

滑る場合における viscous 摩擦による ラトルバック反転運動の解析

上越教育大学 学校臨床学系
学校臨床コース（学習臨床）
高野 浩志

1 はじめに

2002 年、卵をシンボルとするイースターが間近に迫った 3 月、『Nature』に立ち上がる回転ゆで卵の謎を解いた Moffatt & Shimomura の論文 [1][2] が掲載された。さらに、2005 年、彼らは、立ち上がるゆで卵は途中でジャンプするという驚くべき事実を理論的に示し [3]、これは実験でも確認された [4]。これらの研究に刺激され、こまのような剛体運動に関して、再び興味を持たれるようになった。Ueda 等は、ゆで卵の場合に重要な役割をはたした GBC 条件を詳細に調べ、従来解析されていた逆立ちゴマのメカニズムに関し、新たな視点からの解析をおこなった [5]。一方、逆立ちゴマのような奇妙な運動をするものとして、ラトルバックがある。このような状況のもとで、ラトルバックに注目が集まってきたのである。

ラトルバックはこまの一種で、図 1、2 のようにさまざまなものがあるが、ここでは、図 1 のように慣性楕円体の底面をもち上面に重り（ここでは亀）があるものを考える。上から見て、亀が



図 1:



図 2:

時計回りに向いている場合、ラトルバックを亀のしっぽ方向（上から見て反時計回り）に回すと、しばらくしてがたがたと振動し（ラトル）、そのうち亀の向いている方向（時計回り）に回り出す。亀が左に向いている場合はこれの逆が起こる。

ラトルバックはセルトとか Wobble stone とも呼ばれている。亀の重りの中心が慣性楕円体の軸からずれたところにあるため、慣性主軸と慣性楕円体の軸がずれていて、これが反転を生み出す

原因のひとつになっている。ラトルバックによっては複数反転を示すものがあるが、摩擦によってエネルギーが散逸するため、筆者が実際に見たのはせいぜい3回までである [6]。

このラトルバックの反転に関しては、理論的な解析や計算機によるシミュレーションなど、昔からさまざまな研究がおこなわれてきた。

まず最初に理論的な解析をしたのは、G.T.Walker[7] によるもので、1896年のことである。かれは、床面とラトルバックの底面との接触点 P が床面に対し滑らないという仮定、すなわち、エネルギーが保存する条件のもとに、ラトルバックと床面の接触点座標に関する運動方程式を線形近似で求めた。ラトルバックは、まず (I) 回転しているうちにそれが減少し、振動が激しくなり不安定になる。その後、(II) 反転現象を引き起こす。彼は (I) に関し、回転数の大きさおよび方向とラトルバックの縦方向の振動、横方向の振動との関連を運動方程式の固有方程式を解くことで求めた。不安定性を示すだけでは、(II) の反転現象は説明できない。そこで彼は、ラトルを上下方向にはじく場所と回転の方向との関連も調べている。これらによって、回転し始める時の回転数の値が大きい場合に (現実的にはこの場合で十分) 滑らない場合のラトルバックの反転メカニズムが明らかになった。

M.Pascal[10] は、G.T.Walker が求めた線形近似と同様な運動方程式から出発し、平均法をもちいることで、速い振動モードを取り去り、ゆっくり変化するモードを抜き出し、反転に本質的な機構を明らかにした。

A.P.Markeev[11] は M.Pascal とは独立にほぼ同時期同じような結果を与えているが、2つの保存則を導き、より簡潔に反転の機構を明らかにした。彼らの結果は、A.D.Blackowiak 等 [12] によって、2次の近似まで拡張し分析された。

H.K.Moffatt と T.Tokieda[15] は、A.P.Markeev や、M.Pascal と同様な式を物理的視点から導き、より直観的に反転の機構を明らかにした。

一方、M.Pascal や A.P.Markeev の仕事のあとに、H.Bondi[13] は、G.T.Walker が求めた線形近似の運動方程式から出発し、パラメータの広い範囲で、ラトルバックの運動を解析した。その中で、回転数の初期値がある値 n_c より大きい場合 (彼は concordance と呼んでいる) におこる運動を詳しく解析しているが、現実のラトルバックの運動は小さい回転でも起きること、また複数回反転も観察されることから、彼の呼ぶ discordance に本質があると考えられる。この場合はすでに G.T.Walker、M.Pascal や A.P.Markeev によって詳細に調べられている。

