隠れた変数の理論と Contextuality

山形大学 理工学研究科 中島 正裕

1　はじめに

解析力学等の古典論では，系のある状態が指定されると全ての物理量の値を同時に決定することができる．このような特徴を持つ理論は決定論と言い，古典論は決定論の一部になる．一方，量子論では非可換な物理量があり，そのような物理量の値を同時に決める状態は考えられない．量子論を決定論の立場から理解しようとする試みに隠れた変数の理論がある．この理論における粒子状態の指定には，測定によって観測者が知ることのできる変数に加え，知る手段がないランダムに振舞う隠れた変数を用いる．この状態が完全に指定されると，粒子に対するどんな物理量の測定値も予言できるとされる．しかし，観測者には隠れた変数による粒子状態の区別ができないので，物理量の測定値が確率的に振舞い，物理量が同時に決まらないように見える．隠れた変数の理論は量子論を決定論の立場から理解することが可能か否かという古くからの議論の中に用いられてきた．

量子論と決定論の差異を探る議論は多々ある [1, 2, 3, 4]．それらの中に，物理量と測定状況の依存関係に着目した以下のような議論がある．ここで依存関係とは，例えば物理量 $\hat{A}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$ が $[\hat{A},\hat{B}]=[\hat{A},\hat{C}]=0$, $[\hat{B},\hat{C}]\neq 0$ を満たす場合に，$\hat{A}$ の測定値が，$\hat{A}$ と共に $\hat{B}$ を測定したか，それとも $\hat{C}$ を測定したかに依存して一般に異なる (contextual) か，常に等しい (noncontextual) かということである．Noncontextuality は古典論にみられる特徴であり，古典論を素朴に一般化した理論は noncontextual な決定論となる．ここで，noncontextual な決定論の立場から量子論を理解可能か否か問うてみる．その答えは Kochen-Specker の定理 [3, 4, 5] から否と結論される．これから，物理量が量子論によって記述される場合，$\hat{A}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$ の測定は contextuality を示すと考えられる．以上の議論から “contextual であるということが量子論のみに見られる本質的な特徴なのか?” という疑問が生じる．本稿はこの疑問に答える．

本稿では，決定論に基づく Bell の隠れた変数の理論 [3] を古典論の延長として妥当と考えられる範囲において自然に拡張した．拡張した隠れた変数の理論は，量子論の基本的ないくつかの結論を理解でき，contextuality が自然に現れる．これから，contextuality は量子論に特有の性質とは断定できない．これは，contextual な決定論による量子論の理解の限界を探る必要があるという問題提起の 1 つとなる．

2　Noncontextuality と contextuality

この節で noncontextuality[6] を説明する．そのため，物理量 $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ を考える．ただし，それらの量子論における取扱いは $[\hat{A},\hat{B}]=[\hat{A},\hat{C}]=0$ かつ $[\hat{B},\hat{C}]\neq 0$ であるとする．そして，これらの物理量を用いた次の 2 種類の引き続く測定 M1 と M2 を考える．この 2 つの測定 M1 と M2 を比較すると，始めに行われる測定 $\hat{B}$ と $\hat{C}$ が互いに非可換である．

M1　始めに $\hat{B}$ を測定し，引き続いて $\hat{A}$ を測定する．

M2　始めに $\hat{C}$ を測定し，引き続いて $\hat{A}$ を測定する．

ここで，ある粒子 a に対して測定 M1 が実行された場合，そして M2 が実行された場合の 2 通りを仮想的に考える[*1]．すると M1 と M2 において $\hat{B}$ と $\hat{C}$ の測定が非可換であることから，その $\hat{A}$ の測定への影響の差異が懸念され，“M1 と M2 における $\hat{A}$ の測定値は等しいか？” という疑問が生じる．この疑問は，$\hat{A}$ の測定値が測定の状況（共に行う測定が $\hat{B}$ か $\hat{C}$ か）に依存するか否かの，測定状況依存性 (contextuality) の問題となる．

