

ゲージ・重力対応とその応用¹

京都大学大学院理学研究科 中村 真²

概要

この講義では、ゲージ・重力対応 (AdS/CFT 対応) とその応用について、主に素粒子現象論の専門家を対象に解説を行いました。ゲージ・重力対応とは強結合量子ゲージ理論と高次元の古典重力理論という、一見全く異なる理論間の対応関係です。しかし、弦理論に基づいて一つ一つ順序だてて考えていくと、この対応に自然にたどり着くことができます。講義では、このような基本的考え方を、古典場の理論のアナロジーを交えながら直観的な理解を重視する形で説明しました。講義後半では、この技術が超弦理論以外のどのような物理に応用され得るのか、いくつかの例 (QCD への応用、および非平衡物理への応用) を交えて概説しました。

目次

1	ゲージ・重力対応の基本思想	2
1.1	基本的考え方：場の理論でのアナロジー	2
1.1.1	Euclidean ϕ^3 -理論	3
1.2	超弦理論での考察	5
1.2.1	二つの真空	5
1.2.2	tadpole ダイアグラム：D-brane	6
1.2.3	真空 A 上での記述：closed string + D3-brane	8
1.2.4	真空 A から真空 B へ	9
1.2.5	Near-horizon 極限	10
1.2.6	対応の確認	12
1.2.7	ゲージ・重力対応が予想である理由	13
1.3	対応に対する制限と正確な対応	14
1.3.1	強結合極限 ($g_{YM}^2 N_c \gg 1$)	14
1.3.2	large- N_c 極限	14
1.3.3	ゲージ群： $U(N_c) \rightarrow SU(N_c)$	15
1.3.4	コメント	16
1.4	より一般的な表現	17
1.4.1	$AdS_5 \times S^5$ 以外の時空：真空あるいは相の一般化	17
1.4.2	large- N_c や強結合の制限を超えて	19
2	ゲージ・重力対応の辞書	19
2.1	AdS 時空の境界	20
2.2	GKP-Witten 処方	21
2.2.1	ホログラフィックな繰り込み	25
2.2.2	重力時空の 5 番目の座標の意味	26
2.2.3	Glueball の質量スペクトル	27

¹本稿は京都大学基礎物理学研究所・地域スクール (YITP-S-10-04) 「第 15 回 新潟・山形合宿」(開催地：福島県耶麻郡猪苗代町「国立磐梯少年交流の家」)において、2010 年 11 月 20 日、11 月 21 日の二日間にわたって行った講義の報告です。

²E-mail: nakamura@ruby.scphys.kyoto-u.ac.jp

3	有限温度の導入、相転移	29
3.1	2つの解	29
3.2	ブラックホールの古典的性質	30
3.3	閉じ込め・非閉じ込め相転移	31
4	QCD に向けて	32
4.1	pure Yang-Mills	32
4.2	クォークの導入	33
4.2.1	重力双対とプローブ近似	35
4.2.2	酒井・杉本モデル	36
4.3	課題	37
4.3.1	Witten 時空の課題	37
4.3.2	酒井・杉本モデルの課題	38
5	非平衡系への応用	38
5.1	実時間のブラックホール	38
5.2	非平衡定常系	39
6	結語	41

1 ゲージ・重力対応の基本思想

ゲージ・重力対応 (AdS/CFT 対応) とは、ある種の強く相互作用するゲージ場の量子論が、高次元の曲がった時空上の古典重力によって記述できるとする対応関係です。この対応の最も典型的な例としては、5次元 Anti de Sitter (AdS) 時空上の重力理論と4次元 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論 (SYM) との対応があります³。 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論は β 関数がゼロであることから、スケール不変、より正確には共形不変な理論、conformal field theory (CFT) です。

これが「AdS/CFT 対応」の名前の由来ですが、AdS ではない時空と、CFT ではない場の理論の対応も考えられています。実際、場の理論側が CFT であることや、重力理論側の時空が AdS であることは、対応の成立に必ずしも必要ではありません。この事実を念頭に、より一般性を感じさせる呼び方として「ゲージ・重力対応」や「ホログラフィー」などの呼び方もあり、本稿では、「ゲージ・重力対応」の呼称を採用します。なお、本講義で扱う理論形式は超弦理論に立脚したいわゆるトップダウン・アプローチであり、現象論的なボトムアップ・アプローチには触れません。

1.1 基本的考え方：場の理論でのアナロジー

ゲージ・重力対応は、強結合ゲージ理論の量子論的期待値の計算が、重力側の古典的計算により遂行できてしまうことを主張します。いったいどのような事情でそのようなことが可能になるのでしょうか？私の理解では、ゲージ・重力対応の基本的アイデアは以下のように単純なものです。

同じ物理量を、異なる真空上で定義された二つの異なる摂動論で別々に計算し、比較しているに過ぎない。

³双方の理論のより正確な記述は後で述べます。

同じ物理量の計算を行っているので、計算結果が一致するのは当たり前です。しかし途中の計算手法は二つの摂動論の間で大幅に異なります。ここで「摂動論」と言いましたが、これは超弦理論の摂動論の意味です。超弦理論はゲージ理論と重力理論を統一している理論ですので、真空の選び方に応じて基本的自由度がゲージ理論であったり重力理論であったりします。より具体的には、ある真空では「重力理論およびゲージ理論」が、別の真空では「重力理論のみ」が低エネルギーの基本自由度として現れる、といったことが起こります。これら二つの真空上で構成した二つの異なる弦の摂動論を用いて同じ物理量を計算すると、一方の計算はゲージ理論の自由度を含んだ計算、他方は重力理論のみに立脚した計算となりますが、当然答えは一致します。これがゲージ・重力対応の基本です。1章ではこの考え方を重点的に説明します。

1.1.1 Euclidean ϕ^3 -理論

上で述べたように、「同じ物理量を、異なる真空で定義された二つの摂動論で計算すると、答えは一致するが途中の計算手法が大幅に異なる」例は単純な古典的場の理論にも存在します。まず、この考え方のヒントを探るために、場の理論における例を復習してみたいと思います。例えば次のような Lagrangean 密度で定義される、Euclidean ϕ^3 -理論を考えます [1]。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V(\phi), \quad V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi^3. \quad (1)$$

$V(\phi)$ は下から bound されていませんが、今は古典的計算しかしませんので気にしないことにします。この理論の空間的に一様な古典解を求めるには $V'(\phi) = 0$ を解けば良く、解として $\phi = 0$ および $\phi = 2m^2/\lambda$ が得られます。これらの古典解を「真空」と呼ぶことにすると、2つの異なる真空があることとなります。今、Euclidean ですので、(1)の質量項の負符号は、 $\phi = 0$ 真空周りでは(質量)²が $-m^2$ であり tachyonic であることを意味します。一方 $\phi = 2m^2/\lambda$ の真空周りでは場を展開して質量項を読み取ると(質量)²は $+m^2$ です。これは $V(\phi)$ が「上下対称」であることから、すぐに判ります。

さてここで、 $\phi = 2m^2/\lambda$ の真空周りの物理量を計算するのに、次の二通りの計算を行って比較することにします:

- 1) $\phi = 0$ の真空 (真空 A とする) 周りの摂動論に立脚した計算。
- 2) $\phi = 2m^2/\lambda$ の真空 (真空 B とする) での摂動論を用いた計算。

真空 B 周りの物理量の計算ですので、方法 2) による計算は直接的であり単純です。問題は、方法 1) を用いてどのように計算を行うか、ということになります:

問題設定

$\phi = 0$ の真空 (真空 A) 周りの摂動論しか知らない者が、 $\phi = 2m^2/\lambda$ の真空 (真空 B) 周りの物理量を計算したいとする。どうするか?

ここで、二つの異なる真空どうしを結び付ける重要な役割を果たすのが、一点関数 = tadpole ダイアグラムです。(後述するように、超弦理論では、この tadpole ダイアグラムの役割を果たすのが D-brane になります。) 真空 A の視点では、場は B において期待値 $\langle\phi\rangle = 2m^2/\lambda$ を持っていますので、真空 A の摂動論の言葉では一点関数が存在しています。この一点関数は真空 A の摂動論ではどのように計算できるのでしょうか? 場の理論の標準的な手法としては $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - J\phi$ のように source J を導入し、生成汎関数 $S(J)$ を求めて $\langle\phi\rangle = \frac{\delta S(J)}{\delta J}|_{J \rightarrow 0}$ のようにして求めます。Feynman ダイア

$$\langle \phi \rangle = \downarrow_x^J + (-\lambda) \downarrow_x^J \downarrow_x^J + \dots \stackrel{\text{def}}{=} \bullet_w$$

図1: 1点関数(場の期待値)の計算

$$\bullet = \downarrow_x + \downarrow_x \downarrow_x$$

図2: consistency 条件(Schwinger-Dyson方程式)

$$\text{---} + \text{---} \downarrow_x + \text{---} \downarrow_x \downarrow_x + \dots$$

図3: 2点関数の計算

グラムの的には図1のように表現されます。このダイアグラムの無限和(つまり最右辺の weight w) を求めるには、もちろん「非摂動的な情報」が必要ですが、これは図2のような consistency 条件 (Schwinger-Dyson 方程式) から得られます。最終的に $J \rightarrow 0$ をとるため図2右辺第一項のグラフは無視すると、図2のグラフは以下の数式に翻訳されます。

$$\frac{1}{-m^2} w = \left(\frac{1}{-m^2} \right) (-\lambda) \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{-m^2} \right) w^2 \quad (2)$$

ここで真空 A における propagator は $1/(p^2 - m^2)$ (tachyonic な質量項に注意) ですが、tadpole に向かっての運動量流入が無いことから $1/(-m^2)$ となります。また右辺を $2!$ で割っているのはグラフの対称性で割っています。これを解くと $w = 0$ または $w = -2m^4/\lambda$ が得られ、一点関数(図1の最右辺)としては

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{-m^2} w = \begin{cases} 0 & (\text{真空 A 自身に対応}) \\ \frac{2m^2}{\lambda} & (\text{真空 B に対応}) \end{cases} \quad (3)$$

のように正しい答えが得られます。 $w = -2m^4/\lambda$ に関しては相互作用 λ の逆数に比例しており、確かに consistency 条件のおかげで非摂動的情報が得られていることに注意したいと思います。

それでは、これを用いて、真空 B まわりの 2 点関数を真空 A まわりの摂動論を用いて求めてみましょう。Feynman ダイアグラムとしては図3の無限個のダイアグラムの和となります。数式に翻訳すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p^2 - m^2} + \frac{1}{p^2 - m^2} \left[(-\lambda) \frac{2m^2}{\lambda} \frac{1}{p^2 - m^2} \right] + \frac{1}{p^2 - m^2} \left[(-\lambda) \frac{2m^2}{\lambda} \frac{1}{p^2 - m^2} \right]^2 + \dots \\ &= \frac{1}{p^2 - m^2} \left(\frac{1}{1 - \left[(-\lambda) \frac{2m^2}{\lambda} \frac{1}{p^2 - m^2} \right]} \right) = \frac{1}{p^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

このように真空 B まわりの propagator が正しく計算されます。もちろん、真空 B 周りでの (質量)² は m^2 であったので、真空 B まわりの摂動論を知っている者からすれば、右辺は B における propagator の定義を一つ書いて終わりのはずでした。以上の計算で行ったことをまとめると、以下のようになります。

まとめ

真空 A 周りの摂動論に、tadpole をあらゆる可能な方法で挿入した無限個のダイアグラムの和が、真空 B 周りの摂動論ではたった一本のダイアグラムで計算されてしまった。(この際、真空 A 周りの摂動論では tadpole と場の結合定数 w を決定する必要があり、その値は consistency 条件から非摂動的に求められた。)

実は、これがゲージ重力対応の考え方の基本となります。詳細は次節で説明しますが、同じことを超弦理論で行うと、「tadpole」が「D-brane」に、「tadpole と場の結合定数」が D-brane の「tension」に、「consistency 条件」が「modular 不変性」に置き換わります。そして「真空 A」は「平坦な 10 次元時空」、「真空 B」は「black brane 時空」という曲がった時空となり、「平坦な時空上で D-brane が介在する無限個のダイアグラムの和」は、「black brane 時空上の簡潔な計算」と等価である可能性が暗示されるのです。

1.2 超弦理論での考察

ここで、超弦理論の基本について必要な説明をしたいと思います。超弦理論では重力とゲージ理論を統一的に扱うことが可能となります。それは以下のような理由によります⁴。理論に登場する弦の形態としては、次の 2 種類が自然に導入されます。一つは輪ゴムのように閉じた closed string、他方は、線分のように二つの端点を持つ open string です。これらの弦は振動することが可能であり、「振動のしかた」の違いが弦の性質の違いとして現れます。弦の長さが無視出来、弦を点粒子とみなして差し支えない十分低エネルギー領域では、この振動の違いが、粒子の種類の区別となります。例えば低エネルギーでは、closed string は重力 (graviton) として、open string はゲージ粒子 (gluon に相当) として振舞うことが可能です⁵。closed string と open string の間には相互作用があり、例えば「open+open→closed」、「closed→open+open」のような反応を経て互いに移り合うことが可能です。このように、ゲージ場と重力が弦の理論として同一の枠組みで扱われます。なお、弦の量子化の整合性から、超弦理論は 10 次元時空上で定式化されています。

1.2.1 二つの真空

それでは、 ϕ^3 -理論での考察を超弦理論の立場で行うとどうなるでしょう。ここでは closed string のみで定義される type IIB 超弦理論の摂動論から出発させてください。この理論は closed string の理論、つまり重力を含む理論ですので、「真空」とは重力の方程式 = Einstein 方程式の解としての時空構造そのものを意味します。そこで「真空 A」や「真空 B」を探す作業は、この理論の解となる時空を探す作業となります。低エネルギーでは type IIB 超弦理論は type IIB 超重力理論 (一般相対性理論を拡張したもの) となることが知られており、この超重力理論の解は詳細に解析されて

⁴ここでは、type IIB superstring を念頭に置きます。

⁵他の場として振舞うことも可能ですが詳細は省きます。

います [6, 10]。そこで、まずは超重力理論の範囲で考えましょう。type IIB 超重力理論の解を与える 10 次元時空は複数存在します。そのうちここで有用となる解は以下の二つです。

- **平坦な時空 (真空 A とします) :**
トリビアルではありますが、説明上、計量を与えておきます。

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2 + dr^2 + r^2 d\Omega_5^2, \quad (5)$$

ここで $d\vec{x}^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ であり、 (t, \vec{x}) を除いた残りの 6 次元部分は極座標表示しています。半径方向を r で、残りの「角度部分」の体積要素を、5 次元単位球面の体積要素 $d\Omega_5$ を用いて表示しました。

- **black 3-brane 時空 (真空 B とします) [11] :**
black 3-brane 時空は電荷を持ったブラックホールのような⁶時空ですが、horizon (事象の地平線) は 3+1 次元方向に伸びており、直感的には 9+1 次元時空内の 3+1 次元の膜 (超平面) の形をしたブラックホールです。この black 3-brane 時空の計量は以下で与えられます :

$$ds^2 = H^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2),$$

$$H = 1 + \frac{r_0^4}{r^4}, \quad r_0 = (4\pi g_s N_c)^{1/4} l_s. \quad (6)$$

ここで現れる定数の説明は後ほど与えます。これは計量が r に依存する曲がった時空ですが、プレーン方向に相当する (t, \vec{x}) で張られる 3+1 次元方向には並進・回転・ブースト対称性が存在することが読み取れます。horizon の位置は $r = 0$ です。

1.2.2 tadpole ダイアグラム : D-brane

それでは、この「black 3-brane 時空」(真空 B に相当) 周りの物理を、「平坦な時空」(真空 A に相当) 周りの摂動論しか知らない者が記述したい場合、どのようにしたら良いでしょうか。ここで低エネルギー極限での超重力理論から、超弦理論に再び戻って考えることにします。平坦な時空上での弦の摂動論は完成しています。問題は、真空 B を再現するための tadpole ダイアグラムを、平坦な時空の弦の摂動論にどのように導入したら良いか、ということになります。この問題に明快な解答を与えたのが Polchinski[7, 8, 10] です。

closed string の tadpole としての D-brane

black 3-brane 時空は電荷を帯びたブラックホールの時空です。ここで、black 3-brane 時空が担う電荷は Ramond-Ramond charge (RR charge) と呼ばれるもので、これに結合するゲージ場は、Ramond-Ramond 場 (RR 場) という一般には高階のテンソル場です⁷。従って、「平坦な時空」の視点で black 3-brane 時空を眺めると、RR 場や graviton が期待値を持っています。弦理論の言葉では、graviton も RR 場も closed string で現わされますので、closed string が期待値を持っていることになります。質問は、closed string の tadpole ダイアグラムは何か?ということになります。この closed

⁶ここでは horizon の面積がゼロの場合を考えるため、このような曖昧な表現を採用しました。

⁷この RR 場は超重力理論に含まれる場の一つであり、ゲージ・重力対応の意味での「ゲージ場」とは全く異なりますので、混同しないよう注意が必要です。

string の tadpole ダイアグラムが D-brane です。つまり、D-brane は closed string を吸収したり放出したりする source であり、closed string が期待値を持っている状況を、平坦な時空中の弦の摂動論の枠内で表現します。例えば平坦な時空 (5) の $r = 0$ の位置に D-brane を挿入すると、それは (無限遠方の平坦な場所から見た時に) closed string すなわち graviton や RR 場が $r = 0$ の位置で期待値を持っている状況を表現します。

D-brane は一般に広がりを持った object です。例えば (5) の $r = 0$ の位置は全体の $9+1$ 次元時空のうちの $3+1$ 次元部分空間ですので、 $r = 0$ の位置に存在する D-brane は $3+1$ 次元的に広がりを持つ object です。一般に、 $p+1$ 次元の広がりを持つ D-brane を D_p -brane と呼びますので、ここで議論している D-brane は $D3$ -brane となります。

ここで black 3-brane 時空 (6) に目を移してみましょう。この時空は無限遠方 ($r \rightarrow \infty$) では (5) と同じ平坦な時空に漸近します。一方で $r = 0$ 付近では時空が曲がっており graviton が期待値を持っています。(RR 場に関しては省略していますが、同様に期待値を持っています。)そしてその期待値は $r = 0$ で与えられる $3+1$ 次元超平面近傍に分布しています。従って、 $D3$ -brane を (5) の $r = 0$ に挿入したものは、black 3-brane 時空 (6) を表現しているのではないのでしょうか。