H.Bondi が示した n_c より大きい回転数が与えられた時、はたして「滑らない」という条件が成立するかどうかは疑問である。この点を検討したのが、A.Garcia と M.Hubbard である [14]。彼らは、エネルギーの観点から議論し、H.Bondi が検討した回転数が大きい状況では、「滑らない」という条件が成立しないことを指摘し、摩擦を入れたモデルを検討すべきであることを主張した。そして、空気摩擦や滑り摩擦を取り込んだ簡潔なスピンモデルを提唱し数値シミュレーションとの比較を行っている。

滑らない場合の数値シミュレーションを最初におこなったのは、T.R.Kane 等 [8] である。彼らは、運動方程式そのもののシミュレーションを行い、複数反転等を示している。また、エネルギー散逸として角運動量に比例したトルクを入れたシミュレーションも行っている。ほぼ同時期に、R.E.Lindberg と R.W.Longman[9] も、滑らない場合のシミュレーションをおこなって同様な結果を得ている。先に述べた A.Garcia と M.Hubbard も、滑らない場合と同時に、エネルギー散逸として角運動量に比例したトルク、およびすべり摩擦を平均化した Coulomb トルクをいれたモデルのシミュレーションを行っている。

このように滑らない場合はいろいろな角度で研究され、ほぼその本質が明らかにされている。しかし、A.Garcia & M.Hubbard が示したように、実際のラトルバックの運動は接触点では滑っていて、この滑り摩擦による効果が重要だと考えられる。彼らは、この滑り摩擦によるエネルギー散逸を考えて基本運動方程式を導出したが、この基本運動方程式の直接的な解析は行わず、Coulomb トルクをいれた簡潔なモデルだけを提示し、シミュレーションによる解析を行った。

さて、滑る場合のラトルバックの動きを見ると、滑らない場合と比較して違いがあり、これに関していくつかの疑問が生じるので、以下列挙する。

(1) 滑らない場合は、どんなに初期回転数 n_0 が小さくても、ラトル振動が増大し、理論的には反転がおこる。しかし、滑る場合は、小さい n_0 ならば、ラトル振動が増大せず反転しない場合や、ラトル振動が起きて反転までにはいかず、そのまま回転数が減速していき止まってしまう場合がある。つまり、ある回転数以上でなければラトル振動が増大しない回転数の最小値 n_{c1} や、ラトルが増大して反転が起きるための最小の回転数 n_{c2} が存在するようである。これらはどのような値であろうか？

(2) 滑る場合は、エネルギー散逸のため、その反転回数に制限がある。ラトルバックが与えられた場合、「このラトルバックは何回反転するか？」という疑問に答えられるか？すなわち反転回数の予測ができるだろうか？摩擦係数が大きければ、滑らない状況に近くなるので、反転回数は大きくなるはずである。この摩擦係数と反転回数の間にはいかなる関係があるのだろうか？

(3) ラトルバックの形状によっても反転回数に差があるように見られる。例えば、ラトルバックの長径 a と短径 b が等しい場合、これは円なので、反転は起きない。一方あまり a が長すぎると短径方向の振動がゆっくりで、反転回数はまた少なくなる。 a と b の比のある値で、反転回数の最大値が存在しそうである。どのような形のラトルバックを作ると反転回数を大きくできるのだろうか？

上記の疑問に答えるため、まず、速度に比例する滑り摩擦 (viscous 摩擦) を入れたラトルバックの基本運動方程式から出発し、反転運動に本質的な項を抜き出した近似運動方程式を導き出す。さらに、M.Pascal 等がおこなった変分法と同様の方法を使い、遅い運動モードが従う運動方程式を導きだし、上記の、回転数の最小値、 n_{c1} 、 n_{c2} や反転回数、および形状と反転回数の関係を議論する。

2 反転運動の解析

2.1 基本運動方程式の導出

本稿で考えるラトルバックとしては、質量 $m g$ をもった楕円体で、図 3 のようなものである。

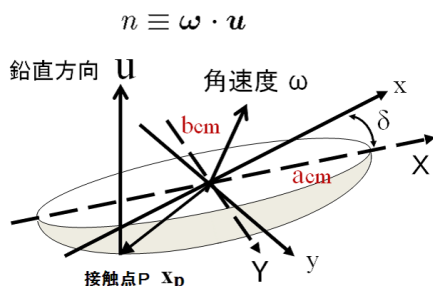


図 3:

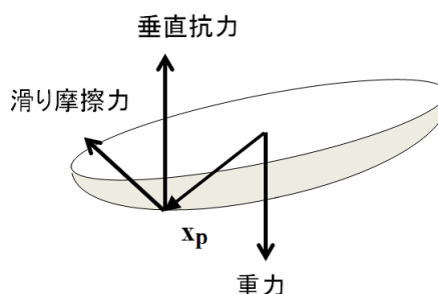


図 4:

ここで、 X, Y や Z はラトルバックの形の幾何主軸であり、 Z は下向きに正とする。 X, Y, Z 軸の方向にそれぞれ $a \text{ cm}, b \text{ cm}, c = 1 \text{ cm}$ である。重りの亀が偏って乗っているために、慣性主軸 x, y や z は、幾何主軸と、角度 δ だけずれている。ラトルバックの底面と床は点 P で接触していて、重心からの位置ベクトルを $x_p = (x, y, z)$ とする。

角速度を ω とし、接触点 P から鉛直方向上向きのベクトル u との内積を n とする。 n は回転速度に対応する量である。

ラトルバックには、図 4 のような力が働いていて、垂直効力 Ru と床面に水平なすべり摩擦力 Rf の合力 F により、トルク $x_p \times F$ が働く。重心の運動は F の他に、重心に働く重力が関わってくる。すべり摩擦力は、普通 Coulomb 摩擦であるが、この摩擦では解析できなく、先には進めない。そこで、まず、摩擦が入った解析の手始めとして、解析可能である viscous 摩擦を採用し、どのようなことまで言えるか議論する。Coulomb 摩擦での解析は今後の課題である。viscous 摩擦は、 $f = -\mu v_p$ と表せる。ここで、 μ は摩擦係数、 v_p は、接触点の床面に対する滑り速度である。 R に関しては、 f, v_p や、 $\frac{d}{dt} v_p$ が、 u と垂直方向すなわち床方向だけに成分があることに注意すると、求めることができる。

結局、ラトルバックの回転運動と重心運動に関する基本運動方程式は、角運動量を L 、重心の

速度を $\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_p + \mathbf{x}_p \times \boldsymbol{\omega}$ とし、以下ようになる。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \mathbf{x}_p \times \mathbf{F} \quad (1)$$

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{v}_g = \mathbf{F} - mg \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = -R\mu \mathbf{v}_p + R \mathbf{u} \quad (3)$$

$$R = mg + m \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{x}_p \times \boldsymbol{\omega}) \right) \cdot \mathbf{u} \quad (4)$$

2.2 近似運動方程式の導出

上記の運動方程式は、角運動量 $\boldsymbol{\omega}$ と、滑り速度 \mathbf{v}_p が変数の非線形微分方程式であるが、そのままでは、解析には複雑すぎる。そこで、G.T.Walker や H.Bondi 等がおこなった線形近似を採用する。彼らは、オイラー角の変数を使わず、角運動量 $\boldsymbol{\omega}$ の代わりに接触点 \mathbf{x}_p の主慣性軸に関する x 成分、 y 成分と、角運動量の床に関する垂直成分 $n \equiv \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$ で書き表した。線形近似とは、接触点の座標値の絶対値 $|x|, |y|$ は、それぞれラトルバックの長径 a 、短径 b を超えないから、 $\frac{|x|}{a} < 1, \frac{|y|}{b} < 1$ に関して2次の以上の項を無視するというものである。また、 n や $\frac{1}{\mu}$ が小さい状況を考えること、および、パラメータ p, q, s (ラトルバックの底面は楕円面 $z \simeq 1 - \left(\frac{p}{2} \left(\frac{x}{c} \right)^2 + q \frac{xy}{c^2} + \frac{s}{2} \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right)$ で、 p, q, s は a, b, δ の関数) のオーダーも考慮し、 n^2, np などの項も落とす近似をおこなう。このままではまだ \mathbf{v}_p の変数が残ったままで複雑なので、これらの変数を x, y などの変数で近似する。これにより、変数が x, y, n の3つになり、M.Pascal が行った解析が適用できるようになる。結局、上記の近似で得られる運動方程式は以下のものである。

