

# 超対称 Chern-Simons 理論と M2-ブレン

今村洋介

東京大学大学院理学系研究科

2009 年 3 月 (2016 年 1 月更新)

## 概要

さまざまな背景時空上の M2-ブレンの低エネルギー有効理論を与えると期待されているクイバー型超対称 Chern-Simons 理論の基本的な事柄について、特にモジュライ空間の構造を中心としてまとめた。

## 目次

<b>1</b>	<b>導入</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>3 次元超対称性</b>	<b>4</b>
2.1	スピノル	4
2.2	超対称代数と超共形代数	6
2.3	$\mathcal{N} = 2$ 超空間	11
2.4	カイラル超場	16
2.5	ベクトル超場	18
2.6	$\mathcal{N} = 2$ 超対称性変換則	19
2.7	CS 項	21
2.8	自由場の質量とスピン	23
2.9	$\mathcal{N} = 4$ ベクトル多重項	26
2.10	$\mathcal{N} = 4$ ハイパー多重項	29
2.11	CS 項の導入と $\mathcal{N} = 3$ 超対称性	32
<b>3</b>	<b><math>\mathcal{N} = 2</math> クイバー CS 理論</b>	<b>33</b>
3.1	クイバー CS 理論	33
3.2	バリオン対称性	35
3.3	モジュライ空間	37
3.4	dual photon とゲージ対称性の破れ	40
3.5	モノポール演算子	44

3.6	ゲージ不変演算子とトーリックデータ	49
3.7	タイリングとクリスタル	53
<b>4</b>	<b><math>\mathcal{N} \geq 4</math> CS 理論</b>	<b>58</b>
4.1	$\mathcal{N} = 4$ クイバー CS 理論	58
4.2	$\mathcal{N} = 4$ 超対称変換	60
4.3	作用の $SU(2) \times SU(2)$ 不変性	63
4.4	一般化	65
4.5	$\mathcal{N} = 1$ 超場を用いた構成	67
4.6	$U(1)$ 対称性について	69
4.7	モジュライ空間	70
4.8	ブレーン構成	74
4.9	$SO$ および $Sp$ ゲージ群	77
4.10	$\mathcal{N} \geq 5$	78
<b>5</b>	<b><math>AdS_4/CFT_3</math></b>	<b>81</b>
5.1	一般の $AdS_4$ 古典解について	81
5.2	$\mathcal{N} = 6$ ( $S^7/\mathbb{Z}_k$ )	83
5.3	$\mathcal{N} = 4$ ( $(S^7/(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))/\mathbb{Z}_k$ )	88
5.4	$\mathcal{N} = 2$ ( $Q^{1,1,1}$ )	89
<b>6</b>	<b>おわりに</b>	<b>95</b>

## 1 導入

複数枚の重なった D-ブレーン上に実現される低エネルギー有効理論は超対称ゲージ理論によって記述される。これは D-ブレーン上の自由度がブレーンに端を持つ開弦によって与えられ、その弦の量子化によってゲージ場を含む超対称多重項が得られるからである。このことはゲージ理論と弦理論の間の双対性を考える上で重要な役割を果たしている。これに対し、M-ブレーンが複数枚重なった際にその上に実現される有効理論については、その自由度の起源が何なのかがいまだ理解されていないためにほとんど分かっていなかった。しかしここ 1 年あまりの間に M2-ブレーン上の低エネルギー理論の有効理論についての大きな進展があった。そのことについて、部分的にはあるがまとめるのがこのノートの目的である。

M2-ブレーンは、 $10 + 1$  次元時空上にある  $2 + 1$  次元の広がりを持つ「膜」である。M2-ブレーンが 1 枚だけの場合には、その作用は超空間中の南部-後藤作用と 3-形式場との極小結合項の和として書くことができる。以下で考える低エネルギー極限は平坦な M2-ブレーンが無限に広がっており、それが微小振動をしているような状況である。ブレーンの枚数が 1 枚の場合には、この極限操作は 8 個の

実スカラー場  $X^I$  と 16 成分のマヨラナフェルミオン  $\Psi$  を含む自由場の理論を与える。

$$S = \int d^3x (\partial_\mu X^I \partial^\mu X^I - i\Psi \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi) \quad (1)$$

$X^I$  はブレーンの広がりには直交した 8 つの方向への振動モードを表す。言い換えれば、ブレーンに直交する空間  $\mathbb{R}^8$  の座標とみなすことができる。

この理論が持つ  $\mathcal{N} = 8$  超対称性と共形対称性はローレンツ対称性などと一緒になるとして  $\text{OSp}(8|4)$  という群をなす。この対称性は複数枚のブレーンが重なったときにも存在するものと期待される。

この対称性のほかに、枚数  $N$  が 1 より多い場合の M2-ブレーンの低エネルギー有効理論が満足すべき条件として、その一部として自由場の理論 (1) を含むという要請がなされる。すなわち、ブレーンがばらばらに存在する状況を表すことができなければならない。特に、モジュライ空間の一部として

$$\mathcal{M} = \text{Sym}^N(\mathbb{R}^8) \quad (2)$$

というブランチを含んでいなければならない。

このような条件を満足する理論としてすぐに思いつくのは (1) を複数重ね合わせた次の作用で表される理論である。

$$S = \int d^3x \sum_a (\partial_\mu X_a^I \partial^\mu X_a^I - i\Psi_a \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi_a) \quad (3)$$

新たに添え字  $a$  を導入したことにより複数枚のブレーンを表すことができる。残念ながら、この理論を M2-ブレーンの低エネルギー有効理論とみなすことができないいくつかの理由がある。一つは、AdS/CFT を用いた解析から M2-ブレーン上の理論は自由場の理論ではないということが示唆されること、もう一つは M2-ブレーンの理論は何らかの形で D2-ブレーン上の Yang-Mills 理論と関係しているはずであるが、(3) はそうは見えないこと、などである。これらのことから、(3) のような自由場の理論は複数枚の M2-ブレーンを表す理論としては除外される。

しかしながら、(3) は望ましい対称性  $\text{OSp}(8|4)$  を持っており、M2-ブレーンの理論を構成するためのよい出発点になる。Bagger, Lambert[1, 2, 3] および Gusstavson[4, 5] は、超対称性と矛盾しない形でこの理論に相互作用を導入することに成功し、現在それは BLG モデルと呼ばれている。BLG モデルの大きな特徴は、(3) にあるスカラー場、フェルミオン場に加えてゲージ場を含んでいることである。このゲージ場は Yang-Mills 運動項を持たない Chern-Simons (CS) ゲージ場である [6, 7]。(3) はそれだけで超対称性を持っており、ボゾンとフェルミオンの自由度は一致しているから、新たに導入されたゲージ場は余分な自由度を与えてはならないが、CS ゲージ場は物理的な自由度を持たないことが知られており、条件を満足する。また、ゲージ場が Yang-Mills 運動項をもてないことは共形対称性からも要請されることである。

BLG モデルは Lie 3-代数と呼ばれる数学的構造に基づいて構成されている。Lie 3-代数は何らかの形で M-理論の本質的な性質を捕らえているのではないかと期待されるが、Lie 3-代数が満足すべき拘束条件（基本方程式）は非常に強い条件であるため、有限次元で正定値計量を持つような代数は  $A_4$  と呼ばれるものだけしかないことがまもなく証明された [8, 9]。モジュライ空間の解析により、このモデルは 2 枚の M2-ブレーンを表していると考えられる [10, 11]。任意の枚数の M2-ブレーンを表すことは、コンフォーマル対称性を犠牲すれば可能であることが示されている [12, 13, 14, 15, 16] が、超共形性が明らかな形で任意枚数の M2-ブレーン作用を与えることには BLG モデルは成功していない。しかしながら、BLG モデルは M5-brane の作用までも再現することができる [17, 18] など、M2-ブレーンの重要な性質を少なくとも部分的には再現しており、さらなる研究が望まれる。

BLG モデル以前には CS 理論の最大の超対称性は  $\mathcal{N} = 3$  であった。（ $\mathcal{N} = 2, 3$  の CS 理論についてはたとえば [19] において詳しく述べられている。）従って  $\mathcal{N} \geq 4$  超対称性を実現した最初の CS 理論という意味においても BLG モデルは重要な意味を持つ。その後、 $\mathcal{N} \geq 4$  の CS 理論については多くの論文で調べられた。たとえば [20] ではゲージ群が  $U(N_1) \times U(N_2)$  のように二つの群の積であるような  $\mathcal{N} = 4$  CS 理論が構成された。これは Hosomichi [21] らによって新たなハイパー多重項の導入によって拡張された。その特殊な場合として  $\mathcal{N} = 5$  [22] や  $\mathcal{N} = 6$  [23] の超対称性を持つ理論も構成することができる。 $\mathcal{N} = 8$  超対称性を持つ  $A_4$  BLG model も  $\mathcal{N} = 4$  CS 理論の特殊な場合として構成することができる。

以前から知られていた  $\mathcal{N} \leq 3$  の場合も含め、これらさまざまな超対称性をもつ CS 理論はさまざまな背景時空中の M2-ブレーンの低エネルギー有効理論としても注目されている。このノートでは、 $\mathcal{N} = 2$  超対称性を持つ場合を中心に、超対称 CS 理論の作用、モジュライ空間についてまとめ、最後に AdS/CFT についても簡単に触れることにする。

## 2 3 次元超対称性

### 2.1 スピノル

スピノルについての約束をまとめておこう。<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ここで述べた約束は、ver. 2 から ver. 3 へ移行するときに変更された。ver. 1, 2 の式を ver. 3 のもの書き換えるためにどのような置き換えを行えばよいかを簡単に述べておこう。スピノルやスピノルに  $\gamma$ -行列がかかった式は添え字の標準位置の変更に伴い  $\psi \rightarrow \psi$ ,  $\gamma_\mu \psi \rightarrow -\gamma_\mu \psi$ ,  $\gamma_\mu \gamma_\nu \psi \rightarrow \gamma_\mu \gamma_\nu \psi$  のように置き換える。スピノルの二次形式については、グラスマン数の積に対して複素共役の取り方が変更されたことに対応して  $\pm i$  を挿入し、 $(\psi\chi) \rightarrow -i(\psi\chi)$ ,  $(\psi\gamma_\mu\chi) \rightarrow i(\psi\gamma_\mu\chi)$ ,  $(\psi\gamma_\mu\gamma_\nu\chi) \rightarrow -i(\psi\gamma_\mu\gamma_\nu\chi)$  のような置き換えを行う。 $\epsilon$  テンソルについても  $\epsilon_{\alpha\beta} \rightarrow -\epsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\epsilon_{\mu\nu\rho} \rightarrow -\epsilon_{\mu\nu\rho}$  のように符号を変更する。これに伴い、質量パラメータや Chern-Simons レベルの符号も変更する。グラスマン数の微分、積分については  $(\xi\partial) \rightarrow (\xi\partial)$ ,  $\int d^2\theta \rightarrow i \int d^2\theta$ ,  $\int d^4\theta \rightarrow -\int d^4\theta$  のように置き換える。

3次元の  $\gamma$  行列は次の性質を満足する  $2 \times 2$  の行列である。

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}, \quad \gamma_{\mu\nu\rho} = \mathbf{1}_2 \epsilon_{\mu\nu\rho}. \quad (4)$$

二つ目の式は完全反対称テンソル  $\epsilon_{\mu\nu\rho}$  の定義とみなすこともできる。3次元のローレンツ群は

$$\text{SO}(1, 2) \sim \text{SL}(2, \mathbb{R}) = \text{Sp}(2, \mathbb{R}) \quad (5)$$

であり、2成分スピノルは実表現である。従ってローレンツ群の生成子のスピノル表現  $(1/2)\gamma^{\mu\nu}$  の成分が実になるように  $\gamma$  行列の表示を選ぶことができる。(たとえば、 $\gamma^0 = i\sigma_y$ ,  $\gamma^1 = \sigma_x$ ,  $\gamma^2 = \sigma_z$  のように取れば、 $\gamma^\mu$  の成分は全て実である。) このときマヨラナスピノルを実スピノルとして定義することができる。以下では  $\gamma$  行列が実である表示を用いる。

$\gamma$  行列およびスピノルに対してスピノル添え字の標準位置を次のように定めておく。

$$(\gamma^\mu)_{\alpha}^{\beta}, \quad \psi_{\alpha} \quad (6)$$

荷電共役行列としては  $\epsilon$  を用いる。 $\epsilon$  の添え字の標準位置は次の二つであり、行列表示したときには隣り合う  $\gamma$  行列やスピノルの添え字にあわせて選ぶ。

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} \quad (7)$$

$\epsilon$  は次の性質を満足する反対称行列である。

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\gamma} = -\delta_{\alpha}^{\gamma}. \quad (8)$$

ローレンツ群  $\text{SO}(1, 2) \sim \text{SL}(2, \mathbb{R})$  は荷電共役行列を不変に保つような  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  の部分群として定義することもできる。 $\gamma$  行列および  $\epsilon$  は実であるとする。

$$\epsilon^* = \epsilon, \quad (\gamma^\mu)^* = \gamma^\mu \quad (9)$$

スピノル添え字の上げ下げは

$$\psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_{\beta}, \quad \psi_{\alpha} = \psi^{\beta} \epsilon_{\beta\alpha} \quad (10)$$

のように定義する。

$\gamma$  行列の二つのスピノル添え字の位置をそろえたものは対称行列である。

$$(\gamma^\mu)^{\alpha\beta} = (\gamma^\mu)^{\beta\alpha} \quad (11)$$

これを用いて、 $\gamma$  行列の積について次の式を示すことができる。

$$(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_k})^{\alpha\beta} = (-)^{k-1} (\gamma^{\mu_k} \dots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1})^{\beta\alpha} \quad (12)$$