実際に、Polchinski は、D-brane と closed string の結合定数を弦理論の枠組みで、以下で述べる modular 不変性を利用して計算し、D-brane のエネルギー密度 (tension) や RR 電荷を計算しました。その結果、tension と電荷の比が、知られていた超重力理論解 (例えば $D3$ -brane に対しては black 3-brane 解) の、無限遠から測った tension や RR 電荷の比と厳密に一致したのです。また D-brane は超弦理論での T-duality と呼ばれる双対性を open string も含めた形に一般化するなど、数々の整合性を満たします。このことから、D-brane は超重力理論の black brane 解を「平坦な時空中の弦の摂動論で」記述するための closed string の一点関数 = tadpole ダイアグラムであることが確立したのです。この描像では、D-brane は closed string を吸収・放出する source ですので、closed string のダイアグラム (より正確に言うと worldsheet : 伝搬する弦が sweep する $1+1$ 次元の軌跡) が D-brane で終端したり、D-brane から始まったりすることになります (図 4)。図 4 では板状の物体が D-brane、シリンダーのように描かれているのが closed string の伝搬であり、D-brane が closed string を吸収・放出する過程が表わされています。

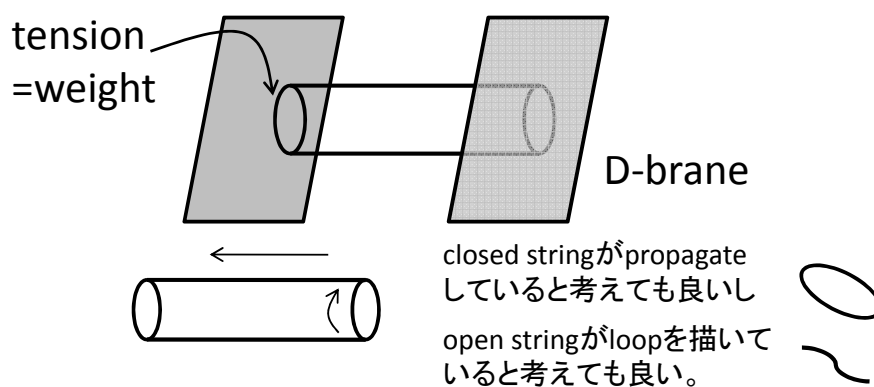


図4: Modular不変性

open string の端点としての D-brane

弦の worldsheet の理論は、その整合性のため、弦が張っている方向と伝搬する方向を入れ替える変換 (modular 変換の一つ) で理論が不変である必要があります。そこで、closed string が D-brane から吸収・放出されている worldsheet において、弦の伝搬方向と弦の伸びている方向を入れ替えてみましょう (図 4)。入れ替え前は D-brane に垂直な方向が伝搬方向、平行な方向が弦の方向でしたが、入れ替えによって弦の伝搬方向は D-brane に平行な方向、そして弦の伸びる方向は D-brane に対して垂直となります。この描像では、弦は D-brane に端点を持ち、そして弦の重心座標は D-brane の重心座標上を D-brane に平行な方向に動くこととなります。端点を持つ弦は open string ですので、まとめると、この描像では D-brane 上に open string が存在していることとなります。このような入れ替えの下で理論が不変であることを要請すると、もともと存在していた closed string に加えて、D-brane 上に open string が存在していることが必要とされるのです。もともとの type IIB 超弦理論は closed string のみの理論としてスタートしましたが、tadpole ダイアグラムである D-brane を導入すると、D-brane 上に open string の自由度が同時に導入されることとなります。

1.2 章の冒頭で、低エネルギーにおいて closed string は重力の自由度を、open string はゲージ理論の自由度を再現することをコメントしました。この意味で、D-brane 上にはゲージ理論が存在します。この一連の話の重要ポイントの一つは、平坦な時空上の 10 次元超重力理論に対する tadpole ダイアグラム = D3-brane を導入すると、3+1 次元部分空間上にゲージ理論の自由度が現れるという点です。このような描像は決して超重力理論の枠組みのみからは得られず、ゲージ理論と超重力理論を統一している超弦理論にいったん持ちあがることによって、初めて明らかとなる描像でした。

1.2.3 真空 A 上での記述 : closed string + D3-brane

それでは、真空 B = black 3-brane 時空上の物理を真空 A (平坦な時空) の弦の摂動論で記述するための考察を始めましょう。D-brane と closed string の間の結合定数 (ϕ^3 -理論の tadpole グラフの weight w に相当) は tension と呼ばれています。なぜなら D-brane と closed string の結合は、低エネルギーでは D-brane と graviton の結合となり、D-brane の単位体積あたりのエネルギーとみなすことが出来るからです。この tension を求める必要がありますが、これは ϕ^3 -理論同様、consistency 条件から求めることが出来ます。具体的には図 4 のグラフを考えます。ここで場の理論と違い、構成粒子を点粒子から弦に持ち上げたことから来る重要な性質として、modular 変換での不変性により次の 2 つの見方が可能となる点が挙げられます。図 4 は closed string が propagate する tree ダイアグラムだと考えることも出来ますし、2 枚の D-brane に端点を持つ open string が 1-loop を描くダイアグラムだと考えることも出来ます。整合性のためには両者の異なる考え方に基づく計算が一致しなければなりません。(modular 不変性。) この整合性から帰結される D3-brane の tension は

$$\tau_3 = \frac{1}{(2\pi)^3 g_s l_s^4} \quad (7)$$

で与えられます。ここで g_s は弦の coupling constant、 l_s は弦の長さスケールです。tension が g_s の逆数に比例していることから、これは非摂動的情報であることがわかります。ここで、 ϕ^3 -理論の Schwinger-Dyson 方程式で求めた weight w も λ の逆数に比例していたことを思い出しましょう。ここでいくつかコメントがあります。

- ゲージ理論の 1-loop ≈ 重力の tree

「open string の 1-loop」を「closed string の tree」と考えても良い事実は、低エネルギーの言葉では「ゲージ理論の 1-loop 計算」が「重力の tree の計算」と一致することを暗示しており、ゲージ・重力対応でゲージ理論側の量子論的計算が重力理論側の古典的計算で遂行可能なことの原因となっています。

- D3-brane 上のゲージ理論

D3-brane 上にはゲージ理論が存在すると述べましたが、このゲージ理論は具体的に $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論であることが、超弦理論の計算から判っています。また D-brane は RR charge を持ちますが、この charge が量子化されることから、D-brane には枚数の概念が成立し、D-brane を何枚重ねるかに応じて整数の RR charge を表現できます。 N_c 枚の D3-brane を重ねた場合、この D3-brane の集合の上にはゲージ群 $U(N_c)$ の $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論が存在します。なぜならば、open string の片方の端点が終端し得る D-brane の可能性として N_c 通りの可能性が、両方の端点を考慮すると open string としては N_c^2 通りの成分が存在することになります。低エネルギーのゲージ粒子の言葉では、adjoint 場 A_μ が N_c^2 通りの成分を持つことになり、これは $U(N_c)$ ゲージ理論のそれに対応するからです。また、D3-brane 上のゲージ理論の結合定数 g_{YM} と g_s の間には

$$2\pi g_s = g_{YM}^2 \quad (8)$$

の関係があります⁸。これは直感的には以下のように理解できます。D3-brane 上のゲージ理論の作用は D3-brane のエネルギー密度 (tension) つまり $\tau_3 \sim 1/g_s$ に比例するはずですが、一方でゲージ理論の作用は $1/g_{YM}^2$ に比例します。これらを比較することで、 $g_{YM}^2 \sim g_s$ の関係が存在することが理解できます。具体的導出は (17) から確認することができます。

1.2.4 真空 A から真空 B へ

それでは上記を用いて、 ϕ^3 -理論での考察を超弦理論の枠組みに置き換えてみましょう。今までの考察をまとめると、 ϕ^3 -理論での内容は表 1 のようにまとめられます。これを超弦理論の枠組みに置き換えると表 2 のようになり、場の理論のアナロジーを用いると、「平坦な時空まわりで、D3-brane を挿入した無限個のダイヤグラムの和」が「black 3-brane 時空まわりの、D3-brane なしの一本のダイヤグラム」で計算できてしまう場合があるのではないかと考えられます。D-brane 上にはゲージ理論

表 1: ϕ^3 -理論で真空 B まわりの物理を A、B、2 つの真空上で計算

	真空 A 上	真空 B 上
場の期待値	あり ($2m^2/\lambda$)	なし
tadpole	あり (weight: $w = -2m^4/\lambda$)	なし
計算	tadpole を挿入した無限個のダイヤグラムの和	tadpole なしの一本のダイヤグラム

が存在していましたので、低エネルギーの自由度で議論するとどうなるでしょう。すると、次のような大胆な推測が可能となってきます。

⁸ゲージ・重力対応の文献では、計算に現れる factor の煩雑さを避けるため「 g_{YM} 」を $g_{YM}^2 = 4\pi g_s$ で定義している文献が数多くあります。従って、常に notation を確認しておく必要があります。

表 2: black 3-brane 時空上の物理を 2 つの摂動論で記述

	A : 平坦な時空上	B : black 3-brane 時空上
場の期待値	あり	なし
tadpole: D3-brane	あり (tension: $\tau_3 \propto g_s^{-1}$)	なし
計算	D3-brane を挿入した 無限個のダイヤグラムの和	D3-brane なしの 一本のダイヤグラム
登場する massless 自由度	ゲージ理論 + 超重力理論	超重力理論のみ

推測

平坦な時空上の「ゲージ理論 + 超重力理論」の無限種類のダイヤグラムの足し上げが、曲がった時空である black 3-brane 時空まわりの「超重力理論のみ」の単純計算で遂行できてしまうのではないか。

この推測をさらに推し進めて具体化したのがゲージ・重力対応です。

1.2.5 Near-horizon 極限

しかしながら、ゲージ・重力対応をこの推測から導出するには、さらにもう 1 ステップ必要です。なぜならば表 2 の「平坦な時空」には、もともと存在していた 10 次元重力と D-brane 上の 4 次元ゲージ場が共存しているからです。もしゲージ理論のみに興味がある場合は、D-brane 以外の重力の自由度を切り離す、あるいは D-brane 上のゲージ理論の自由度のみを取り出す必要があります。

ゲージ理論の自由度は D-brane 上に局在しています。なぜならば open string の端点は D-brane から離れられないからです。より正確には、open string の端点以外の部分は弦の張力から決まる程度の長さ範囲で D-brane の周囲に分布していると言えるでしょう。一方、対応する black 3-brane 時空では、D3-brane のかわりに 3+1 次元方向に広がる horizon が存在し、graviton などの期待値もその周囲に分布しています。従って、A 描像の D3-brane の情報、つまりゲージ理論の情報は直観的に B 描像の horizon 近傍の重力自由度に対応しているのではないのでしょうか。この直観が正しければ、horizon 近傍の自由度のみ取り出せば、それは平坦な時空上のゲージ理論の自由度のみを抜き出すことにならないのでしょうか？ととりあえず、やってみましょう。

black 3-brane 時空の計量を再掲しておきます。

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= H^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \\
 H &= 1 + \frac{r_0^4}{r^4}, \quad r_0 = (4\pi g_s N_c)^{1/4} l_s = (2g_{YM}^2 N_c)^{1/4} l_s.
 \end{aligned} \tag{9}$$

ここで r_0 はこの時空の曲率等を定める典型的長さスケールであり、それは弦の長さスケール l_s と $g_s N_c$ で決まっています。ここで N_c は対応する D3-brane の枚数です。horizon は $r = 0$ に存在しますので、horizon 近傍の自由度を考えるために、 $r \rightarrow 0$ 極限をとってみましょう。ただし、この極限の取り方には注意が必要です。目的は A 描像における D3-brane 上の open string の自由度に対応するものを抽出することにありますので、open string が織りなす物理のエネルギースケールは保ちたいと思います。open string のエネルギーが高ければ、open string の端点以外の部分が振動により

D3-brane 外に「はみ出る」領域も大きくなるでしょう。直観的には、open string すなわちゲージ理論の考えるエネルギースケールが高ければ高いほど、D3-brane から離れた領域、つまり r の大きな領域も重要となります⁹。これらの事情により、Maldacena は次のような極限操作を提案しました。

$$r \rightarrow 0, \text{ with } \frac{r}{l_s^2} \equiv u = \text{fixed.} \quad (10)$$

この u 固定の意味は以下のようになります。まず次元解析から u はエネルギーの次元を持つことがわかります。何のエネルギーかと言うと、これは open string 理論のエネルギースケールに相当します。弦が D3-brane から外部に長さ r だけ伸びるためには、(張力) $\times r$ に相当するエネルギーが必要です。ここで弦の張力は $1/(2\pi l_s^2)$ で定義されています。従って u を固定することは、D3-brane から距離 r だけ伸びた弦のエネルギーを固定することに対応します。

この説明をより厳密化してみましょう。D3-brane 上に実現されている $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論はスケール不変な理論でしたので、上記で固定した「ゲージ理論側のエネルギースケール」について正確に考える必要があります。そこで、D3-brane 上の理論に取ってエネルギースケールを手で導入して、このエネルギースケールを固定する方法を考えましょう。具体的には、次のようなステップを踏みます。

1. N_c 枚の重なった D3-brane 上に実現される $U(N_c)$ ゲージ理論を考える代わりに、 $U(N_c) \times U(1)$ ゲージ理論から出発します。これは $N_c + 1$ 枚の重なった D3-brane 上に実現される $U(N_c + 1)$ ゲージ理論を考え、 $N_c + 1$ 枚の D3-brane を N_c 枚の重なった D3-brane の集団 (a) と、その集団から離れた 1 枚の D3-brane (b) に分離することで実現されます。この D-brane 上の理論では、(a)-(b) 間に張る open string がゲージ群を $U(N_c + 1) \rightarrow U(N_c) \times U(1)$ のように破る Higgs 場の役割を果たします。この Higgs 場の質量が、手で入れるエネルギースケールです。
2. まず、集団 (a) の D-brane の束を black 3-brane 時空 (9) に置き換えてみましょう。ここで N_c が十分大きいとすれば、集団 (a) が graviton に及ぼす寄与に比べて (b) の寄与が無視できますので (つまり (a) に比べて (b) が十分軽い)、(b) の D3-brane が black 3-brane 時空に与える影響は無視できます (プローブ近似¹⁰)。従って置き換え後の時空としては、black 3-brane 時空 (9) に 1 枚の D3-brane が原点から離れた位置 ($r = r_{(1)}$ とします) に挿入されている状況となります。もとの D3-brane の描像では、Higgs 場の質量、つまり (a)-(b) 間を張る open string の質量は「弦の張力 $\sim 1/l_s^2$ 」 \times 「(a)-(b) 間の距離」となります。そこで、置き換え後の描像での Higgs 場の質量を $\sim r_{(1)}/l_s^2$ とみなし¹¹、これを保ちながら $r \rightarrow 0$ の極限操作を行うことにします。このようにすると、Higgs 場の質量をある特定の値に保った $U(N_c) \times U(1)$ ゲージ理論の重力双対が得られます。
3. Higgs 場の質量は我々の問題設定に応じて任意に変化させることができますので、ここで論じた極限操作は任意の $r_{(1)}$ に対して可能であるべきです。従って自然なスケールリングとしては、 r 座標全体 (r 軸上の全ての点) について r/l_s^2 を固定するものとなります。このように考えると (10) に到達します。
4. 最後に、例えば Higgs の質量を無限大に持って行ったとしましょう。これは (b) の D3-brane の位置が無限遠にある場合に相当します。この場合 $U(N_c) \times U(1)$ ゲージ理論の $U(1)$ 部分は系 (a) から完全に decouple しており、残るゲージ群は

⁹このように述べた時点で、2.2.2 章で説明するゲージ・重力対応の「重力理論側の動径方向 \sim ゲージ理論のエネルギースケール」という見方が現れ始めているとも言えます。

¹⁰プローブ近似については 4.2.1 章でも詳しく述べます。

¹¹時空が曲がっていることを考慮すると、伸びた string のエネルギーの計算には一般に $\sqrt{g_{rr}g_{tt}}$ が入ってきますが、今の場合 $g_{rr}g_{tt} = 1$ です。

$U(N_c)$ となります。 N_c 枚の D-brane のみから出発して考えた当初のスケーリングは、このような状況だと考えることもできます。

このように、「 $r \rightarrow 0$ 極限はとるが、D3-brane 上の open string (ゲージ理論) の物理は保つ (open string のエネルギースケールは動かさない)」というメッセージが (10) には込められています。ここで、(10) を実現するためには $r \rightarrow 0$ と同時に $l_s \rightarrow 0$ もとらねばならないことに注意しましょう。この極限において

$$H = 1 + \frac{2g_{YM}^2 N_c l_s^4}{u^4 l_s^8} \rightarrow \frac{2g_{YM}^2 N_c}{u^4 l_s^4} \quad (11)$$

となります。当然、ゲージ理論の物理量である $g_{YM}^2 N_c$ はスケールさせずに保ちます。結果として、black 3-brane 時空は次の時空にスケールされます：

$$\frac{ds^2}{l_s^2} = \underbrace{\frac{u^2}{u_0^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2)}_{AdS_5} + \frac{u_0^2}{u^2} du^2 + \underbrace{u_0^2 d\Omega_5^2}_{S^5}, \quad (12)$$

ここで $u_0^4 = (r_0/l_s)^4 = 2g_{YM}^2 N_c$ としました。 S^5 の部分はもともと動径座標 r に依存していたのですが、極限をとった後ではこの依存性がキャンセルして、 u に依存しない一定半径 u_0 の 5 次元球面となっています。前半部分は、 AdS_5 時空 (5 次元 AdS 時空) そのものです。つまり AdS_5 時空との直積として S^5 が入ってきています。

ここで、時折耳にする誤解についてコメントしたいと思います。左辺を見て気づくことは、弦の長さスケール l_s は右辺の時空の長さの単位の役割を果たしています。従って、 l_s をどのような長さスケールに選ぶとも、右辺の時空構造そのものは変化せず、単に「単位」が変更を受けるだけです。それではこの「単位」はどのように選ぶのでしょうか？それは、自分が計算したいゲージ理論側のパラメータに合わせて、自分で設定すれば良いのです。良く耳にする誤解は、「 l_s は我々の世界のプランクスケール $\sim 10^{19}$ GeV に選ばねばならない」という誤った理解です。超弦理論を用いて我々の宇宙の統一理論を構成したいのであれば、 l_s はプランクスケール $\sim 10^{19}$ GeV に選ばねばなりません。しかし、今我々がここで行っていることは、統一理論の構築ではありません。超弦理論という「数学的道具」を活用して、ある摂動論を別の摂動論に — つまりゲージ理論を重力理論に — 書き換えているだけです。書き換え道具としての弦理論のパラメータは、記述しようとするゲージ理論に応じて設定すれば良いのです。実際にゲージ理論側の各種物理量を計算してみると、 l_s は g_s 等とうまく組み合わさって、結合定数などのゲージ理論の物理量に書き換えられることがわかります。 l_s の選択は、ゲージ理論側の 't Hooft 結合定数や (4 章で説明するような、CFT でない理論の場合は) 理論スケールなどを選択する形で、目的に則して行われることとなります。

