零エントロピーの臨界ブラックホールに現れる AdS_3 構造 および Kerr/CFT の非カイラル拡張について

京大基研　小川軌明

[arXiv:1010.4291] & [1012:xxxx] (To appear soon...)

共同研究者:畔柳竜生氏(京大理)・寺嶋靖治氏(基研)

理研シンポジウム「場と弦の理論の新展開に向けて」2010
長時間講演
2010 年12月18日

前回のあらすじ

予想A

Kerr/CFT の背後には非カイラル CFT が存在。
「カイラル CFT 」はその片方だけを見ている。

きっと Dual !

予想B

臨界 BH の近ホライズン時空の背後には
AdS3 構造が存在する。

[畔柳 - 小川 - 寺嶋 , 1010.4291]

結果1

臨界 BH の近ホライズン時空には
<u>零エントロピー極限では必ず</u>
AdS_3 構造が存在する。

臨界（零温度）ブラックホールの AdS/CFT 対応（ Kerr/CFT ）

ビラソロ代数　x 1

AdS/CFT

2 次元カイラル CFT ！

熱的 Cardy 公式

$$\boldsymbol{S_{\mathrm{CFT}} = \frac{\pi^2}{3} c T_{\mathrm{FT}}}$$

$$\boldsymbol{S_{\mathrm{BH}} = S_{\mathrm{CFT}}} \textbf{ !}$$

「カイラル CFT 」で本当にいいのか？

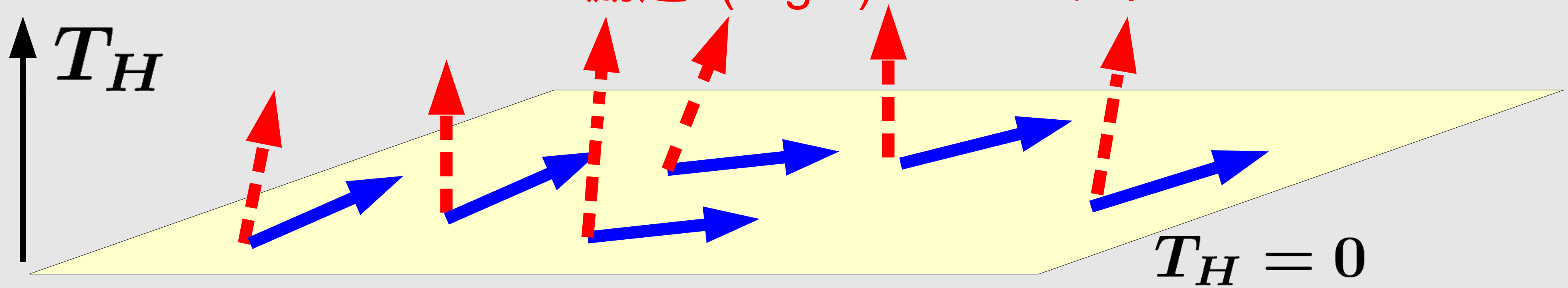
Cardy 公式とか使ってるし。。。　← モジュラー不変性が必要。

<u>予想A</u>

**背後には非カイラル CFT が存在。
Kerr/CFT ではその片方を見ている。**

- 原論文で当初から予想 [Guica-Hartman-Song-Strominger, 0809.4266]
- もう片割れは、臨界（零温度）からの励起に対応するだろう。

