

# Wilson 繰り込み群におけるカイラルアノマリーについて

五十嵐尤二, 伊藤克美 (新潟大教育)

園田英徳 (神戸大理)

佐藤雅尚 (新潟大自然)

## 1 はじめに

クォークの閉じ込めやカイラル対称性の力学的破れといった QCD の強結合領域での現象に代表されるように、場の理論には非摂動論的效果が本質的であるような現象が多く存在する。Wilson 繰り込み群 (Wilson RG) 法は、そのような効果を評価するためのひとつの有力な視点を与える。Wilson RG ではパラメータとして運動量の (IR) cutoff scale  $\Lambda$  を導入し、それより高い運動量モードに関する相互作用を “integrate out” することによって低運動量モードの有効理論を定義する。パラメータ  $\Lambda$  を下げることによって有効作用には徐々に量子効果が繰り込まれてゆき、これが摂動論では扱えなかった寄与を取り込むことを可能にする。

しかし一方で運動量 cutoff の導入はゲージ対称性などの対称性を壊してしまう。ゲージ対称性は場の全ての運動量モードに同時に関与するものだからである。(正則化法と対称性の競合という問題は、格子正則化など他の正則化においても同様に見られる)。そこで Wilson RG において如何に対称性 (特にゲージ対称性) を実現するかという問題が様々に調べられてきたが、その中で “有効対称性” の考え方が発展してきた。これは有効理論を定義すると同時に、対称性の定義もパラメータ  $\Lambda$  に依存して変形させてゆくというものである。ここではこの有効対称性を導入し、またこれをカイラルアノマリーの計算に (限定的だが) 適用した例を紹介する。(Wilson 繰り込み群における対称性についての全般的なレビューとしては [1] をご参照ください)

## 2 Wilson 有効作用と composite operator

上記の IR cutoff  $\Lambda$  を実装するため、(また UV scale  $\Lambda_0$  での紫外正則化を導入するため)、ここでは Polchinski [2] による smooth cutoff を用いる。まず一般的な分配関数を

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \phi \cdot K_0^{-1} D \cdot \phi + S_I[\phi] + K_0 J \cdot \phi \right\} \quad (1)$$

と書く。ここで  $\phi = \{\phi^A\}$  はすべての場をまとめて表して、また “ $\cdot$ ” は運動量変数を含む添字の contraction の略記である:  $\phi \cdot K_0^{-1} D \cdot \phi \equiv \int_p \phi^A(-p) (K_0^{-1} D)_{AB}(p) \phi^B(p)$  など。また  $K_0(p)$  は UV scale  $\Lambda_0$  での smooth cutoff function

$$K_0(p) \sim \begin{cases} 1 & (p^2 < \Lambda_0^2) \\ 0 & (p^2 > \Lambda_0^2) \end{cases}$$

であり, これの逆を inverse propagator  $D_{AB}(p)$  に乗ずることで高運動量モードの propagate を抑制している. これが smooth cutoff である.

一方, (1) は

$$Z[J] = N_J \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Phi \cdot K^{-1} D \cdot \Phi + S_{I,\Lambda}[\Phi] + K^{-1} J \cdot \Phi \right\}, \quad (2)$$

$$\text{where } \exp S_{I,\Lambda}[\Phi] \equiv \int \mathcal{D}\chi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \chi \cdot (K_0 - K)^{-1} D \cdot \chi + S_I[\Phi + \chi] \right\}, \quad (3)$$

$$\ln N_J \equiv -\frac{(-)^{\epsilon_B}}{2} J_A (K_0^{-1} K^{-1} (K_0 - K) D^{-1})^{AB} J_B$$

と変形される. ここで  $K(p)$  は IR scale  $\Lambda$  での cutoff function であり, (2) の積分は低運動量領域での有効理論を定義している. またその相互作用部分  $S_{I,\Lambda}[\Phi]$  の定義 (3) は (運動項に挿入された  $(K_0 - K)^{-1}$  に注意すると) UV モードに関する汎関数積分であり, まさに前述の意味の有効作用を表している (Wilson 有効作用とよばれる).