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \nu_1^2 X + a_1 \dot{X} + a_2 \dot{Y} &= 0 \\ \ddot{Y} + \nu_2^2 X + a_3 \dot{X} + a_4 \dot{Y} &= 0 \\ I_3 \dot{n} - k_1 X \ddot{X} + k_3 X \ddot{Y} - k_2 Y \ddot{X} + k_4 Y \ddot{Y} \\ - s_1 X \dot{X} - s_2 X \dot{Y} - s_3 Y \dot{X} - s_4 Y \dot{Y} &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 X, Y は x, y を変数変換したものである。 I_3 は z 軸回りの慣性モーメント、 a_i は

$$a_1 = m_1 - nk_1, \quad a_2 = -m_2 - nk_2, \quad a_3 = -m_3 + nk_3, \quad a_4 = m_4 + nk_4$$

であり、摩擦の影響は $m_i \simeq \frac{1}{\mu}$ に含まれる。 k_i, s_i は、慣性モーメント、 a, b, δ の関数である。

2.3 遅いモードの運動方程式

ラトルバックの基本運動方程式 (1) ~ (4) の数値シミュレーションを実行し、 n, x, y の振る舞いを見ると、図 5、6、7 のようになる。

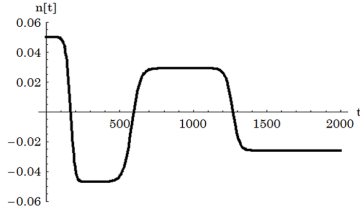


図 5: $n(t)$; 3 回反転しているのがわかる。

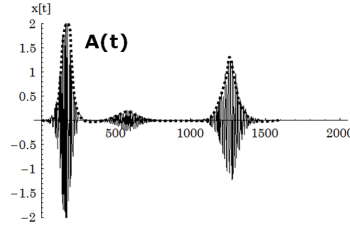


図 6: $x(t)$; $n(t)$ が正から負に変わる時に激しく振動 (ラトル) しているのがわかる

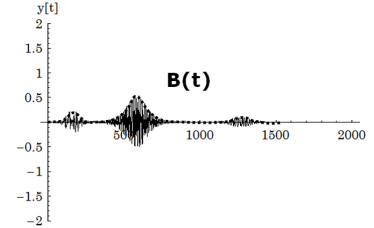


図 7: $y(t)$; $n(t)$ が負から正に変わる時に激しく振動 (ラトル) しているのがわかる

図中 $x(t), y(t)$ の振る舞いの点線の部分にあたるのが遅いモード $A(t), B(t)$ であり、M.Pascal と同様な方法でこれの運動方程式を抜き出すと次式が得られる。

$$I_3 \dot{n} = -\frac{k_1 \nu_1^2}{2} A^2 + \frac{k_4 \nu_2^2}{2} B^2, \quad \dot{A} = -\frac{a_1}{2} A \quad \dot{B} = -\frac{a_4}{2} B \quad (5)$$

2.4 ラトル振動の増大が起きるための回転数の限界値 n_{c1}

反転が起きるためには、ラトルの振動が増大する必要がある。この増大は $e^{-a_1 t}, e^{-a_4 t}$ の因子で引き起こされている。 a_1, a_4 は n に比例しているので、 $a_1 = 0, a_4 = 0$ となる回転数 n の値がすぐ求められ、正の方を n_{c1+} 、負の方を n_{c1-} とする。この n_{c1-} 以上 n_{c1+} 以下の範囲の回転数では、 $a_1 > 0, a_4 > 0$ という状況が起こり、どちらのモードも減少していき、ラトル振動の増大は起きないことになる。 $k_1 > 0$ の場合は n_{c1-} と n_{c1+} は次式で与えられる。

$$n_{c1+} = \frac{m_1}{k_1} = -\frac{f^{-1} \cos^2 \theta + f \sin^2 \theta}{J_2 \mu \sin \theta \cos \theta}$$

$$n_{c1-} = -\frac{m_4}{k_4} = \frac{f \cos^2 \theta + f^{-1} \sin^2 \theta}{J_2 \mu \sin \theta \cos \theta}$$

$k_1 < 0$ の場合はこれらの値が逆となる。ここで、 $\theta \sim \delta$ であり、 $f \equiv \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}$ である。 $(J_{1,2}$ は 1、2 軸回りの慣性モーメントに 1 を加えた量)

2.5 反転が起きるための回転数の限界値 n_{c2}

前節で求めた n_{c1} 以上であれば、ラトルは増大する。しかし、それが途中までで反転には至らない場合がある。

反転する場合の n の振る舞いを見ると、まず最初 $n_0 > 0$ から始めたら、しばらくは n_0 の値付近にあるが、急激にラトルが始まって減衰する。その後反転して $n_1 < 0$ に到達する。この n_1 は、