T_H ↗ 励起 (Right)：ニュータイプ



Kerr/CFT (Left)：地球連邦のモグラども

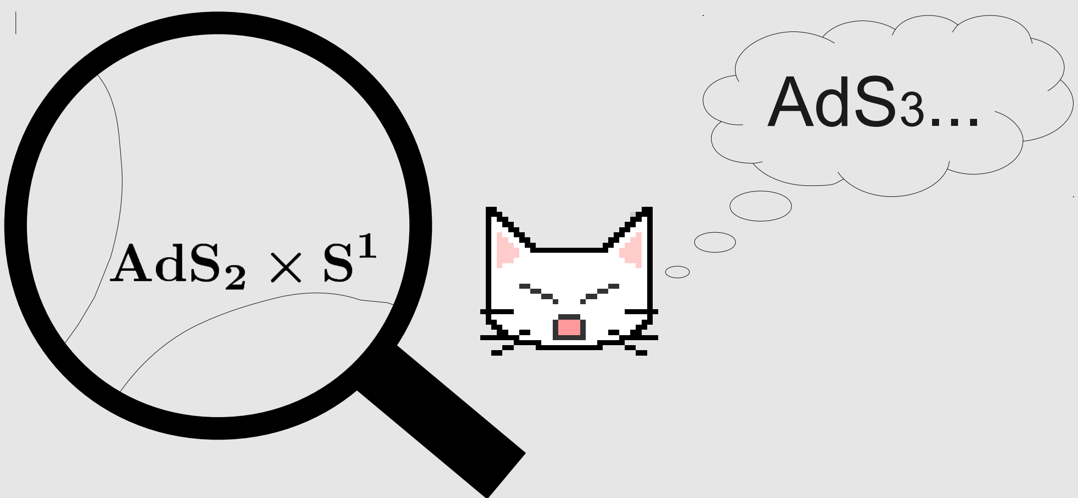
では、重力側は？

「予想Ａ」の重力双対を考えると。。。。

予想B

臨界 BH の近ホライズン時空の背後に AdS_3 構造が存在する。

- これがわかれば予想Ａにも大きく前進できるはず。
- 場の EoM でごく一部見える？ [Castro-Maloney-Strominger, 1004.0996]
- String duality で強引に出したりしてみた → 失敗 [春の学会発表]



零エントロピー極限

結果1

そして今回の我々の結果その1:　[畔柳 - 小川 - 寺嶋 , 1010.4291]

臨界 BH の近ホライズン時空には
零エントロピー極限では必ず
AdS3 構造が存在する。

近ホライズン計量

$$A(\theta)^2[-r^2dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + B(\theta)^2(\phi + krdt)^2] + F(\theta)^2d\theta^2$$

ここから AdS3 が出るのは $B(\theta) \to 1/k$ のとき

これは $B(\theta) \to 0$ で時空が潰れない条件

（$r \sim r'/B(\theta)$ の scaling が可能）として自動的に出る。

そしてそして、そうすると、

この極限では non-chiral Kerr/CFT がきっとある！

[畔柳 - 小川 - 寺嶋 , 1012.xxxx]

今回の結論

[畔柳 - 小川 - 寺嶋 , 1012.xxxx]

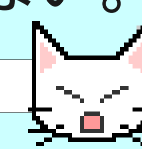
結論

零エントロピー極限の臨界 BH では
非カイラル Kerr/CFT が
自然に実現される!

AdS_3 構造の存在＋α により
零エントロピー極限では解決!

通常、Kerr/CFT を無理矢理に非カイラル拡張しようとすると、、、

問題1 物理量（ビラソロ荷）が発散し、まともな理論にならない。



問題2 新しく加わった右向きの自由度 c_R が 0 になる。

もくじ

- 臨界 BH の零エントロピー極限に現れる AdS_3 構造について
- Kerr/CFT のレビュー
- 臨界 BH の零エントロピー極限における Kerr/CFT の非カイラル拡張について
- まとめ

臨界 BH の零エントロピー極限に現れる AdS$_3$ 構造について

近ホライズン幾何と零エントロピー極限

近ホライズン計量（４Ｄ）の一般形

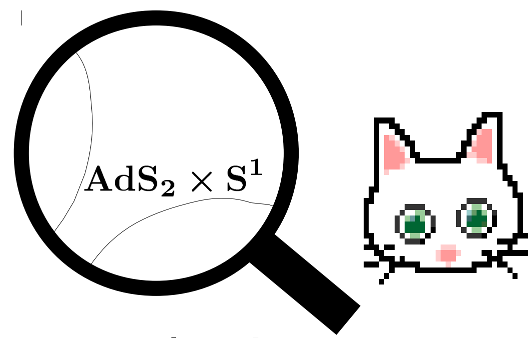
[Kunduri-Lucietti-Reall, 0705.4214]

$$ds^2 = A(\theta)^2\Big[\underbrace{-r^2dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + B(\theta)^2(d\phi - krdt)^2}_{\theta\text{-dep } S^1\text{-fibrated } AdS_2}\Big] + F(\theta)^2 d\theta^2$$

isometry は $\mathbf{SL(2,\mathbb{R}) \times U(1)_\phi}$

Bekenstein-Hawking エントロピー

$$S_{BH} = \frac{\pi}{2G_4}\int d\theta A(\theta)B(\theta)F(\theta)$$



ここで「零エントロピー極限」にはブラックホールでなくなる場合
（上の AdS_2 が潰れる場合）は含まない。　(例: Kerr BH)