さらに，次の 2 つの仮定を受け入れる．

仮定 I　互いに可換な物理量 $\hat{A}$ と $\hat{C}$ のそれぞれを得る測定は，互いに測定値を乱さない．

仮定 II　粒子に対して行うどんな物理量 $\hat{A}$ の測定値も，測定粒子の状態から 1 つに決まる．

このとき，まず粒子 a に対する物理量 $\hat{A}$ の測定値は 仮定 II によって 1 つに決まっている．そして 仮定 I から，$\hat{A}$ の測定値は M1 もしくは M2 という測定状況に独立であり，M1 と M2 において “必ず” 等しくなる．この性質を “noncontextuality(測定状況に独立な性質)” と呼ぶ．しかし，より一般的に考えた場合は M1 と M2 における $\hat{A}$ の測定値が等しいとは限らない (contextualtiy) [*2]．

例えば，古典論の解析力学を見る．この理論では全ての物理量は可換である．よって，粒子に対する理想的な測定を行うと，その位置と運動量を，粒子の状態を乱すこと無く測定でき，それらの測定値は測定の順序に依存せず等しい．つまり，解析力学は noncotextual な決定論である．

3　Noncontextual な決定論と Kochen-Specker の定理

ここでは，noncontextuality を次節以降の議論に用いるため，その定式化を射影オペレータを用いて行う．加えて Kochen-Specker の定理 [3, 4] の概略を説明する．

Noncontextual な決定論の立場による物理量とその測定値の取扱いに注目する．具体的に扱うため，前節の議論に用いた物理量 $\hat{A}$，$\hat{B}$，$\hat{C}$ として，スピン 1 を持つ粒子の次の物理量を用いる．

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2, \quad \hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}) \equiv (\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2 - (\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2, \quad \hat{K}(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\gamma}') \tag{1}$$

$$\left[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2\,,\,\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\right] = \left[(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2\,,\,\hat{K}(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\gamma}')\right] = 0, \quad \left[\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})\,,\,\hat{K}(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\gamma}')\right] \neq 0 \tag{2}$$

ただし，$\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ であり，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ は互いに直交する単位ベクトルである．そして，$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の固有値は 0, 1 であり，$\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ が 0, -1, $+1$ である．また $\boldsymbol{\alpha}$ を軸に $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$ を回転して得られる直交系が $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}'$，$\boldsymbol{\gamma}'$ であり，$\hat{K}(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\gamma}')$ の固有値は 0, -1, $+1$ である．式 (2) が満たされる場合，始めに $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ を測定し，引き続いて $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ を測定して得られる物理量は $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ となる．ここ

[*1] この考え方は次のようにも考えられる．それは，隠れた変数を含めて等しい状態の粒子を 2 つ準備できたとして，一方に測定 M1 を行い，他方に測定 M2 を行う場合である．

[*2] contextuality を持つ理論であっても，M1 と M2 における $\hat{A}$ の測定値が等しい場合を許す．

で，式 (1) の物理量を用いて次の 2 通りの測定状況を考える．

測定状況 I　引き続く測定によって $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ が測られる場合．ただし，始めに $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定を行い，続いて $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ の測定を行う場合と，その逆 (2 節の M1 に対応) の引き続く測定の 2 通りある．

測定状況 II　引き続く測定によって $\hat{K}(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\gamma}')(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ が測られる場合．ただし，$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定を行ってから $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ の測定を行う場合と，その逆 (2 節の M2 に対応) の 2 通りある．

2 つの測定状況は共に $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定を含む．スピン 1 を持つ粒子の測定を考えると，前節の仮定 I と仮定 II は次の DT-O と NC-O のように表せる．

DT-O　ある粒子に対し $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定を行った場合の測定値と，$\hat{K}(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\gamma}')(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定を行った場合の測定値は決まっている．

NC-O　ある粒子に対する測定状況 I と測定状況 II の $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定値は共に等しくなければならない

ここで noncontextuality を表すのは NC-O である．議論を進めるには射影オペレータを用いるほうが便利なので，次に射影オペレータを用いて DT-O と NC-O を説明する．

