of ordinary three-dimensional ($D = 3$) space. This result does not depend on the size of the extra dimensions. We also obtain the exact 5-D soliton solution with correct non-relativistic Newtonian limit. The energy momentum tensor for the this solution has clear physical interpretation. However, the classical tests for this metric do not satisfy the experimental data. Therefore, considered multidimensional Kaluza-Klein models face a severe problem.