また、両側をグラスマン奇のスピンルではさんだものに対しては

$$(\psi_1 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_k} \psi_2) = (-)^k (\psi_2 \gamma^{\mu_k} \cdots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \psi_1) \quad (13)$$

が成り立ち、形式的に  $\gamma$  行列を反対称行列のように取り扱えばよいことがわかる。ただし、次のような略記法を用いた。

$$\psi_1 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_k} \psi_2 = \psi_1^\alpha (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_k})_\alpha^\beta \psi_{2\beta} \quad (14)$$

$\gamma$  行列の両側を同じスピンルではさんだ場合には、次の式が成り立つ。

$$\theta \gamma_\mu \theta = 0, \quad \theta \gamma_\mu \gamma_\nu \theta = \theta^2 \eta_{\mu\nu}, \quad \theta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \theta = \theta^2 \epsilon_{\mu\nu\rho}. \quad (15)$$

グラスマン数の積に対しては、複素共役は次のように定義する。

$$(\alpha\beta)^* = \alpha^* \beta^*. \quad (16)$$

この定義のもとでは二つの実グラスマン数の積は実になる。たとえば実スピノルの二次形式

$$\psi_1 \gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_2} \psi_2 \quad (17)$$

は実である。いくつか例を挙げておこう。 $\theta$  を複素スピノルとすると、次の式が成り立つ。

$$(\theta^2)^* = \bar{\theta}^2, \quad (\theta \gamma_\mu \bar{\theta})^* = \bar{\theta} \gamma_\mu \theta, \quad (\theta \gamma_{\mu\nu} \bar{\theta})^* = \bar{\theta} \gamma_{\mu\nu} \theta. \quad (18)$$

スピノル  $\theta$  による微分  $\partial_\alpha$  を次のように定義する。

$$f(\theta + \xi) - f(\theta) = \xi^\alpha \partial_\alpha f(\theta) + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (19)$$

すなわち、 $\xi^\alpha \partial_\alpha$  という演算子は  $\theta$  を一つ  $\xi$  で置き換えるという操作を表す。微分演算子のスピノル添え字の標準位置も下付きであり、次の略記法を用いる。

$$(\xi\theta) = \xi^\alpha \theta_\alpha, \quad \partial^2 = -\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta, \quad \partial X \partial Y = -\epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta Y \quad (20)$$

## 2.2 超対称代数と超共形代数

3次元ではマヨラナスピンルが定義できるから、最も小さな超対称性は一つの実スピノル  $\xi$  を変換パラメータとするものであり、 $\mathcal{N} = 1$  超対称性と呼ばれる。超対称変換を次のように表すことによって生成子  $Q_\alpha$  を定義しよう。

$$\delta_\xi \phi = \xi^\alpha Q_\alpha \phi. \quad (21)$$

超対称変換  $Q_\alpha$  の反交換関係は次のように与えられる。

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \quad (22)$$

3次元のローレンツ回転  $M_{\mu\nu}$  と並進  $P_\mu$  に超対称電荷  $Q^\alpha$  を加えたものは超ポアンカレ群をなす。(22) 以外の 0 でない交換関係は次のように与えられる。

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}, \quad (23)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = \eta_{\mu\sigma} P_\nu - \eta_{\nu\sigma} P_\mu, \quad (24)$$

$$[M_{\mu\nu}, Q] = \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} Q. \quad (25)$$

計量は  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1)$  である。マヨラナスピノル  $\theta^\alpha$  を用いて  $\mathcal{N} = 1$  超空間  $(x^\mu, \theta^\alpha)$  を定義すれば、これらの(反)交換関係を満足する生成子を微分演算子として構成することもできる。

$$\tilde{P}_\mu = \partial_\mu, \quad (26)$$

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + \frac{1}{2} \theta \gamma_{\mu\nu} \partial, \quad (27)$$

$$\tilde{Q}_\alpha = \partial_\alpha + (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu. \quad (28)$$

ただし  $Q_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} Q^\beta$  である。ただし、生成子  $O$  に対応する微分演算子  $\tilde{O}$  を

$$O_X \phi(x, \theta) = \tilde{O}_X \phi(x, \theta) \quad (29)$$

によって定義した。 $O$  と  $\tilde{O}$  は交換関係の符号が逆になることに注意すること。あとで主に用いる超空間は、これとは異なり座標  $\theta^\alpha$  が複素スピノルである  $\mathcal{N} = 2$  超空間  $(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha)$  である。 $\mathcal{N} = 2$  超空間については、その構成法も含め §2.3 において詳しく述べる。

$\mathcal{N}$  個の超対称電荷  $Q^{i\alpha}$  ( $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ ) を含む場合には、交換関係 (22) は次のように拡張される。

$$\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} = 2\delta^{ij}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu \quad (30)$$

それぞれの  $Q^i$  はマヨラナスピノルであるから、それらを回転させる  $R$ -対称性は  $\text{SO}(\mathcal{N})$  である、 $R$ -対称性の生成子  $R^{ij}$  を含む交換関係は次のようになる。

$$[R^{ij}, R^{kl}] = \delta^{ik} R^{jl} - \delta^{jk} R^{il} - \delta^{il} R^{jk} + \delta^{jl} R^{ik}, \quad (31)$$

$$[R^{ij}, Q^k] = \delta^{ik} Q^j - \delta^{jk} Q^i. \quad (32)$$

コンフォーマル代数は、 $P_\mu$  と  $M_{\mu\nu}$  よりなるポアンカレ代数にコンフォーマルブースト  $K_\mu$  とディラレーション  $D$  を加えることによって定義される。それらを

含む 0 でない交換関係は次のように与えられる。

$$[M_{\mu\nu}, K_\sigma] = \eta_{\mu\sigma}K_\nu - \eta_{\nu\sigma}K_\mu, \quad (33)$$

$$[D, P_\mu] = P_\mu, \quad (34)$$

$$[D, K_\mu] = -K_\mu, \quad (35)$$

$$[P_\mu, K_\nu] = -2M_{\mu\nu} + 2\eta_{\mu\nu}D. \quad (36)$$

$x^\mu$  空間上の微分演算子として表せば、これらは次のように与えられる。

$$\tilde{P}_\mu = \partial_\mu, \quad (37)$$

$$\tilde{M}_{\mu\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, \quad (38)$$

$$\tilde{K}_\mu = \frac{\partial}{\partial y^\mu} = x^\lambda x_\lambda \partial_\mu - 2x_\mu x^\lambda \partial_\lambda, \quad (39)$$

$$\tilde{D} = x^\mu \partial_\mu \quad (40)$$

ただし、 $y^\mu$  は次のように定義される。

$$y^\mu = \frac{x^\mu}{x^\lambda x_\lambda}. \quad (41)$$

これらは  $SO(2,3)$  代数を生成する。そのことを見るために、

$$P_\mu = \sqrt{2}M_{\mu+}, \quad K_\mu = -\sqrt{2}M_{\mu-}, \quad D = -M_{+-}. \quad (42)$$

のように生成子  $M_{MN}$   $M, N = 0, 1, 2, 3, +, -$  を定義し、計量も新たな成分

$$\eta_{\pm\mu} = \eta_{++} = \eta_{--} = 0, \quad \eta_{+-} = 1 \quad (43)$$

を加えることで  $\eta_{MN}$  を定義する。するとコンフォーマル代数は次のように一つにまとめて書くことができる。

$$[M_{MN}, M_{RS}] = \eta_{MR}M_{NS} - \eta_{NR}M_{MS} - \eta_{MS}M_{NR} + \eta_{NS}M_{MR}. \quad (44)$$

$\eta_{MN}$  は固有値が  $(- - + + +)$  であるから、この代数は上で述べたように  $SO(2,3)$  である。

この共形代数に超対称電荷を加えて超共形代数を構成する準備として、 $SO(2,3)$  のディラック行列を次のように与えておく。

$$C_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha\beta} \\ \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Gamma^\mu)_{A^B} = \begin{pmatrix} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

$$(\Gamma^+)_{A^B} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\alpha\beta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Gamma^-)_{A^B} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$



$C$  は荷電共役行列であり、次の関係式が成り立つ。

$$C_{AB} = -C_{BA}, \quad (\Gamma_M)_{AB} = -(\Gamma_M)_{BA}, \quad (\Gamma_{MN})_{AB} = (\Gamma_{MN})_{BA}. \quad (46)$$

$SO(2,3)$  は反対称な荷電共役行列  $C$  を不変に保つような  $GL(4, \mathbb{R})$  の部分群として定義することもできる。このことは、

$$SO(2,3) \sim Sp(4, \mathbb{R}) \quad (47)$$

であることを意味している。

あとで便利のように、 $SO(2,3)$  生成子のスピノル表現行列を与えておく。

$$\begin{aligned} (\Gamma^{\mu\nu})_{AB} &= \begin{pmatrix} 0 & (\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} \\ (\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Gamma^{+-})_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{\alpha\beta} \\ -\epsilon_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}, \\ (\Gamma^{\mu+})_{AB} &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Gamma^{\mu-})_{AB} = -\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

ローレンツ群  $SL(2, \mathbb{R}) = Sp(2, \mathbb{R})$  がコンフォーマル群  $Sp(4, \mathbb{R})$  に拡張されると、スピノル表現も **2** 表現から **4** 表現に拡大される。これに伴い、新たな超対称電荷  $S_\alpha^i$  を導入し、次のように 4 成分スピノル電荷を定義する。

$$\mathcal{Q}_A^i = \begin{pmatrix} Q_\alpha^i \\ S_\alpha^i \end{pmatrix}, \quad A = 1, 2, 3, 4. \quad (49)$$

ローレンツ対称性がコンフォーマル対称性に拡張された場合、(25) と (32) は次のように変更される。

$$[M_{MN}, \mathcal{Q}^i] = \frac{1}{2} \Gamma_{MN} \mathcal{Q}^i, \quad (50)$$

$$[R^{ij}, \mathcal{Q}^k] = \delta^{ik} \mathcal{Q}^j - \delta^{jk} \mathcal{Q}^i. \quad (51)$$

これら以外に 0 でない (反) 交換関係は  $\mathcal{Q}^i$  同士の反交換関係である。コンフォーマル対称性  $Sp(4, \mathbb{R})$  と  $R$ -対称性  $SO(\mathcal{N})$  に矛盾しない最も一般の形は  $\alpha$  と  $\beta$  をある定数として次のようになる。

$$\{\mathcal{Q}_A^i, \mathcal{Q}_B^j\} = \frac{\alpha}{2} \delta^{ij} (\Gamma^{MN})_{AB} M_{MN} + \beta C_{AB} R^{ij} \quad (52)$$

(30) との比較により、係数  $\alpha$  は 2 であることがわかる。係数  $\beta$  を決めるにはヤコビ恒等式

$$[\{\mathcal{Q}^{iA}, \mathcal{Q}^{jB}\}, \mathcal{Q}^{kC}] + \dots = 0 \quad (53)$$

を用いる。…の部分には添え字の組  $(iA), (jB), (kC)$  の入れ替えについての対称化を表している。添え字に対する対称化を実現するために、グラスマン偶の変数  $\lambda^A$  を導入し、(53) の添え字をつぶそう。まず (52) の添え字を  $\lambda$  でつぶしたものは

$$\{\lambda^i Q^i, \lambda^j Q^j\} = -\frac{\alpha}{2}(\lambda^i \Gamma^{MN} \lambda^i) M_{MN} - \beta(\lambda^i \lambda^j) R^{ij} \quad (54)$$

である。さらにこの両辺と  $\lambda^k Q^k$  との交換関係をとると、左辺はヤコビ恒等式より 0 であり、次の式が得られる。

$$0 = -\frac{\alpha}{4}(\lambda^i \Gamma^{MN} \lambda^i)(\lambda^k \Gamma_{MN} Q^k) - 2\beta(\lambda^k \lambda^j)(\lambda^k Q^j) \quad (55)$$

フィルツ変換の公式

$$\dots \lambda^i)(\lambda^i \dots = -\frac{1}{8}(\lambda^i \Gamma_{MN} \lambda^i) \dots \Gamma^{MN} \dots \quad (56)$$

を用いれば、 $\beta = -\alpha$  でなければならないことがわかる。こうして次の反交換関係が得られた。

$$\{Q_A^i, Q_B^j\} = \delta^{ij}(\Gamma^{MN})_{AB} M_{MN} - 2C_{AB} R^{ij} \quad (57)$$

以上の代数によって定義される超リー代数は  $\text{OSp}(\mathcal{N}|4)$  と呼ばれる。

この代数を 3 次元スピノルを用いた表示で改めて与えておこう。まず、 $M$  による  $SO(1, 2)$  回転を表す交換関係は

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}, \\ [M_{\mu\nu}, P_\sigma] &= \eta_{\mu\sigma} P_\nu - \eta_{\nu\sigma} P_\mu, \\ [M_{\mu\nu}, K_\sigma] &= \eta_{\mu\sigma} K_\nu - \eta_{\nu\sigma} K_\mu, \\ [M_{\mu\nu}, Q^i] &= \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} Q^i, \\ [M_{\mu\nu}, S^i] &= \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} S^i. \end{aligned} \quad (58)$$

$R$  対称性  $SO(\mathcal{N})$  による回転は

$$\begin{aligned} [R^{ij}, R^{kl}] &= \delta^{ik} R^{jl} - \delta^{jk} R^{il} - \delta^{il} R^{jk} + \delta^{jl} R^{ik}, \\ [R^{ij}, Q^k] &= \delta^{ik} Q^j - \delta^{jk} Q^i, \\ [R^{ij}, S^k] &= \delta^{ik} S^j - \delta^{jk} S^i. \end{aligned} \quad (59)$$