まず $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の射影オペレータによる分解を考える．この分解は次式 (3) のようになる [7]．ただし射影オペレータ $\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$ 等は以下の式 (4) のように書ける．そして Messiah[8] に従うと，$\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$ の行列要素は $(\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}})_{ij}=\alpha_i\alpha_j,\quad i,j\in\{x,y,z\}$ と表すことができる[*3]．式 (3) において，$\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の固有値 0，-1，$+1$ に属す空間への射影がそれぞれ $\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$，$\hat{P}_{\boldsymbol{\beta}}$，$\hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}}$ となっている．一方で $\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$ は $\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}$ の固有値 0 に属す固有空間への射影となっている．

$$\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2=(0)\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}+(-1)\hat{P}_{\boldsymbol{\beta}}+(+1)\hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}} \tag{3}$$

$$\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}=1-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2,\quad \hat{P}_{\boldsymbol{\beta}}=1-(\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2,\quad \hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}}=1-(\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2 \tag{4}$$

式 (3) 中の 3 つの射影オペレータは次式のように単位の分解を成す．

$$1=\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}+\hat{P}_{\boldsymbol{\beta}}+\hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}} \tag{5}$$

また $\hat{K}(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\gamma}')(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ を分解する射影オペレータ $\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$，$\hat{P}_{\boldsymbol{\beta}'}$，$\hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}'}$ にも，その分解に用いた射影オペレータが次式の単位の分解をなす．

$$1=\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}+\hat{P}_{\boldsymbol{\beta}'}+\hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}'} \tag{6}$$

[*3] ここで用いる $\hat{\boldsymbol{L}}$ の行列表現は [8] に従い次式を用いる．この表現は $\hat{L}_z$ を対角化せず，$\hat{L}_x^2=(\boldsymbol{e}_x\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ と $\hat{K}(\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z)$ を対角化する．ここで $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ は x，y，z 方向の単位ベクトルである．

$$\hat{L}_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \hat{L}_y=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad \hat{L}_z=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

このとき，射影オペレータは Yes-No 測定を表す．例えば射影オペレータ $\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$ とその固有値 1(以後 Yes とする) または 0(以後 No とする) の場合は，$\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定において，その固有値 0 を測定値として得た（Yes）か否か（No）を示す．これから，物理量 $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定値が得られると言うことは，その固有値に対応した式 (5) 中の各射影オペレータの測定値が得られると言うことになる．そのとき，測定値の組合せは必ず {Yes, No, No} になる．例えば $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定値が 0 のときは，$\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$: Yes, $\hat{P}_{\boldsymbol{\beta}}$: No, $\hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}}$: No である．これから，DT-O は式 (5) と式 (6) を用いて以下の DT-P に書ける．

また，式 (3) と同様に $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2 = 0\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}} + |\pm 1|(1-\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}})$ とできる．よって $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定値が決まるということは，射影オペレータ $\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$ についての測定値 (Yes または No) が決まるということである．そして，$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ が測定状況 I に属すか，測定状況 II に属すかによって，$\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$ と共に単位の分解をなす射影オペレータが異なる．ここで noncontextuality を要請し NC-O を考えると，それは以下の NC-P が要請されることと等しい [9].

DT-P　式 (5) を成す $\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$, $\hat{P}_{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}}$ の測定値の組は Yes が 1 つ No が 2 つとなる．式 (6) も同様である．そして，ある粒子に対する測定において式 (5) と式 (6) 中のどの射影オペレータの測定値が Yes となるかは決まっている．

NC-P　ある粒子に対する式 (5) と (6) 中の $\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}$ の測定値は必ず等しくなければならない．

以下で射影オペレータを用いて Kochen-Specker の定理の概略を説明する．そのため，互いに直交する 3 つの単位ベクトルの組 $\{\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\gamma}''\}$，$\{\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}'', \boldsymbol{\gamma}''\}$，$\{\boldsymbol{\alpha}'', \boldsymbol{\beta}''', \boldsymbol{\gamma}'''\}$，$\cdots$ 等を考え，式 (7) のように多数の単位の分解を考える．ただし，式 (7) 中の単位の分解は次の特徴を持つようにする．

$$1 = \hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}'} + \hat{P}_{\boldsymbol{\beta}'} + \hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}''}, \quad 1 = \hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}''} + \hat{P}_{\boldsymbol{\beta}''} + \hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}''}, \quad 1 = \hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}''} + \hat{P}_{\boldsymbol{\beta}'''} + \hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}'''}, \quad \cdots \tag{7}$$

その特徴では，例えば式 (7) 中の第 1 式と第 2 式は $\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}'}$ を共通に持ち，第 2 式と第 3 式では $\hat{P}_{\boldsymbol{\gamma}''}$ を共通に持つ，というように共通の射影オペレータを持つと言う意味で全ての単位の分解が連なる．

