Open string vertex operators in the minimal string theory and matrix models

Goro Ishiki (CQUeST, Sogang Univ.)

Ishiki–Rim[1], PLB 694, 272 (2010)

Bourgine[1]–Ishiki–Rim[1], JHEP 1012, 46 (2010)

Bourgine[1]–Ishiki–Rim[1], arXiv:1012.1467 [hep-th]

Bourgine[1]–Ishiki–Kostov[2]–Rim[1], in progress

1: CQUeST, Sogang University
2: Saclay

Introduction

- Minimal string ＝ 2次元重力と結合したminimal model

$$Z = \int DgDX e^{-S[g,X]}$$

g_{ab} : world sheet metric　　X : minimal model matter

- MetricのconformalmodeはLiouville場と呼ばれる。$g_{ab} = e^{2b\phi}\hat{g}_{ab}$

$$Z = \sum_{\text{topology}} \int D\phi DX e^{-S_L[\phi] + \text{matter CFT} + \text{ghost}}$$

$$S_L[\phi] = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{M}} dx^2 \sqrt{\hat{g}}\left(\hat{g}^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + QR[\hat{g}]\phi + 4\pi\mu e^{2b\phi}\right)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathcal{M}} d\xi \hat{g}^{1/4}\left(QK[\hat{g}]\phi + 2\pi\mu_b e^{b\phi}\right)$$

$$c_\phi + c_{\text{matter}} + c_{\text{ghost}} = 0$$

$$Q = b + \frac{1}{b} \qquad c_\phi = 1 + 6Q^2$$

μ ： Bulk 宇宙定数
μ_b ：Boundary 宇宙定数

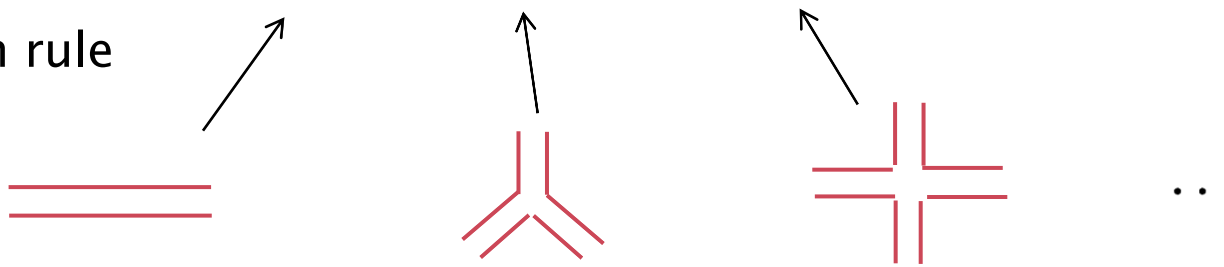
Matrix model formulation for noncritical string

Ex.) One matrix model ($\Leftrightarrow$ (2,2p+1) Minimal string)

$$e^{Z_{MM}} = \int DM e^{-\frac{N}{g}\mathrm{tr}V(M)}$$

$$\begin{cases} M: \quad N \times N \text{ Hermitian matrix} \\ V(M) := \frac{1}{2}M^2 + \frac{a}{3!}M^3 + \frac{b}{4!}M^4 + \cdots \end{cases}$$