1.2.6 対応の確認

この $AdS_5 \times S^5$ 時空上の重力理論が、はたして D3-brane 上の $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論に対応するのでしょうか？もしそうだとしたら、せめて両サイドで理論の対称性くらいは一致していないと困ります。はたして一致しているのでしょうか？

$\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の (bosonic な) 対称性は以下が知られています。

- Conformal 対称性

先に説明したように $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論は CFT であり、3+1 次元の conformal 群は $SO(4, 2)$ であることが知られています。

- R-対称性

$\mathcal{N} = 4$ SYM 理論には、超対称性が4つ存在します。この4種類の超対称性を適当な線形結合で組み換えても理論は不変であり、これがR-対称性です。具体的にはこの対称性は $SO(6)$ です。なぜならば、ゲージ場 A_μ に4種類の超対称変換を施して、ゲージ場 \rightarrow フェルミオンの操作を行うと、4種類のフェルミオンが得られます。これらを組み替える対称性は $SU(4) \simeq SO(6)$ です。さらに残りの3種類の超対称変換をさらに施してフェルミオン \rightarrow スカラー場の操作を施すと6個のスカラー場が得られます¹²。これら6個のスカラー場を組み替える対称性は、6成分の回転つまり $SO(6)$ となります。

それでは、 $SO(4, 2) \times SO(6)$ の対称性が $AdS_5 \times S^5$ 時空側に存在するのでしょうか？実は厳密に同じ対称性が存在します。 $SO(6)$ は5次元球面の回転対称性ですので、 S^5 部分の対称性で実現されています。 $SO(4, 2)$ については AdS_5 の対称性です。なぜならば AdS_5 時空は、時間方向が2つ入った6次元時空中の偽球面（双曲面）として構成できます。そのような時空の対称性は、時間方向が2つ、空間方向4つの空間の「回転」対称性ですので $SO(4, 2)$ です。これで両者の対称性が厳密に一致しました。ももとの black 3-brane 時空はこのような対称性を実現していませんでしたので、near-horizon 極限後に見られるこの一致は、大変非自明な一致であると言えます。

なお、 $SO(6)$ 対称性がR-対称性に対応することは、D3-brane の描像からより明確に理解できます。 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論に存在する6個のスカラー場は open string の振動形態としてどのように実現されるのか考えてみましょう。弦理論では、弦の振動形態の違いが粒子の違いを生み出します。今、10次元時空内のD3-brane 上の open string が振動可能な方向としては、当然10方向あります。（物理的振動のみ考える場合は、そのうちの2自由度はゲージ固定されます。）D3-brane が伸びている3+1次元方向に沿って弦が振動した場合、その振動方向は3+1次元内の回転に対してベクトルの変換を受けるため、このように振動している弦は3+1次元の視点ではベクトル場、つまり $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論のゲージ場 A_μ に相当します。（ゲージ固定される2自由度は A_μ のうちの2自由度に対応。）一方、振動可能方向として、D3-brane に垂直な6方向が残っています。この垂直方向に振動している弦は、3+1次元内の回転に対しては変換を受けないスカラー場として振る舞います。もちろん振動方向に応じて粒子の識別をしますので、このようなスカラー場が6種類あることとなります。この自由度が $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の6個のスカラー場として実現されます。上記では、R-対称性の変換により6個のスカラー場が互いに移りあうことを述べました。これはD3-brane に垂直な6つの振動方向が移りあうことを意味し、この変換はD3-brane の位置を原点とする極座標において、角度方向（ $d\Omega_5$ 方向）への時空の回転です。この回転対称性が S^5 の $SO(6)$ 対称性として実現されています。このように、 S^5 の $SO(6)$ 対称性は、確かにD3-brane の描像では6個のスカラー場を移り合わせる $SO(6)$ R-対称性に対応しているのです。

1.2.7 ゲージ・重力対応が予想である理由

ゲージ・重力対応は完全には証明されておらず、「予想」です。これが予想である理由として、私には二つの理由が思いつきます。

1. 超弦理論の closed string も含めた場の理論が完全には理解されておらず、「異なる真空を結び付ける操作」が、あくまで点粒子の場の理論からの類推でなされていることがあると思います。

¹² 4×3 を、最初と2回目の変換の入れ替え対称性 $2!$ で割る。

- ゲージ理論の自由度のみを切り出す目的の near horizon 極限で、ゲージ理論の自由度のみが本当に過不足なく抽出されていることの厳密な証明は無いように思います。

しかしながら、前者の問題に関しては、点粒子の場の理論で培われた経験に基づいた自然な類推ですし、後者の問題についても、少なくとも私には、「near horizon 極限」の考え方は大変自然です。これらの意味で、完全な証明は無いものの、ゲージ・重力対応は大変自然な対応だと思います。Maldacena の原論文 [2] の引用数は現在 7000 を突破しており、これら多くの仕事を通して明確な反例は見つかっていません。状況証拠としては、この対応を信じるに十分な検証がなされていると言って良いと思います。

1.3 対応に対する制限と正確な対応

$AdS_5 \times S^5$ 時空上の重力理論と $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の対応を技術的に計算可能な形で正当化するためには、さらに以下のような条件が必要となります。

1.3.1 強結合極限 ($g_{YM}^2 N_c \gg 1$)

ここまでの考察では、D-brane を挿入したのと等価な時空を探す際に、超弦理論ではなく超重力理論を用いました。なぜならば超重力理論は場の理論であり、様々な真空を探すのに適しているからです。超重力理論は弦を点粒子として扱う場合の有効理論であり、弦の長さが、考えるエネルギースケールよりも十分短い場合に成立する近似です。従って、この近似の範囲内で対応を議論する必要があります。一般に、超重力理論に対する、弦の長さ l_s の効果による補正は次のように入ります：

$$(\text{results from classical supergravity}) + O(\mathcal{R}l_s^2). \quad (13)$$

超重力理論による結果は、もとの超弦理論の結果を l_s で展開し、その leading をとってきたものと理解されますが、ポイントは、展開パラメータは無次元量でなくてはならないという点です。重力理論において次元を持つスカラー量は時空の曲率 \mathcal{R} であって、これは(長さ)⁻²の次元を持ちます。従って無次元展開パラメータとしては $\mathcal{R}l_s^2$ となります。つまり、「 l_s が小さい」とは、「 l_s が時空の典型的曲率スケールにくらべて小さい」と言うのが正確な言い方です。(12) の AdS 時空の場合、 $\mathcal{R} \sim r_0^{-2}$ で与えられます。従って、展開パラメータは $\mathcal{R}l_s^2 \sim u_0^{-2} \sim (g_{YM}^2 N_c)^{-1/2}$ で与えられ、確かに無次元量です。これにより、展開の高次が無視できる条件として $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c \gg 1$ が得られます。これはゲージ理論の 't Hooft coupling が大きい極限です。まとめると、超弦理論を超重力理論で近似する近似は、ゲージ理論側の 't Hooft coupling が大きい場合—強結合ゲージ理論—に対して妥当となります。ゲージ理論側が強結合になればなるほど重力理論側の扱いが容易となる(弦の効果を無視できる)構造は、注目に値します。

1.3.2 large- N_c 極限

弦理論は重力の量子論を含んでいますので、重力理論側も原理的には量子重力理論です。しかしながら、量子重力を解析するのは一般に困難です。従って重力理論側を古典理論に落として議論することが出来れば技術的に好都合です。実際、用いた

black 3-brane 解も重力の古典解ですので、この意味でも古典近似を正当化する必要
があります。超重力理論に対する量子補正は次のように入ります：

$$(\text{results from supergravity}) + O(\mathcal{R}^4 G_{10}). \quad (14)$$

ここで、 G_{10} は 10 次元超重力理論におけるニュートン定数であり、重力理論での loop 展開はニュートン定数による展開です。ここでも展開係数は無次元でなくてはなりません。10 次元のニュートン定数は (長さ)⁸ の次元を持ちますので、無次元化のために \mathcal{R}^4 が入ってきます。今、弦理論から導出される 10 次元ニュートン定数は $16\pi G_{10} = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8$ で得られます。一方、 $\mathcal{R}^4 \sim r_0^{-8} \sim g_s^2 N_c^2 l_s^8$ であることから、 $\mathcal{R}^4 G_{10} \sim 1/N_c^2$ がわかります。確かにこれは無次元量です。まとめると、重力理論側の loop 展開はゲージ理論の言葉での $1/N_c^2$ 展開に相当します。重力側の解析を古典範囲内に限りたい場合は、large- N_c ゲージ理論を考察し、 $1/N_c^2$ 展開の leading order に議論を限ることで正当化されます。ここで注意して頂きたいのは、closed string の loop (重力の loop) は抑制されますが、D-brane 上の open string の loop (closed string の tree) は、planar なダイアグラムについては生き残るといことです。つまり重力側は古典理論でも、ゲージ理論側は planar な loop は全て入った量子理論ということになります。重力理論側とゲージ理論側で \hbar の意味が異なっており、重力理論の \hbar はゲージ理論の $1/N_c^2$ に対応していたのです。

1.3.3 ゲージ群： $U(N_c) \rightarrow SU(N_c)$

N_c 枚の D3-brane 上の SYM のゲージ群は $U(N_c)$ でしたが、near-horizon 極限をとった後では、このうち $U(1)$ 部分が decouple して $SU(N_c)$ が自由度として残ることが知られています。ゲージ群が $U(N_c)$ か $SU(N_c)$ かの違いは、物理量の値としては $1/N_c^2$ 展開の sub-leading order での違いとなります。しかし $U(N_c)$ ゲージ理論には color singlet なバリオンが存在しませんが $SU(N_c)$ ゲージ理論には存在する、という定性的にも重要な違いがあることに留意しなければなりません。

$U(1)$ 部分が decouple していることは、直感的には以下のように理解できます。 $U(N_c)$ 群を $U(N_c) \cong U(1) \times SU(N_c)$ と分解して考えることにしましょう。この $U(1)$ セクターは free な理論です。なぜならば $\mathcal{N} = 4$ SYM には adjoint 場しか含まれておらず、いわばこの $U(1)$ 部分は「photon」(とその super-partner) のみの理論だからです。一方、 $\mathcal{N} = 4$ SYM は $AdS_5 \times S^5$ 上の重力理論に置き換わりました。この重力理論に「free なセクター」が存在するのでしょうか？答えは No です。なぜならば重力は全てのモードと相互作用するからです。このように考えると、重力理論側にはこの $U(1)$ セクターが含まれていないように思われます。そこでもう少し深く考えてみましょう。

この $U(1)$ セクターに含まれる場は「photon」 A_μ とその super-partner である 4 個のフェルミオンおよび 6 個のスカラー場 $X_{(i)}$ ($i = 1, \dots, 6$) です。D3-brane の描像ではこのスカラー場は D3-brane に垂直な 6 方向への open string の振動モードでした。このモード $X_{(i)}$ が期待値を持つということは open string の振動の重心、すなわち D3-brane の位置が垂直方向にずれることを意味します。特に可換部分である $X_{(i)}$ スカラー場の期待値は N_c 枚の D3-brane 全体の重心座標に相当します。言い換えると、 $X_{(i)}$ 場は D3-brane 全体の重心座標の揺らぎのモードに対応します。(余談ですが、このスカラー場は、D-brane が生じたことによる空間の並進対称性の自発的破れに伴う南部・Goldstone boson と考えることもできます。) ゲージ理論の $U(1)$ セクターが decouple していることを見るには、この重心座標の揺らぎの自由度が重力理論側に含まれていないことを見るのが簡単です。非常に大雑把には、以下のようなイメージを描くことができます。 N_c 枚の D3-brane の重心座標の移動は、reference と

なる周囲の空間との比較によって検出することが出来ます。しかし、near-horizon 極限をとって D3-brane の集合の自由度のみを取り出す操作をした後では、「周囲の空間」の自由度が decouple しており、この D3-brane の重心座標の自由度が検出できなくなっているというイメージです。より正確には、この $U(1)$ 部分の自由度は、AdS 時空中の超重力理論の言葉で singleton と呼ばれており、singleton の物理的自由度は AdS 時空内部には存在せず、AdS 時空の境界（境界については後述）に局在していることが議論されています¹³。

実際に、 $AdS_5 \times S^5$ 時空中の超重力理論が $SU(N_c)$ ゲージ理論に対応していることは、 $SU(N_c)$ 群の Z_{N_c} センターが重力理論側で確認できることから理解できます [12]。またバリオンも構成できます。例えば、 $\mathcal{N} = 4$ SYM には基本表現クォークは存在しませんが、外部自由度として無限に重い非力学的な基本表現クォークを導入することを考えましょう。このクォーク N_c 個から成るバリオンを、実際に重力側で構成することがなされています [13]。

以上をまとめると、以下の予想が成立します。

ゲージ・重力対応の代表例：[対応 1]

4次元 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N_c)$ large- N_c SYM 理論の $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c \gg 1$ 極限の量子論は、 $AdS_5 \times S^5$ 上の古典 type IIB 超重力理論と等価である。

これは現時点では「予想」であるものの、非常に多くの具体的計算により対応が検証されており、正しい対応であると考えられています。

1.3.4 コメント

ここでさらに、いくつかコメントしておきたいと思います。

基本的には color singlet な情報のみ議論可能であること

ゲージ・重力対応での基本的考え方は「D-brane を平坦な時空に挿入したもの」と「D-brane を挿入するかわりに（対応する）曲がった時空を考えたもの」が等しいとする考え方でした。従って、上記の対応例では重力理論側には D-brane が存在していません。D-brane の描像では、open string の端点が N_c 枚のどの D-brane 上に終端するかという自由度が color ゲージ群の自由度でした。今、この D-brane が重力理論側では消えていますので、color の自由度が見えない描像に移っていることを意味します。従って、通常、何らかの工夫をしない限り、重力理論側で議論できる物理は color singlet な物理量のみです。

near-horizon 極限の特殊性

near-horizon 極限を考える際に、単に「black 3-brane 解の計量を r の関数とみなして $r = 0$ まわりで展開し、leading の寄与を拾ったもの」と見ても形式上 $AdS_5 \times S^5$ 時空が得られますが、この考え方は危険です。2章ではゲージ・重力対応の計算を行う際に near-horizon 時空（上の例では $AdS_5 \times S^5$ ）上で超重力理論の方程式をたてて、その方程式に従う場の揺らぎを議論しますが、この種の解析では near-horizon 時空が超重力理論の解であることが前提となります。もとの black brane 時空同様、near-horizon 時空が超重力理論の解であることは事実ですが、これは方程式の観点か

¹³[5] の 3.1 章で解説されています。

ら考えると非常に特別なことが起きていると言えます。例えば勝手な曲がった時空に対して「計量を $r = 0$ まわりで展開して leading の寄与を拾ったもの」を考えると、得られる時空は一般的にはもとの理論 (Einstein 方程式) の解にはなりません。なぜならば Einstein 方程式は 2 階の微分方程式ですので、方程式レベルでの r 展開の leading order には、計量レベルでの r 展開の leading order に加えて sub-leading (計量に r 微分が 1 回作用した項)、subsub-leading (計量に r 微分が 2 回作用した項) の寄与も混ざっています。従って、計量に対して r 展開を施して leading のみを採用する、ということを行うと、Einstein 方程式に入るべき項の一部が一般には消えてしまうこととなり、もはや方程式は満たされません。しかしながら、ここで考えている black 3-brane の near-horizon 極限では、極限をとった後の時空も、超重力理論の厳密な解となっているのです。極限操作が計量と方程式 (つまり場の揺らぎの記述) 双方において無矛盾に閉じていることを意味し、我々の near-horizon 極限が正しい方法であることの一つの傍証のように思われます。

1.4 より一般的な表現

上記 [対応 1] の主張はゲージ・重力対応の典型例として良く目にする表現です。しかし実は、 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論に対応する超重力理論の時空は $AdS_5 \times S^5$ だけではありません。[対応 1] で省略していた重要な内容がありますので、説明したいと思います。

1.4.1 $AdS_5 \times S^5$ 以外の時空：真空あるいは相の一般化

上記で述べた [対応 1] では、重力理論側の時空を $AdS_5 \times S^5$ と指定していますが、実は $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論を記述する時空はこれだけではありません。 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論側の状態 (温度や保存電荷の密度、時間依存するか否かなど) に応じて時空が変更を受けます。上記の [対応 1] は基本的に、温度ゼロ、 R -対称性の保存電荷密度ゼロの静的真空 (簡単のため「温度ゼロの真空」と呼ぶことにします) における $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論に対応します。それでは、温度や保存電荷などを導入するには、どのようにしたら良いのでしょうか。この問題について、もう少し考えてみたいと思います。

例えば有限温度を導入したければ、通常の有限温度の場の理論で行うように、虚時間を導入し、虚時間方向にボゾンに対しては周期境界条件、フェルミオンに対しては反周期境界条件を課すことで、有限温度が導入できます。従って、対応する重力時空側もこのような周期境界条件に整合するような時空でなくてはなりません。また R -対称性は S^5 方向の回転対称性でしたので、 R -対称性の保存電荷、 R -電荷は、重力理論側では S^5 方向の角運動量に対応します。従って有限 R -電荷密度の真空を考えたい場合は、 S^5 方向に角運動量を持つような時空を考えることとなります。従って、自分が考察したい真空状態に応じて重力時空側に境界条件や保存量を課し、その条件の範囲内で超重力理論の方程式を解いて「温度ゼロの真空」に対応していた black 3-brane 解の代わりとなり得る、別の解を得る必要があります。さらにその解に対して near-horizon 極限をとり、最終的な重力時空が得られます。

しかし、これには「近道」があります。 $AdS_5 \times S^5$ の S^5 部分は $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の R -対称性に対応していました。温度や電荷の導入等でこの対称性は変更を受けないと考えると、変更後の時空は、 M_5 をある適切な 5 次元時空として、 $M_5 \times S^5$ の形になると考えられます。この場合は 10 次元の超重力理論の方程式を解く代わりに、10 次元理論を S^5 コンパクト化して得られる 5 次元の重力理論の方程式を解いて、 M_5 の部分のみを直接求めれば良いこととなります。

この M_5 を導出するための重力理論は、10 次元 type IIB 超重力理論を S^5 で Kaluza-Klein reduction をして得られる 5 次元の超重力理論、具体的には、「 $SO(6)$ ゲージ対称

性を持つ、5次元の $\mathcal{N} = 8$ gauged supergravity」となることが知られています。この gauged supergravity は大雑把に言って「5次元重力 + 5次元 $SO(6)$ ゲージ場」の理論となります¹⁴。この $SO(6)$ ゲージ対称性は reduction した S^5 の $SO(6)$ 対称性の反映です。重力理論のコンパクト化に詳しい人は、高次元重力を Kaluza-Klein reduction すると、コンパクト化された部分の時空の対称性が低次元理論の視点ではゲージ対称性として現れることを思い出してください。以上により、[対応 1] は次のような一般的な対応の一つの例に過ぎないこととなります。