式 (7) 中の単位の分解をうまく作り，全ての射影オペレータを noncontextual な決定論 (DT-P, NC-P) に従い扱ってみる．もし noncontextual な決定論を量子論に埋め込めるのなら，DT-P と NC-P に従って，全ての射影オペレータの測定値 Yes と No を決めることができるはずである．しかし，DT-P と NC-P に従って任意に選んだ射影オペレータから順に 1 つずつ測定値を決めていくと，共通の射影オペレータをもつ単位の分解が存在することから，残りの射影オペレータの測定値の決め方に制限が生じる．そして，NC-P に自己矛盾 (DT-P を守ると NC-P が守られない) が生じる場合が必ずどこかに現れてしまう [4, 5]．この結論が Kochen と Specker によって与えられた Kochen-Specker の定理である．この定理により，noncontextual な決定論を用いて量子論を理解する可能性が完全に否定された[*4].

[*4] Kochen-Specker の定理は 3 次元以上のヒルベルト空間で記述される量子論に対して成り立ち，2 次元以下のヒルベルト空間では成り立たない．2 次元のヒルベルト空間の場合は式 (7) のような共通の射影オペレータを持った異なる単位の分解を考えることができず，全ての射影オペレータの測定値を矛盾無く決めることが可能になってしまう．

4　Bell の隠れた変数の理論

Bell は量子論を決定論の立場で理解する可能性を示す 1 例として，隠れた変数を用いて，スピン $\frac{1}{2}$ を持つ粒子に対する Stern-Gerlach 型測定における粒子の振る舞いと測定値の出現確率を以下のように説明して見せた [3].

まず $\hat{\sigma}_z$ の測定を経て測定値 $+1$ をとる粒子を考える．この粒子は隠れた変数 λ を所持していると考える．ただし λ は，$0 \leq \lambda \leq 1$ を取る確率変数であり，粒子によってランダムに異なる．そして λ は測定によって値を決めることができないと考える．しかしそれにもかかわらず，λ は測定値に影響を与えるとする．

次に，準備した粒子に対して量子化軸を単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ 方向にむけた Stern-Gerlach 型測定を行い，$\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の測定値を得る場合を見る．このとき粒子に対する $\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の測定値は，隠れた変数の理論において，粒子の所持する λ から次のように決まるとする．

$$\lambda \in [0\,,\, l) \;\Rightarrow\; \text{測定値 } +1\;, \quad \lambda \in [l\,,\, 1) \;\Rightarrow\; \text{測定値 } -1 \tag{8}$$

$$\text{ただし} \quad l = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{n}), \quad \boldsymbol{e}_z = \text{z 軸方向の単位ベクトル} \tag{9}$$

以上から，Bell の隠れた変数の理論に従うと，$\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の測定値 ± 1 が得られる確率は各測定値の属す λ の区間長に等しくなる．これは量子論によって計算される確率と等しい．また λ は測定できず，ランダムに変化するので測定ごとに決められない．これから，$\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の測定値は測定のたびに確率的に振舞うように見える．なお，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$ の場合，$\boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ は常に測定値 $+1$ を生じ，$\hat{\sigma}_z$ の固有状態であることを表す．

Bell は上述の隠れた変数の理論を例示し，それでも決定論による量子論の理解が困難であることを示した [3]．その結論は Kochen-Specker の定理である[*5]．しかし，Kochen-Specker の定理は 3 次元以上のヒルベルト空間に適用可能であり，スピン $\frac{1}{2}$ に関する Bell の隠れた変数の理論は 2 次元なので議論の対象外である．その一方で，Bell の隠れた変数の理論は上述の 2 次元の例からの類推で 3 次元以上にも拡張することができる．

5　スピン 1 粒子に対する contextual な隠れた変数の理論

ここでは Bell の隠れた変数の理論を基礎にし，隠れた変数を含む粒子の状態を決め，測定による状態変化を認めることで，スピン 1 を扱う 3 次元の隠れた変数の理論の例を作る．特に取り扱う物理量は 3 節の $\hat{K}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{L}})^2$ である．この節で作られる隠れた変数の理論を調べると，後に説明するように