ディラレーションのもとでのウェイトを与える交換関係

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= P_\mu, \\ [D, K_\mu] &= -K_\mu, \\ [D, Q_\alpha^i] &= \frac{1}{2} Q_\alpha^i, \\ [D, S_\alpha^i] &= -\frac{1}{2} S_\alpha^i. \end{aligned} \quad (60)$$

スピノル演算子同士の反交換関係は

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha^i, Q_\beta^j\} &= 2\delta^{ij}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu, \\ \{S_\alpha^i, S_\beta^j\} &= 2\delta^{ij}(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}K_\mu, \\ \{S_\alpha^i, Q_\beta^j\} &= \delta^{ij}(\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}M_{\mu\nu} + 2\epsilon_{\alpha\beta}(\delta^{ij}D - R^{ij}).\end{aligned}\quad (61)$$

これら以外に 0 でない交換関係は次のものである。

$$\begin{aligned}[P_\mu, K_\nu] &= -2M_{\mu\nu} + 2\eta_{\mu\nu}D, \\ [K_\mu, Q_\alpha^i] &= -(\gamma_\mu S^i)_\alpha, \\ [P_\mu, S_\alpha^i] &= -(\gamma_\mu Q^i)_\alpha.\end{aligned}\quad (62)$$

### 2.3 $\mathcal{N} = 2$ 超空間

一般の  $\mathcal{N}$  に対する超対称性を議論する場合、 $\mathcal{N} = 1$  超場を用いて作用を書き、適当な  $R$ -対称性を要求することによって拡張された超対称性を実現するという方法が形式的に美しい。しかしここでは  $\mathcal{N} = 2$  の超場形式を用いることにする。理由は単に 3 次元の  $\mathcal{N} = 2$  超対称性は 4 次元の  $\mathcal{N} = 1$  超対称性に類似しており、多くの人が慣れ親しんでいるからである。

$\mathcal{N} = 2$  超対称性の生成子  $Q_\alpha^i$  ( $i = 1, 2$ ) を次のように複素に組む。

$$Q_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_\alpha^1 + iQ_\alpha^2), \quad \bar{Q}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_\alpha^1 - iQ_\alpha^2)\quad (63)$$

これらを含む  $\mathcal{N} = 2$  超ポアンカレ代数は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}, \\ [M_{\mu\nu}, P_\sigma] &= \eta_{\mu\sigma}P_\nu - \eta_{\nu\sigma}P_\mu, \\ [M_{\mu\nu}, Q] &= \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}Q, \\ [M_{\mu\nu}, \bar{Q}] &= \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\bar{Q}, \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu.\end{aligned}\quad (64)$$

$\mathcal{N} = 2$  の超コンフォーマル代数においては、これらに  $D$ 、 $R^{ij}$ 、 $S_\alpha^i$ 、 $K_\mu$  が加わる。ただし、添え字  $i$  と  $j$  は 1 と 2 の二つの値をとる。複素スピノル演算子  $S$  と  $R$  電荷を次のように定義する。

$$S_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_\alpha^1 + iS_\alpha^2), \quad \bar{S}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_\alpha^1 - iS_\alpha^2), \quad R = -iR^{12}.\quad (65)$$

非自明な交換関係は以下の通り。まず、 $R$  対称性  $SO(2)$  による回転は

$$[R, Q_\alpha] = -Q_\alpha, \quad [R, \bar{Q}_\alpha] = \bar{Q}_\alpha, \quad [R, S_\alpha] = -S_\alpha, \quad [R, \bar{S}_\alpha] = \bar{S}_\alpha.\quad (66)$$

ディラレーションのもとでのウェイトを与える交換関係

$$\begin{aligned} [D, P_\mu] &= P_\mu, & [D, Q_\alpha] &= \frac{1}{2}Q_\alpha^i, & [D, S_\alpha] &= -\frac{1}{2}S_\alpha, \\ [D, K_\mu] &= -K_\mu, & [D, \bar{Q}_\alpha] &= \frac{1}{2}\bar{Q}_\alpha^i, & [D, \bar{S}_\alpha] &= -\frac{1}{2}\bar{S}_\alpha. \end{aligned} \quad (67)$$

$M$  を含む交換関係は

$$[M_{\mu\nu}, K_\sigma] = \eta_{\mu\sigma}K_\nu - \eta_{\nu\sigma}K_\mu, \quad [M_{\mu\nu}, S] = \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}S, \quad [M_{\mu\nu}, \bar{S}] = \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\bar{S}. \quad (68)$$

スピノル演算子同士の反交換関係は

$$\begin{aligned} \{S_\alpha, \bar{S}_\beta\} &= 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}K_\mu, \\ \{S_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= (\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}M_{\mu\nu} + 2\epsilon_{\alpha\beta}(D - R), \\ \{Q_\alpha, \bar{S}_\beta\} &= (\gamma^{\mu\nu})_{\alpha\beta}M_{\mu\nu} - 2\epsilon_{\alpha\beta}(D + R). \end{aligned} \quad (69)$$

そのほかには以下の交換関係がある。

$$[P_\mu, K_\nu] = -2M_{\mu\nu} + 2\eta_{\mu\nu}D, \quad (70)$$

$$\begin{aligned} [K_\mu, Q_\alpha] &= -(\gamma_\mu S)_\alpha, & [P_\mu, S_\alpha] &= -(\gamma_\mu Q)_\alpha, \\ [K_\mu, \bar{Q}_\alpha] &= -(\gamma_\mu \bar{S})_\alpha, & [P_\mu, \bar{S}_\alpha] &= -(\gamma_\mu \bar{Q})_\alpha. \end{aligned} \quad (71)$$

よく知られているように、このような代数が与えられると超空間を商空間として定義することができる。まず、 $P, Q, \bar{Q}, M$  よりなる超ポアンカレ代数に対して超空間を構成しよう。この場合、超空間は次のように定義することができる。

$$\mathcal{M} = G/H, \quad G = (P, Q, \bar{Q}, M), \quad H = (M). \quad (72)$$

ただし、生成子を括弧でくくったものはそれらの生成子によって生成される群を表す。この商空間上の点は、 $g$  を  $G$  の元、 $h$  を  $H$  の元として  $gh \sim g$  という同一視によって定義される同値類である。その代表元を次のように与えることで超空間上の座標  $(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha)$  を導入しよう。

$$g(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha) = e^X, \quad X = x^\mu P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}^\alpha \bar{Q}_\alpha \quad (73)$$

超空間  $\mathcal{M}$  に対する超ポアンカレ群の無限小変換  $1 + A \in G$  の作用は元  $g(x, \theta, \bar{\theta})$  に対する左からの作用として次のように定義される。

$$(1 + A)g(x, \theta, \bar{\theta}) = g(x + \delta x, \theta + \delta\theta, \bar{\theta} + \delta\bar{\theta})(1 + A') \quad (74)$$

ただし  $1 + A'$  は  $H$  の元である。無限小の部分のみを取り出すと、次のように書くこともできる。

$$Ag(x, \theta, \bar{\theta}) = \tilde{A}g(x, \theta, \bar{\theta}) + g(x, \theta, \bar{\theta})A' \quad (75)$$

ただし、 $\tilde{A}$  は超空間の座標に作用する次の微分演算子である。

$$\tilde{A} = \delta x^\mu \partial_\mu + \delta \theta^\alpha \partial_\alpha + \delta \bar{\theta}^\alpha \bar{\partial}_\alpha \quad (76)$$

関係式 (75) によって、 $A$  が与えられると一意的に微分演算子  $\tilde{A}$  と  $H$  の代数の元  $A'$  を決めることができる。こうして得られる微分演算子  $\tilde{A}$  が、生成子  $A$  の微分演算子表示である。

$A$  を  $\delta X$  と  $A'$  に分解する具体的な手続きを与えておこう。まず (74) を次のように書き換える。( (74) の両辺に左から  $e^{-X}$  を作用させ、 $X$  の作用を随伴表現  $X_{\text{adj}} A = [X, A]$  を用いて書き換えればよい。)

$$e^{-X_{\text{adj}}} A = \frac{1 - e^{-X_{\text{adj}}}}{X_{\text{adj}}} \delta X + A' \quad (77)$$

ただし  $\delta X$  は  $X$  に含まれる座標変数をその微分で置き換えたものである。

$$\delta X = \delta x^\mu P_\mu + \delta \theta^\alpha Q_\alpha + \delta \bar{\theta}^\alpha \bar{Q}_\alpha \quad (78)$$

$X$  に含まれる生成子  $P, Q, \bar{Q}$  はそれだけで閉じた代数を成すから、右辺第1項は  $P, Q, \bar{Q}$  の線形結合である。第2項は生成子  $M$  に比例している。従って左辺が計算できれば、右辺の二つの項への分解は一意的に行うことができる。(77) の右辺第1項、すなわち  $e^{-X_{\text{adj}}} A$  から生成子  $P, Q, \bar{Q}$  の部分を取り出したものを  $C_\perp$  とすれば、そこから  $\delta X$  が次のように得られる。

$$\delta X = \frac{X_{\text{adj}}}{1 - e^{-X_{\text{adj}}}} C_\perp = \left( 1 + \frac{1}{2} X_{\text{adj}} + \frac{1}{12} X_{\text{adj}}^2 + \dots \right) C_\perp \quad (79)$$

$\delta X$  が得られれば、それに対応した微分演算子は (76) によって与えられる。

以上の処方箋に従って、 $A$  がポアンカレ群のそれぞれの生成子である場合の  $\tilde{A}$  と  $A'$  を計算すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\mu &= \partial_\mu, & P'_\mu &= 0, \\ \tilde{Q}_\alpha &= \partial_\alpha + (\gamma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, & Q'_\alpha &= 0, \\ \tilde{\bar{Q}}_\alpha &= \bar{\partial}_\alpha + (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu, & \bar{Q}'_\alpha &= 0, \\ \tilde{M}_{\mu\nu} &= x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + \frac{1}{2} (\theta \gamma_{\mu\nu} \partial) + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \gamma_{\mu\nu} \bar{\partial}), & M'_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (80)$$

これらの微分演算子の交換関係は、対応する演算子の交換関係とは符号が逆になることに注意しよう。

次の微分演算子は  $\tilde{Q}_\alpha$  および  $\tilde{\bar{Q}}_\alpha$  と反可換であり共変微分と呼ばれる。

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \partial_\alpha - (\gamma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \\ \bar{D}_\alpha &= \bar{\partial}_\alpha - (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu. \end{aligned} \quad (81)$$

これらの間の交換関係は次のようになる。

$$\{D_\alpha, \bar{D}_\beta\} = 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu, \quad \{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_\alpha, \bar{D}_\beta\} = 0. \quad (82)$$

次の略記法を用いる。

$$\xi D = \xi^\alpha D_\alpha, \quad D^2 = D^\alpha D_\alpha. \quad (83)$$

4次元の場合と異なるのは、 $D$  と  $\bar{D}$  の添え字を縮約することができることである。

$$D\bar{D} = D^\alpha \bar{D}_\alpha = \bar{D}^\alpha D_\alpha = \bar{D}D \quad (84)$$

グラスマン数による積分は次のように定義する。

$$\int d^4\theta(\theta^2\bar{\theta}^2) = 1, \quad \int d^2\theta(\theta^2) = 1. \quad (85)$$

超場を用いた定式化は超コンフォーマル対称性がある場合についても適用することができる。超空間への超共形代数の作用を求めるには、超空間を定義する際に  $G$  を超共形群に、 $H$  を  $(M, D, R, S, \bar{S}, K)$  で生成されるその部分群に選ばばよい。超空間上の座標を再び (73) によって与えれば、ポアンカレ代数に対しては上の議論は全く変更されない。それ以外の生成子の超空間への作用も上と同様の方法で求めることができる。超空間の座標に作用する微分演算子  $\tilde{A}$  の部分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= x^\mu \partial_\mu + \frac{1}{2}(\theta\partial) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}\bar{\partial}), \\ \tilde{R} &= -(\theta\partial) + (\bar{\theta}\bar{\partial}), \\ \zeta\tilde{S} &= (\zeta\dot{x}\partial) + (\zeta\dot{x}\gamma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu - (\theta\gamma_\lambda\bar{\theta})(\zeta\gamma^\lambda\partial) + \bar{\theta}^2(\zeta\bar{\partial}) - \frac{1}{2}\bar{\theta}^2(\zeta\gamma^\mu\theta)\partial_\mu, \\ \bar{\zeta}\tilde{S} &= (\bar{\zeta}\dot{x}\bar{\partial}) + (\bar{\zeta}\dot{x}\gamma^\mu\theta)\partial_\mu - (\bar{\theta}\gamma_\lambda\theta)(\bar{\zeta}\gamma^\lambda\bar{\partial}) + \theta^2(\bar{\zeta}\partial) - \frac{1}{2}\theta^2(\bar{\zeta}\gamma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu, \\ \tilde{K}_\mu &= (x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu\partial_\nu) - (\theta\gamma_\mu\dot{x}\partial) - (\bar{\theta}\gamma_\mu\dot{x}\bar{\partial}) \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta^2(\bar{\theta}\gamma^\mu\partial) - \frac{1}{2}\bar{\theta}^2(\theta\gamma^\mu\bar{\partial}) + \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\theta^2\partial_\mu \end{aligned} \quad (86)$$

$H$  の代数の元である部分  $A'$  は

$$\begin{aligned} D' &= D, \\ R' &= R, \\ (\zeta S') &= (\zeta S) + (\zeta\gamma^{\mu\nu}\bar{\theta})M_{\mu\nu} + 2(\zeta\bar{\theta})(D - R), \\ (\bar{\zeta} S') &= (\bar{\zeta} S) + (\bar{\zeta}\gamma^{\mu\nu}\theta)M_{\mu\nu} + 2(\bar{\zeta}\theta)(D + R), \\ K'_\mu &= K_\mu + 2x^\lambda M_{\lambda\mu} - (\theta\gamma_{\mu\kappa\lambda}\bar{\theta})M^{\kappa\lambda} \\ &\quad - (\theta\gamma_\mu S) - (\bar{\theta}\gamma_\mu\bar{S}) - 2x_\mu D + 2(\theta\gamma_\mu\bar{\theta})R. \end{aligned} \quad (87)$$