ゲージ・重力対応の代表例：[対応 2]

4次元 $\mathcal{N} = 4$ $SU(N_c)$ large- N_c SYM 理論の $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c \gg 1$ 極限の量子論は、 $SO(6)$ ゲージ対称性を持つ 5次元 $\mathcal{N} = 8$ gauged supergravity と等価である。ここで重力側の時空は $\mathcal{M}_5(\times S^5)$ となり、 \mathcal{M}_5 は 5次元 gauged supergravity の解である。 \mathcal{M}_5 は SYM 側の真空（温度、保存電荷、phase など）に応じて選択する。

このように、重力理論側で時空を指定せずに対応付けておくと、ゲージ理論側での真空の転移、つまり相転移、なども議論できるようになります。ゲージ理論側での相転移は、重力理論側では、ある \mathcal{M}_5 時空から別の \mathcal{M}_5 時空への転移に相当します。このような具体例は 3章で議論します。

ここで、「 $SO(6)$ ゲージ対称性を持つ 5次元 $\mathcal{N} = 8$ gauged supergravity」と言われてもイメージのわからない方も多いかも知れません。そこで $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論において考えるセクターを限定することで、重力理論側をなるべく単純なものに限定してみましょう。重力理論側には $SO(6)$ ゲージ場や、もとの 10次元超重力理論に含まれていた dilaton 場（スカラー場の一種）や RR 場、など重力以外の様々な場が含まれていますが、これらの場の自由度が励起されないような物理プロセスに限定して考えることにします。また超重力理論中のフェルミオン自由度の励起も考えないことにします。つまり重力理論側において 5次元 graviton の自由度のみを考えることにしましょう。このような truncation を行ったあとの超重力理論は「負の宇宙項を持つ 5次元の Einstein 重力」となります。この場合の重力側の作用は

$$S = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{8\pi G_5} \int d^4x \sqrt{-\gamma} K, \quad \Lambda = -\frac{6}{r_0^2} \quad (15)$$

となります。（例えば [9] や [14] を参照。）ここで G_5 は 5次元の視点でのニュートン定数であり、10次元ニュートン定数との関係は S^5 部分の体積を V_5 として $G_5 = G_{10}/V_5$ です。 $V_5 = \pi^3 r_0^5$ 、 $r_0^4 = 4\pi g_s N_c l_s^4$ 、 $16\pi G_{10} = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8$ を用いると $G_5 = \frac{\pi r_0^3}{2N_c^2}$ となります。ゲージ理論側においては $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の R-charge などが期待値を持たない場合で、理論のエネルギー運動量テンソルだけに興味がある場合は、このような truncation が有効です。ここで、右辺第 2 項は Gibbons-Hawking term [15] と呼ばれる境界項であり、時空に境界がある場合の重力理論の変分原理を定式化するために必要な項です。AdS 時空の境界については 2.1 章で簡単に触れます。 K は extrinsic curvature や second fundamental form と呼ばれる量で、境界の「曲率」です。また γ は境界上の induced metric（境界上の「計量」）の行列式です。これらの正確な定義や計算方法については、例えば [16] が大変参考になります。また (15) には、この他に繰り込みを用いるカウンタータームを境界に加える必要もありますが、これについては 2.2.1 章や 3.3 章で触れます。

¹⁴10次元超重力理論の S^5 reduction や、その結果得られる正確な 5次元理論に関しては、例えば [14] およびそこで引用されている文献が参考になります。

対称性に関する補足コメント

読者は既に、ゲージ理論側ではグローバル対称性である $SO(6)$ R-対称性が、重力理論側ではゲージ対称性として現れていることに気づかれたかも知れません。少なくとも筆者の経験上、ゲージ理論側のグローバル対称性は重力双対理論ではゲージ対称性として現れるようです。(筆者は、そうでない例を知りません。)しかしこれは矛盾ではありません。

例えば [対応 1] においてさえ、同様の状況が存在します。[対応 1] において、ゲージ理論側は $3+1$ 次元 Minkowski 時空上のゲージ理論であって、重力とは decouple していました。なぜならばそのように near-horizon 極限を施したからです。つまり一般座標変換を局所化 (ゲージ化) した際に現れるゲージ粒子である graviton は力学的自由度としては理論に含まれていません。一方で対応する高次元理論は正に重力理論であって、graviton は力学的自由度以外の何物でもありません。ここでもゲージ理論側での座標変換の対称性がゲージ化されて重力理論側に現れています。しかし重要なのは、高次元理論側の「graviton」はゲージ理論側の「ゲージ粒子」の何らかの自由度の書き換えなのです。実際に高次元理論側の規格化可能な graviton モードは、ゲージ理論側の glueball (の一部のモード) に同定されます。

R-対称性に付随して現れた $SO(6)$ ゲージ場も、もとの 10 次元理論の graviton を Kaluza-Klein reduction したものですので、 10 次元の視点では同様の議論が成立します。ゲージ理論側の大域的 $SO(6)$ R-対称性は重力理論側の S^5 を大域的に回転させる対称性に対応していますが、重力理論側にはこの S^5 の回転変換をゲージ化した graviton が存在し、 5 次元への reduction 後では $SO(6)$ ゲージ場として見えています。しかしこのゲージ場も、 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論側の自由度自身を書き換えたものであり、決してもとの理論の $SO(6)$ R-対称性をゲージ化してしまった訳ではありません。また 4.2 章で現れるフレーバー対称性についても、重力双対側では対応するゲージ場が現れますが、フレーバー対称性はあくまで global 対称性です。

1.4.2 large- N_c や強結合の制限を超えて

1.3.1 章、1.3.2 章では large- N_c 極限や強結合極限の重要性を説明しましたが、D3-brane 上の物理と超重力理論側の対応の成立に関しては、これらの条件は必ずしも必要ではないと考えられています。これらの条件は、あくまで弦の長さを無視する近似や重力の量子補正を無視する近似を正当化するためのものであり、解析を技術的に可能にするための条件でした。従って、例えば重力理論側に弦の長さの補正を加えることができれば、ゲージ理論側の強結合極限からの補正を考えることができます。また重力の量子補正を議論することができれば、ゲージ理論側の $1/N_c^2$ 展開の高次補正も議論できるようになると考えられています。例えば強結合極限からの補正についてはゲージ理論プラズマのずり粘性に対する補正の解析例 [17] などが存在します。

2 ゲージ・重力対応の辞書

1 章では「ゲージ理論 = 重力理論」という等価性のみを主張しました。しかし、ゲージ理論側の具体的計算を行うためには、両者の理論をつなぐ具体的辞書が必要です。講義ではこの辞書について解説しました。ゲージ・重力対応において双方の物理量に対応づけるための「辞書」にはいくつかあり、私は下記のように分類しています。ここで、GKP-Witten 処方以外については確立した名称が無いように思いますので、便宜上、処方 2、処方 3、処方 4 としました。「外部自由度の導入」とは、ゲージ理論の

表 3: ゲージ・重力対応の辞書

処方	外部自由度の導入	局所性	計算される量
GKP-Witten 処方	あり	local	局所演算子の n 点関数
処方 2	なし	local	物理モードの質量 spectrum
処方 3	あり	nonlocal	Wilson loop の期待値など
処方 4	なし	nonlocal	Baryon の性質

力学的自由度ではない外場を導入するか否かです。例えば、GKP-Witten 処方はゲージ理論の連結 n 点関数の生成汎関数を重力理論側で与える処方であり、この場合、生成汎関数は、演算子に対して共役な外場の汎関数となっています。処方 3 では Wilson loop の計算を与えますが、この場合無限に重い非力学的なクォークを手で導入して Wilson loop 上にクォークの軌跡を描かせます。ここで導入する無限に重いクォークは重力理論側の視点では弦（または D-brane）であり、非局所的な object です。（これが表中の「局所性」の意味するところです。）一方、処方 2、処方 4 ではこのような外部自由度は導入せずに、理論中の力学的自由度のみで議論を行います。処方 2 ではゲージ理論の物理モード、例えば glueball や meson などの質量 spectrum の計算を行います。これは重力理論側の規格化可能な物理モードの分散関係から読み取ります。処方 4 では重力理論側に存在するべき物理的な非局所的 object、D-brane を用いてゲージ理論の baryon を表現します。なお、本稿では処方 3、処方 4 に関する解説は割愛します。

2.1 AdS 時空の境界

ここで、AdS 時空の境界についてコメントしておく必要があります。AdS とは Anti de Sitter の略であり、Anti de Sitter 時空は曲率が負で一定の時空（の一つ）です。（de Sitter 時空は曲率が正で一定。）計量は例えば (12) で与えられたように

$$ds^2 = \frac{u^2}{u_0^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{u_0^2}{u^2}du^2 \quad (16)$$

で与えられます。（以後、特に断らない場合は $l_s = 1$ とします。）曲率が負であるとはどのようなことを意味するでしょうか。

曲率が正の曲面として球を考えると、球面上の 2 本の平行線は（地球上の経線が北極・南極で交わるように）必ずどこかで交差します。曲率が負の曲面では逆のことが起こり得ます。2 次元空間での例としては双曲面（図 5 の最右）¹⁵ になります。この双曲面の中心から上下方向に伸びる平行線間の間隔は、中心から離れるに従って拡大していきます。やがては平行線間の間隔が無限大となる場所があり、これは（図では切れていますが）双曲面の「へり」に相当します。これと同様の状況は計量 (16) から読み取ることが出来ます。 $d\vec{x}$ 方向の間隔は計量 $\sqrt{g_{xx}}$ を単位として測られますが、 $g_{xx} = u^2/u_0^2$ は u 方向に進むにつれて増大し、 $u \rightarrow \infty$ で発散しています。これは 2 次元双曲面の「へり」の部分に対応し、AdS 時空の境界と呼ばれています。境界に関連して以下のコメントがあります。

¹⁵図 5 は <http://www.faculty.iu-bremen.de/course/fall02/c210101/students/BlackHoles/> より引用。

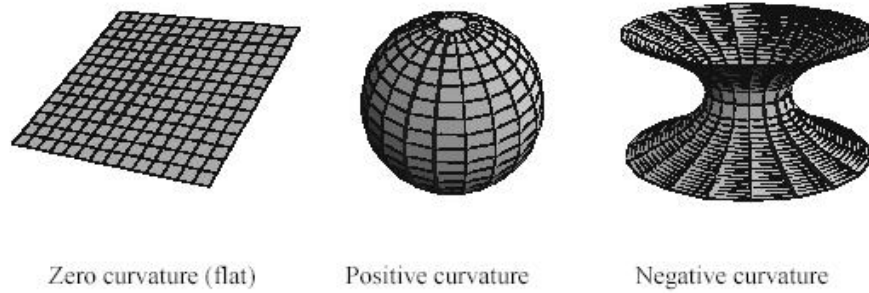


図 5: 2次元曲面

- AdS 時空の境界は time-like であり、境界上に時間軸が設定できます。計量 (16) では $u \rightarrow \infty$ での (t, \vec{x}) で張られる 3+1 次元スライスが境界であり、時間軸としては例えば t 軸を選ぶことができます。
- これに関連して、境界上で指定される境界条件が AdS 時空内部の場の時間発展を決めます。つまり境界条件と AdS 時空内部の物理が密接に関係しています。

2.2 GKP-Witten 処方

ゲージ・重力対応によってゲージ理論側の局所演算子の n 点の期待値を求める手法が GKP-Witten 処方であり、ゲージ・重力対応の根幹を成す手法です。この手法について考えてみたいと思います。

この手法を感覚的に理解するためには、near-horizon 極限をとる前の時点での対応関係、A 描像 = 「平坦な時空上の D3-brane (時空は曲がっていない)」、および B 描像 = 「black 3-brane 時空 (D3-brane は挿入されていない)」が等価である、という対応に戻るのが便利です。black 3-brane 時空 (6) でも、無限遠 ($r = \infty$) 近傍では平坦な時空となりました。従って、無限遠領域は二つの描像で共通の平坦な時空です。この共通部分を利用することで、二つの描像を結びつけてみましょう。思考実験として、この無限遠領域での dilaton 場 (超重力理論に含まれる質量ゼロのスカラー場 ϕ) の期待値を微小変化させることを考えます。二つの描像で計算手法は異なるものの同じ物理を考えているはずですから、この微小変化に対する系の反応として得られる物理的結果は等しいはずで

A 描像

A 描像では、平坦な時空上に D3-brane が存在するという単純な描像です。dilaton の期待値を微小変化させた効果は、D3-brane 上のゲージ理論に対してどのような影響を与えるのでしょうか。具体的には、D3-brane の作用 (Dirac-Born-Infeld 作用) は、平坦な時空上で static gauge と呼ばれるゲージのもとでは

$$\begin{aligned}
 S_{D3} &= -\tau_3 e^{-\tilde{\phi}} \int dt d\vec{x} \text{STr} \sqrt{-\det(\eta_{ab} + (2\pi l_s^2) F_{ab}) + (\text{susy})}, \\
 &= -e^{-\tilde{\phi}} \frac{1}{4g_{YM}^2} \int dt d\vec{x} \text{Tr}(F^2 + \text{susy}) + \dots,
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4g_{YM}^2} \int dt d\vec{x} \text{Tr}(F^2 + \text{susy}) + \frac{1}{4g_{YM}^2} \int dt d\vec{x} \tilde{\phi} \text{Tr}(F^2 + \text{susy}) \cdots, (17)$$

となることが超弦理論の研究から明らかとなっています。ここで STr は symmetrized trace であり、定義は

$$\text{STr}(A_1 \cdots A_n) = \frac{1}{n!} \text{Tr}(A_1 \cdots A_n + (\text{all permutations})) \quad (18)$$

で与えられ [18]、square root を展開する際にこれに従って展開します。また、 $\tilde{\phi}$ は dilaton の摂動、 a, b の足は D3-brane 上を走るものとして、 F_{ab} は D3-brane 上のゲージ場の field strength です。(既に使用した $2\pi g_s = g_{YM}^2$ の関係は、D3-brane の tension $\tau_3 = [(2\pi)^3 g_s l_s^4]^{-1}$ と上記の作用から具体的に導出することができます。) 2 行目以降の “...” は高階微分項からの寄与、“susy” は supersymmetric partner からの寄与を表わしています。以下では簡単のため “susy” 部分を省略して表現します。

上記からわかることは、D3-brane 上の視点では、dilaton の摂動 $\tilde{\phi}$ はゲージ理論の作用 $= \text{Tr} F^2$ (gluon condensate) と線形に結合することが判ります。言い換えると、 $\tilde{\phi}$ は演算子 $\text{Tr} F^2$ に対する外場 = source と見なすことができます。実際、dilaton は D3-brane 上のゲージ理論の枠内には含まれない closed string 由来の自由度ですので、D3-brane 上の視点では non-dynamical な外部自由度です。

B 描像

一方、B 描像では、D3-brane は挿入されておらず、代わりに black 3-brane 時空が存在するだけです。超重力理論において $\phi = \text{const.}$ は解となっていますので、座標に依存しない形で dilaton の摂動の $\tilde{\phi}$ を考えれば、この摂動部分も超重力理論の運動方程式と矛盾しません。またこのような定数解は near-horizon 極限の影響を受けずに解であり続けることも容易に想像できます。実際に確認してみましょう。

dilaton 場の揺らぎが解 $\phi = 0$ 周りで従う運動方程式 = クライン・ゴールドン方程式は、 $\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0$ となりますが、簡単のため u 依存性のみを考えて $\phi(u)$ を仮定し、(16) の時空 (ここで $u_0 = 1$ とします) の具体的計量を代入すると

$$\partial_u (u^5 \partial_u \phi(u)) = 0, \quad (19)$$

が得られ、解としては

$$\phi(u) = C_{(0)} + C_{(2)} u^{-4} \quad (20)$$

となります。ここで $C_{(0)}$ 、 $C_{(2)}$ は積分定数です。第一項のモードは、第二項のモードに比べて AdS 時空の境界 $u = \infty$ において、より大きなサポートを持ちます。このモードは non-normalizable mode と呼ばれます。一方、第二項のモードは normalizable mode と呼ばれます。この時点では第一項、第二項はそれぞれ独立な解のモードであり、確かに $\phi(u) = \text{const.}$ が near-horizon 極限後も解であり続けていることが確認できます。 $\phi(u) = \text{const.}$ のモードをシフトさせることは、near-horizon 極限前の時空の遠方の平坦部分における dilaton をシフトさせることに対応しており、A 描像の source のシフトに対応します。

以上の考察から、(20) における $C_{(0)}$ をゲージ理論における gluon condensate $\text{Tr} F^2$ に対する外場であると見なすのは大変自然でしょう。それでは、次に、normalizable mode、第二項の役割を考えてみましょう。この考察では、重力側の dilaton の作用を次のように部分積分を施して書き換えておくのが便利です。

$$-\frac{1}{2} \int dt d\vec{x} du \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = \frac{1}{2} \int dt d\vec{x} du \phi \partial_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi]$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int dt d\vec{x} \sqrt{-g} g^{uu} \phi \partial_u \phi \Big|_{u=0}^{u=\infty}, \\
& = \int dt d\vec{x} 2C_{(0)} C_{(2)} \Big|_{u=\infty} \\
& \quad - \int dt d\vec{x} 2 \left[C_{(0)} C_{(2)} + C_{(2)}^2 u^{-4} \right] \Big|_{u=0}. \quad (21)
\end{aligned}$$

ここで1行目右辺第1項は運動方程式により消えます。まだ1行目第2項の表面項において空間 \vec{x} 方向の境界項は（通常の場合の理論で扱うのと同様）消えるものと仮定しました。

ここで右辺3行目の AdS 時空の境界 ($u = \infty$) の寄与にまず注目しましょう。source $C_{(0)}$ と線形に結合するのは、比例定数を除いて $C_{(2)}$ です。従って重力側の on-shell 作用（作用に運動方程式の解を代入したもの）を $C_{(0)}$ で変分して落ちてくる寄与が、(20) の第2項の normalizable mode で与えられることがわかります。一方、 $C_{(2)}$ も微分方程式を解く際の境界条件であったことを思い出すと、この時点で $C_{(2)}$ は任意定数です。しかしながら (21) の最終行の、bulk の内奥 $u = 0$ での寄与に眼を移すと、on-shell 作用が有限であるためには $C_{(2)} = 0$ の解しか許されないことが結論できます。従って、on-shell 作用の有限性を要請する下では、source $C_{(0)}$ と線形に結合する寄与は $C_{(2)} = 0$ であることが結論されます。