*5　Kochen-Specker の定理と同等の結論は，Kochen と Specker[4] よりも早く Bell によって導かれている [3]．これから Bell-Kochen-Specker の定理とも呼ばれる．しかし Kochen と Specker に由来する定理の証明手法の方が具体的でわかりやすく，現在使われているのは Kochen と Specker による手法である．

contextual となる．

まず，物理量 $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定の隠れた変数の理論による取り扱いを説明する．初めに隠れた変数の理論における粒子状態を，隠れた変数の λ も含めて次のように考える．

$$\text{粒子状態}\ :\ (\boldsymbol{\omega}, v, \lambda)\ ;\ v = 0, -1, +1\ ,\ 0 \leq \lambda < 1\ :\ \text{確率変数} \tag{10}$$

ただし $\boldsymbol{\omega}$ は単位ベクトルであり，v は $\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}$ の測定を行って生じる測定値である．式 (10) の状態は，量子論において $\boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\,|v\rangle_{\boldsymbol{\omega}} = v\,|v\rangle_{\boldsymbol{\omega}}$ を満たす固有状態に対応する．以下では議論を簡単にするため，特に $v=0$ の始状態にある粒子を測定対象とする．

状態 $(\boldsymbol{\omega},0,\lambda)$ の粒子に対する $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定値は，以下の “Phase1” から “Phase3” に従い決定論的に決まるとする．ただし，$\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定値を次のように番号付けしておく．

$$\text{測定値の番号付け}\ :\ m_1 = 0,\quad m_2 = -1,\quad m_3 = +1$$

“Phase1” では，“測定値の番号付け” で決めた番号順に，各番号の測定値を生じる隠れた変数の区間を区間 $[0\,,1)$ から抜き出して決める．このときの区間長は各区間に対応する測定値の生じる確率になる．“Phase2” で，粒子の隠れた変数の値の属す区間に応じて $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定値が決まる．“Phase3” が測定による粒子状態の変化を決める．

Phase1　区間 $[0,1)$ を m_1，m_2，m_3 に対応した 3 つの区間 $I_{\boldsymbol{\alpha}}$，$I_{\boldsymbol{\beta}}$，$I_{\boldsymbol{\gamma}}$ に分割する．この分割は各区間に対応する測定値が m_1 から m_3 の順に並ぶように行っている．このとき，各区間長は粒子状態の $\boldsymbol{\omega}$ と $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ から決まる．そして $|I_{\boldsymbol{\alpha}}| + |I_{\boldsymbol{\beta}}| + |I_{\boldsymbol{\gamma}}| = 1$ を満たす．

$$I_{\boldsymbol{\alpha}} = \big[\,0,\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2\,\big),\quad I_{\boldsymbol{\beta}} = \big[\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2,\ (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2 + (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\,\big),\quad I_{\boldsymbol{\gamma}} = \big[\,1 - (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\gamma})^2,\ 1\,\big)$$

$$|I_{\boldsymbol{\alpha}}| = (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2,\quad |I_{\boldsymbol{\beta}}| = (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta})^2,\quad |I_{\boldsymbol{\gamma}}| = (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\gamma})^2$$

Phase2　λ の値から測定値 m を決める．

$$\lambda \in I_{\boldsymbol{\alpha}}\ \Rightarrow\ \text{測定値}\ :\ m_1,\quad \lambda \in I_{\boldsymbol{\beta}}\ \Rightarrow\ \text{測定値}\ :\ m_2,\quad \lambda \in I_{\boldsymbol{\gamma}}\ \Rightarrow\ \text{測定値}\ :\ m_3$$

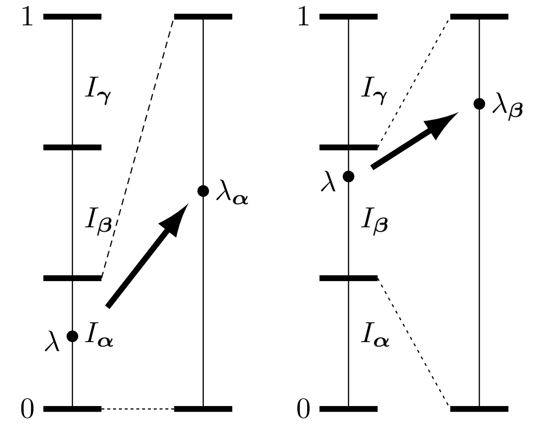
Phase3　粒子状態 $(\boldsymbol{\omega},0,\lambda)$ は得られた測定値 m_i(λ の属す区間) に応じて，以下の状態変換を受けて状態 $(\boldsymbol{\omega}',0,\lambda')$ に変化する．ただし $\boldsymbol{\omega}$ から $\boldsymbol{\omega}'$ への変化は，量子論における測定後の固有状態の変化を参考にしている．