こうして得られた微分演算子  $\tilde{A}$  を用いれば、超場の変換則を次のように与えることができる。

$$A\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \tilde{A}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (88)$$

ただし、上で得られた微分演算子  $\tilde{A}$  によって再現される超共形変換はワイルウェイトや R-チャージが 0 の超場に対するものである。実際に、超場に対して上記の微分演算子を用いて  $D$ -変換や  $R$ -変換を行ってみると、次のようになる。

$$\begin{aligned} e^{\alpha D}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{\alpha \tilde{D}}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(e^{\alpha}x, e^{\alpha/2}\theta, e^{\alpha/2}\bar{\theta}) \\ e^{i\alpha R}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{i\alpha \tilde{R}}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(x, e^{-i\alpha}\theta, e^{i\alpha}\bar{\theta}) \end{aligned} \quad (89)$$

これはウェイトが 0 である超場の変換則である。一般のワイルウェイト  $n_D$  と R-チャージ  $n_R$  を持つ超場  $\Phi_{(n_D, n_R)}(x, \theta, \bar{\theta})$  は次のように変換される。

$$\begin{aligned} e^{\alpha D}\Phi_{(n_D, n_R)}(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{\alpha n_D}\Phi_{(n_D, n_R)}(e^{\alpha}x, e^{\alpha/2}\theta, e^{\alpha/2}\bar{\theta}) \\ e^{i\alpha R}\Phi_{(n_D, n_R)}(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{i\alpha n_R}\Phi_{(n_D, n_R)}(x, e^{-i\alpha}\theta, e^{i\alpha}\bar{\theta}) \end{aligned} \quad (90)$$

このような変換則を微分演算子によって実現するためには、超空間を拡張し、 $D$ 変換および  $R$ 変換に対応する座標  $\rho$  と  $\phi$  を新たに導入する必要がある。すなわち、超空間の定義を以下のように変更する。

$$\mathcal{M} = G/H, \quad G = (P, Q, M, D, R, S, \bar{S}, K), \quad H = (M, S, \bar{S}, K). \quad (91)$$

そして代表元を次のように取る。

$$g(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha, \rho, \phi) = \exp(x^\mu P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}^\alpha \bar{Q}_\alpha) \exp(\rho D + i\phi R) \quad (92)$$

上で得られた  $A$  から  $\tilde{A}$  と  $A'$  への分解を用いると、次の式が得られる。

$$Ag(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha, \rho, \phi) = \tilde{A}e^{xP+\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q}}e^{\rho D+i\phi R} + e^{xP+\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q}}A'e^{\rho D+i\phi R} \quad (93)$$

生成子  $A$  に対応する、拡張された超空間上の微分演算子を得るには、右辺第 2 項に現れる  $A'$  を次のように  $\tilde{A}'$  と  $A''$  に分解する。

$$A'e^{\rho D+i\phi R} = \tilde{A}'e^{\rho D+i\phi R} + e^{\rho D+i\phi R}A''. \quad (94)$$

ただし、 $A''$  は  $H$  の代数の元であり、 $\tilde{A}'$  は座標  $\rho$  と  $\phi$  に作用する微分演算子である。こうすると、最終的に次の式が得られる。

$$Ag(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha, \rho, \phi) = (\tilde{A} + \tilde{A}')g(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha, \rho, \phi) + g(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\alpha, \rho, \phi)A'' \quad (95)$$

従って、生成子  $A$  に対応する拡張された超空間上の微分演算子は  $\tilde{A} + \tilde{A}'$  である。ポアンカレ群の生成子については  $\tilde{A}' = 0$  であり、微分演算子表示は変更を受けな

い。その他の演算子については、 $A'$  に含まれる  $D$  と  $R$  を微分演算子に書き換えることにより、次の式を得る。

$$\begin{aligned}
\tilde{D}' &= \partial_\rho, \\
\tilde{R}' &= -i\partial_\phi, \\
\tilde{S}'_\alpha &= 2\bar{\theta}_\alpha(\partial_\rho + i\partial_\phi), \\
\tilde{\bar{S}}'_\alpha &= 2\theta_\alpha(\partial_\rho - i\partial_\phi), \\
\tilde{K}'_\mu &= -2x_\mu\partial_\rho - 2i(\theta\gamma_\mu\bar{\theta})\partial_\phi.
\end{aligned} \tag{96}$$

ウェイト  $(n_D, n_R)$  を持ち、(90) のように変換される超場は、拡張された超空間上の超場の  $\rho, \phi$  座標に対する依存性を次のように置くことによって実現される。

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}, \rho, \phi) = \Phi_{(n_D, n_R)}(x, \theta, \bar{\theta})e^{n_D\rho + i n_R\phi} \tag{97}$$

このような超場に作用する場合には微分演算子  $\partial_\rho$  と  $-i\partial_\phi$  を  $n_D$  と  $n_R$  に置き換えることができ、微分演算子は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\tilde{D} + \tilde{D}' &= \tilde{D} + n_D, \\
\tilde{R} + \tilde{R}' &= \tilde{R} + n_R, \\
\tilde{S}_\alpha + \tilde{S}'_\alpha &= \tilde{S}_\alpha + 2(n_D - n_R)\bar{\theta}_\alpha, \\
\tilde{\bar{S}}_\alpha + \tilde{\bar{S}}'_\alpha &= \tilde{\bar{S}}_\alpha + 2(n_D + n_R)\theta_\alpha, \\
\tilde{K}_\mu + \tilde{K}'_\mu &= \tilde{K}_\mu - 2n_D x_\mu + 2n_R(\theta\gamma_\mu\bar{\theta}).
\end{aligned} \tag{98}$$

このように、微分演算子が作用する超場のウェイトに依存するものとして定義されていれば、座標  $\rho$  や  $\phi$  を直接扱わなくても済む。

## 2.4 カイラル超場

4次元の場合と同様に、カイラル超場を次のように定義する。

$$\bar{D}_\alpha\Phi = 0. \tag{99}$$

この拘束条件の下では、 $\Phi$  は次のように展開することができる。

$$\Phi = \phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta^2 F - (\theta\gamma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\phi - \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^2(\bar{\theta}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\partial_\mu\partial^\mu\phi. \tag{100}$$

この多重項の運動項は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\int d^4\theta\bar{\Phi}\Phi &= \frac{1}{4}\phi\partial_\mu\partial^\mu\bar{\phi} - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\bar{\phi} + \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi\bar{\phi} + \frac{1}{2}(\psi\gamma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) + F\bar{F} \\
&= -\partial_\mu\bar{\phi}\partial^\mu\phi + (\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) + \bar{F}F + \text{total derivative}
\end{aligned} \tag{101}$$



添え字  $i$  によってラベルされた複数個のカイラル超場  $\Phi^i$  の一般の関数  $W(\Phi)$  に対して、その  $F$ -term は超対称性のもとで不変であり、成分場では次のように与えられる。

$$-\int d^2\theta W(\Phi) = -\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi^i} F^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi^i \partial\phi^j} (\psi^i \psi^j) \quad (102)$$

超コンフォーマル対称性のある理論において、多重項の中で最低のワイルウェイトを持つ  $\phi$  に対して  $S_\alpha \phi = 0$  が成り立つ。また、カイラル多重項においては  $\bar{Q}\phi = 0$  である。従って、(69) にある反交換関係を用いると、

$$\{S_\alpha, \bar{Q}_\beta\} \phi = 2\epsilon_{\alpha\beta} (D - R)\phi = 0 \quad (103)$$

が得られる。すなわち、カイラル多重項のスカラー場  $\phi$  に対して次の関係式が成り立つ。

$$D = R \quad (104)$$

この関係式は、超場を用いて以下のように導くこともできる。カイラル超場は (99) によって定義されるが、この条件を満足する場が  $S$  変換を行った後にもやはりこの関係式を満足すると仮定してみよう。すなわち、

$$\bar{D}_\alpha \Phi = 0, \quad \bar{D}_\alpha \tilde{S}_\beta \Phi = 0 \quad (105)$$

が成り立つとしてみよう。(ここでは座標  $\rho$  と  $\phi$  によって拡張された超空間を用い、 $\tilde{S}$  は前節における  $\tilde{S} + \tilde{S}'$  を表しているものとする。) これは次の式が成り立つことを意味する。

$$[\bar{D}_\alpha, \tilde{S}_\beta] \Phi = 0 \quad (106)$$

共変微分と  $\tilde{S}$  および  $\tilde{\bar{S}}$  に対して次の交換関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} [\epsilon D, \zeta \tilde{S}] &= 2(\bar{\theta} \gamma^\lambda \epsilon) (\zeta \gamma_\lambda D), \\ [\epsilon D, \bar{\zeta} \tilde{\bar{S}}] &= 2(\theta \epsilon) (\bar{\zeta} D) + 2(\partial_\rho - i\partial_\phi) (\bar{\zeta} \epsilon), \\ [\bar{\epsilon} \bar{D}, \zeta \tilde{S}] &= 2(\bar{\theta} \bar{\epsilon}) (\zeta \bar{D}) + 2(\partial_\rho + i\partial_\phi) (\zeta \bar{\epsilon}), \\ [\bar{\epsilon} \bar{D}, \bar{\zeta} \tilde{\bar{S}}] &= 2(\theta \gamma^\lambda \bar{\epsilon}) (\bar{\zeta} \gamma_\lambda \bar{D}). \end{aligned} \quad (107)$$

このうち下から 2 番目の式を用いることで (106) は次のように書き換えられる。

$$(\partial_\rho + i\partial_\phi) \Phi = 0 \quad (108)$$

これはまさに、ワイルウェイトと R-電荷の間に関係式 (104) が成り立つことを意味している。

関係式 (104) は 4 次元の  $\mathcal{N} = 1$  超共形代数より得られる  $D = (3/2)R$  とは数係数が異なることに注意しよう。この数係数を決めるにはそれ自身がカイラル超場である超ポテンシャルの R 電荷と共次元を見るのが簡単である。超ポテンシャル  $W$  が  $U(1)_R$  を破らないためには  $W$  のチャージは 2 でなければならない。また、コンフォーマルであるためには  $W$  の質量次元も 2 でなければならない。(4 次元の場合は 3 でなければならない。) 従って 3 次元では (104) が成り立っている。

## 2.5 ベクトル超場

$\mathcal{N} = 2$  ベクトル多重項はゲージ場、スカラー場、フェルミオン場よりなり、ゲージ群のリー代数に属する超場  $V$  としてまとめることができる。以下では  $V$  はリー代数のエルミートな行列表現として表されているものとする。

複数の成分を持つカイラル超場  $\Phi$  の次のゲージ変換を考える。

$$\Phi' = e^{i\Lambda}\Phi \quad (109)$$

ただしカイラル超場  $\Lambda$  はリー代数に値をとる変換パラメータであり、多成分場  $\Phi$  に作用する際には  $\Phi$  が属する表現に対応した行列表示を採っているものとする。運動項をゲージ不変にするために、超場  $V$  を用いてカイラル多重項の運動項 (101) を次のように修正する。

$$\int d^4\theta \bar{\Phi} e^{2V} \Phi \quad (110)$$

これがゲージ不変であるためには  $V$  が次のように変換されればよい。

$$e^{2V'} = e^{i\bar{\Lambda}} e^{2V} e^{-i\Lambda} = \exp 2 \left( V + \frac{i}{2}(\bar{\Lambda} - \Lambda) + \frac{i}{2}[\bar{\Lambda}, V] - \frac{i}{2}[V, \Lambda] + \dots \right) \quad (111)$$

このゲージ変換を用いれば、次の Wess-Zumino ゲージをとることができる。

$$V \stackrel{\text{WZ}}{=} (\theta\gamma^\mu\bar{\theta})A_\mu + (\theta\bar{\theta})\sigma - \theta^2(\bar{\theta}\lambda) - \bar{\theta}^2(\theta\lambda) - \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2 D. \quad (112)$$

ゲージ不変なカイラル多重項の運動項は次のように展開することができる。

$$\begin{aligned} \int d^4\theta \bar{\Phi} e^{2V} \Phi &= -D_\mu \bar{\phi} D^\mu \phi + (\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi) + \bar{F}F \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\phi}(\lambda\psi) + \sqrt{2}(\bar{\psi}\lambda)\phi - \bar{\phi}D\phi - \bar{\phi}\sigma\sigma\phi + (\bar{\psi}\sigma\psi) \\ &\quad + \text{total derivative} \end{aligned} \quad (113)$$

ただし、共変微分は次のように定義される。

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - iA_\mu \phi, \quad D_\mu \bar{\phi} = \partial_\mu \bar{\phi} + i\bar{\phi}A_\mu. \quad (114)$$

ゲージ場の強さ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu], \quad (115)$$

を含むスピノルカイラル超場  $W^\alpha$  は次のように定義される。

$$\epsilon_{\alpha\beta} W^\beta = -\frac{1}{8} \bar{D}^\beta \bar{D}_\beta e^{-2V} D_\alpha e^{2V} \stackrel{\text{WZ}}{=} -\frac{1}{4} \bar{D}^\beta \bar{D}_\beta (D_\alpha V + [D_\alpha V, V]) \quad (116)$$