AdS_2 が残る場合は、双対理論の存在を信じれば
零エントロピー極限でも異常なことは起こらないはず。

→（適当な座標のリスケールで）幾何自体は一般に正則と期待。

（証明はないので、現時点では仮定。既知の例ではいずれも成立）

零エントロピー極限での正則条件

$$\boldsymbol{ds^2 = A(\theta)^2\Big[-r^2dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + B(\theta)^2(d\phi - krdt)^2\Big] + F(\theta)^2 d\theta^2}$$

$$S_{BH} = \frac{\pi}{2G_4}\int d\theta A(\theta)B(\theta)F(\theta) \qquad \sqrt{-g}d^4x = A(\theta)^3B(\theta)F(\theta)dtdrd\theta d\phi$$

「零エントロピーで潰れない」ためには、まずは以下のようにするしかない。

$$B(\theta) = \epsilon B'(\theta), \quad r = \frac{r'}{\epsilon}, \quad \epsilon \to 0.$$

さらにこのとき、潰れず発散もしない条件は

$$k = \frac{k'}{\epsilon}, \quad B(\theta)k\ (= B'(\theta)k')\ = 1 + \epsilon^2 b(\theta)$$

するとこの極限では

$$\boldsymbol{ds^2 = A(\theta)^2\left(\frac{dr'^2}{r'^2} + 2b(\theta)r'^2dt^2 - \frac{2}{k'}r'dtd\phi\right) + F(\theta)^2 d\theta^2}$$

となり、確かに正則とわかる。 

AdS3 の出現

$$\boldsymbol{ds^2 = A(\theta)^2\Big[-r^2dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + B(\theta)^2(d\phi - krdt)^2\Big] + F(\theta)^2d\theta^2}$$

計量のパラメータに関するスケーリング

$$B(\theta) = \epsilon B'(\theta), \quad k = \frac{k'}{\epsilon}, \quad B(\theta)k\ (= B'(\theta)k')\ = 1 + \epsilon^2 b(\theta)$$

のもとで、回転座標のスケーリング

$$\phi' = \frac{\phi}{k} \quad (\phi' \sim \phi' + \frac{2\pi}{k})$$

を行うと、極限で

$$\boldsymbol{ds^2 = A(\theta)^2\Big[-r^2dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + (d\phi' - rdt)^2\Big] + F(\theta)^2d\theta^2}$$

つまり、

無限小オービフォールドされたAdS3 構造

が出る!

AdS3 とオービフォールドついて

よく見る形

$$ds^2 = -\rho^2 d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2} + \rho^2 d\psi^2 \quad (\psi \sim \psi + 2\pi\ell)$$

境界は（ミンコフスキが割られて）ローレンツ円筒
→ 別にふつう

今回登場している形

$$ds^2 = -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + (d\phi - r dt)^2 \quad (\phi \sim \phi + 2\pi\ell)$$

境界は？

同じく局所的にはミンコフスキだが、割られ方が違う
→ 実は Lindler → 有限温度！

いくつか注意

- ここでは最も簡単な４次元を紹介しましたが、
  ５次元も (途中複雑ですが) 同じ結果が示せます。

- 具体例は従来いくつか知られていました。[Guica-Strominger, Nakayama,...]
  それが実は一般に言えるというのが今回の結果。

- （ AdS_2 が潰れない)「零エントロピー」条件は、
  どんな BH でも満たせるものではありません。
  Kerr, Kerr-Newman 等は駄目です。
  例は４次元 Kaluza-Klein BH 、５次元 Myers-Perry など。

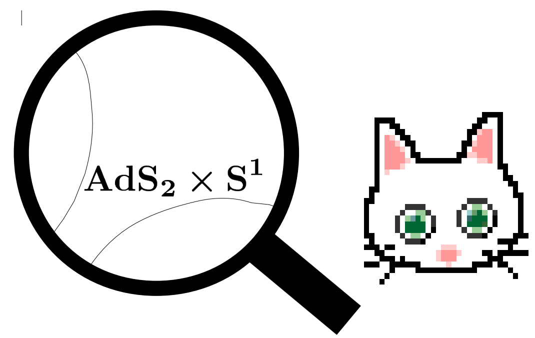
Kerr/CFTのレビュー

境界条件と漸近対称性

近ホライズン計量

$$ds^2 = A(\theta)^2 \underline{\Big[- r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + B(\theta)^2 (d\phi - k r dt)^2 \Big]} + F(\theta)^2 d\theta^2$$