式(5)より推定できて、 $n_1 = -n_0 + \frac{2m_1}{k_1}$ となる。もし、この n_1 が $n_1 < 0$ 、すなわち $n_0 > \frac{2m_1}{k_1}$ ならば、1回は反転するが、 $n_0 < \frac{2m_1}{k_1}$ なら反転しないことがわかる。ここで、前節の議論より、 $n_{c1+} = \frac{m_1}{k_1}$ 以上ならラトル振動は増大した。従って、 $n_{c1+} < n_0 < \frac{2m_1}{k_1}$ ならば、ラトルが増大するが、反転までにはいかないことがわかる。この $\frac{2m_1}{k_1}$ を n_{c2+} としよう。同様に、負の回転数から始めて、反転が起きるための最大値 $n_{c2-} = -\frac{2m_4}{k_4}$ も存在することがわかる。

以上より、 $n_{c2-} < n_0 < n_{c1-}$ および $n_{c1+} < n_0 < n_{c2+}$ の場合はラトルが増大するが、反転は起きないことがわかり、反転が起きるための回転数の限界値 $n_{c2\pm}$ が存在することがわかる。

2.6 反転回数 r_n

滑らない場合は、エネルギーが保存しているため、反転は何回も起こりうる。しかし、摩擦がある時には、振動が減衰していくので、反転回数は有限である。この反転回数 r_n は前節2.4、2.5の議論から得られ、次の不等式を満たすことがわかる。

$$K_0(r_{n-1}, \rho) < \frac{1}{h_1} < K_0(r_n, \rho)$$

ここで、

$$K_0(r, \rho) \equiv \sum_{i=0}^r \frac{1 + (-1)^i}{2} + \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2} \rho$$

$$h_1 \equiv \left| \frac{2m_1}{k_1 n_0} \right|, \quad h_4 \equiv \left| \frac{2m_4}{k_4 n_0} \right|, \quad \rho \equiv \frac{h_4}{h_1}$$

である。 ρ, h_1 がラトルバックの形状、摩擦係数によって与えられているので、この不等式を満たすように反転回数が求められる。逆に反転回数を解くと、反転回数が偶数回、奇数回それぞれに対して、

$$r_n = 2 \left[\frac{1}{h_1(\rho + 1)} \right], \quad r_n = 2 \left[\frac{1}{h_1(\rho + 1)} \right] + 1$$

となる。ここで $[x]$ は、ガウスの記号で、 x を超えない最大の整数である。図8は、反転回数と摩擦係数のグラフであり、四角は上記の理論値 r_n 、×は、基本方程式(1)~(4)のシミュレーションから求めたものである。摩擦係数が大きくなるにつれ、反転回数の理論値が、多めに出てきているのがわかる。近似が摩擦の効果をお小さくしていることがわかるが、おおよその一致が見られる。

2.7 反転回数と形状との関係

反転回数と、軸の傾き $\delta \sim \theta$ 、摩擦係数 μ 、ラトルバックの形との関係は、偶数・奇数反転での共通因子である $\frac{2}{h_1(\rho+1)}$ から導き出せる。この因子を書き下すと

$$\frac{2}{h_1(\rho + 1)} = J_2 \mu |n_0 \sin \theta \cos \theta| L(f), \quad L(f) \equiv \frac{|f - f^{-1}|}{1 + f^2}$$