(二つ目の等号は Wess-Zumino ゲージで成り立つ。) これはゲージ共変であり、ゲージ変換 (111) のもとで次のように変換される。

$$W'^\alpha = e^{i\Lambda} W^\alpha e^{-i\Lambda} \quad (117)$$

Wess-Zumino ゲージでは次のように書ける。

$$W^\alpha = \lambda^\alpha + \theta^\alpha D + \frac{i}{2}(\gamma^{\mu\nu}\theta)^\alpha F_{\mu\nu} - (\gamma^\mu\theta)^\alpha D_\mu\sigma + (\gamma^\mu D_\mu\bar{\lambda})^\alpha\theta^2 - [\sigma, \bar{\lambda}^\alpha]\theta^2 \dots \quad (118)$$

$\dots$  は  $\bar{\theta}$  を含む項である。随伴表現に属する場  $\sigma$  や  $\bar{\lambda}$  の共変微分は次のように定義される。

$$D_\mu\sigma = \partial_\mu\sigma - i[A_\mu, \sigma], \quad D_\mu\bar{\lambda} = \partial_\mu\bar{\lambda} - i[A_\mu, \bar{\lambda}]. \quad (119)$$

これを用いてゲージ場運動項が次のように与えられる。

$$\frac{1}{2} \int d^2\theta \operatorname{tr} W^2 = \operatorname{tr} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\lambda\gamma^\mu D_\mu\bar{\lambda}) - \frac{1}{2} D_\mu\sigma D^\mu\sigma + \frac{1}{2} D^2 - (\lambda[\sigma, \bar{\lambda}]) \right). \quad (120)$$

ゲージ群が  $U(1)$  である場合には Fayet-Iliopoulos 項を導入することができるということは 4 次元の場合と同じである。

$$-2\zeta \int d^4\theta V = \zeta D. \quad (121)$$

## 2.6 $\mathcal{N} = 2$ 超対称性変換則

まず、ベクトル多重項の超対称変換を調べよう。超場  $V$  に対して微分演算子 (80) を作用させることにより次の変換を得る。(パラメータ  $\bar{\xi}$  についての項は複素共役を取ることで簡単に得られるのでここでは省略した。)

$$\begin{aligned} \delta V = & i(\xi\gamma^\mu\bar{\theta})A_\mu + (\xi\bar{\theta})\sigma - \bar{\theta}^2(\xi\lambda) - 2(\xi\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) - (\xi\theta)\bar{\theta}^2 D \\ & + \frac{i}{2}\bar{\theta}^2(\xi\gamma^\mu\gamma^\nu\theta)\partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2}\bar{\theta}^2(\xi\gamma^\mu\theta)\partial_\mu\sigma + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2(\xi\gamma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) \\ & + \text{terms including } \bar{\xi} \end{aligned} \quad (122)$$

始め 3 つの項は WZ ゲージを破っている。ゲージを回復するためのゲージ変換のパラメータ  $\Lambda$  はカイラル超場 (100) において

$$\phi \rightarrow 0, \quad \sqrt{2}\psi \rightarrow -(\sigma + i\gamma^\mu A_\mu)\bar{\xi}, \quad F \rightarrow (\bar{\xi}\bar{\lambda}) \quad (123)$$

と置き換えたものであり、次のように与えられる。

$$\Lambda = -2i(\theta\bar{\xi})\sigma + 2(\theta\gamma^\mu\bar{\xi})A_\mu + 2i\theta^2(\bar{\xi}\lambda) + i\theta^2(\bar{\theta}\gamma^\mu\bar{\xi})(\partial_\mu\sigma) - \theta^2(\bar{\theta}\gamma^\mu\gamma^\nu\bar{\xi})(\partial_\mu A_\nu) \quad (124)$$

$V$  の超対称変換 (122) にこのパラメータによるゲージ変換 (111) を加えると

$$\begin{aligned} \delta_{\text{wz}}V = & -2(\xi\theta)(\bar{\theta}\lambda) - (\xi\theta)\bar{\theta}^2 D - \frac{i}{2}\bar{\theta}^2(\theta\gamma^{\mu\nu}\xi)F_{\mu\nu} + \bar{\theta}^2(\theta\gamma^\mu\xi)(D_\mu\sigma) \\ & + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2(\xi\gamma^\mu D_\mu\bar{\lambda} - (\xi[\sigma, \bar{\lambda}])) + \text{terms including } \bar{\xi} \end{aligned} \quad (125)$$

ここから成分場に対する次の変換則を読み取ることができる。

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= (\xi\bar{\lambda}) + (\bar{\xi}\lambda), \\ \delta A_\mu &= i(\xi\gamma_\mu\bar{\lambda}) - i(\bar{\xi}\gamma_\mu\lambda), \\ \delta D &= -(\xi\gamma^\mu D_\mu\bar{\lambda}) - (\bar{\xi}\gamma^\mu D_\mu\lambda) + (\xi[\sigma, \bar{\lambda}]) + (\bar{\xi}[\sigma, \lambda]), \\ \delta\lambda &= \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\xi F_{\mu\nu} - \gamma^\mu\xi D_\mu\sigma + D\xi. \end{aligned} \quad (126)$$

次に、カイラル多重項の変換則を導こう。まず、(80) による超対称性変換は

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \sqrt{2}\xi\psi + 2(\theta\xi)F - 2(\theta\gamma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu\phi - \sqrt{2}\theta^2(\bar{\xi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi) \\ & + \text{terms including } \bar{\theta} \end{aligned} \quad (127)$$

となる。また、ゲージ多重項に対する Wess-Zumino ゲージを回復するためのゲージ変換 (124) による変分は

$$\begin{aligned} i\Lambda\Phi = & 2(\theta\bar{\xi})\sigma\phi - \sqrt{2}\theta^2(\bar{\xi}\sigma\psi) + 2i(\theta\gamma^\mu\bar{\xi})v_\mu\phi + \sqrt{2}i\theta^2(\bar{\xi}\gamma^\mu v_\mu\psi) - 2\theta^2(\bar{\xi}\lambda)\phi \\ & + \text{terms including } \bar{\theta} \end{aligned} \quad (128)$$

である。これらを加えると、

$$\begin{aligned} \delta_{\text{wz}}\Phi = & \sqrt{2}\xi\psi + 2(\theta\xi)F + 2(\theta\bar{\xi})\sigma\phi - 2(\theta\gamma^\mu\bar{\xi})D_\mu\phi \\ & - \sqrt{2}\theta^2(\bar{\xi}\gamma^\mu D_\mu\psi) - \sqrt{2}\theta^2(\bar{\xi}\sigma\psi) - 2\theta^2(\bar{\xi}\lambda)\phi + \text{terms including } \bar{\theta} \end{aligned} \quad (129)$$

これより次の変換則を読み取ることができる。

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \sqrt{2}(\xi\psi), \\ \delta\psi &= \sqrt{2}\xi F + \sqrt{2}\bar{\xi}\sigma\phi - \sqrt{2}\gamma^\mu\bar{\xi}D_\mu\phi, \\ \delta F &= -\sqrt{2}(\bar{\xi}\gamma^\mu D_\mu\psi) - \sqrt{2}(\bar{\xi}\sigma\psi) - 2(\bar{\xi}\lambda)\phi. \end{aligned} \quad (130)$$

## 2.7 CS 項

3次元ゲージ理論に固有の重要な性質としてCS項

$$S_{\text{CS}} = \frac{\kappa}{2} \int \text{tr} \left( AdA - \frac{2i}{3} A^3 \right) \quad (131)$$

を導入することができるという事が挙げられる。この項を含む理論はさまざまな面白い性質を持っている。ここではそれらについて詳しく述べることはしない。[24]や[19]などのレビューを参照すること。

CS項は場の強さ  $F = dA - iA^2$  を用いては書かれていないが、部分積分を許せばゲージ不変になっている。たとえば、上記の作用中のゲージ場の変分を行ってみると、次の式が得られる。

$$\delta S_{\text{CS}} = \kappa \int \text{tr} \left( \delta A F + \frac{1}{2} d(\delta A A) \right) \quad (132)$$

この式の第2項は表面項のみに寄与し、境界を持たない多様体上では0である。また、第1項もゲージ変換  $\delta A = D\lambda$  の場合にはビアンキ項等式  $DF = 0$  を用いることにより表面項であることが示される。ただし、ゲージ群  $G$  のホモトピー  $\pi_3(G)$  の非自明な元に対応する「大きな」ゲージ変換のもとでの不変性 ( $2\pi$  の整数倍の変化は許す) を要請すると、係数  $\kappa$  に条件が付く。たとえばゲージ群が  $SU(N)$  であり、トレースを取る際に基本表現を用いていれば

$$2\pi\kappa \in \mathbb{Z} \quad (133)$$

という条件が満足される必要がある。このため非常にしばしば  $2\pi\kappa$  のこと  $k$  と書き、その整数値のことをレベルとよぶ。

CS項 (131) の超対称化についてみておこう。 $\mathcal{N} = 2$  の超場を用いた超対称CS理論は[25]において与えられた。まずは簡単な  $U(1)$  ゲージ場の場合について考えよう。超場  $V$  のゲージ変換は

$$V' = V + \frac{1}{2i} (\Lambda - \bar{\Lambda}). \quad (134)$$

である。次の項はこのゲージ変換のもとで不変である。

$$-\frac{\kappa}{2} \int d^4\theta (D^\alpha V)(\bar{D}_\alpha V) = \kappa \left[ -\sigma D + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + (\lambda \bar{\lambda}) \right] \quad (135)$$

これは4次元  $\mathcal{N} = 1$  理論では許されない項であることに注意しよう。3次元ではカイラリティが無いため、共変微分  $D_\alpha$  と  $\bar{D}_\alpha$  が同じスピノル添え字を持ち、それらを縮約することができる。ゲージ不変性を示すためには、 $D_\alpha$  と  $\bar{D}_\beta$  がそれぞれ反カイラル超場  $\bar{\Lambda}$  とカイラル超場  $\Lambda$  に作用して0になること、添え字が縮約

された二つの微分  $D_\alpha$  と  $\bar{D}_\beta$  が可換であること、これらの共変微分についての部分積分が行えることを用いればよい。

一般のゲージ群に対しては、超対称な CS 項は次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}} &= \frac{\kappa}{2} \int d^4\theta \int_0^1 dt \operatorname{tr}[V \bar{D}^\alpha (e^{-2tV} D_\alpha e^{2tV})] = -\frac{\kappa}{2} \int d^4\theta \operatorname{tr}[(\bar{D}V)(DV) + \dots] \\ &= \kappa \operatorname{tr} \left[ -\sigma D + \epsilon^{\mu\nu\rho} \left( \frac{1}{2} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) + (\lambda \bar{\lambda}) \right] \end{aligned} \quad (136)$$

成分場で書けば U(1) の場合との違いは全体がトレースされていることと CS 項がゲージ場の 3 次の項を含むということだけである。超場形式では、超対称変換のもとでの不変性は明らかであるが、ゲージ変換のもとでの不変性を示すには少し計算をする必要がある。まず作用を次のように書き換えておくのがよい。

$$S_{\text{CS}} = \frac{\kappa}{4} I[g], \quad I[g] = \int d^4\theta \int_0^1 dt \operatorname{tr}[(g^{-1} \partial_t g) \bar{D}(g^{-1} Dg)]. \quad (137)$$

ただし、超空間  $(x, \theta, \bar{\theta})$  に座標  $0 \leq t \leq 1$  を追加し、その拡張された超空間の上で  $g$  を次の境界条件を満足するものとして導入した。

$$g|_{t=0} = 0, \quad g|_{t=1} = e^{2V} \quad (138)$$

$g$  は (138) を満足すればどのようなにとっても良いのであるが、たとえば具体的に  $g = e^{2tV}$  と与えてやると、(136) が得られる。積分  $I[g]$  は位相的であり、 $g$  の任意の変分のもとで  $I[g]$  の変化は境界項としてのみ現れる。このことを見るために変分  $\delta g$  のもとでこれがどのように変化するかを見てみよう。式を簡単にするために微分演算子  $d$  に対して

$$[d] = g^{-1} dg \quad (139)$$

という記号を導入し、公式

$$\delta(g^{-1} dg) = (g^{-1} d\delta g) - (g^{-1} \delta g)(g^{-1} dg) \quad (140)$$

あるいは

$$\delta[d] = [d\delta] - [\delta][d] \quad (141)$$

を用いると、 $I$  の変分は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \operatorname{tr}([\partial_t] \bar{D}[D]) \\ &= \operatorname{tr}([\delta \partial_t] \bar{D}[D]) - \operatorname{tr}([\delta][\partial_t] \bar{D}[D]) + \operatorname{tr}([\partial_t] \bar{D}[\delta D]) - \operatorname{tr}([\partial_t] \bar{D}([\delta][D])) \end{aligned} \quad (142)$$

これは適当に部分積分を行うと 0 になる。表面項として気にしなければならないのは、 $t$  についての部分積分を行った際に現れる表面項である。

$$\delta I = \int d^4\theta \int_0^1 dt \partial_t \text{tr}([\delta]\bar{D}[D]) = \int d^4\theta \text{tr}([\delta]\bar{D}[D])|_{t=1}. \quad (143)$$

ここで、変分  $\delta g$  として、無限小ゲージ変換の式

$$[\delta] = g^{-1}\delta g = e^{-2V} e^{i\bar{\Lambda}} e^{2V} e^{-i\Lambda} - 1 = i e^{-2V} \bar{\Lambda} e^{2V} - i\Lambda \quad (144)$$

を代入すると、上記の表面項も 0 になり、作用はゲージ不変であることがわかる。

## 2.8 自由場の質量とスピン

U(1) ゲージ場について Maxwell 運動項と CS 項を含む次の作用を考えてみる。

$$S = -\frac{1}{4g^2} \int d^3x F_{\mu\nu}^2 + \frac{\kappa}{2} \int AdA \quad (145)$$

運動方程式は

$$\frac{1}{g^2} \partial_\nu F^{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = 0 \quad (146)$$