Wilson 有効作用の定義と同様の考え方で, 任意の operator  $X[\phi]$  の “IR 版”  $X_\Lambda[\Phi]$  が定義され, これを composite operator とよぶ:

$$\begin{aligned} X_\Lambda[\Phi] \exp S_{I,\Lambda}[\Phi] \\ \equiv \int \mathcal{D}\chi X[\Phi + \chi] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \chi \cdot (K_0 - K)^{-1} D \cdot \chi + S_I[\Phi + \chi] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

### 3 Ward-Takahashi operator と有効対称性

UV 理論 (1) において (Grassmann odd な) 変数変換  $\delta\phi$  を行うと

$$\int \mathcal{D}\phi \left[ K_0 J \cdot \delta\phi + \delta S[\phi] + \frac{\partial^r}{\partial \phi^A} \delta\phi^A \right] e^{S[\phi] + K_0 J \cdot \phi} \quad (= 0).$$

ここで  $S[\phi] \equiv -\frac{1}{2} \phi \cdot K_0^{-1} D \cdot \phi + S_I[\phi]$  で,  $[\dots]$  内の第 3 項は変換の Jacobian である. ( $= 0$  は任意の変数変換に対して積分は不変であることによる). このとき

$$\Sigma[\phi] \equiv \delta S[\phi] + \frac{\partial^r}{\partial \phi^A} \delta\phi^A$$

は Ward-Takahashi (WT) operator と呼ばれ, “WT identity”  $\Sigma = 0$  が量子論的な対称性を表す.

IR 理論 (2) に対する有効対称性は, WT operator  $\Sigma[\phi]$  の IR 版 (composite operator)  $\Sigma_\Lambda[\Phi]$  を用いて議論される. 特に composite operator に対する Exact Renormalization Group Equation は線形であることから,  $\Sigma = 0$  は  $\Sigma_\Lambda = 0$  を導き, IR 理論に変形された対称性が存在することを表す.

## 4 Ward-Takahashi operator とカイラルアノマリー

一方、アノマリーは WT identity の破れ  $\Sigma_\Lambda \neq 0$  として現れる. ここではユークリッド 4 次元時空上のカイラルゲージ理論のカイラルアノマリーを例に, WT operator がアノマリーを含むことを確認した. (Wilson RG の枠組みでアノマリーを扱った論文としては [3–5] がある. ここでの計算は [1, §9] に従った)

カイラルゲージ理論の古典作用

$$S[\phi] = \bar{\psi} \cdot i \gamma_\mu (\partial_\mu + A_\mu P_+) \cdot \psi ,$$

$$\text{where } A_\mu = A_\mu^a T^a \in su(N) , \quad P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$$

は, 以下の古典 BRST 変換で不変である:

$$\delta\psi = CP_+\psi , \quad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi}P_-C , \quad \delta A_\mu = \partial_\mu C + [A_\mu, C]$$

(ここで  $C = C^a T^a \in su(N)$  は ghost 場).

一方この対称性は量子論的には破れていて, それは IR WT operator, 特にその fermion 測度の Jacobian 部分

$$\Sigma_\Lambda[\Phi] \ni \frac{\partial^r}{\partial\Psi} \cdot K[\delta\Psi]_\Lambda - \frac{\partial^l}{\partial\bar{\Psi}} \cdot K[\delta\bar{\Psi}]_\Lambda \quad (5)$$

に反映される. ここで  $[\delta\Psi]_\Lambda, [\delta\bar{\Psi}]_\Lambda$  は上記の古典 BRST 変換に対応する composite operator であり, その定義には Wilson 有効作用  $S_{I,\Lambda}[\Phi]$  が含まれる. これを計算するため, ここでは  $\Lambda_0 \rightarrow \infty$  の極限の存在を仮定し, UV 汎関数積分 (3), (4) の摂動展開を用いて (5) (の anomalous part) の 1-loop での評価をした. さらにその  $\Lambda \rightarrow \infty$  での形を見ると, 摂動論でよく知られた 1-loop カイラルアノマリーの表式が含まれること

$$\Sigma_{\Lambda \rightarrow \infty}[\Phi] \ni \frac{1}{24\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_x \text{tr} \left[ C \partial_\mu \left( A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{1}{2} A_\nu A_\rho A_\sigma \right) \right]$$

が確認できた.

## 参考文献

- [1] Y. Igarashi, K. Itoh and H. Sonoda, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 181 (2010), 1.
- [2] J. Polchinski, Nucl. Phys. B **231** (1984), 269.
- [3] M. Bonini, M. D’Attanasio, and G. Marchesini, Phys. Lett. B **329** (1994), 249.
- [4] M. Bonini and F. Vian, Nucl. Phys. B **511** (1998), 479.
- [5] M. Pernici, M. Raciti, and F. Riva, Nucl. Phys. B **520** (1998), 469.