θ-dep S^1-fibrated AdS_2　　isometry は $\mathbf{SL(2,\mathbb{R}) \times U(1)_\phi}$



Kerr/CFT 境界条件

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} r^2 & r^{-2} & r^{-1} & 1 \\ & r^{-3} & r^{-2} & r^{-1} \\ & & r^{-1} & r^{-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$r \to \infty$ でこれを保つ一般座標変換の生成子

$$\xi_n^L = -e^{-in\phi}(inr\partial_r + \partial_\phi) \qquad \xi_0^R = -\partial_t$$

$$[\xi_m^L, \xi_n^L]_{Lie} = -i(m-n)\xi_{m+n}^L$$

この Virasoro は U(1)ϕ の拡大になっている。

漸近ネーター荷とAdS/CFT

双対理論のビラソロ荷などのチャージは、重力側の漸近ネーター荷

$$Q_\xi = \int_{\partial\Sigma} k_\xi[h;\bar{g}]$$

と対応。

$$k_\xi[h;\bar{g}] = -\frac{\sqrt{-\bar{g}}}{16\pi}\Big[\bar{D}^{[\nu}(h\xi^{\mu]}) + \bar{D}_\sigma(h^{[\mu\sigma}\xi^{\nu]}) + \bar{D}^{[\mu}(h^{\nu]\sigma}\xi_\sigma) + \frac{3}{2}h\bar{D}^{[\mu}\xi^{\nu]} + \frac{3}{2}h^{\sigma[\mu}\bar{D}^{\nu]}\xi_\sigma + \frac{3}{2}h^{[\nu\sigma}\bar{D}_\sigma\xi^{\mu]}\Big](d^{D-2}x)_{\mu\nu}$$

理論がまともなためには、漸近対称性に対応する漸近ネーター荷が境界条件の範囲で有限であることが必要。

今の場合、$\boldsymbol{Q_{\xi_0^R}}$ は発散 → 追加で条件を課して止める。

ポアソン括弧は

$$\{Q_\xi, Q_\eta\}_{PB} = Q_{[\xi,\eta]_{Lie}} + \underbrace{\int_{\partial\Sigma} k_\eta[\pounds_\xi\bar{g}, \bar{g}]}_{\text{中心拡大項}}$$

で計算される。

臨界 BH の零エントロピー極限における Kerr/CFT の非カイラル拡張について

非カイラル Kerr/CFT の試みと問題

左向きと同様に $\xi_0^R = -\partial_t$ の生成する U(1) を拡大して
右向き Virasoro を作る試みはいくつか行われてきた。

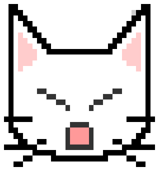
[Matsuo-Tsukioka-Yool, 0907.4272]

Kerr/CFT の境界条件を少し修正することにより、漸近対称性が

$$\xi_n^L = -e^{-in\phi}(inr\partial_r + \partial_\phi) \qquad \xi_n^R = -e^{-int/R_t}(inr\partial_r + R_t\partial_t)$$

の2つのビラソロから成るようにできる。

しかし!



- 境界条件は Kerr/CFT と概ね一緒
  → 右向きのビラソロ荷は全部発散する。 (問題1)
- 右向きビラソロの中心拡大項を実際に計算
  → c= 0になる。自由度を持たないことに。。 (問題2)

AdS3 では解決されるか？(1)

問題1 物理量（ビラソロ荷）が発散し、まともな理論にならない。

AdS3 構造を含む近ホライズン型計量

$$\boldsymbol{ds^2 = A(\theta)^2\left[-r^2dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + (d\phi - r\,dt)^2\right] + F(\theta)^2 d\theta^2}$$

$$\boldsymbol{(t,\phi) \sim (t, \phi + 2\pi\ell)}$$

境界条件

$$h_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} \color{red}{1} & r^{-1} & 1 & 1 \\ & r^{-3} & r^{-2} & r^{-1} \\ & & r^{-1} & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