となる。この運動方程式の解は質量が  $m = g^2\kappa$  (の絶対値) であるような自由粒子を与える。このことを実際に示すには  $F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho} V^\rho$  という変数変換を行うのがよい。その結果運動方程式は

$$\partial_\nu \epsilon^{\mu\nu\rho} V_\rho = -mV^\mu \quad (147)$$

となるが、この両辺に  $m$  をかけ、左辺に現れる  $mV_\rho$  を (147) を用いて微分で書き換えれば、

$$\partial^2 V^\mu = m^2 V^\mu \quad (148)$$

が得られる。つまり、CS 項はゲージ対称性を破ることなく光子に質量  $\mu = |m|$  を与える。

次にスピンについて見てみよう。質量が 0 である場合には小群が SO(1)、すなわち自明な群になってしまい、スピンが定義できないのでここでは質量は 0 ではないと仮定しておく。静止系を仮定し、 $V^\mu$  が空間座標  $x^i$  ( $i = 1, 2$ ) に依存しないとしよう。すると、運動方程式 (147) は次のようになる。

$$(-i\epsilon^{0ij})(i\partial_0)V_j = mV^i \quad (149)$$

この左辺に現れる行列  $-i\epsilon^{0ij}$  はベクトル波動関数に作用するスピン行列に他ならない。また、 $i\partial_0$  はエネルギー演算子である。<sup>2</sup> 静止系でのエネルギーは  $|m|$  であるから、この式はベクトル場に対するスピン固有値が

$$s = \text{sign}(m) \quad (150)$$

と与えられることを表している。

フェルミオンについても見てみよう。質量  $\mu = |m|$  を持つマヨラナフェルミオン  $\psi$  のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\psi(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi. \quad (151)$$

ディラック方程式は

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi = 0 \quad (152)$$

と与えられる。 $\psi$  がマヨラナフェルミオンであることと矛盾しないためには  $m$  は実数である必要があるが、符号は正でも負でもよい。左から  $\gamma^\mu\partial_\mu - m$  を作用させれば  $(\partial^2 - m^2)\psi = 0$  が得られるから、 $\mu = |m|$  が実際に質量を与えていることがわかる。ここで静止系をとり、 $\psi$  が空間座標  $x^i$  に依存しないと仮定すると、

$$-\gamma^0\partial_0\psi = m\psi \quad (153)$$

となり、これはさらに次のように書き換えることができる。

$$2\left(-i\frac{1}{4}\epsilon^{0ij}\gamma_{ij}\right)(i\partial_0)\psi = m\psi. \quad (154)$$

この式の左辺に現れる行列  $-(i/4)\epsilon^{0ij}\gamma_{ij}$  はスピノル波動関数に作用するスピン行列であるから、(154) はスピノル場のスピン固有値と質量パラメータ  $m$  の関係

$$s = \frac{1}{2}\text{sign}(m) \quad (155)$$

を与えている。

このように、3次元においては質量パラメータの符号がその粒子のスピンを決定するという性質を持つ。このことを用いて、 $\mathcal{N} = 2$  の超対称多重項に属する粒子がどのようなスピンを持つかを見ておこう。

カイラル多重項の質量項は超ポテンシャルを用いて次のように与えることができる。

$$S_{\text{mass}} = -\frac{m}{2}\int d^2\theta\Phi^2 + \text{c.c.} = m\left[-\phi F_\phi - \overline{\phi}F_\phi + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\overline{\chi}^2\right] \quad (156)$$

<sup>2</sup>ハイゼンベルグ方程式が  $[\psi(x), H] = i\partial_t\psi(x)$ 、と与えられ、スピノルおよびベクトル場に対してスピン演算子が  $[\psi, S] = -(i/4)\epsilon^{0ij}\gamma_{ij}\psi$   $[V_i, S] = -i\epsilon^{0ij}V_j$  と作用するとした。また、軌道角運動量演算子が  $L = \epsilon^{0ij}x^i p_j$  のように定義される。



$\Phi$  の位相変換を用いることで  $m$  を常に正に取ることができる。複素フェルミオン  $\chi$  のスピンを見るために、次のようにマヨラナスピノルに分解する。

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_R + i\chi_I) \quad (157)$$

これを (156) に代入すると、質量項は次のようになる。

$$S_{\text{mass}} = \cdots + \frac{m}{2} \text{tr}(\chi_R^2 - \chi_I^2) \quad (158)$$

このように、 $\chi_R$  と  $\chi_I$  の質量項の符号は常に逆であり、質量パラメータとスピンの関係よりそれらの粒子のスピンも互いに逆符号になっている。従って有質量カイラル多重項には常にスピンが正のフェルミオン粒子とスピンが負のフェルミオン粒子が一つずつ含まれている。(図 1 (a))

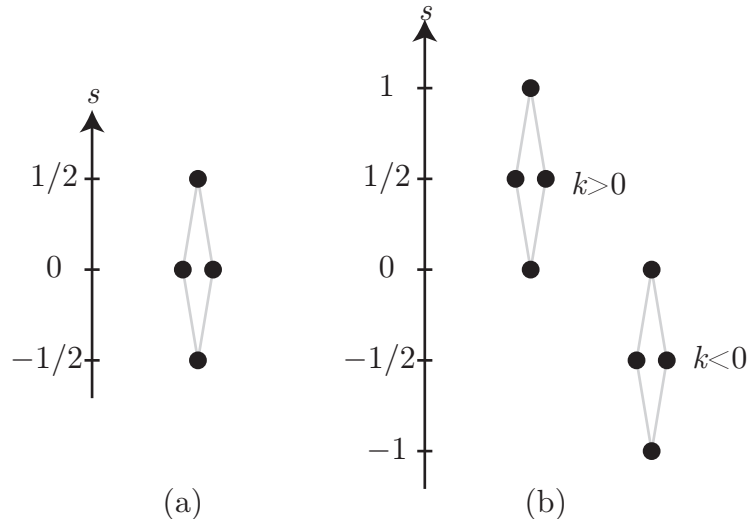


図 1: (a) 有質量カイラル多重項に含まれる粒子のスピン (b) 有質量ベクトル多重項に含まれる粒子のスピン

ベクトル多重項については、質量項は CS 項 (136) として与えられる。光子については Maxwell 運動項の存在を仮定するとスピンは  $s = \text{sign}(\kappa)$  によって与えられる。複素フェルミオン  $\lambda$  については  $\lambda = (1/\sqrt{2})(\lambda_R + i\lambda_I)$  によって二つのマヨラナスピノルに分解し、(136) のフェルミオン質量項に代入してみると、次の質量項が得られる。

$$S_{\text{CS}} = \cdots + \frac{\kappa}{2} \text{tr}(\lambda_R^2 + \lambda_I^2). \quad (159)$$

これを (151) と比較すれば、二つのマヨラナフェルミオンはどちらも質量パラメータ  $m = \kappa$  を持つことがわかる。従って、どちらも同じスピン  $s = (1/2) \text{sign}(\kappa)$  を持つことがわかる。(図 1 (b)) 光子とフェルミオンのスピンの符号は常に同じで

あるが、このことは、 $\mathcal{N} = 2$  の超対称多重項においては一つの多重項に含まれる粒子のスピンのがりが1より大きくはならないということからも期待されることである。

## 2.9 $\mathcal{N} = 4$ ベクトル多重項

ここではまず質量項 (CS 項) を含まない場合に対して  $\mathcal{N} = 4$  ベクトル多重項の構造 (ラグランジアン、超対称変換則、R-対称性) を調べる。CS 項の導入及ぼす影響については、§2.11 において述べる。

3次元における  $\mathcal{N} = 4$  超対称理論は6次元  $\mathcal{N} = (1, 0)$  ベクトル多重項の  $\mathbf{T}^3$  コンパクト化として得ることができる。6次元理論における大域的対称性はローレンツ対称性  $SO(1, 5)$  と R-対称性  $Sp(1)_L$  である。ベクトル多重項は、ゲージ場  $A_M$  ( $M = 0, \dots, 5$ ) とシンプレクティックマヨラナワイルスピノル場  $\lambda^{aA}$ 、そして補助場  $F^A_B$  より成る。スピノル場の添え字  $a = 1, 2, 3, 4$  はワイルスピノルの添え字であり、 $A = 1, 2$  は  $Sp(1)_L$  対称性の添え字である。

$\mathbf{T}^3$  コンパクト化の結果、ローレンツ対称性  $SO(1, 5)$  は3次元のローレンツ対称性と内部対称性の積  $SO(1, 2) \times Sp(1)_R$  となる。このことに対応して場は表1のように分解される。 $Sp(1)_R$  の添え字を  $\dot{A}, \dot{B} = 1, 2$  で表した。

表 1: 6次元ベクトル多重項の3次元へのコンパクト化

$SO(1, 5) \times Sp(1)_L$	$\rightarrow$	$SO(1, 2) \times Sp(1)_L \times Sp(1)_R$
$A_M(\mathbf{6}, \mathbf{1})$	$\rightarrow$	$A_\mu(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + \phi^{\dot{A}}_{\dot{B}}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$
$\lambda^{aA}(\mathbf{4}, \mathbf{2})$	$\rightarrow$	$\lambda^{\alpha A \dot{B}}(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$
$F^A_B(\mathbf{1}, \mathbf{3})$	$\rightarrow$	$F^A_B(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$

$\mathcal{N} = 2$  超場を用いて作用を書くには、6次元の理論を一旦4次元に落とし、そしてさらに  $S^1$  コンパクト化を行うのがよい。4次元に落とした段階で4次元の  $\mathcal{N} = 2$  超対称ゲージ理論が得られるから3次元の  $\mathcal{N} = 4$  ゲージ理論の作用は4次元  $\mathcal{N} = 2$  ゲージ理論のそれとほとんど同じである。

$\mathcal{N} = 4$  ベクトル多重項は  $\mathcal{N} = 2$  のベクトル多重項  $V$  と随伴表現に属するカイラル多重項  $\Phi$  を組み合わせることで構成することができる。

$$(\mathcal{N} = 4 \text{ ベクトル多重項}) = V(A_\mu, \sigma, \lambda, D) + \Phi(\phi, \chi, F). \quad (160)$$

作用は次のように二つの部分の和として与えられる。

$$S_{\text{vector}}^{\mathcal{N}=4} = S_V + S_\Phi \quad (161)$$

$S_V$  はベクトル多重項  $V$  に対する作用であり、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S_V &= \frac{1}{2} \int d^2\theta \operatorname{tr} W^2 \\ &= \operatorname{tr} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (\lambda\gamma^\mu D_\mu \bar{\lambda}) - \frac{1}{2} D_\mu \sigma D^\mu \sigma + \frac{1}{2} D^2 - (\lambda[\sigma, \bar{\lambda}]) \right] \end{aligned} \quad (162)$$

$S_\Phi$  はカイラル多重項  $\Phi$  に対する作用で、 $\Phi$  がゲージ場の随伴表現に属することを考慮して次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} S_\Phi &= \int d^4\theta \operatorname{tr} \bar{\Phi} e^{2V_{\text{adj}}} \Phi = \int d^4\theta \operatorname{tr} \bar{\Phi} e^{2V} \Phi e^{-2V} \\ &= \operatorname{tr} \left[ -D_\mu \bar{\phi} D^\mu \phi + (\bar{\chi}\gamma^\mu D_\mu \chi) + \bar{F}F \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2}\lambda[\chi, \bar{\phi}] + \sqrt{2}\bar{\chi}[\bar{\lambda}, \phi] - \bar{\phi}[D, \phi] - \bar{\phi}[\sigma, [\sigma, \phi]] + (\bar{\chi}[\sigma, \chi]) \right] \end{aligned} \quad (163)$$

これら二つの作用を単に足しておけば、 $\mathcal{N} = 4$  超対称性を持つ理論が得られる。

超場形式で書かれた作用には明白な大域的対称性  $U(1)_R$  と  $U(1)_F$  がある。 $U(1)_R$  は  $\theta$  をチャージ 1 で回転させる対称性であり、 $U(1)_F$  はカイラル超場  $\Phi$  をチャージ 1 で回転させる対称性である。

$$U(1)_F : \Phi(\theta) \rightarrow \Phi'(\theta) = e^{i\alpha} \Phi(\theta), \quad U(1)_R : \Phi(\theta) \rightarrow \Phi'(e^{i\beta}\theta) = e^{i\beta} \Phi(\theta). \quad (164)$$

$U(1)_R$  には  $U(1)_F$  を混ぜる不定性があるが、ここではカイラル超場  $\Phi$  が  $U(1)_R$  のもとでもチャージ 1 であるように定義する。このときそれぞれの成分場をそのチャージに従って平面上にプロットすると、図2のようになる。実は、この  $U(1)^2$

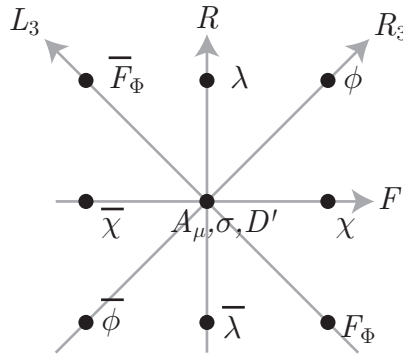


図 2:  $\mathcal{N} = 4$  ベクトル多重項の  $U(1)_F \times U(1)_R$  電荷

対称性はより大きな R-対称性  $SO(4) \sim SU(2)^2$  対称性の一部である。二つの  $SU(2)$  を  $SU(2)_L$  および  $SU(2)_R$  とし、生成子を  $L_i, R_i$  とすると、 $U(1)_R$  と  $U(1)_F$  は次のように埋め込まれている。

$$R = R_3 + L_3, \quad F = R_3 - L_3. \quad (165)$$

$\mathcal{N} = 4$  の超対称性の存在を示すには、超対称変換パラメータを非自明に変換するような  $SO(4)$  の R-対称性が存在することを証明すればよい。 $SO(4)$  対称性を明らかにするために、場を  $SO(4)$  多重項に組む必要がある。まずフェルミオンであるが、 $V$  に含まれる複素フェルミオン  $\lambda$  と  $\Phi$  に含まれる複素フェルミオン  $\chi$  を次のように  $SO(4) = SU(2)_L \times SU(2)_R$  の  $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$  表現に組む。

$$\lambda^{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & \bar{\chi} \\ \chi & -\bar{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda}_{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & \chi \\ \bar{\chi} & -\lambda \end{pmatrix} \quad (166)$$