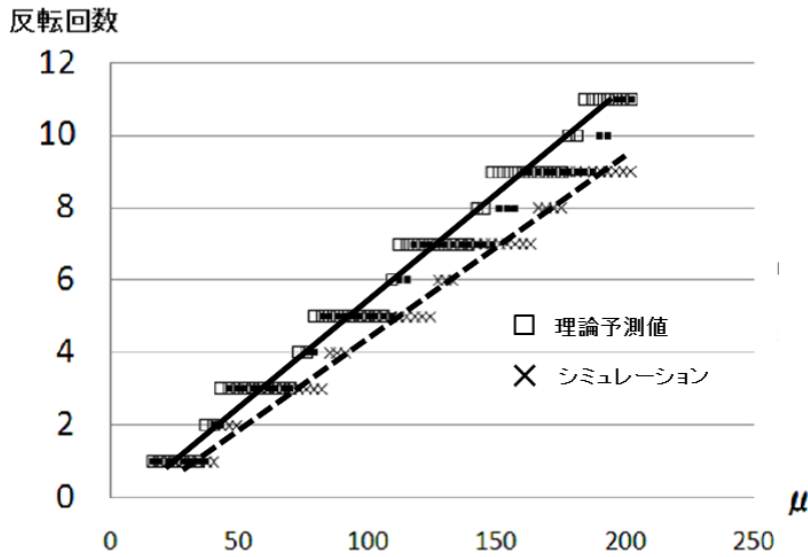


図 8: 反転回数と摩擦係数との関係

となる。これらの係数の表示から、反転数は μ, δ, n_0 に比例していることがわかる。これは、摩擦が大きいと、滑らない場合に近くなるので反転数は大きくなることを意味し、また、近似 $\delta \ll 1$ の範囲であるが、 δ に比例することから、慣性主軸と形状軸との非対称が大きいと反転数は大きくなることを意味している。

ここで形状因子 $L(f)$ がかかっていることに注意しよう。長径 a を固定して J_2 を固定してみる。 f を大きくすることは、 J_1 を小さくすること、すなわち短径 b を小さくし、ラトルバックを細長くすることに対応する。逆に、 f を小さくすることは、短径の長さを大きくし、ラトルバックを円形近くにするに対応する。この関数は、 $f = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ のところで最大値を持っていることがわかる。つまり、あまり細長くすると、横方向の振動による反転が起こりにくく、反転回数が減り、一方、あまり円形に近くするとまた反転しなくなることを意味している。図 9 は、 $a = 10$ を固定し、 b を 1 から 10 まで変化させた時の形状因子 $L(f)$ の変化を表したものである。確かに、 $b \sim 4.4$ あたりに最大値があることがわかる。一方図 10 は、 $b = 1$ から 10 まで変化させた時の、基本方程式のシミュレーションから求めた反転回数の変化である。これらの図の比較から、反転回数は形状因子とほぼ同様な b 依存性があることがわかり、近似運動方程式からの予測は定性的に正しいことがわかる。

3 まとめと今後の課題

この報告では、viscous 摩擦がある場合のラトルバックについて、基本運動方程式を求め、線形近似をおこない、遅い運動モードが従う運動方程式を得た。この運動方程式を解析することで、反

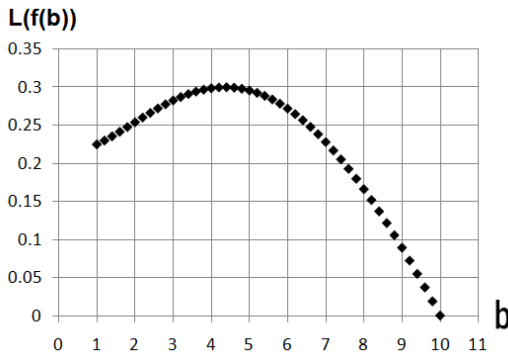


図 9: $a=10$ における形状因子のグラフ

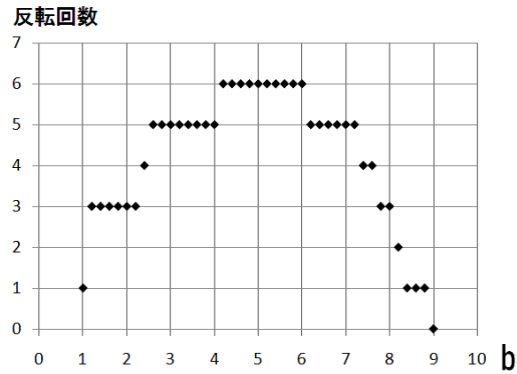


図 10: 摩擦係数 $\mu = 100$ における反転回数と b との関係

転回数の推定、反転回数と形状との関連を議論し、基本的運動方程式からのシミュレーションと比較した。今後の課題を、以下列挙する。

(1) 本論文では、viscous 摩擦を採用したが、現実のラトルバックに働く滑り摩擦は Coulomb 摩擦だと考えられる。Coulomb 摩擦の場合には、摩擦力が $\frac{v_p}{|v_p|}$ に比例する形で入っているため、 $v_p = 0$ のところの取り扱いが難しい。そこで分母に Λ を入れた修正 Coulomb 摩擦力 $f = -\mu \frac{v_p}{|v_p(\Lambda)|}$ (ここで $|v_p(\Lambda)| \equiv \sqrt{v_{p1}^2 + v_{p2}^2 + \Lambda^2}$) で議論する方法がある [5]。このシミュレーションを行うと、反転の挙動に Λ 依存性があることがわかり、小さい値の場合には、滑らない場合と同様な振り舞いになることがわかった。これらの事がなぜ起こるのか？修正 Coulomb 摩擦は適当なのか？今後の検討課題である。