漸近対称性

$$\boldsymbol{\xi_n^L = -e^{-in\phi/\ell}(inr\partial_r + \ell\partial_\phi)}$$

$$\boldsymbol{\xi_n^R = -e^{-int/R_t}(inr\partial_r + R_t\partial_t)}$$

穏やかな境界条件を課せるようになり、
全てのビラソロ荷は有限に保たれる！

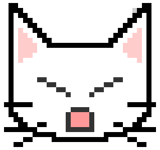
AdS3 では解決されるか？(2)

問題2 新しく加わった右向きの自由度c_Rが 0 になる。

ここで、、、

- 計量自体は、単に特殊な場合を考えているに過ぎない。
- セントラルチャージは境界条件に直接は依存しない。

- やはり　$c_R = 0$　になる。



- なぜ？ 境界は局所的には普通の AdS3

$$ds^2 = -\rho^2 d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2} + \rho^2 d\psi^2$$

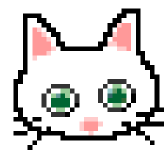
と一緒 → 境界理論の局所量である c は変わらないはず???

時間断面の正則化

もう一度、計量をよく眺めてみる。

$$\boldsymbol{ds^2 = A(\theta)^2\left[\frac{dr^2}{r^2} - 2r\,dt\,d\phi + d\phi^2\right] + F(\theta)^2 d\theta^2}$$

境界上で時間断面を見ると、
極限で light-like になっている。
(null-orbifold)



このせいで荷電(漸近ネーター荷電)の定義がおかしくなっているのでは?

時間断面を space-like にする正則化を考える。

$$t' \equiv t + \alpha\phi, \quad \phi' \equiv \phi, \quad (t', \phi') \sim (t', \phi' + 2\pi\ell)$$

と周期性を変更。

計算の最後に $\boldsymbol{\alpha \to 0}$ 極限をとる。

時間断面の正則化（つづき）

$$ds^2 = A(\theta)^2\left[\frac{dr^2}{r^2} - 2r\,dt' d\phi' + (1+2\alpha r)d\phi'^2\right] + F(\theta)^2 d\theta^2$$

$t = t' - \alpha\phi$　より、手で入れなくとも t の周期性が自動的に決まる。

あらためてセントラルチャージを計算。

$$c_R = c_L = \frac{3}{G_4}\int d\theta\, A(\theta)F(\theta)\ !!!$$

（ビラソロ荷電の有限性が壊れないことも確認した。）

やはり非カイラル Kerr/CFT はあった！

正則化は自然な操作か？

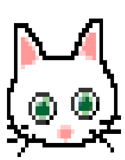
実は正則化パラメータ α は、
ブラックホールからの近ホライズン極限操作に起源を見出せる。

上では先に近ホライズンを取り切ってから零エントロピー極限を
考えたが、2 つを同時に考えると

$$\boldsymbol{ds^2 = A(\theta)^2\left[\frac{dr^2}{r^2} - 2r\,dt'd\phi' + (1{\color{red}+Cr})d\phi'^2\right] + F(\theta)^2 d\theta^2}$$

ここで $\color{red}\boldsymbol{C \equiv \lim \frac{\lambda}{\epsilon}}$

λ：近ホライズンのスケーリング・パラメータ
ε：零エントロピーのスケーリング・パラメータ



この操作も零エントロピー近傍（展開）でのみ可能なことに注意。
上の極限で、C は残すが他の λ 正巾項は全て落としている。

cf. [Matsuo-Nishioka, 1010.4549]

$\boldsymbol{\alpha = C/2}$ と同一視できる！

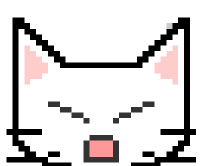
まとめ

- BH が零エントロピーで潰れないとき、
  近ホライズンには (無限小に割られた) AdS$_3$ が現れる。

- この極限で、Kerr/CFT は非カイラルに拡張される

- 近ホライズンに由来する正則化の導入
  → 有限かつ等しいセントラルチャージ

- (各極限のとり方がちょっと微妙？ → もう少し詰める。)



おわり

著作権に関する表記

猫イラスト（）

（c）ねこのおしごと　http://members.jcom.home.ne.jp/0412269401/