ゲージ・重力対応では、重力側の古典理論とゲージ理論の量子論が等価であることを主張します。理論の等価性とは、双方の理論における分配関数 Z が一致すると考えるのが自然です。具体的には以下のように考えます：

$$Z = \exp\{iS_{\text{gra}}[C_{(0)}]\} = \left\langle \exp \left\{ i \left(S_{\text{YM}} + \int d^4x C_{(0)} \cdot \mathcal{O} \right) \right\} \right\rangle \quad (22)$$

重力側は古典論ですので、分配関数は単に古典的 on-shell 作用 $S_{\text{gra}}[C_{(0)}]$ を用いて $Z = \exp\{iS_{\text{gra}}[C_{(0)}]\}$ で与えられます。ここで on-shell 作用は、作用に代入する解を通じて、解を決定する境界条件に依存しますが、先ほどの作用の有限性を要求する条件下では $C_{(2)}$ に制限がつかますので、境界条件 $C_{(0)}$ のみの関数となっています。一方、最右辺はゲージ理論の作用を S_{YM} とした場合の量子効果を含んだ分配関数の定義で、 \mathcal{O} は (up to normalization で) $C_{(0)}$ と線形に結合している演算子、gluon condensate です。式 (22) は、 S_{gra} がゲージ理論の connected correlation の生成汎関数であることを意味しています。従って

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\delta S_{\text{gra}}[C_{(0)}]}{\delta C_{(0)}} \propto C_{(2)} = 0 \quad (23)$$

となり

$$\langle \text{Tr} (F^2 + \text{susy}) \rangle = 0 \quad (24)$$

が結論されます。（ここで、省略していた super partner の寄与も頭わに書きました。）主張としては、(24) における期待値の意味は、large- N_c 極限における planar なダイアグラム全ての寄与を含んだ量子論的な期待値です。

もちろんこの結果は最初から予想可能でした。 $\mathcal{N} = 4$ SYM の超対称性から、その真空状態における作用の期待値はゼロであることが帰結されるからです。重力理論側からの結論は、この結論を再現しています。あるいは、ゼロ温度の場合のように他の物理的スケールの存在しない真空において、gluon condensate のような次元を持つ量の期待値は、conformal 不変性よりゼロでなくてはならない、という超対称性とは独立の議論からも (24) が結論できます。

以上の例題から学んだ結論を一般化してまとめておきましょう。

1. 一般に、重力理論側に存在する場 (dilaton に限らない) は 2 階の微分方程式に従い、このため 2 種類の独立な解、non-normalizable mode ($\Phi_{>}(u)$ とする) と normalizable mode ($\Phi_{<}(u)$ とする) が存在します。
2. $\Phi_{>}(u)$ は重力時空の境界 $u = \infty$ において $\Phi_{<}(u)$ に比べてより大きなサポートを持ちます。この $\Phi_{>}(u)$ の boundary 上での振幅 (u 依存性の係数) をゲージ理論側の「何らかの演算子」に対する source だと見なします¹⁶。
3. この source がゲージ理論側のどのような演算子に対する source なのか同定するには、D-brane の描像に戻り、同じ場が D-brane とどのように線形結合しているのか確認すれば不定性なく同定できます。
4. あとは重力の on-shell 作用を 2 で同定した source で変分すれば対応する演算子の期待値が得られます。

なお、多くの場合、この期待値は $\Phi_{<}(u)$ の振幅 ($C_{(2)}$ に相当) に比例しているとして差し支えありませんが、厳密には注意を要します。なぜならば bulk 部分の作用に加えて、重力側の変分原理を well-defined にするために必要な境界作用 S_{bdy} を付け加える必要性 (例えば (15) の Gibbons-Hawking term) や、後で述べるカウンターターム S_{ct} を境界に加える必要性が生じる場合があります、これらの追加の寄与も含めた全体の on-shell 重力作用 $S_{\text{tot}} = S_{\text{grav}} + S_{\text{bdy}} + S_{\text{ct}}$ を source で変分して得られるのが正確な期待値だからです。カウンタータームから来る有限の寄与が重要な場合もあります。従って、「normalizable mode = 期待値」¹⁷ と機械的に覚えておくのは危険です。覚えるのであれば「non-normalizable mode = source」です。

式でまとめれば、以下のようになります。

$$\exp\{iS_{\text{tot}}[J]\} = \left\langle \exp \left\{ i \left(S_{\text{YM}} + \int d^4x J \cdot \mathcal{O} \right) \right\} \right\rangle \quad (25)$$

ここで、 J は上記 2 の意味での non-normalizable mode の振幅から読み取られる source、 \mathcal{O} は上記 3 の意味で D-brane 等の描像から同定される共役な演算子です。一般に (25) を source で n 回変分すれば、演算子の n 点関数の期待値が得られます¹⁸。

なおここで重要であったのは、期待値は、normalizable mode を決める第 2 の境界条件 (先ほどの dilaton の場合は $C_{(2)}$) で決定されますが、この境界条件は任意に選ぶことはできず、on-shell 作用の有限性などの要請を行うと一意に (解が複数ある場合は複数個に) 決まってしまうという点です。一般に、期待値を求める際にどのような条件を要請するかは、私の経験ではケース・バイ・ケースです。私の知る範囲では以下の例が存在します。

1. 重力側の on-shell 作用の (時空内側での) 正則性
演算子の期待値、meson や glueball の質量スペクトラムを求める場合などにこの条件が現れます [20]。
2. 時空に裸の特異点が存在しないこと
on-shell 作用そのものに発散は存在しなくても、時空が正則でない場合があります

¹⁶Legendre 変換を施して source と演算子の関係を逆転させることも可能な場合があります (例えば [19]) が、ここでは省略します。

¹⁷いわゆる現象論的ボトムアップ・アプローチではこれを第一義的な「辞書」とする場合がありますが、筆者はここで述べた理由により注意が必要だと考えています。また D-brane の描像がないボトムアップ・アプローチでは、対応する演算子を特定するための手立てが失われており、後述するスケール次元等から推測するしかありません。しかしこの方法では、演算子を一意に絞り込むことは一般にはできないと思います。

¹⁸本稿では 1 点関数の導出ししか行いませんが、2 点関数の計算については例えば [3, 4]などを参考にしてください。

ます。(例えば scalar curvature \mathcal{R} が有限でも、 $\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\lambda}\mathcal{R}^{\mu\nu\rho\lambda}$ が時空のある点で発散するなど。) この場合 on-shell 作用の(時空内側での)正則性ではなく、時空の正則性を要請する必要があります。より正確にはブラックホールの horizon によって隠されていない特異点(裸の特異点)が存在しないことを要請します。この条件により、例えばゲージ理論のエネルギー・運動量テンソル、ゲージ理論プラズマの粘性度などの輸送係数が一意に決定されます [21]。

3. ingoing wave boundary condition

重力側の時空にブラックホールが存在する状況で場の揺らぎを解析する場合は、ブラックホールへの ingoing wave boundary condition (ブラックホールからは古典的には何も放出されないこと)を要請します。例えば久保公式に基づいてゲージ理論プラズマの輸送係数を計算する際などにこの条件を要請します。(例えば [22] やそこでの引用論文を参照。)

4. 重力側の on-shell 作用が実数であること(解の安定性)

非線形電気伝導度の計算や、媒質中でクォークの受ける摩擦などを計算するにはこのような条件を要請することで物理量が決定されます。(例えば [23] やそこでの引用論文を参照。)

上記以外にもまだ別の条件が要求される場合があるかも知れません。いずれにせよ、私の経験では、必ず「物理的にこうであれ」という自然な要請をその計算ごとに必ず見つけることができ、演算子の期待値(およびその他の物理量)に対する不定性が必ず排除されています。

2.2.1 ホログラフィックな繰り込み

重力理論によってゲージ理論の量子論的期待値が計算できるのであれば、ゲージ理論側に現れる紫外発散は、古典理論である重力理論側でどのように現れ、どのように繰り込まれるのでしょうか。この問題を考えるためにゼロでない質量 m を持つスカラー場について前節と同じ解析を行ってみましょう。なお、この非ゼロ質量のスカラー場に対応するゲージ理論の演算子は $\text{Tr}F^2$ とは異なります。具体的には [3] (およびそこで引用されている文献)などで議論されていますが、ここでは省略します。

この場合のスカラー場の運動方程式は (u 依存性のみ仮定すると) 次のようになります。

$$\partial_u(u^5\partial_u\phi(u)) - m^2u^3\phi(u) = 0, \quad (26)$$

この方程式の解は以下の形となります。

$$\phi(u) = C_{(0)}u^{-2+\sqrt{4+m^2}} + C_{(2)}u^{-2-\sqrt{4+m^2}}, \quad (27)$$

従って $u = \infty$ での境界項は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int dt d\vec{x} \sqrt{-g} g^{uu} \phi(u) \partial_u \phi(u) \Big|_{u=\infty} \\ & = \int dt d\vec{x} \left(2C_{(0)}C_{(2)} - \frac{1}{2} \left(-2 + \sqrt{4+m^2} \right) C_{(0)}^2 u^{2\sqrt{4+m^2}} \right) \Big|_{u=\infty} + \dots, \quad (28) \end{aligned}$$

従って、今度は $C_{(2)}$ をどのように選ぶとも除去できない発散が存在します。この発散は先ほどの $C_{(2)}$ をゼロとすることで除いた $u \sim 0$ での発散とは異なり、時空の boundary 近傍 ($u = \infty$) における発散です。実はこの発散がゲージ理論側の紫外発散に対応します。

この発散は以下のようにして「繰り込む」ことができます [24]。場の理論での繰り込みは、まず紫外発散に関して適切な正則化を行い、Lagrangian の構造を変えないようなカウンタータームをもとの Lagrangian に加え、計算される物理量に発散が現れないように繰り込みます。重力側ではこの手順は以下ようになります。

1. まず我々が見た発散は ($u = \infty$) のものでしたので、bulk 作用の積分領域を $u = \infty$ までとするのではなく、正の微小量 ϵ を導入して $u = 1/\epsilon$ までとすることで正則化します。つまり、時空の boundary を「少し手前」の $u = 1/\epsilon$ に設定します。
2. 次に、bulk の重力理論の運動方程式を変更せずに発散を打ち消す項（「カウンターターム」）を加えます。これは正則化後の「boundary」 $u = 1/\epsilon$ に適切な境界項を加えることで実現できます。境界項を加えても 5 次元部分の運動方程式（～重力理論）は変更を受けないことに注意してください。この際、加える境界項は重力理論が持つべき対称性を保つ形で加えます。
3. この境界項も含めて、on-shell 作用を source で変分します。
4. 最後に $\epsilon \rightarrow 0$ とします。得られる演算子の期待値からは紫外発散が除去されています。

例えば質量 m のスカラー場の場合は

$$\frac{1}{2} \int dt d\vec{x} \sqrt{-\gamma} (-2 + \sqrt{4 + m^2}) \phi^2|_{u=1/\epsilon} \quad (29)$$

という境界項を加えることで紫外発散がキャンセルされます。ここで計量 γ_{ij} は境界上の induced metric であり、例えば (16) の計量であれば $u^2 \eta_{ij}|_{u=1/\epsilon}$ です。この境界項は 3+1 次元の意味での一般座標変換で不変な形であり、重力理論に要請される対称性を保っています。ここで以下の点に注意したいと思います。

- 古典重力理論が量子ゲージ理論に対応するというのがゲージ・重力理論の主張でした。これが正しければ、量子ゲージ理論に存在する紫外発散やその繰り込みの対応物が、古典重力理論に実現されていなければなりません。実際にこれらの対応物が重力理論側に存在することを意味します。
- 重力理論側は古典論ですので、重力の意味での紫外発散はありません。ここで考えた発散は、AdS 時空の 5 番目の座標方向（(16) の u 方向）の体積発散に関係しており、この意味で重力側の視点では赤外発散です。
- 重力側の時空を $u = 1/\epsilon$ までの領域に限ることによる正則化を用いましたが、この正則化でゲージ理論側のゲージ対称性は破っていません。（重力理論側は既に color singlet なモードに限定されていたことを思い出しましょう。）ある意味この正則化は次元正則化や格子ゲージ理論に次ぐ、第 3 のゲージ不変な紫外発散の正則化であると言えるかも知れません。
- この繰り込みから帰結される anomaly の計算結果や繰り込み群的性質は、量子ゲージ理論の結果を正しく再現します。重力理論側はあくまで古典論ですが、やはりゲージ理論の量子効果を含んでいたのです [24]。

2.2.2 重力時空の 5 番目の座標の意味

上記の紫外発散の正則化から、大雑把には 5 番目の座標、 u 方向がゲージ理論のエネルギースケールに対応し、時空の境界に近い領域が紫外領域、時空の内側（ u の小さい領域）が場の理論の赤外領域に対応することが推測できます。実は、ゲージ・重

力対応の様々な場面において「 u 方向 ~ ゲージ理論のエネルギースケール」の描像が成立します。4次元のゲージ理論が5次元重力で記述される時点で不思議さを感じますが、文学的な表現を許して頂けば、ここで行っていることは4次元のゲージ理論の物理モードを「プリズム」に通し、エネルギースケールごとに分解して u 軸上に配置したのがゲージ・重力対応である、というイメージは大きくは外れていないと思います。この意味で、dilaton の場合に $C_{(2)} = 0$ を決定した「on-shell 作用の有限性」条件は、 $u = \infty$ における発散（ゲージ理論の紫外発散）を回避したのではなく、 $u \sim 0$ での発散（ゲージ理論の赤外発散）を回避する条件となっていることに気をつけましょう。つまり、期待値の不定性を回避するために避けた発散は、繰り込みで処理すべき発散ではありませんでした。

なお、この正則化の最後で連続極限をとる操作 $\epsilon \rightarrow 0$ において、重力側の計量は変化させなかったことに注意し、この操作の意味をもう少し深く考えてみたいと思います。AdS 時空の計量 (16) を注意深く見ると、「計量を変化させずに」カットオフ $u = 1/\epsilon$ を $1/\epsilon \rightarrow a/\epsilon$ と変化させることのできる変換として、

$$u \rightarrow au, \quad (t, \vec{x}) \rightarrow (a^{-1}t, a^{-1}\vec{x}), \quad (30)$$

のスケール変換が存在していることがわかります。従って、連続極限をとる操作は、倍率 $a > 1$ でこのスケール変換を施す操作と等価です。ゲージ理論側の視点では、紫外発散が正則化されているということは、今、何らかの長さスケール $1/\Lambda$ の紫外発散のカットオフが導入されていると解釈できます。(30) の \vec{x} の受ける変換に注目すると、このカットオフは「連続極限」において $1/\Lambda \rightarrow 1/(a\Lambda)$ とスケールされることとなります。これは確かに 3+1 次元の視点でのエネルギースケールのカットオフ Λ を倍率 $a > 1$ で拡大すること、つまりカットオフを紫外側へ移動させることに相当しており、コンシステントです。従ってスケーリングの意味で $u \sim$ (mass scale) の関係が成立していることとなります。

さらに上記のスケーリングの議論を用いると、演算子のスケーリング次元を容易に読み取ることが可能となります。(27) のカットオフ $u = 1/\epsilon$ 上での振る舞いを

$$\phi(1/\epsilon) \sim C_{(0)}\epsilon^{4-\Delta} + C_{(2)}\epsilon^{\Delta}, \quad \Delta \equiv 2 + \sqrt{4 + m^2} \quad (31)$$

のように表示しておきます。ここで左辺は (30) の変換でスケール変換を受けないことに注意しましょう。これは例えばスカラー場の運動項 $\int du dt d^3x \sqrt{-g} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi g^{\mu\nu}$ や質量項に忠実に変換を施すことで確認できます。従って、source である $C_{(0)}$ は $\epsilon^{-(4-\Delta)}$ のスケール依存性を持つこととなり、3+1 次元のカットオフへの依存性としては $\Lambda^{4-\Delta}$ の依存性、つまり質量次元 $4 - \Delta$ を持つこととなります。同様に、演算子の期待値は Δ の質量次元を持つことが結論できます。実際、gluon condensate の場合は $m^2 = 0$ により $\Delta = 4$ であり、gluon condensate が「action density」であることとコンシステントです。また source と演算子の質量次元の合計が m にかかわらず 4 となっていることも確認でき、ゲージ理論が定義されている時空次元に一致します。従って、重力側の場の「質量」 m は対応する演算子のスケーリング次元と関連していることがわかります [3]。

2.2.3 Glueball の質量スペクトル

dilaton の場合に対する GKP-Witten 処方では、dilaton 場の解のうち normalizable mode の振幅 $C_{(2)}$ が gluon condensate (および対応する super-partner からの寄与：以下、再び susy 部分への言及を省略します) の期待値 $\langle \text{Tr} F^2 \rangle$ を与えることを見ました。ここで一步考えを進めて $\langle \text{Tr} F^2 \rangle$ の揺らぎの自由度が従う分散関係を調べてみま

しょう。QCD の閉じ込め相の言葉では $\langle \text{Tr} F^2 \rangle$ の揺らぎの自由度は glueball の一つです。従ってこの分散関係を調べるということは、対応するゲージ理論の glueball の質量スペクトラムを求めることに相当します。

もっとも、 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論にはスケールがありませんので、glueball の mass gap を与える質量スケールがなく、glueball の mass gap (M とします) は現れません。従って重力側で質量スペクトラムを調べても有意な結果が得られないであろうことは推測できます。しかしながら、より一般のゲージ・重力対応に応用するための考え方を学ぶ目的で、 $\langle \text{Tr} F^2 \rangle$ の揺らぎの分散関係を調べてみたいと思います。

今の場合、分散関係を調べるのが目的ですので、例えば x 方向に運動量 k を持つ dilaton のモードを調べることにしましょう。仮に mass gap M を持つ場合は、 x 方向の運動量以外をゼロとした場合の分散関係、 $-k^2 = M^2$ が得られるはずで、dilaton の摂動を $\tilde{\phi} = \varphi(r)e^{ikx}$ とおき、運動方程式に代入すると以下を得ます。

$$\partial_u(u^5 \partial_u \varphi) + M^2 u \varphi = 0, \quad (32)$$

ここで $-k^2 = M^2$ を代入しました。問題は $M^2 > 0$ に対する物理的な解が存在するかどうかです。この方程式の一般解は

$$\varphi(u) = C_{(0)}(Mu)^{-2} K_2(iM/u) + C_{(2)}(Mu)^{-2} J_2(M/u) \quad (33)$$

で与えられます。ここで $K_2(x)$ は第 2 種変形ベッセル関数、 $J_2(x)$ は第 1 種ベッセル関数です。 $u = \infty$ での振る舞いから第 1 項は non-normalizable mode であることがわかります。今は外部から source を与えて反応を見る類の計算はしませんので、source 項はスイッチオフし $C_{(0)} = 0$ として第 2 項のみを採用します。これは $u = \infty$ において $\varphi(u) = 0$ という Dirichlet 境界条件を課すことに相当します。つまりこの問題は「Schrödinger 方程式」(32) を無限遠方で「波動関数」 $\varphi(u)$ が消えるという境界条件のもとに解いて「固有値」 M^2 を求めることと数学的には等価です。ゲージ・重力対応は、一般に強結合ゲージ理論の glueball 等の質量スペクトルを求める問題を、量子力学の問題と同程度にまで簡略化してくれるのです。