点なしの添え字は  $SU(2)_L$  で、点つきの添え字は  $SU(2)_R$  で変換されるとする。 $\lambda^{A\dot{B}}$  は次の実条件を満足する。

$$\bar{\lambda}_{A\dot{A}} = -\epsilon_{AB}\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\lambda^{B\dot{B}} \equiv -\lambda_{A\dot{A}} \quad (167)$$

$V$  中の実スカラー場  $\sigma$  と  $\Phi$  の複素スカラー場  $\phi$  は  $SU(2)_R$  三重項、 $V$  中の補助場  $D$  と  $\Phi$  中の補助場  $F$  は  $SU(2)_L$  の三重項をなす。

$$\phi^{\dot{A}}_{\dot{B}} = \begin{pmatrix} \sigma & \sqrt{2}\phi \\ \sqrt{2}\phi & -\sigma \end{pmatrix}, \quad F^A_B = \begin{pmatrix} D' & \sqrt{2}F_\phi \\ \sqrt{2}F_\phi & -D' \end{pmatrix} \quad (168)$$

ただし  $D'$  は  $D$  を次のようにシフトしたものである。

$$D' = D - [\phi, \bar{\phi}]. \quad (169)$$

これら  $SO(4)$  多重項を用いることで作用を  $SO(4)$  不変性が明らかな形に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} S_{\text{vector}}^{\mathcal{N}=4} = \text{tr} & \left[ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\lambda^{A\dot{B}}\gamma^\mu D_\mu \bar{\lambda}_{A\dot{B}}) - \frac{1}{4}D_\mu \phi^{\dot{A}}_{\dot{B}} D^\mu \phi^{\dot{B}}_{\dot{A}} \right] \\ & - \frac{1}{2}(\bar{\lambda}_{A\dot{A}}^a \lambda^{A\dot{B}b}) \phi^{c\dot{A}}_{\dot{B}} \text{tr}(T_a[T_b, T_c]) \\ & + \text{tr} \left[ \frac{1}{4}F^A_B F^B_A + \frac{1}{16}[\phi^{\dot{A}}_{\dot{B}}, \phi^{\dot{C}}_{\dot{D}}][\phi^{\dot{B}}_{\dot{A}}, \phi^{\dot{D}}_{\dot{C}}] \right] \end{aligned} \quad (170)$$

次に、超対称変換則を見てみよう。 $V$  の成分場の  $\mathcal{N} = 2$  超対称変換則は (126) より

$$\delta\sigma = (\xi\bar{\lambda}) + (\bar{\xi}\lambda), \quad (171)$$

$$\delta A_\mu = i(\xi\gamma_\mu\bar{\lambda}) - i(\bar{\xi}\gamma_\mu\lambda), \quad (172)$$

$$\delta D = -(\xi\gamma^\mu D_\mu\bar{\lambda}) - (\bar{\xi}\gamma^\mu D_\mu\lambda) + (\xi[\sigma, \bar{\lambda}]) + (\bar{\xi}[\sigma, \lambda]), \quad (173)$$

$$\delta\lambda = \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\xi F_{\mu\nu} - \gamma^\mu\xi D_\mu\sigma + D\xi, \quad (174)$$

と与えられる。Φ の成分場については (130) より次のように与えられる。

$$\delta\phi = \sqrt{2}(\xi\chi), \quad (175)$$

$$\delta\chi = \sqrt{2}\xi F_\phi + \sqrt{2}\bar{\xi}[\sigma, \phi] - \sqrt{2}\gamma^\mu\bar{\xi}D_\mu\phi, \quad (176)$$

$$\delta F_\phi = -\sqrt{2}(\bar{\xi}\gamma^\mu D_\mu\chi) - \sqrt{2}(\bar{\xi}[\sigma, \chi]) - 2[(\bar{\xi}\lambda), \phi] \quad (177)$$

場、および変換パラメータを SO(4) 多重項を用いて書き直すことで、次の変換則を得ることができる。

$$\begin{aligned} \delta\phi^{\dot{A}}_{\dot{B}} &= 2(\xi_{C\dot{B}}\lambda^{C\dot{A}}) - \delta^{\dot{A}}_{\dot{B}}(\xi_{B\dot{C}}\lambda^{B\dot{C}}), \\ \delta A_\mu &= -i(\xi_{A\dot{B}}\gamma_\mu\lambda^{A\dot{B}}), \\ \delta\lambda^{A\dot{B}} &= \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu}\xi^{A\dot{B}}F_{\mu\nu} - \gamma^\mu\xi^{A\dot{C}}D_\mu\phi^{\dot{B}}_{\dot{C}} + F^A_C\xi^{C\dot{B}} + \frac{1}{2}[\phi^{\dot{B}}_{\dot{C}}, \phi^{\dot{C}}_{\dot{D}}]\xi^{A\dot{D}}, \\ \delta F^A_B &= -2(\xi_{B\dot{C}}\gamma^\mu D_\mu\lambda^{A\dot{C}}) - 2(\xi_{B\dot{C}}[\phi^{\dot{C}}_{\dot{D}}, \lambda^{A\dot{D}}]) - AB \text{ trace} \end{aligned} \quad (178)$$

ただし、 $\mathcal{N} = 2$  超対称変換パラメータ  $\xi$  は (2, 2) 表現として変換される  $\mathcal{N} = 4$  超対称変換のパラメータ  $\xi_{A\dot{B}}$  に次のように埋め込まれている。

$$\xi^{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} \xi & \\ & \bar{\xi} \end{pmatrix}, \quad \xi_{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\xi} & \\ & \xi \end{pmatrix} \quad (179)$$

作用の SO(4) 不変性と上記の超対称変換則の SO(4) 共変性より、(179) のように表せない一般の変換パラメータ  $\xi_{A\dot{B}}$  による変換のもとでも作用が不変であることが保障される。従って、理論は  $\mathcal{N} = 4$  超対称性を持つ。

## 2.10 $\mathcal{N} = 4$ ハイパー多重項

3次元  $\mathcal{N} = 4$  理論のハイパー多重項も、6次元  $\mathcal{N} = (1, 0)$  理論のハイパー多重項の  $\mathbf{T}^3$  コンパクト化として与えることができる。6次元ハイパー多重項が  $k$  個あるとしよう。この場合、フレーバー対称性は  $\text{Sp}(k)$  である。このフレーバー添え字を  $I = 1, \dots, 2k$  とする。スカラー場  $q^{AI}$  はフレーバー添え字のほかに  $\text{Sp}(1)_L$  対称性の添え字を持っている。フェルミオン  $\psi^{aI}$  はスピノル添え字とフレーバー添え字を持つ。(ハイパー多重項のフェルミオンとベクトル多重項のフェルミオンはカイラリティが逆であるがここでは同じ添え字を用いた。) これらを3次元にコンパクト化すると、ローレンツ対称性の破れ  $\text{SO}(1, 5) \rightarrow \text{SO}(1, 2) \times \text{Sp}(1)_R$  に対応して表2のように書き換えることができる。

ハイパー多重項は二つのカイラル多重項  $Q$  と  $\tilde{Q}$  の組み合わせとして表すことができる。

$$(\mathcal{N} = 4 \text{ ハイパー多重項}) = Q(q, \psi) + \tilde{Q}(\tilde{q}, \tilde{\psi}). \quad (180)$$

表 2: 6次元ハイパー多重項の3次元へのコンパクト化

$\text{SO}(1, 5) \times \text{Sp}(1)_L \times \text{Sp}(k)$	$\rightarrow$	$\text{SO}(1, 2) \times \text{Sp}(1)_L \times \text{Sp}(1)_R \times \text{Sp}(k)$
$q^{AI}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2k})$	$\rightarrow$	$q^{AI}(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2k})$
$\psi^{aI}(\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2k})$	$\rightarrow$	$\psi_A^{aI}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2k})$

この超場を用いた表現ではフレーバー対称性のうち  $U(k) \subset \text{Sp}(k)$  だけが明白に保たれる。

ハイパー多重項をゲージ場に結合させる場合にはフレーバー対称性  $\text{Sp}(k)$  の部分群  $G$  をゲージ化する。  $G \subset U(k) \subset \text{Sp}(k)$  である場合に限ろう。ハイパー多重項の  $\mathcal{N} = 4$  不変な作用は次のように二つの部分の和として与えることができる。

$$S_{\text{hyper}}^{\mathcal{N}=4} = S_Q + S_W. \quad (181)$$

$S_Q$  はカイラル多重項の運動項であり、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S_Q &= \int d^4\theta (\bar{Q}e^{2V}Q + \tilde{Q}e^{-2V}\tilde{Q}) \\ &= -D_\mu \bar{q} D^\mu q + (\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi) + \bar{F}_q F_q \\ &\quad - D_\mu \tilde{q} D^\mu \tilde{q} + (\tilde{\psi} \gamma^\mu D_\mu \tilde{\psi}) + F_{\tilde{q}} \bar{F}_{\tilde{q}} \\ &\quad + \sqrt{2} \bar{q} (\lambda \psi) + \sqrt{2} (\bar{\psi} \lambda) q - \bar{q} D q - \bar{q} \sigma \sigma q + (\bar{\psi} \sigma \psi) \\ &\quad - \sqrt{2} (\tilde{\psi} \lambda) \tilde{q} - \sqrt{2} \tilde{q} (\bar{\lambda} \tilde{\psi}) + \tilde{q} D \tilde{q} - \tilde{q} \sigma \sigma \tilde{q} - (\tilde{\psi} \sigma \tilde{\psi}) \end{aligned} \quad (182)$$

$S_W$  は次の超ポテンシャル項である。

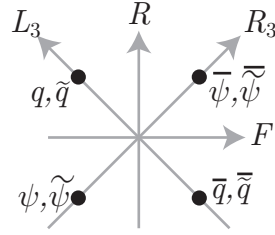
$$\begin{aligned} S_W &= -\sqrt{2} \int d^2\theta \tilde{Q} \Phi Q + \text{c.c.} \\ &= -\sqrt{2} \tilde{q} \phi F_q - \sqrt{2} \tilde{q} F_\phi q - \sqrt{2} F_{\tilde{q}} \phi q + \sqrt{2} \tilde{q} (\chi \psi) + \sqrt{2} (\tilde{\psi} \phi \psi) + \sqrt{2} (\tilde{\psi} \chi) q \\ &\quad + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (183)$$

超場形式で書かれた作用はやはり明白な  $U(1)_R$  および  $U(1)_F$  対称性を持っている。

$$U(1)_F : Q(\theta) \rightarrow Q'(\theta) = e^{-i\alpha/2} Q(\theta), \quad \tilde{Q}(\theta) \rightarrow \tilde{Q}'(\theta) = e^{-i\alpha/2} \tilde{Q}(\theta), \quad (184)$$

$$U(1)_R : Q(\theta) \rightarrow Q'(e^{i\beta}\theta) = e^{i\beta/2} Q(\theta), \quad \tilde{Q}(\theta) \rightarrow \tilde{Q}'(e^{i\beta}\theta) = e^{i\beta/2} \tilde{Q}(\theta), \quad (185)$$

成分場のチャージは図3に与えられている。図中で全ての点に場が二つずつあるのは、フレーバー対称性  $\text{Sp}(k)$  ( $k$  はハイパー多重項の個数) を反映している。

図 3:  $\mathcal{N} = 4$  ハイパー多重項の成分場の  $U(1)_F \times U(1)_R$  電荷

上記の作用の和が  $\mathcal{N} = 4$  超対称性のもとで不変であることを示すには、 $SO(4)_R$  不変性を示せば十分である。スカラー場とフェルミオンを次のように doublet に組む。

$$q^A = (q^1, q^2) = (q, \tilde{q}), \quad \psi_{\dot{A}} = (\psi_1, \psi_2) = (\psi, \tilde{\psi}) \quad (186)$$

ハイパー多重項は殻外では無限個の補助場を用いない限り R-対称性を尊重して書くことができないので、補助場は運動方程式

$$F_q = \sqrt{2}\phi\tilde{q}, \quad F_{\tilde{q}} = \sqrt{2}\bar{q}\phi. \quad (187)$$

を代入して作用から消去しておく。この結果、作用は  $SO(4)$  不変性が明らかなる形に書くことができる。

$$\begin{aligned} S_{\text{hyper}}^{\mathcal{N}=4} = & -D_\mu \bar{q}_A D^\mu q^A + (\bar{\psi}^{\dot{A}} \gamma^\mu D_\mu \psi_{\dot{A}}) \\ & - \frac{1}{2} \bar{q}_A \phi^{\dot{A}} \phi_{\dot{B}}^{\dot{A}} q^A - \bar{q}_A F^A{}_{BQ} q^B \\ & + \sqrt{2} \bar{q}_A (\lambda^{A\dot{B}} \psi_{\dot{B}}) + \sqrt{2} (\bar{\psi}^{\dot{B}} \lambda_{A\dot{B}}) q^A + (\bar{\psi}^{\dot{A}} \phi_{\dot{A}}^{\dot{B}} \psi_{\dot{B}}) \end{aligned} \quad (188)$$