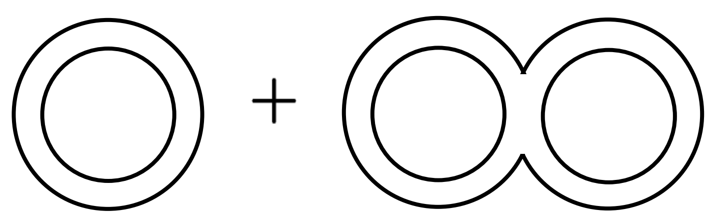
Feynman rule



Propagator

Interaction vertices

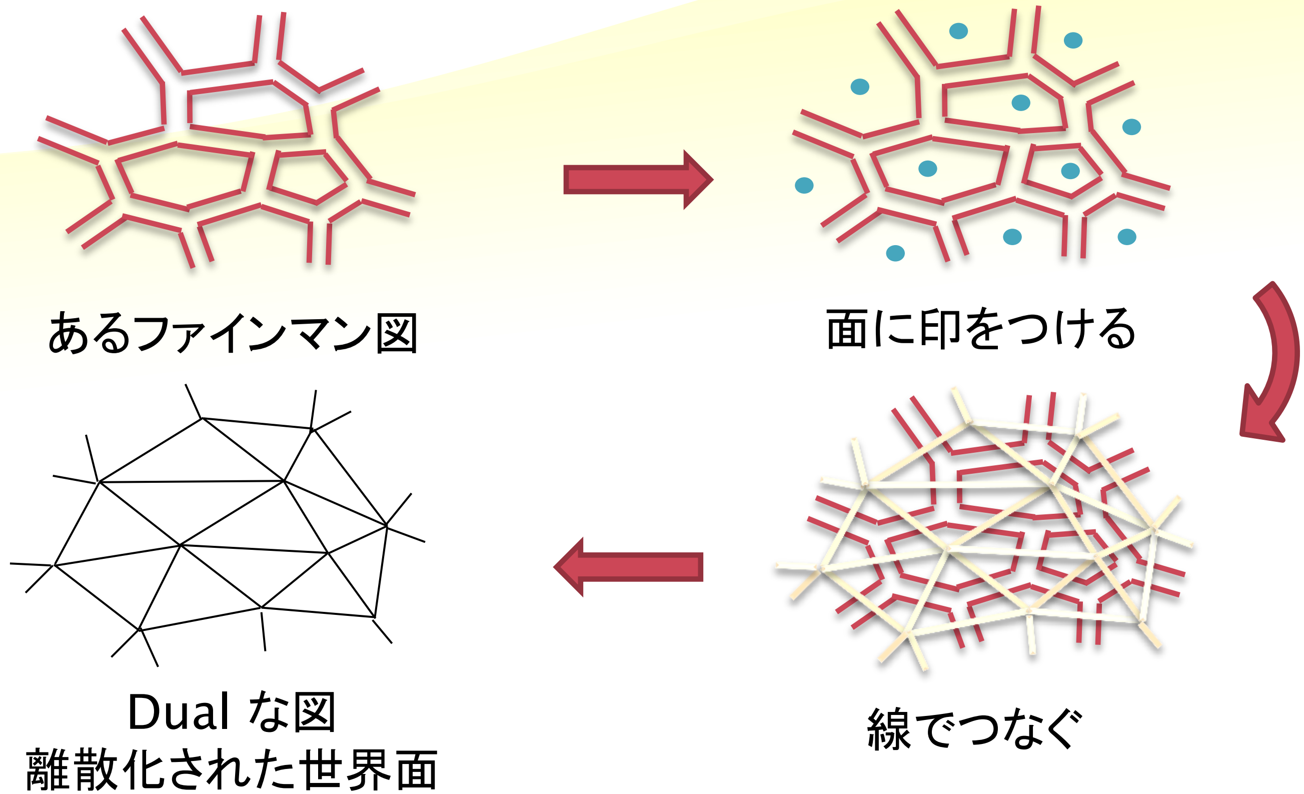
$$Z_{MM} = \sum_{\substack{\text{connected}\\ \text{Feynman}\\ \text{diagram}}} =$$



$+ \cdots$

Feynman diagrams as dynamical lattice

- ファインマン図は離散化された世界面と1:1対応している



ファインマン図の和 ⇔ 世界面の可能な離散化の方法についての和 (dynamical lattice)

$$Z_{MM} \to Z_{\text{2d gravity+matter}}$$

in the double scaling limit

$$\left(\begin{array}{l} N \to \infty, \quad g \to g_c \\ \text{with} \quad N(g-g_c)^{1-\gamma/2} \quad \text{fixed} \end{array} \right)$$

今日のお話の内容

- 開弦の頂点演算子(boundary operator)は行列模型ではどのように記述されるのか？

[cf. Hosomichi, Bourgine-Hosomich-Kostov]

- 行列模型からMinimal stringの相関関数が導出できるか？

[cf. Belavin-Zamolodchikov for bulk correlators]

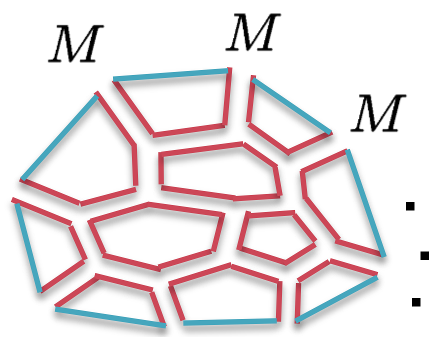
Resolventとは何か？

$$w(x) = \left\langle \mathrm{tr}\frac{1}{M-x} \right\rangle$$

x で積分したものを考える

$$Z \equiv \langle \mathrm{tr}\log(M-x) \rangle = \sum_n \frac{1}{n} x^{-n} \langle \mathrm{tr} M^n \rangle$$

$$= \sum_{\text{境界の長さ}} (\text{境界のある世界面})\, x^{-(\text{境界の長さ})}$$



trM^n を経路積分に挿入すると、
世界面には、長さnの境界ができる。

$$\Longrightarrow \quad Z \sim Z^{\text{disk}}_{(2,2p+1)MS}$$

x は境界の長さと結合するので境界の宇宙定数に対応

Resolventは分配関数の境界宇宙定数での一回微分

$$\Longrightarrow \quad w(x) \sim \int_{\partial\mathcal{M}} \langle e^{b\phi} \rangle^{\text{disk}}_{(2,2p+1)MS}$$