それでは、(33) 第 2 項の normalizable mode をもとの作用に代入し、on-shell 作用の振る舞いを調べてみましょう。gluon condensate を求めた際と同様にして作用を部分積分し、bulk 内奥 $u = 0$ での表面項の振る舞いを調べてみましょう。($u = \infty$ での境界項はこの場合消えます。) $u = 0$ 近傍での表面項の振る舞いを見ると

$$u^5 \varphi \partial_u \varphi \propto C_{(2)}^2 M^{-4} \cos(2M/u) + \dots, \quad (34)$$

となり、normalizable mode の amplitude $C_{(2)}$ を消さない限り、 $M \neq 0$ では $u \rightarrow 0$ での on-shell 作用の値が不定となります。また $M = 0$ では作用の有限性の要求から $C_{(2)} = 0$ となるのは既に見た通りです。予想した通り、有意な非ゼロの mass gap は得られません。

上記で行った解析の手順を一般化してまとめてみましょう。

1. 場の揺らぎが x 方向の運動量 k を持つとして、運動方程式をたてます。
2. この方程式は固有値 $-k^2 = M^2$ を持つ固有値方程式に帰着します。
3. 解 = 固有関数を定めるには 2 つの境界条件が必要です。まず最初に課すべき条件として、normalizable mode を選択します。
4. さらに時空の最も内側において on-shell 作用が発散しない (あるいは on-shell 作用が well-defined となる) 条件を要求します¹⁹。

¹⁹文献によって、bulk 内側で課す条件の表現が異なります。例えば「bulk の最も内側で場が blow up しないような解を選択する」と表現している文献もあります。しかし場が blow up するとは、場の動径座標による微分も singular であることを意味し、結果として on-shell 作用の有限性が満たされないことを示唆します。私の知る範囲の文献では、on-shell 作用の有限性を課すことと無矛盾なようです。

5. このような条件を満たす解 = 固有関数の固有値 M^2 は任意の値をとることはできず、mass gap の値が定まります。

ここで少し先走って、理論に典型的エネルギースケールが存在し、かつ閉じ込め相を記述できるモデルの場合をコメントさせてください。この場合、時空は AdS ではなく、場の従う運動方程式も AdS の場合とは異なるため、mass gap に対する結果も上記の計算例とは大きく異なります。このようなモデルでは確かに離散化された固有値 M^2 が得られ、glueball の mass gap が現れます。実際、4.1 章でコメントする Witten 時空から large- N_c pure Yang-Mills 理論の glueball の質量スペクトルが得られており、格子 QCD の結果と悪くない一致を見えています [20]。ここで強調したい点は、ゲージ・重力対応を用いると、強結合ゲージ理論の glueball の質量スペクトルという非常に非摂動的な物理量の計算が、Schrödinger 方程式を解くのと同程度の問題にまで簡便化されるという点です。また、4.2.2 章で述べるクォーク自由度の入ったモデルで meson のスペクトルを計算する場合も、扱う場が異なるだけで、考え方や計算方針は全く同じです。

3 有限温度の導入、相転移

前章までは、温度ゼロの真空におけるゲージ理論の物理量を計算するための処方を紹介しました。この章では有限温度の導入や相転移の記述について解説したいと思います。

3.1 2つの解

場の理論において有限温度系を記述する方法の一つに虚時間形式があります。これは虚時間を導入し、Euclidean 時空に移って、虚時間方向を $\beta = 1/T$ (T は温度) で周期的にする方法です。(Fermion に関しては反周期境界条件を課す。) 同じことを重力理論側でも行えば、有限温度系の記述が可能になります [25]。例えば、時間方向を $\beta = 1/T$ (T は温度) で周期的にする境界条件のもとで Euclid 化した方程式を解くことで、[対応 2] で述べた時空 M_5 を求めます。

一般にこの周期境界条件を満たす時空は無数にありますが、「時空に裸の特異点²⁰が存在しない」という整合性条件を課すと解は有限個 (典型的には 2 個) に制限されます。具体的には、解となる時空は以下の計量で現わされます。

$$ds^2 = \frac{u^2}{u_0^2}(f(u)d\tau^2 + d\vec{x}^2) + \frac{u_0^2}{u^2 f(u)} du^2,$$

$$f(u) = 1 - \frac{u_H^4}{u^4}. \quad (35)$$

ここで τ は Euclidean time です。「パラメータ」 u_H で指定される無限個の解が存在することになりますが、この時空が $u = u_H$ において singular とならない条件を要請すると、以下の二つの場合のみに制限されます：

1. $u_H = 0$; Thermal AdS (T-AdS):
Euclidean AdS_5 時空の虚時間方向を単に $\beta = 1/T$ で周期的にしたものです。計量そのものは通常の Euclidean AdS_5 時空と変わりません。

²⁰裸の特異点とは、時空が singular になる点で、horizon で隠されていないものを指します。

2. $u_H = \pi T u_0^2 > 0$; AdS-black hole (AdS-BH):

境界近傍では AdS_5 時空に漸近するようなブラックホール時空で、horizon の位置は $u = u_H$ で与られます。虚時間の周期 $\beta = 1/T$ は horizon の位置と密接な関係があります。

重力理論側の on-shell 作用を β で割ったものは、ゲージ理論側の有限温度における自由エネルギーと同定されます。単純な on-shell 作用は発散していますが、GKP-Witten 処方で説明した意味での繰り込みにより、発散を処理します。T-AdS と AdS-BH では繰り込まれた on-shell 作用の値が異なりますが、その値がより小さい時空が熱力学的に実現すると考えます。この T-AdS と AdS-BH の間の転移が、対応する $\mathcal{N} = 4$ SYM の有限温度系の相転移に対応します。重力理論の言葉では、この転移は既に Hawking-Page transition として知られていました [26]。それでは、これら 2 種類の時空はゲージ理論側のどのような相に対応するのでしょうか? この説明をする前に、ブラックホールの古典的性質に触れる必要があります。

3.2 ブラックホールの古典的性質

ブラックホールには次のような性質が存在します [27]。ここで M_{BH} はブラック

表 4: ブラックホールの従う法則と熱力学の法則

	熱力学	ブラックホール
第 0 法則	熱平衡では温度 T が一定	定常解では表面重力 κ が一定
第 1 法則	$dE = TdS$	$dM_{BH} = \frac{\kappa}{8\pi G_N} dA$
第 2 法則	エントロピー S は減少しない	horizon の面積 A は減少しない
第 3 法則	物理過程で温度をゼロにできない	物理過程で表面重力をゼロにできない

ホールの質量を表します。この表からわかるように、表面重力 κ (horizon 上での重力加速度) を温度 T に、horizon の面積 A をエントロピー S に対応させると、右側のブラックホールの法則は熱力学の法則にマッチすることがわかります。より正確には、ブラックホールの Hawking 温度は $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ のように得られます。この値は、虚時間方向を $1/T$ で周期的にした場合に時空が regular となる整合性条件からも得られます。これにより $S = \frac{A}{4G_N}$ と同定されます。(ここで G_N は対応する重力理論のニュートン定数。) ここでゲージ・重力対応に有用なコメントとして以下があります:

- 実は、無限遠で平坦となるような時空上のブラックホールの比熱を計算すると負になります。従って、この意味でブラックホールの熱力学は一般には ill-defined です。しかしながら無限遠方で AdS となるような時空上のブラックホールの比熱は正になります。従って、AdS-BH の熱力学は well-defined です。
- 5次元 AdS-BH の horizon とは、動径方向 u に垂直な 3+1 次元面ですので、「horizon の面積 A 」とは空間 3 次元「体積」を意味します。これでしっかりと次元勘定が合います。なぜならば対応する 4 次元ゲージ理論のエントロピーは系の 3 次元体積に比例する示量性の物理量であるからです。ブラックホールの観点では horizon の内側・外側を区別するためには horizon に垂直な 5 番目の方向 u が必要でした。このように、空間 3 次元系の熱力学をブラックホールの熱力学に対応させようとする、ブラックホールは必然的に 5 次元以上の高次元ブラック

ホールとならざるを得ません。高次元時空はこの意味でも必要とされているのです。

- GKP-Witten の項でコメントした「 u 方向 ~ エネルギースケール」の見方がこの場合でも成立しています。例えばエントロピーという巨視的スケールで定義される物理量は、 u 方向の最も内側に存在している、horizon で定義されます。先ほどの見方では u 方向の最も内側はゲージ理論の赤外領域でしたので、最も赤外の領域でエントロピーが定義されていることとなります。これは大変自然です。温度に関しても horizon 上の表面重力で与えられるという意味において、最も赤外の領域でブラックホールの物理量と結びついています。熱力学は最も赤外の領域で現れているのです。

3.3 閉じ込め・非閉じ込め相転移

$\mathcal{N} = 4$ SYM 理論を扱う場合、温度ゼロでの無限に重いクォーク・反クォーク間のポテンシャル (inter-quark potential) は、理論のスケール不変性によりクーロン型となります。従って inter-quark potential がリニアになるという意味での閉じ込めは、この理論には存在しません。しかしながら「color の自由度が見えるか否か」の意味での「閉じ込め・非閉じ込め」の区別は存在します：

- “閉じ込め相”
large- N_c の leading order での系のエントロピーがゼロの相を、ここでは“閉じ込め相”と呼ぶことにします。これは系のエントロピーが厳密にゼロであることを主張しているのではなく、 $1/N_c^2$ 展開の sub-leading order に $O(N_c^0)$ の寄与があるものの今はその寄与を見ていない、と考えます。この場合、系の自由度に color の自由度が反映されていません。
- “非閉じ込め相”
large- N_c の leading order での系のエントロピーが N_c^2 に比例する相を、ここでは“非閉じ込め相”と呼ぶことにします。系の自由度の leading order が N_c^2 に比例しているところから、color の自由度が系の自由度に反映されていると考えます。

“閉じ込め相”、“非閉じ込め相”は、重力理論側ではそれぞれ T-AdS と AdS-BH に対応します。なぜならば重力理論側のエントロピーはブラックホールの horizon の面積 (体積) に比例しますが、T-AdS にはブラックホールが存在しないため (large- N_c の leading order の意味で) エントロピーはゼロです。一方 AdS-BH ではブラックホールが存在し、ゼロでないエントロピーが存在します。このエントロピーは係数まで含めて考えると N_c^2 に比例します。これは $G_5 \sim N_c^2 r_0^{-3}$ 、horizon の面積 $\sim r_0^3$ から確認できます²¹。

これらの相において、熱力学的にどちらの相が実現するのか、重力側の Euclidean 作用 = ゲージ理論側の自由エネルギー $\times \beta$ の大小から判断してみましよう [25, 26]。まず (15) の作用を Euclid 化しておきます：

$$S_E = -\frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G_5} \int d^4x \sqrt{\gamma} K + \frac{1}{8\pi G_5} \int d^4x \sqrt{\gamma} \frac{3}{u_0}, \quad \Lambda = -\frac{6}{u_0^2}. \quad (36)$$

²¹ エントロピーなどの具体的計算例は、例えば [22] を参照。

ここで、右辺の最後の項はカウンタータームです [28, 24]。この作用から導出される Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda)g_{\mu\nu} = 0, \quad (37)$$

のトレースをとることで関係式 $R = \frac{10}{3}\Lambda$ が得られます。これをもとの作用に再代入すると on-shell 作用

$$S_{\text{on-shell}} = \frac{1}{16\pi G_5} \frac{8}{u_0^2} \int d^5x \sqrt{g} + (\text{boundary term}), \quad (38)$$

が得られます。今、とりあえず境界項からの寄与を無視すれば、Euclidean 作用の大小はそれぞれの時空の体積で決まります。計量 (35) を見ると計量の行列式 g は u_H の値によらないことがわかりますので、結局 T-AdS と AdS-BH の場合の違いは u 方向の積分領域の違いのみとなり、 $0 \leq u < \infty$ で積分する T-AdS よりも $u_H \leq u < \infty$ で積分する AdS-BH の方が、 $T > 0$ では常に小さな on-shell 作用を持ちます。両者が一致するのは $u_H = 0$ となる $T = 0$ の場合です。つまり $T > 0$ では AdS-BH が実現されます。

なお、この説明は直観的ですが、あまり正確ではありません。なぜならば境界項からの寄与が無視できないからです²²。しかし境界項からの寄与を注意深く計算すると、この場合は 5 次元体積から来る寄与と逆符号で絶対値がちょうど半分の寄与となることが確認できます。結果として T-AdS と AdS-BH の on-shell 作用の大小関係は上記で述べた通りとなります。なお、系のエントロピーを $\beta \frac{\partial}{\partial \beta} S_{\text{on-shell}} - S_{\text{on-shell}}$ から計算する場合は、これら (カウンタータームからの有限の寄与も含め) 境界からの寄与を入れることで初めて正しい値、 $A/(4G_5)$ 、を再現します。

ここで得られた結果について、ゲージ理論側から解釈してみましょう。高温領域ではゲージ理論は“非閉じ込め相”にあるのが自然です。問題は“非閉じ込め相”への転移温度 T_c ですが、 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論の場合、 T_c を決める理論スケールがありませんので $T_c = 0$ です。従って、 $T > 0$ では非閉じ込め相である AdS-BH が実現されることとなります [25]。

4 QCD に向けて

4.1 pure Yang-Mills

これまで扱ってきた $\mathcal{N} = 4$ SYM には adjoint 表現の場、gluon とその super partner しか存在しませんでした。この理論を QCD に近づけたい場合には少なくとも以下の工夫をする必要があります。講義ではこれらの工夫について概説しました。

1. 基本表現 (および反基本表現) のクォーク (反クォーク) を導入すること
2. 超対称性を破ること

²²少々細かいですが、[25, 26] 等では「境界からの寄与が消える」と書いてあります。これは以下の文脈において正しい表現です。[25, 26] ではカウンタータームを導入して作用の発散を消去するかわりに、 $r = 1/\epsilon$ に境界を持ってくることで正則化した上で、T-AdS と AdS-BH の作用の差を考慮して発散をキャンセルさせています。この場合は T-AdS と AdS-BH の作用の比較に注意が必要であり、 $r = 1/\epsilon$ における虚時間方向の、赤方偏移まで考慮した周期 $\sqrt{g_{\tau\tau}}\beta$ (= 物理的温度の逆数) が一致するように各々の時空の β を調整した上で、比較することが必要です。このような調整を施した後では、確かに境界項からの寄与は「T-AdS と AdS-BH の on-shell 作用の差」には現れないことが確認できます。

3. 共形不変性を破り Λ_{QCD} を導入すること

このうち、上記 2、3 に関しては Witten がアイデアを提出しています [25]。アイデアの骨子は以下の通りです。

まず、D3-brane ではなく N_c 枚の D4-brane を考え、この上に実現される 4+1 次元のゲージ理論を考えます。次に余分な空間方向を S^1 コンパクト化します。コンパクト化の半径を R_{KK} として、 $1/R_{KK}$ よりも十分低いエネルギー領域ではこの理論は良い近似で 3+1 次元のゲージ理論となります。さらに D3-brane の場合と異なり、D4-brane 上のゲージ理論はもともと共形不変ではありません。さらに、ここでは R_{KK} というスケールも導入されており、この意味でも共形不変性は存在しません。この R_{KK} は低エネルギーでの 3+1 次元ゲージ理論にスケールを与えますから、 Λ_{QCD} の役割を担います。そして S^1 コンパクト化方向に boson に関しては周期境界条件を、fermion に関しては反周期境界条件を課すことで（ちょうど有限温度の場合に超対称性が破れるように）もともとの D4-brane 上の理論で実現されていた超対称性が破れます。このようにして S^1 コンパクト化された D4-brane を出発点としてゲージ・重力対応を構成することで、十分低エネルギーでは強結合 $SU(N_c)$ large- N_c pure Yang-Mills 理論に対応する重力理論が得られることとなります。

あとは、このセットアップにクォークを導入すれば強結合 $SU(N_c)$ large- N_c QCD の出来上がりです。クォークのカイラル対称性が実現される形でこれを行ったのが酒井・杉本モデルです。

4.2 クォークの導入

3 章までで細かく議論した $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論にはゲージ群に対して adjoint 表現の場、つまり gluon とその super-partner しか含まれていませんでした。上記のように D4-brane から出発した場合も同様です。従って、問題は、ゲージ群に対して基本表現、あるいは反基本表現の fermion をどのようにしたら理論に取り込むことができるか、ということです。

この問題を考えるために、まず、 N_c 枚の D3-brane 上の $U(N_c)$ ゲージ理論にどうして adjoint 表現しか存在しなかったのか、理由を考えてみましょう。D3-brane 上のゲージ場は弦理論の言葉では D3-brane 上の open string の自由度として実現されていました。open string には端点が二つあり、これらの端点が N_c 枚の D-brane に終端する可能な組み合わせは $N_c \times N_c$ 通りあります。従って質量ゼロのゲージ場（ベクトル場）が N_c^2 種類あり、これが $U(N_c)$ ゲージ理論の $N_c \times N_c$ 行の行列であらわされる gluon の自由度に対応していました。従って、color の自由度は open string の端点が D-brane に終端する可能な組み合わせの自由度であるとも言えます。

ここまで問題を整理しておけば、基本表現の導入は簡単です。 N_c 枚の D3-brane 上に一つの端点しか存在しない open string を導入すれば、その open string は D3-brane の入れ替えの意味での color のゲージ群に対して、自由度 N_c のみを持つ基本表現として振る舞うでしょう。より正確には、今考えている type II 超弦理論には string の向き付けが存在しますので、片方の端点のみ D3-brane に終端している open string にも、向き付けに応じて 2 種類が存在し、この向き付けに応じて open string が基本表現に対応するか反基本表現に対応するかが決まります。なぜならば、向き付けによって D3-brane 上の端点を持つ color の charge が反転するからです。

それでは、D3-brane に終端していない方の端点はどのように処理したら良いのでしょうか？この端点はそのまま放置しておく訳にはいかず、何らかの「別の D-brane」に終端させる必要があります。従って結論としては、出発点となる D-brane のセットアップとして N_c 枚の D3-brane のみから出発するのではなく、「 N_c 枚の D3-brane + 別の D-brane」というセットアップから出発すれば良いこととなります。このように

すると N_c 枚の D3-brane 上には gluon の自由度の他に基本表現および反基本表現の自由度が実現されています。「別の D-brane」は、基本表現・反基本表現の自由度、つまりフレーバーの自由度を導入するための役割を担いますので、フレーバー D-brane と呼ばれることがあります。