(2) 本論文でのラトルバックは、均質媒質を仮定したので、形状と慣性モーメントの間に関係があった。そこで、均質媒質ではなく、 $a > b$ だが、 $J_2 < J_1$ のようなものを作ったら反転するであろうか？また、図 2 のように、形状が慣性楕円体ではなく、非対称な形の場合には、反転回数が 1 回だけしか起こらないものもある。このようなラトルバックではどういうことが起こっているのだろうか？さらに、本論文でのラトルバックは慣性主軸の z 軸と形状の主軸の z 軸が一致し、 x, y 軸が角度 θ ずれたものを考えたが、すべて異なっているラトルバック（ふつうの河原で見つける石を回しても反転が起きるものが見つかる）では、どのようなことが起こるのであるだろうか？このような特殊のラトルバックの時には、 $\delta = 0$ でも反転する場合が起きるだろうか？上記あげたさまざまな疑問に関し、形状、慣性モーメントと反転との詳細な関連を議論することは、今後の検討課題である。

(3) ラトルバックの挙動を初めて見た人は必ず「え〜〜なんでなんで？」という驚きを伴った声を出す。このような問いに「なるほど〜〜」と答えてもらえるためには、どのような説明をしたらいいだろうか。すっきりとした直観的な説明を用意するのも今後の検討課題である。

参考文献

- [1] H.K.Moffatt and Y.Shimomura. "Spinning eggs - a paradox resolved" *Nature* **V.416**,385-387(2002)
- [2] H.K.Moffatt, Y.Shimomura and M.Branicki "Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface. I. Stability and the gyroscopic approximation" *Proc.R.Soc. Lond. A* **460**,3643-3672(2004)
- [3] Y.Shimomura,M.Branicki and H.K.Moffatt. "Dynamics of an axisymmetric body spinning on a horizontal surface.II. Self-induced jumping" *Proc.R.Soc. A* **461**,1753-1774(2005)
- [4] T.Mitsui,K.Aihara,C.Terayama,H.Kobayashi and Y.Shimomura. "Can a spinning egg really jump?" *Proc.R.Soc. A* **462**,2897-2905(2006)
- [5] T.Ueda, K. Sasaki and S. Watanabe "Motion of the Tipped Top : Gyroscopic Balance Condition and Stability" *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **4**, 1159-1194 (2005)
- [6] http://www.youtube.com/watch?v=0_145zVizzM
- [7] G.T.Walker."On a Dynamical Top",*Quarterly journal of pure and applied mathematics* **Vol.28**,175-185(1896)
- [8] T.R.Kane and D.A.Levinson "Realistic Mathematical Modeling of the Rattleback", *I.J.Non-Linear Mechanics*, **V.17**,No.3,175-168(1982).
- [9] R.E.Lindberg and R.W.Longman "On the Dynamic Behavior of the Wobblestone", *Acta Mechanica*, **V.49**,81-94(1983).
- [10] M.Pascal "Asymptotic Solution of the Equations of Motion for a Celtic Stone", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*.**V.47**,No2,269-276(1983)
- [11] A.P.Markeev. "On the dynamics of a solid on an absolutely rough plane", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*.**V.47**,No4,473-478(1984)
- [12] A.D.Blackowiak,R.H.Rand and H.Kaplan "The dynamics of the celt with second order averaging and computer algebra", *Proc. ASME DETC'97/VIB-4103*(1997)
- [13] H.Bondi. "The rigid body dynamics of unidirectional spin", *Proc. R. Soc. Lond. A* **405**,265-274(1986)

- [14] A.Garcia and M.Hubbard "Spin reversal of the rattleback:theory and experiment"
Proc.R.Soc. Lond. A**148**,165-197(1998)
- [15] H.K.Moffatt and T.Tokieda. "Celt reversals:a prototype of chiral dynamics", Proc. R. Soc.
Edinburgh. A **138**,361-368(2008)