$$\lambda \in I_{\boldsymbol{\alpha}}\ \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\alpha} \\ \lambda' = \lambda_{\boldsymbol{\alpha}} \end{cases},\quad \lambda \in I_{\boldsymbol{\beta}}\ \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\beta} \\ \lambda' = \lambda_{\boldsymbol{\beta}} \end{cases},\quad \lambda \in I_{\boldsymbol{\gamma}}\ \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\gamma} \\ \lambda' = \lambda_{\boldsymbol{\gamma}} \end{cases}$$

$$\lambda_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\lambda}{|I_{\boldsymbol{\alpha}}|},\quad \lambda_{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\lambda - |I_{\boldsymbol{\alpha}}|}{|I_{\boldsymbol{\beta}}|},\quad \lambda_{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\lambda - \big(|I_{\boldsymbol{\alpha}}| + |I_{\boldsymbol{\beta}}|\big)}{|I_{\boldsymbol{\gamma}}|}$$

ただし，“Phase3” における λ の変化は，変化後の λ' が常に区間 $[0,\,1)$ に一様分布するようになっている．この一様分布を保つ一意な変換であれば，λ の変化は何でも良い[*6]．

上述の “Phase3” における隠れた変数の変化の例が図 1 である．例えば図 1 の左図では，$\lambda \in I_{\boldsymbol{\alpha}}$ のとき，区間 $I_{\boldsymbol{\alpha}}$ 中における λ の相対位置が等しくなるように $[0\,,\,1)$ 区間中の $\lambda_{\boldsymbol{\alpha}}$ へ変換されている．

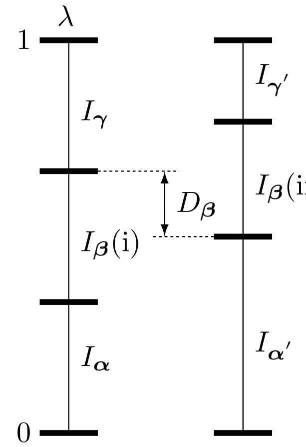


$\lambda \in I_{\boldsymbol{\alpha}}$ の場合の変化．$\lambda \in I_{\boldsymbol{\beta}}$ の場合の変化．

図 1　$\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定を受けた粒子の隠れた変数の変化の例．変化は，隠れた変数の属す区間を区間 $[0,\,1)$ へ引き伸ばす形となる．

以上から $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の各測定値が得られる確率も得られる．状態 $(\boldsymbol{\omega},0,\lambda)$ の粒子において，上述の “Phase1” において取られた区間長が，その区間に対応する測定値となる確率になる．例えば $|I_{\boldsymbol{\alpha}}|$ は，状態 $(\boldsymbol{\omega},0,\lambda)$ の粒子に対する $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定値が 0 になる確率である．また測定を受けた粒子の隠れた変数は，常に区間 $[0,\,1)$ に一様分布するので，粒子の測定値は確率的な振舞いをするように見える．$|I_{\boldsymbol{\alpha}}|$ は $(\boldsymbol{\omega},0,\lambda)$ に対応する量子論における状態 $|0\rangle_{\boldsymbol{\omega}}$ を用いた ${}_{\boldsymbol{\omega}}\langle 0|\hat{P}_{\boldsymbol{\alpha}}|0\rangle_{\boldsymbol{\omega}}$ と等しい[*7]．

ここで，以上の隠れた変数の理論は contextuality を持つことを示す．そのため, 物理量 i : $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ と物理量 ii : $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}')(\boldsymbol{\alpha}'\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ を考える．これらは $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\alpha}'$，そして $\boldsymbol{\gamma}$ と $\boldsymbol{\gamma}'$ が異なり，共通の $\boldsymbol{\beta}$ を持っている．これから，両者を射影オペレータによって分解すると共通の $\hat{P}_{\boldsymbol{\beta}}$ を持つ．すると，もし理論が contextuality を持つなら 3 節における NC-P の制限がないので，$\hat{P}_{\boldsymbol{\beta}}$ の測定値は物理量 i に属すか物理量 ii に属すかによって異なる可能性がある．