もちろん、両方の端点がフレーバー D-brane 上に終端している open string も存在しますが、これは D3-brane 上のゲージ理論の自由度とは別の自由度となります。もともと、ゲージ・重力対応を構成する出発点の理論には、たくさんの余計な自由度が存在しています。例えば D3-brane の周囲に存在する重力の自由度などです。これらの「注目するゲージ理論以外」の自由度を decouple させるのが near-horizon 極限でした。このフレーバー D-brane 上の余計な自由度も、重力と同様に near-horizon 極限で decouple するものと考えられています。

なお、フレーバー D-brane として許されるものには制限があります。一般に勝手な組み合わせの D-brane を考えて、その間に張る open string を量子化すると、基底状態が不安定となる場合があります。従ってフレーバー D-brane は系が安定となるように選ぶ必要があります。このような安定な組み合わせは、超弦理論の枠内で調べられています。また安定な組み合わせの中から、実現されるゲージ理論が望みのものとなるようにフレーバー D-brane をさらに絞り込む必要もあります。例えば D3-brane から出発するモデルにおいては、代表的なフレーバー D-brane として D7-brane を加えたモデルがあり、しばしば D3-D7 モデルと呼ばれています [29]。D3-D7 モデルの D-brane 配置としては以下ようになります。ここで、最上段の数字は 10 次元時空

表 5: D3-D7 モデルのブレーン配置

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D3										
D7										

内の方向を表わし、印はその D-brane が伸びている方向を表わします。上記から、D3-D7 間の open string の重心が移動できる方向は、両者の D-brane が共通に伸びている部分空間である x^0, x^1, x^2, x^3 方向の 3+1 次元部分のみであることがわかります。また D3-brane も D7-brane も、ともに存在していない方向、 x^8, x^9 方向が存在しますので、この方向を用いて D3-brane と D7-brane を相対的に離すことが可能です。D3-D7 間の距離を離すと、その間の open string のエネルギーが (tension) × (距離) に応じて増大しますので、これは基本表現 (反基本表現) の自由度に質量を与えることができることを意味します。また D3-D7 間の open string のモードを調べると fermion の自由度が存在することがわかりますので、このようにして massive なクォーク (反クォーク) の自由度を D3-brane 上のゲージ理論に加えることに成功したことになります。より具体的には、particle contents や対称性を調べることにより、D3-brane 上のゲージ理論は $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論に基本表現・反基本表現の $\mathcal{N} = 2$ hyper-multiplet (クォーク・反クォークのセクター) を加えた 3+1 次元の理論となることが知られています。

さてここで、少々唐突ですがフレーバー対称性について説明させてください。導入した D7-brane が N_f 枚の重なった D7-brane であったとすると、D7-brane 上の $U(N_f)$ ゲージ変換に対して D3-D7 間の open string は基本表現 (反基本表現) のように振る舞います。なぜならば open string の端点の一つが D7-brane 上に終端しているからです。この N_f 枚の D7-brane のうち、どの D7-brane に他方の端点が終端するか、という自由度は D3-brane 上のゲージ理論の視点では「フレーバー」の自由度です。なぜ

ならばクォーク（反クォーク）の種類を、どの D7-brane に終端した open string に由来しているかで識別できるからです。この意味で D7-brane 上の $U(N_f)$ ゲージ対称性はフレーバーの対称性となります。

ここで、通常の QCD とは異なる状況に気づいた読者もおられるでしょう。通常、フレーバー対称性は global 対称性であって、ゲージ対称性ではありません。しかしこれは問題になりません。なぜならば $U(N_f)$ ゲージ対称性を保証する D7-brane 上の gluon—D7-brane 上に両方の端点を持つ open string—は near-horizon 極限によって decouple するからです。near-horizon 極限をとってゲージ・重力対応を完成した後では、残っている対称性は大域的部分のみであり、フレーバー対称性は global $U(N_f)$ となります。重力双対側の重力モードが glueball となったように、重力双対に残るフレーバー D-brane 上のゲージ場は中間子のモード（の一部）と同定されます。

さて、D3-D7 間の open string から得られるクォークは、このフレーバー対称性に対してどのように変換するのでしょうか。弦理論側の解析から、D3-D7 間の open string からは left-handed のものと right-handed のものが両方現れることがわかり、従って left-handed も right-handed も $U(N_f)$ 変換を同時に受けます。従って、この理論には $U(N_f)$ カイラル対称性は存在しないということがわかります²³。

4.2.1 重力双対とプローブ近似

それではゲージ・重力対応における D3-D7 モデルの重力双対はどのように求めたら良いのでしょうか。D-brane を、対応する超重力解に置き換えるのが最初のステップですが、表 5 からわかるように、この系のブレーン配置は複雑であり、このブレーン配置に厳密に一致する超重力理論の解を得るのは容易ではありません。そこで通常以下で説明するプローブ近似を採用します。

フレーバー D-brane が存在しない場合の重力双対は既に $AdS_5 \times S^5$ や $AdS-BH \times S^5$ など（これらをここでは「D3 時空」と呼ぶことにします）として知られています。この時空にフレーバー D-brane の効果を導入することを考えましょう。厳密には、フレーバー D-brane もエネルギー・運動量を持ちますので周囲の時空に変形をもたらす効果を持ちます。より正確には超重力理論の運動方程式に対する source 項となり運動方程式に補正をもたらします。この補正はフレーバー D-brane の枚数 N_f に比例します。従って、D3 時空はフレーバー D-brane の存在下では厳密な解にはなりません。しかし、 $N_c \gg N_f$ の場合はフレーバー D-brane が D3 時空に及ぼす補正が無視できます。より正確には、D3 時空を解として与えていたもとの運動方程式に対し、フレーバー D-brane からのバックリアクションは $(N_f/N_c)^2$ のオーダーとなります。従って相対比で (N_f/N_c) のオーダーまで取り入れるという近似のもとでは、D3 時空に対する補正を無視して良いこととなります。重力理論側の on-shell 作用に対する寄与で言うと、D3 時空から来る寄与が $O(N_c^2)$ 、D3 時空内に存在するフレーバー D-brane から来る寄与が $O(N_c N_f)$ ですので、ここまでの寄与で打ち切ることであります。

この近似はプローブ近似と呼ばれます。重力理論側の描像では、フレーバー D-brane は D3 時空の重力場その他の影響を受けます（従って重力場の影響でフレーバー D-brane は一般に曲がった形となる）が、D3 時空はフレーバー D-brane からのバックリアクションを受けない、という近似となります。一方、ゲージ理論側では以下のように解釈できます。D3 時空は gluon 部分を記述し、フレーバー D-brane はクォーク部分を記述していました。従って「クォークは gluon の影響を受けるが、gluon はクォークの影響を受けない」という近似となります。また、large- N_c ゲージ理論においてクォークの loop が入るごとに (N_f/N_c) のオーダーが上がることから、クォーク

²³ $U(1)_A$ 対称性は存在します。この対称性は x^8 、 x^9 面内で半径（ \sim クォーク質量）を保ったまま回転させる S^1 の回転対称性に対応しています。

の 2-loop 以上の補正を落とす近似であるとも言えます。このような近似は格子ゲージ理論におけるクエンチ近似と非常に似た近似です。フレーバー D-brane からのバックリアクションを忠実に取り込むことが困難であるという技術的理由により、ゲージ・重力対応の解析においてはプローブ近似の範囲内で解析されるのが一般的です。

4.2.2 酒井・杉本モデル

4.1 章で述べた D4-brane から出発する Witten 時空の場合について、フレーバー D-brane をうまく導入して、出来るだけ QCD に近いモデルを構成することを考えましょう [30]。やはりプローブ近似を採用して、重力双対では、Witten 時空上にフレーバー D-brane が存在する状況を考えることになります。

QCD においてはカイラル対称性の問題は重要であり、QCD に応用する観点からはカイラル対称性を実現するゲージ・重力対応の構成が非常に重要です。この問題は、フレーバー D-brane として D8-brane を用いることによって実現されます。この場合のブレイン配置は表 6 のようになります。ここで、 x^4 方向は Witten の方法に沿って S^1 にコンパクト化されています。この場合、D4-D8 間の open string で構成さ

表 6:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D4										
D8										
$\overline{D8}$										

れるクォークはカイラルであることが弦理論の解析からわかります。このクォークが left-handed か right-handed かは D8-brane の向き付けに依存します。type II 超弦理論の弦に向き付けがあったのと同様に D8-brane にも向き付けの概念があり、D8-brane を「ひっくり返して」逆向きにしたものは $\overline{D8}$ -brane と呼ばれます。D4-D8 のクォークを left-handed と呼ぶことに決めれば、D4- $\overline{D8}$ のものは right-handed ということになります。

この場合 $U(N_f)$ 枚の D8-brane で実現される対称性は $U(N_f)_L$ 、 $U(N_f)$ 枚の $\overline{D8}$ -brane で実現される対称性は $U(N_f)_R$ ということになり、これらの変換が互いにフレーバー D-brane の意味で分離されています。従って left、right を互いに独立に回すことが可能となり、結果として $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ カイラル対称性を実現しているモデルとなります。このように D4-D8- $\overline{D8}$ の D-brane 配置を出発点として、強結合 $SU(N_c)$ large- N_c pure Yang-Mills 理論にクォーク・反クォークの自由度を導入し $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ カイラル対称性の破れと回復を表現できるようにしたゲージ・重力対応モデルが酒井・杉本モデルと呼ばれています [30]。

D8 と $\overline{D8}$ は x^4 方向に引き離すことができます。この x^4 方向の D8 と $\overline{D8}$ の間隔を L としておきましょう。D8 と $\overline{D8}$ の距離が近すぎると D8- $\overline{D8}$ 間の open string に由来するスカラーモードがタキオンとなる（不安定粒子となる）ことが知られていますので、通常 D8 と $\overline{D8}$ は、それぞれ x^4 方向の S^1 上の正反対の位置に置いて相対距離が最大になる ($L = \pi R_{KK}$) ような配置を考えることが多いです。また、10 次元時空の全ての方向は D4 と D8 の少なくとも片方が占めていますので、D4 と D8 あるいは D4 と $\overline{D8}$ の距離は引き離すことができないことがわかります。従って D4-D8 や

D4- $\overline{\text{D8}}$ の open string に由来するクォークの質量²⁴はゼロであることがわかります²⁵。

酒井・杉本モデルではカイラル対称性の破れ $U(N_f)_L \times U(N_f)_R \rightarrow U(N_f)_V$ をフレーバー D-brane の geometry の言葉で表現することができます。ももとのカイラル対称性 $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ は、 N_f 枚の D8-brane の束と N_f 枚の $\overline{\text{D8}}$ -brane の束、それぞれで実現されている $U(N_f)$ 対称性の直積でした。カイラル対称性の破れによってフレーバーの対称性が $U(N_f)_V$ となることはフレーバー D-brane が全体として N_f 枚の一つの束へとつながることを示唆します。実際、Witten 時空のように曲がった時空で D8-brane や $\overline{\text{D8}}$ -brane の運動方程式を解くと両者が分離された解は（低温領域では）存在せず、両者が結合してひと組の束となった解が実現されることがわかります。

酒井・杉本モデルでは large- N_c QCD の様々な物理量が計算されており、実際の QCD と悪くない一致を見えています。本稿ではこれらの詳細は省略させていただきますが、例えば review としては [32] などを参考にされると良いと思います。

4.3 課題

Witten 時空や酒井・杉本モデルは QCD を記述するゲージ・重力対応に向けた大きな成功であると考えられますが、ここで導入されたモデルにもいくつかの課題があります。大きな課題点を挙げると以下のようになると思います。

4.3.1 Witten 時空の課題

低エネルギー領域で pure Yang-Mills を記述する Witten のモデルには「dimensional transmutation が出来ていない」という克服すべき課題があります。Lattice 上で QCD を構成する場合をまず考えましょう。まず紫外のカットオフ = 格子間隔 $a > 0$ をセットして、その格子上で QCD の作用を定義します。最後に $a \rightarrow 0$ の連続極限をとりますが、その際、格子上で定義された結合定数 g も $g \rightarrow 0$ となるように flow させて、観測される物理量のスケール、 Λ_{QCD} 、が実験値に合うように固定しながら連続極限をとります。この際重要であったのは QCD の相互作用には漸近的自由があり、繰り込群的に $g \rightarrow 0$ のスケールリングを行うことが可能であった点です。このように QCD では、理論を定義するスケール $1/a$ と物理スケール Λ_{QCD} がうまく分離されており、 $1/a$ のカットオフの効果が物理に現れないように構成されています。

一方で、Witten 時空の場合は超対称性を破るスケールが $1/R_{KK}$ であり、なおかつこのスケールより高いエネルギーではコンパクト化スケールが見え始めて理論は 4+1 次元の理論となります。つまり「3+1 次元 pure Yang-Mills」が定義されるスケールが $1/R_{KK}$ で与えられています。一方で $1/R_{KK}$ は glueball の質量などの物理スケールを与える Λ_{QCD} の役割も担っています。従って、 Λ_{QCD} と「カットオフスケール」が分離されていないのです。従って、ハドロン質量や相転移温度など、面白い物理は $1/R_{KK}$ 程度のスケールで現れますが、そのスケールはちょうど理論が 3+1 次元 pure Yang-Mills から「ずれ始める」領域でもあるのです²⁶。

この問題を回避するために、物理スケールと理論の定義スケールの間にはどのようにしたら大きな階層を生むことができるか？これが克服すべき問題です。

²⁴場の理論の Lagrangean レベルで現れる質量の意味で、current quark mass の意味です。カイラル対称性の破れにより獲得される constituent quark mass の意味ではありません。

²⁵なお、酒井・杉本モデルに current quark mass を導入する試みとしては [31] があります。

²⁶通常用いられる $2\pi/R_{KK}$ の値は 1 GeV の程度です。

4.3.2 酒井・杉本モデルの課題

酒井・杉本モデルは Witten のモデルにフレーバー D-brane を加えた構造をしていますので、Witten 時空の課題をそのまま引き継いでいます。さらに加えていくつかの課題がありますが、私が個人的に強く意識している問題は次のようなものです。酒井・杉本モデルで種々の物理量を計算すると、物理量は D8-brane と $\overline{D8}$ -brane の相対的な距離 L に依存することがわかります。しかし、このパラメータがゲージ理論側の Lagrangean の何のパラメータにどのように対応しているのか、完全には理解されていません。対称性の議論から、このパラメータとゲージ理論側の 4-fermi 相互作用やカイラルカレントとの関係が [33] で示唆されていますが、私の理解では「示唆」の範囲を超えていないように思われます。

5 非平衡系への応用

ゲージ・重力対応の超弦理論以外の物理への応用として、筆者が個人的に興味を持っているのは非平衡物理学への応用です。ここまでの説明で見たように、ゲージ・重力対応ではゲージ理論の演算子の期待値などの微視的な物理量の計算が可能でした。つまりゲージ粒子数個の散乱振幅などの微視的プロセスの記述が可能な対応であり、ゲージ・重力対応の成立には平衡の概念は必要とされていません。従って、筆者は、ゲージ・重力対応はゲージ理論の非平衡過程の物理を記述する能力を潜在的に持っていると考えています。

5.1 実時間のブラックホール

ゲージ・重力対応はゲージ理論の微視的なレベルでの記述を行います。むしろ筆者にとって驚きなのは、重力側でブラックホール時空を考えることで温度やエントロピーなどの「平衡の概念」が自然に現れる点です。不思議なことに、ブラックホール解を採用すると、それはゲージ粒子多体の有限温度系に対するマクロな物理量（温度やエントロピーなど）が、ブラックホールの horizon の物理として現れます。マクロな物理は微視的物理の粗視化（平均化）の結果生じるものですが、「ブラックホールがこの粗視化作業を自動的に行ってくれている」ように見えます。

3章では Euclid 化したブラックホールを議論しましたが、計量を Minkowski signature に戻してもブラックホールの熱力学はそのまま成立します。ここで注目すべきは、もともと Minkowski signature でのブラックホール解には実時間が存在しているということです。従って、何らかの摂動を加えて時間変化するブラックホール解を調べることが出来れば、それは平衡からずれた多体系の物理を記述できることとなります。実際、このアイデアを推し進めたのがゲージ・重力対応による流体力学の記述です。流体力学とは局所熱平衡の成立する多粒子系において、系のエネルギー・運動量テンソル等の保存カレントの時間的・空間的發展を記述するものです。ゲージ理論のエネルギー・運動量テンソルの期待値は GKP-Witten 処方により重力時空から読み取ることができます。時間変化する重力解を求め、GKP-Witten 処方を用いることでエネルギー・運動量テンソルの時間發展が読み取られます。エネルギー・運動量テンソルはゲージ理論流体のエネルギー密度、圧力や粘性度などの輸送係数を用いて記述されますので、これらの時間發展を追うことは正に流体力学が行う仕事です。ゲージ・重力対応においては時間發展する重力時空を求めることでこの作業が可能となります。さらに、流体力学ではインプットパラメータであった粘性度などの輸送係数は「重力時空に裸の特異点が存在しない」という条件 [21] や、「ブラックホールからは何

も放出されない」という ingoing wave boundary condition を要請することで決定されます。輸送係数の計算にはミクロな物理の情報が必要でしたが、ゲージ・重力対応はゲージ理論のミクロな情報を記述するものでしたので、輸送係数が求められるのはある意味当然とも言えます。このように、線形応答理論が行うような非平衡物理の計算にもゲージ・重力対応が応用されています [22]。

5.2 非平衡定常系

さらに特別な状況では、線形応答領域を超えて輸送係数を計算することも可能です。このような応用に関する筆者の最近の仕事 [23] を紹介して、この講義を終えたいと思います。

例えば D3-D7 モデルを考えることにしましょう。これは $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論に基本表現の $\mathcal{N} = 2$ hyper-multiplet (クォークのセクター) を加えた 3+1 次元の理論に対応しますが、ここで簡単のために $\mathcal{N} = 4$ SYM 部分を「グルーオンセクター」、 $\mathcal{N} = 2$ hyper-multiplet の部分を「クォークセクター」、それぞれのセクターに属する粒子を代表させてそれぞれ「グルーオン」、「クォーク」と呼ぶことにします。

この理論のクォークはクォーク電荷 ($U(1)$ バリオン電荷と定数倍を除き同じです) という保存電荷を持ちますので、この電荷の輸送を考えることにしましょう。問題としてはクォーク電荷に対して外部電場を加え、その際に流れる電流を計算することでクォーク電荷の電気伝導度を求めることにします。自由な電荷に外部電場を加えても加速度運動をするだけです。定常電流は構成できません。しかしクォークがグルーオンの系と相互作用しており、グルーオンからの「摩擦」を受ける状況 = 散逸の存在する状況では、(近似的に) 定常電流を実現することが可能です。