他の境界演算子・相関関数は行列模型では何か？

(1,n)プライマリ場

$$w(x) \sim \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \mathbf{1} \times e^{b\phi} \rangle^{\text{disk}}_{(2,2p+1)MS} = \langle B_{11} \rangle \qquad B_{1n} = \int_{\partial\mathcal{M}} \Phi_{1n} e^{\beta_{1n}\phi}$$

- 一般のnについて B_{1n} は行列模型ではどう記述されるのか？
- $\langle B_{1n_1} B_{1n_2} \cdots B_{1n_k} \rangle$ のような一般的な相関関数は記述できるか？

◆ 我々は以下のタイプの相関関数を考えた。

一点関数: $\left\langle \mathrm{tr} \dfrac{P_j}{F_\ell} \right\rangle$　二点関数: $\left\langle \mathrm{tr} \dfrac{P_j}{F_\ell} \dfrac{P_k}{F_m} \right\rangle$　等々

$$\begin{cases} P_j = \sum_{n=0}^{j} a_n M^n \\ F_\ell = \sum_{n=0}^{\ell} b_n M^n \end{cases}$$

以下の条件を解くことで、$\{a_i, b_i\}$ は二つの宇宙定数と関係づけられる。

$$\begin{cases} \langle B_{1n} \rangle = 0 & \text{for} \quad n \neq 1 \\ \langle B_{1n_1} B_{1n_2} \rangle = 0 & \text{for} \quad n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

[cf. Belavin-Zamolodchikov 09]

得られた結果

◆以下を満たす行列多項式 $F_\ell(x,M)$ と$P_j^{(\ell m)}(x,y,M)$ を得た。

$$\left\langle \mathrm{tr}\frac{1}{F_\ell(x)}P_j^{(\ell\ell)}(x,x)\right\rangle = \langle B_{1,2\ell-1-2j}\rangle$$

$$\left\langle \mathrm{tr}\frac{1}{F_\ell(x)}P_j^{(\ell m)}(x,y)\frac{1}{F_m(y)}P_k^{(m\ell)}(y,x)\right\rangle = \langle B_{1,\ell+m-1-2j}B_{1,\ell+m-1-2j}\rangle$$

◆具体形

$$F_\ell(x,M) = \prod_{j=1}^{\ell}(M-x_j)$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{\mu}\cosh(\pi b s) & \text{：境界の宇宙定数} \\ x_j = \sqrt{\mu}\cosh(\pi b s + i\pi b^2 j) \end{cases}$$

$$P_0^{(\ell m)}(x,y,M) = 1 \qquad P_1(x,y,M) = M - \frac{[m-1]x + [\ell-1]y}{[\ell+m-2]}$$

$$P_2^{(\ell m)}(x,y,M) = M^2 - \frac{[2][m-2]x+[2][\ell-2]y}{[\ell+m-4]}M - \mu\sin^2\pi b^2\frac{[\ell-1][m-1]}{[\ell+m-3]}$$

$$+\frac{[m-1][m-2]x^2+[\ell-1][\ell-2]y^2+[2][\ell-2][m-2]xy}{[\ell+m-3][\ell+m-4]} \qquad \text{etc...}$$

$$[n] \equiv \frac{q^n - q^{-n}}{q-q^{-1}} \qquad q = e^{\frac{2\pi i}{2p+1}}$$

Summary

- Disk上の(2,2p+1) minimal string理論における開弦の頂点演算子の行列模型における記述を発見した。
- 一点関数・二点関数は行列模型から正しく再現された。
- 三点関数も簡単な場合に再現されることを確かめた。$\langle B_{11}B_{12}B_{12}\rangle$
- $F_\ell(x,M)$ は $(1,\ell)$ Cardy状態を記述していることが分かる。
→FZZT braneの行列模型での定義を与えている。
- Two matrix model (⇔(p,q) minimal string) の場合でも同様の記述を与えた。

Outlook

- 多点関数も正しく計算できるか？Bulk–Boundaryの２点関数はどうか？[Hosomichi]
- Cylinder等の場合に素朴に拡張。 [cf. Anazawa–Itoyama, Anazawa–Ishikawa–Itoyama]
- 他の行列模型の場合への適用。Multi matrix modelやO(n)行列模型。

[J.E.Bourgine–G.Ishiki–I.Kostov–C.Rim, in progress]