物理量 i　　物理量 ii

図 2　contextuality を示す例．

状態 $(\boldsymbol{\omega},0,\lambda)$ にある粒子の物理量 i を測定した場合と，物理量 ii を測定した場合のそれぞれの測定値 -1 となる λ の区間 $I_{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{i})$ と $I_{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{ii})$ は，上述の測定値決定の手順に従うと次式になる．

$$I_{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{i}) = \Big[\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2\,,\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2 + (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\,\Big), \quad I_{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{ii}) = \Big[\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\alpha}')^2\,,\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\alpha}')^2 + (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta})^2\,\Big)$$

すると，次式 (11) を満たす区間 $D_{\boldsymbol{\beta}}$ に属す λ を持つ粒子は，$\hat{P}_{\boldsymbol{\beta}}$ の測定値が 物理量 i を測る測定状況に

[*6] このような状態変化を考えることで，例えば $\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定を行い測定値 0 となる粒子に対して引き続き $\hat{K}(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\gamma}')(\boldsymbol{\alpha}'\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定を行って測定値 1 を得るというような引き続く測定を扱える．このとき測定値 0 と 1 のセットを得る確率は量子論による計算結果と等しい．

ただし，3 節の測定状況 I のような，$\hat{K}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ の測定を行ってから引き続いて $(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の測定行う場合や，その逆の引き続く測定の場合など，縮退を含む場合をを扱うには 5 節における隠れた変数の理論の手法を再整備する必要がある．その議論は別稿に譲る．

[*7] ただし上述の隠れた変数の理論では，確率振幅を計算できない．

属すか物理量 ii の測定状況かに依存して異なり，contextuality を示す[*8]．$D_{\boldsymbol{\beta}}$ の模式図が図 2 である．

$$D_{\boldsymbol{\beta}} = \{I_{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{i}) \cup I_{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{ii})\} \setminus \{I_{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{i}) \cap I_{\boldsymbol{\beta}}(\mathrm{ii})\} \tag{11}$$

6　議論と結論

本稿では，スピン $\frac{1}{2}$ を扱う Bell の隠れた変数の理論をスピン 1 の測定が扱えるように自然に拡張した．そしてそのような隠れた変数の理論は contextual であることが分かった．

Contextuality には，測定値が測定の履歴に依存するという形と，将来の測定に依存する形がある．本稿で構成した隠れた変数の理論は，測定値が測定の履歴に依存する contextuality のみを持つ．この contextuality は古典的と呼べる範囲に収まると考える．すると，contextuality は量子論に固有の性質とは言えない．また，contextual な隠れた変数の理論は Kochen-Specker の定理の対象外であり，量子論との両立が否定されない．これから，contextual な隠れた変数の理論によって，量子論をどの程度理解できるのか興味が出る．今後は，contextual な隠れた変数の理論と量子論が異なる結論を与える場合はあるのか，あるとしたらどのような場合かを調べ，量子論の本質的な特徴を探りたい．

参考文献

[1] J. S. Bell : Physics **1** (1964) 195.

[2] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt : Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 880.

[3] J. S. Bell : Rev. Mod. Phys. **38** (1966) 447.

[4] S. Kochen and E. Specker : J. Math. Mech. **17** (1967) 59.

[5] A. Peres : J. Phys. A **24** (1991) L175.

[6] N. D. Mermin : Rev. Mod. Phys. **65** (1993) 803.

[7] A. Peres : *Quantum Theory — Concepts and Methods* — (Kluwer Academic, 1995) p. 199.

[8] A. Messiah : *Quantum Mechanics* (Dover, 1999) p. 549.

[9] A. Fine and P. Teller : Found. Phys. **8** (1978) 629.

[*8] ただし，“Phase1” から “Phase3” に従う隠れた変数の理論を用いて，2 節の M1 と M2 をスピン 1 の粒子で取り扱うと contextuality が生じない．どのようにすれば contextuality が生じるかは別稿に譲る．