この問題は非平衡物理学の問題です。なぜならば、有限の電気伝導度を持つ系に電流が流れると熱が生じるからです。発生した熱を熱浴に捨てることで時間依存しない系を考えることは可能ですが、この場合も絶えず熱の生成と熱浴への流出が行われており、平衡状態ではありません。このような状態は非平衡定常状態です。従って、電気伝導を扱う問題は非平衡物理学の問題です。もっとも、微小な外部電場を加えた時の線形応答、電気伝導で言えばオームの法則で記述できる範囲の電気伝導度であれば、線形応答理論の久保公式を用いて平衡状態でのカレントの 2 点関数から計算することができます。問題は線形応答を超える領域、外部電場が十分大きい場合の非線形電気伝導度の計算です。私の知る範囲では、このような非線形電気伝導度を系の微視的な理論から出発して求めるのは大変難しい問題です。この問題が抱える一般的な困難や乗り越えるべき問題をまとめると以下のようになります。

1. 非平衡物理学を扱う困難
上記で述べたように、電流による散逸がありますので、系は非平衡系です。
2. 非線形電気伝導度を扱う困難
線形応答理論を超えた扱いが必要となります。
3. 定常状態の実現
熱浴を理論の枠組みに取り入れ、系と熱浴の間の相互作用 (熱の流出の記述) を取り入れる必要があります。
4. 非摂動的解析を行う困難
電荷どうしが強く相互作用する系 (強相関系) の電気伝導に興味がある場合は、相互作用について非摂動的に解析をする必要があります。

ゲージ・重力対応では、上記問題を克服できる例が存在します。まず熱浴の準備については以下のようにセットアップします。グルーオンセクターの自由度は large- N_c の

leadig で N_c^2 に、クォークセクターの自由度は $N_c N_f$ に比例しますので、プローブ近似 $N_c \gg N_f$ を採用すると、クォークセクターの自由度に比べてグルーオンセクターの自由度を無限に大きくとることが出来ます。この極限ではクォークセクターの「電流」による発熱に比べてグルーオンセクターの比熱が無限に大きくなり、グルーオンセクターはクォークセクターに対する熱浴の働きをすることが可能となります。より正確にはクォークセクターで生成される熱は $O(N_c N_f)$ の程度ですので、グルーオンセクターに流入した総熱量が比熱 $O(N_c^2)$ に匹敵する量となるためには $O(N_c)$ 程度の時間経過が必要です。今 large- N_c 極限をとっていますので、十分良い近似にてグルーオンセクターの温度は一定であるとみなして良いこととなります。このようにして定常状態を理論的にセットアップすることができます。従って、グルーオンセクターの重力双対として、温度一定の AdS-BH $\times S^5$ をそのまま用いることが出来ます。また両セクター間の相互作用、つまり電荷の系と「熱浴」との相互作用も、 $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論+ $\mathcal{N} = 2$ hyper-multiplet の理論枠内で取り込まれています。また言うまでもなく、ゲージ・重力対応では相互作用の非摂動効果の解析が可能です。さらに、ゲージ・重力対応ではもともと微視的理論の素過程など、平衡の概念を必要としない計算が可能でしたので、潜在的に非平衡系の記述も可能であると考えられます。

それでは非線形電気伝導度はどのようにして得られるのでしょうか。これは単に、外部電場存在下での GKP-Witten 処方を用いてカレント演算子の期待値を求めるだけです。GKP-Witten 処方を確立するために、クォーク電荷の意味を考えてみましょう。クォークはもともと D3-D7 間の open string でした。弦理論の枠組みでは open string が D-brane に終端すると、その端点が D-brane 上のゲージ場に対する単位電荷を持ちます。従って D7-brane 上の overall の $U(1)$ 電荷²⁷ がクォークの数です。系が含む総電荷は、時空の境界上で D7-brane 上の $U(1)$ 電場から、ガウスの法則を用いることで計算できます。まとめると、時空の境界で、境界に垂直方向 (u 方向とします) の D7-brane 上の電場を読むことで電荷密度 = カレントの第ゼロ成分 (J^0) を読み取ることができます。D7-brane 上の $U(1)$ ゲージ場を A_μ とおくと、適当なゲージのもとで、電場は $\sqrt{-g}g^{uu}g^{00}\partial_u A_0$ (ここで、 g で書かれている量は D7-brane 上の計量やその行列式です) を用いて表わされますので、D7-brane 上の A_0 がクォーク電荷密度 J^0 の情報を含むこととなります。具体的には

$$A_0(u) = \mu_q - \alpha u^{-2} J_0 + O(u^{-4}), \quad (39)$$

のような関係があります。ここで μ_q はクォークの化学ポテンシャルです。クォーク化学ポテンシャルは J_0 に共役な source ですので、non-normalizable mode として入ってきています。D7-brane の作用を source μ_q の関数として変分して落ちてくる項を読み取ると確かに右辺第 2 項が得られることが確認でき (これはガウスの法則に等価な式となります) convention を定めることで比例定数 α も決定されます。

さて、電流が存在する場合はこの電荷が空間方向 (x 方向とします) に運動しています。従って上記の関係を一般化すると

$$A_x(u) = A_{x(0)} + \alpha u^{-2} J_x + O(u^{-4}), \quad (40)$$

となります。今、電流 J_x に対する source である $A_{x(0)}$ について $\partial_x A_0 = 0$ のゲージを選択すると

$$A_x(u) = -E_x t + \alpha u^{-2} J_x + O(u^{-4}), \quad (41)$$

という GKP-Witten 処方が得られます。あとは $A_x(u)$ が従う D7-brane 上の運動方程式から E_x と J_x の関係を決めれば良いこととなります。

²⁷ フレーバー群の $U(1)$ 部分ですので、まさに $U(1)$ パリオン対称性に対する電荷です。

以前 gluon condensate の値を GKP-Witten 処方で求めた場合もそうでしたが、運動方程式を解くだけでなく、さらに何らかの整合性条件を課すことによって、演算子の期待値が一意に定まったことを思い出しましょう。ここでの整合性条件は何でしょうか。実は、勝手な境界条件の組 (E_x, J_x) から定めた解 A_x を D7-brane の作用に代入すると、on-shell 作用は一般的に複素数となってしまいます。これは D7-brane の作用が DBI 作用という平方根を含んだ形をしており、その平方根の中身が負の値を取りうるからです。詳細は省きますが、このように on-shell 作用が複素数となることを排除すると勝手な (E_x, J_x) の組み合わせを用いることが出来なくなり、両者の関係すなわち電気伝導度が決定されます。on-shell 作用の実数性を要請することは、系が安定（定常）であることを要請することに対応しています。

筆者はこの手法を用いてクォーク質量が有限の場合の D3-D7 モデルでの非線形電気伝導度の振る舞いを詳細に調べました。その結果、あるパラメータ領域ではこの系は負性微分抵抗を示すことがわかりました。負性微分抵抗とは外部電場を増やしたのに流れる電流が減少する、あるいは電流を増加させたのに誘起される電位差が減少する、という特異な電気伝導現象のことです。「負性微分抵抗」と言うと、「物理的なのか？」という質問を良く受けますが、これは物理的です。

まず、負性微分抵抗と負の抵抗を厳密に区別する必要があります。「負の抵抗」と言うと、印加電圧と逆向きに電流が流れることを意味しますので、明らかにナンセンスです。しかし、負の微分抵抗の場合、抵抗値そのものは常に正です。電流は常に印加電圧方向に流れます。ただしその「変化のしかた」が、電圧増加に対して単調増加ではなく、ある領域では電圧増加が（既に流れている正の電流の）減少をもたらす場合があります。これが微分抵抗が負となる状況です。実際、負性微分抵抗は強相関電子系で広く一般的に観測されています。また単一の物質ではなく半導体接合などのデバイスでも、このような電流・電圧特性を作ることができます。有名な例は江崎ダイオードであり、江崎博士はこの半導体接合における負性微分抵抗の観測により電子のトンネル効果の存在を実証してノーベル賞を受賞しています。また Gunn ダイオードやサイリスタなどの電子デバイスでは、負性微分抵抗の特性がスイッチング回路や発振回路の構成に応用されています。

さて、もとの話に戻りましょう。D3-D7 モデルでは、負性微分抵抗を再現できるばかりでなく、負性微分抵抗が生じるためには外部電場による正負電荷（クォーク・反クォーク）の対生成プロセスが決定的に重要であることも示されます²⁸。D3-D7 モデルで記述されるゲージ理論の系は厳密には現実の物性系と異なる理論ですが、今ここに少なくとも一つ非平衡定常現象を理論的に解析できる枠組みがあり、強相関電子系で一般的に見られる負性微分抵抗と定性的に同様な電流電圧特性が再現され、その物理的発生原因にも示唆が得られるということは、非平衡物理学の理論の観点から重要なのではないかと考えています。

6 結語

講義ではゲージ・重力対応の広大な世界のごく一部を、ごく簡単にしかご紹介できませんでした。例えば Wilson loop の計算やバリオンの構成など、応用上重要な計算に関しても割愛させて頂き、ゲージ・重力対応の基本的考え方をご紹介する上でのミニマムの内容を講義させて頂きました。本稿では、ゲージ・重力対応の通常の説明

²⁸考察している系は江崎ダイオードなどの半導体接合とは著しく異なりますので、江崎ダイオードにおける負性微分抵抗の説明に用いられたトンネル効果の理論は、この場合直接用いることができません。より専門的には、半導体接合での伝導はメソスコピック系のバリスティックな伝導に分類されますが、D3-D7 系で扱っている伝導は熱浴との相互作用による散逸が大きな、非バリスティックな伝導であり、モット絶縁体などの強相関電子系のそれに類似しています。

とは異なる、筆者なりの視点から、直観を重視する解説を心がけたつもりです。なお、説明では直観を重視しつつも、表現が不正確とならないよう配慮したつもりですが、至らぬ点があるかも知れません。誤植、誤り、その他お気づきの点やコメントなどありましたら遠慮なくご指摘頂ければ幸いです。講義と本稿がゲージ・重力対応の理解の一助となれば幸いです。

謝辞

講義を通して筆者自身も勉強をする機会を与えて頂きました。このような機会を与えて頂いた新潟大学・山形大学の素粒子論研究室および関係者の方々に御礼申し上げます。また本稿は「第15回 新潟・山形合宿」の報告記事の一部ですが、この合宿に先だって講義の機会を与えて頂いた「瀬戸内サマーインスティテュート (SSI)2010」(広島大学・愛媛大学・山口大学 各素粒子論研究室主催、2010年9月6日~9月8日)、「第1回新ハドロンサマースクール」(新学術領域研究「多彩なフレーバーで探る新しいハドロン存在形態の包括的研究」主催、2010年8月18日~8月20日)、「新ハドロン特別レクチャー」(同左、2010年6月3日、10日、24日)、「名古屋大学グローバルCOEプログラム「宇宙基礎原理の探求」若手リトリート」(名古屋大学主催、2009年10月31日~11月1日)における講義の経験が、本稿の貴重な土台となっております。併せて各関係者の方々にこの場をお借りして御礼申し上げます。

参考文献

- [1] ゲージ・重力対応の考え方を ϕ^3 -理論を用いて解説する試みは、筆者個人のアイデアによります。
- [2] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231 [*Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113] [arXiv:hep-th/9711200].
- [3] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” *Phys. Lett. B* **428** (1998) 105 [arXiv:hep-th/9802109];
E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 253 [arXiv:hep-th/9802150].
- [4] ゲージ・重力対応の日本語によるレビューとしては、例えば
今村洋介, 「AdS₅/CFT₄ correspondence」, *素粒子論研究* **98-6** (1999) 209;
今村洋介, 「AdS/CFT:その基本的アイデアと応用」, *原子核研究* **52-1** (2007) 52.
- [5] ゲージ・重力対応の超弦理論の専門家向けの大部のレビューとしては
O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.* **323** (2000) 183 [arXiv:hep-th/9905111].
- [6] 超重力理論における解と弦理論の関係を詳細にまとめたテキストとしては、
T. Ortin, “Gravity And Strings,” *Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004)*.
- [7] J. Polchinski, “Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges,” *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4724 [arXiv:hep-th/9510017].

- [8] J. Polchinski, “String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string,” *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998)*;
J. Polchinski, “String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond,” *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998)*.
- [9] C. V. Johnson, “D-Branes,” *Cambridge, USA: Univ. Pr. (2003)*.
- [10] D-brane や M-brane と超重力理論の解、弦理論の基礎についてまとめられた日本語のテキストとしては、
太田信義, 「超弦理論・ブレイン・M理論」, (シュプリンガー・フェアラーク 東京, 東京 2002) .
- [11] G. T. Horowitz and A. Strominger, “Black strings and P-branes,” *Nucl. Phys. B* **360**, 197 (1991).
- [12] O. Aharony and E. Witten, “Anti-de Sitter space and the center of the gauge group,” *JHEP* **9811**, 018 (1998) [arXiv:hep-th/9807205].
- [13] E. Witten, “Baryons and branes in anti de Sitter space,” *JHEP* **9807**, 006 (1998) [arXiv:hep-th/9805112].
- [14] M. Cvetič *et al.*, “Embedding AdS black holes in ten and eleven dimensions,” *Nucl. Phys. B* **558** (1999) 96 [arXiv:hep-th/9903214].
- [15] J. W. York, “Role of conformal three geometry in the dynamics of gravitation,” *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 1082;
G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Action Integrals And Partition Functions In Quantum Gravity,” *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2752.
- [16] E. Poisson, “A relativist’s toolkit: The mathematics of black-hole mechanics,” *Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004)*.
- [17] A. Buchel, “Resolving disagreement for eta/s in a CFT plasma at finite coupling,” *Nucl. Phys. B* **803** (2008) 166 [arXiv:0805.2683 [hep-th]],
およびここで引用されている文献を参照。
- [18] A. A. Tseytlin, “On non-abelian generalisation of the Born-Infeld action in string theory,” *Nucl. Phys. B* **501**, 41 (1997) [arXiv:hep-th/9701125].
- [19] I. R. Klebanov and E. Witten, “AdS/CFT correspondence and symmetry breaking,” *Nucl. Phys. B* **556** (1999) 89 [arXiv:hep-th/9905104].
- [20] ゲージ・重力対応を用いて glueball の質量スペクトルを求めた仕事としては、例えば
C. Csaki, H. Ooguri, Y. Oz and J. Terning, “Glueball mass spectrum from supergravity,” *JHEP* **9901** (1999) 017 [arXiv:hep-th/9806021];
R. de Mello Koch, A. Jevicki, M. Mihailescu and J. P. Nunes, “Evaluation Of Glueball Masses From Supergravity,” *Phys. Rev. D* **58** (1998) 105009 [arXiv:hep-th/9806125];
R. C. Brower, S. D. Mathur and C. I. Tan, “Discrete spectrum of the graviton in the AdS(5) black hole background,” *Nucl. Phys. B* **574** (2000) 219 [arXiv:hep-th/9908196];
R. C. Brower, S. D. Mathur and C. I. Tan, “Glueball Spectrum for QCD from AdS Supergravity Duality,” *Nucl. Phys. B* **587** (2000) 249 [arXiv:hep-th/0003115],
などの多くの仕事があります。なお、normalizable mode の境界条件に対する詳細な考察は、例えば上記の [R. de Mello Koch et. al.] に与えられています。

- [21] 筆者の仕事で、時間依存する重力時空と流体力学の関係、および時空の正則性と流体の輸送係数を論じた代表的な論文は
 S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, “Consistent Anti-de Sitter-Space/Conformal-Field-Theory Dual for a Time-Dependent Finite Temperature System,” *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 031601 [arXiv:0901.4834 [hep-th]];
 S. Kinoshita, S. Mukohyama, S. Nakamura and K. y. Oda, “A Holographic Dual of Bjorken Flow,” *Prog. Theor. Phys.* **121** (2009) 121 [arXiv:0807.3797 [hep-th]].
 なお、これら一連の仕事の発端となった研究は、
 R. A. Janik and R. B. Peschanski, “Asymptotic perfect fluid dynamics as a consequence of AdS/CFT,” *Phys. Rev. D* **73**, 045013 (2006) [arXiv:hep-th/0512162].
- [22] 流体力学と重力理論の対応や、流体の輸送係数のゲージ・重力対応を用いた導出等に関する邦文レビューとしては、例えば
 中村真, 夏梅誠, 「超弦理論がつなぐブラックホールと流体力学」, *物性研究* **94-3** (2010) 350; *素粒子論研究* **118-2** (2010) 63;
 夏梅誠, 「線形応答理論で学ぶ AdS/CFT 双対性」, *原子核研究* **54-3** (2010) 110; *素粒子論研究* **118-2** (2010) 87.
- [23] S. Nakamura, “Negative Differential Resistivity from Holography,” *Prog. Theor. Phys.* **124** 1105 (2010) [arXiv:1006.4105 [hep-th]].
- [24] Holographic な繰り込みのレビューとしては、例えば
 K. Skenderis, “Lecture notes on holographic renormalization,” *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 5849 [arXiv:hep-th/0209067].
 また邦文解説としては [22] の [夏梅 (2010)] などがあります。
- [25] E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 505 [arXiv:hep-th/9803131].
- [26] S. W. Hawking and D. N. Page, “Thermodynamics Of Black Holes In Anti-De Sitter Space,” *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 577.
- [27] ブラックホール熱力学の解説としては、例えば
 R. M. Wald, “General Relativity,” *Chicago, Usa: Univ. Pr. (1984) 491p*;
 前田恵一, (臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 63) 「重力理論講義 相対性理論と時空物理学の進展」, (サイエンス社, 東京 2008) .
- [28] V. Balasubramanian and P. Kraus, “A stress tensor for anti-de Sitter gravity,” *Commun. Math. Phys.* **208**, 413 (1999) [arXiv:hep-th/9902121].
- [29] A. Karch and E. Katz, “Adding flavor to AdS/CFT,” *JHEP* **0206** (2002) 043 [arXiv:hep-th/0205236].
- [30] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **113** (2005) 843 [arXiv:hep-th/0412141];
 T. Sakai and S. Sugimoto, “More on a holographic dual of QCD,” *Prog. Theor. Phys.* **114** (2005) 1083 [arXiv:hep-th/0507073].
- [31] O. Aharony and D. Kutasov, “Holographic Duals of Long Open Strings,” *Phys. Rev. D* **78** (2008) 026005 [arXiv:0803.3547 [hep-th]];
 K. Hashimoto, T. Hirayama, F. L. Lin and H. U. Yee, “Quark Mass Deformation of Holographic Massless QCD,” *JHEP* **0807** (2008) 089 [arXiv:0803.4192 [hep-th]].

- [32] 杉本茂樹, 「超弦理論による QCD の解析」, 原子核研究 **52-1** (2007) 68.
- [33] E. Antonyan, J. A. Harvey, S. Jensen and D. Kutasov, “NJL and QCD from string theory,” arXiv:hep-th/0604017.