変換則についても見ておこう。(130) より、成分場の変換則は次のように与えられる。

$$\delta q = \sqrt{2}(\xi\psi), \quad (189)$$

$$\delta \tilde{q} = \sqrt{2}(\xi\tilde{\psi}), \quad (190)$$

$$\delta \psi = \sqrt{2}\xi F_q + \sqrt{2}\xi\sigma q - \sqrt{2}\gamma^\mu \bar{\xi} D_\mu q, \quad (191)$$

$$\delta \tilde{\psi} = \sqrt{2}\xi \tilde{F}_q - \sqrt{2}\xi\tilde{q}\sigma - \sqrt{2}\gamma^\mu \bar{\xi} D_\mu \tilde{q}. \quad (192)$$

フェルミオンの変換則から (187) によって補助場を消去し、 $SO(4)$  多重項を用いて書き換えると、 $SO(4)$  共変性が明らかになる。

$$\begin{aligned} \delta q^A &= \sqrt{2}(\xi^{A\dot{B}} \psi_{\dot{B}}), \\ \delta \psi_{\dot{A}} &= \sqrt{2}\xi_{C\dot{B}} \phi^{\dot{B}}{}_{\dot{A}Q} q^C - \sqrt{2}\gamma^\mu \xi_{B\dot{A}} D_\mu q^B. \end{aligned} \quad (193)$$

$SO(4)$  対称性のもとでの作用の不変性と超対称変換の共変性により、一般の  $\mathcal{N} = 4$  超対称変換パラメータ  $\xi_{A\dot{B}}$  のもとでの作用の不変性が保障される。

## 2.11 CS 項の導入と $\mathcal{N} = 3$ 超対称性

§2.9 で得られた  $\mathcal{N} = 4$  ベクトル多重項  $(V, \Phi)$  に対して CS 項を導入することを考えてみよう。(136) にある  $V$  に対する CS 項  $S_{\text{CS}}$  の導入はベクトル場  $A_\mu$  とフェルミオン  $\lambda$ 、そしてスカラー場  $\sigma$  に対して質量  $\mu = |\kappa|$  を与える。従って、超対称性を残そうとすれば、 $\Phi$  に対しても同様に (156) の質量項  $S_{\text{mass}}$  を導入する必要がある。これにより全ての成分場が縮退した質量  $\mu = |\kappa|$  を持つようになる。

しかしながら、全ての粒子の質量  $\mu = |m|$  が一致したとしても、ラグランジアン中の質量パラメータ  $m$  が一致するとは限らないことに注意しよう。質量パラメータは正と負の値をとることができ、しかもこの符号は粒子のスピンを決めるという物理的な意味を持つ。

このことに注意すると、ベクトル多重項とカイラル多重項の質量を等しく取ったとしても、 $\text{SO}(4)$  対称性は実現されないことがわかる。 $\mathcal{N} = 4$  ベクトル多重項に含まれる粒子のスピンは図 1 を組み合わせると図 4 のように与えられる。(ただしこの図では  $\kappa > 0$  であることを仮定している。) この図から明らかなように、

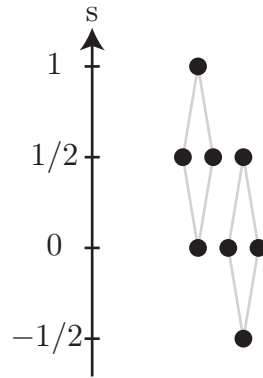


図 4: ベクトル多重項 ( $\kappa > 0$ ) の成分場のスピン

$\text{SO}(4)_R$  対称性のベクトル表現に属するべき 4 つのフェルミオンのスピンのそろっておらず、3 つと 1 つに分裂している。このことは、 $\text{SO}(4)_R$  対称性は少なくとも  $\text{SO}(3)$  にまで破れていることを意味している。

この対称性の破れは、直接ラグランジアンを見ることによっても確認することができる。(136) にある CS 項

$$S_{\text{CS}} = \kappa \text{tr} \left[ -\sigma D + \epsilon^{\mu\nu\rho} \left( \frac{1}{2} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) + (\lambda \bar{\lambda}) \right] \quad (194)$$

(156) にトレースをつけて一般の群に拡張した上で質量パラメータを  $m = \kappa$  とおいた質量項

$$S_{\text{mass}} = -\frac{\kappa}{2} \int d^2\theta \text{tr} \Phi^2 + \text{c.c.} = \kappa \text{tr} \left[ -\phi F_\phi - \overline{\phi} \overline{F}_\phi + \frac{1}{2} \chi^2 + \frac{1}{2} \overline{\chi}^2 \right] \quad (195)$$



について見てみよう。 $S_{\text{mass}}$  は  $U(1)_R$  対称性は尊重しているものの  $U(1)_F$  の対称性を破っている。残っている  $U(1)_R$  対称性の生成子は (165) にあるように  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  対称性の対角部分群の生成子  $R = R_3 + L_3$  である。このことは  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  がその対角部分群に破れることを示唆している。実際、上記二つの作用の和は

$$S_{\text{CS}} + S_{\text{mass}} = \kappa \text{tr} \left[ \epsilon^{\mu\nu\rho} \left( \frac{1}{2} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \frac{i}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right) - \frac{1}{2} \phi^{\dot{A}}_{\dot{B}} F^B_A - \frac{1}{6} \phi^{\dot{A}}_{\dot{B}} \phi^{\dot{B}}_{\dot{C}} \phi^{\dot{C}}_{\dot{A}} + \frac{1}{2} \lambda^{A\dot{B}} \bar{\lambda}_{B\dot{A}} \right] \quad (196)$$

となる。この作用の中で、 $\phi F$  項と  $\lambda^2$  項において点なしと点つきの添え字が混ざって縮約されていることがわかる。これにより  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  対称性はその対角部分群に破れている。

この  $R$ -対称性の破れによって変換パラメータ  $\xi_{A\dot{B}}$  もその二つの添え字についての対称部分 3 つと反対称部分 1 つに分解される。(179) によって与えられる  $\mathcal{N} = 2$  超対称性の存在は (作用が  $\mathcal{N} = 2$  超場を用いて書かれているので) 保障されている。これは変換パラメータ  $\xi_{A\dot{B}}$  の対称部分に含まれているので、 $SO(3)_R$  対称性は  $\mathcal{N} = 3$  超対称性の存在は保証する。しかしながら  $\xi_{A\dot{B}}$  の反対称部分に対応する残り一つの超対称性の存在は保証されなくなり、実際に調べてみるとこの超対称性は失われていることがわかる。すなわち、CS 項の導入は超対称性を  $\mathcal{N} = 4$  から  $\mathcal{N} = 3$  に破る。

ただし以上の議論ではベクトル多重項の運動項  $-(1/4g^2)F_{\mu\nu}^2 + \dots$  の存在を仮定していることを強調しておこう。このような運動項が存在しない場合にはここでの議論は意味をなさなくなり、§4 で述べるように実際に  $\mathcal{N} \geq 4$  の CS 理論を構成することができる。

## 3 $\mathcal{N} = 2$ クイバー CS 理論

### 3.1 クイバー CS 理論

超対称性が  $\mathcal{N} = 2$  である場合には、ゲージ群および物質場が属する表現を全く任意に取ることができる。これではあまりにも範囲が広すぎるので、ここでは弦理論でしばしば現れるクイバー型の CS 理論に限って議論をすることにする [26]。即ち、ゲージ群としては  $U(N)$  の積であるものとし、物質場はそれらの双基本表現に属するような場合を考える。この場合、ゲージ群と物質場の表現はクイバー図形で表すことができる。(図 5) クイバー図形上で、ゲージ群のそれぞれの  $U(N)$  因子は頂点として表され、物質場はそれが結合するゲージ群の間をつなぐ矢印として表される。矢印の先端は基本表現、末端は反基本表現に属することを意味し、ゲージ群が  $U(1)$  である場合には電荷  $+1$  と  $-1$  に対応する。

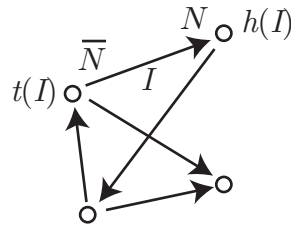


図 5: クイバー図形の例。頂点はゲージ群を、矢印はそれらに結合する bi-fundamental field を表す。矢印の先端が基本表現、末端が反基本表現をあらわすものとする。

クイバー図形中の矢印を  $I$  でラベルすることにし、対応するカイラル多重項を  $\Phi_I$  とする。また、頂点は  $a$  でラベルすることにし、対応するゲージ群のサイズを  $N_a$  とする。頂点  $a$  が表すゲージ群は  $U(N_a)$  であるが、全てのゲージ群のサイズ  $N_a$  が共通の値  $N$  をとる場合などには特に頂点  $a$  に対応するゲージ群を  $U(N)_a$  のようにも表す。電荷行列  $Q_{Ia}$  はクイバー図形が表す情報を数値化したもので、矢印  $I$  が表す場が  $U(N_a)$  の基本表現に属していれば  $Q_{Ia} = +1$ 、反基本表現に属していれば  $Q_{Ia} = -1$ 、自明表現に属していれば（つまり  $U(N_a)$  と結合していなければ） $Q_{Ia} = 0$  とする。ゲージ群のサイズが  $N_a = 1$  である場合には、 $Q_{Ia}$  は  $\Phi_I$  の  $U(1)_a$  電荷である。

ある矢印  $I$  に対して、その先端にある頂点を  $h(I)$ 、末尾にある頂点を  $t(I)$  と表す。

CS 理論を特定するには、クイバー図形に加えてそれぞれのゲージ群のサイズ  $N_a$  と CS 項のレベル  $k_a$ 、そして超ポテンシャルを指定する必要がある。レベルはクイバー図形の頂点ごとに整数  $k_a$  を割り当てることで指定することができる。（より一般には  $SU(N)$  部分と  $U(1)$  部分に異なるレベルを割り当てるということもできるが、ここでは考えない。）超ポテンシャルについては一般的にはクイバー図形上で簡単に表示する方法はない。（のちに述べるブレーンタイリングで記述できる場合は特別であり、ある特定の書き方をしたクイバー図形から超ポテンシャルを一意的に決定することができる。ここではそのような制限は置かず、一般の超ポテンシャルを考えることにする。）

一般のクイバー CS 理論のラグランジアンを与えておく。まず、カイラル多重項

の運動項と超ポテンシャル項は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{chiral}} &= \sum_I \text{tr} \int d^4\theta \bar{\Phi}_I e^{2V_{h(I)}} \Phi_I e^{-2V_{t(I)}} + \left( - \int d^2\theta W(\Phi) + \text{c.c.} \right) \\
&= \sum_I \text{tr} \left[ - D_\mu \bar{\phi}_I D^\mu \phi_I + \bar{\psi}_I \gamma^\mu D_\mu \psi_I + F_I \bar{F}_I \right. \\
&\quad \left. - (\bar{\phi}_I \sigma_{h(I)} - \sigma_{t(I)} \bar{\phi}_I) (\sigma_{h(I)} \phi_I - \phi_I \sigma_{t(I)}) + \sigma_{h(I)} \psi_I \bar{\psi}_I - \sigma_{t(I)} \bar{\psi}_I \psi_I \right] \\
&\quad + \sum_a \text{tr} (\lambda_a \bar{j}_a + \bar{\lambda}_a j_a - D_a \mu_a) \\
&\quad + \left( - \int d^2\theta W(\Phi) + \text{c.c.} \right) \tag{197}
\end{aligned}$$

ただし、 $\mu_a$  と  $j_a$  はカレント多重項の成分であり、次のように定義される。

$$\mu_a = \sum_{Q_{aI}=1} \phi_I \bar{\phi}_I - \sum_{Q_{aI}=-1} \bar{\phi}_I \phi_I \stackrel{N=1}{=} \sum_I Q_{aI} |\phi_I|^2, \tag{198}$$

$$j_a = \sum_{Q_{aI}=1} \sqrt{2} \phi_I \bar{\psi}_I - \sum_{Q_{aI}=-1} \sqrt{2} \bar{\psi}_I \phi_I \stackrel{N=1}{=} \sum_I \sqrt{2} Q_{aI} \phi_I \bar{\psi}_I \tag{199}$$

ベクトル多重項については次の CS 項を導入する。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{CS}} &= \sum_a \frac{k_a}{4\pi} \int d^4\theta \int dt \text{tr} [V_a \bar{D}^\alpha (e^{-2tV_a} D_\alpha e^{2tV_a})] \\
&= \sum_a \frac{k_a}{2\pi} \text{tr} \left[ -\sigma_a D_a + \epsilon^{\mu\nu\rho} \left( \frac{1}{2} A_{a,\mu} \partial_\nu A_{a,\rho} - \frac{i}{3} A_{a,\mu} A_{a,\nu} A_{a,\rho} \right) + (\lambda_a \bar{\lambda}_a) \right] \tag{200}
\end{aligned}$$

### 3.2 バリオン対称性

クイバー図形の頂点の個数を  $n$  としよう。この場合、物質場に作用するゲージ群は離散的な同一視を無視すれば

$$G = \left( \prod_{a=1}^n \text{U}(N_a) \right) / \text{U}(1)_D = G_{\text{SU}} \times G_B \tag{201}$$

である。 $\text{U}(1)_D$  は物質場に作用しない対角的  $\text{U}(1)$  対称性である。 $G_{\text{SU}}$  と  $G_B$  は  $\text{U}(1)$  から成る部分

$$G_B = \text{U}(1)^n / \text{U}(1)_D = \text{U}(1)^{n-1} \tag{202}$$

および  $\text{SU}(N)$  部分

$$G_{\text{SU}} = \prod_{a=1}^n \text{SU}(N_a) \tag{203}$$

である。

クイバー型ゲージ理論では、全ての物質場は双基本表現に属する。それらを用いて構成される  $G_{\text{SU}}$  ゲージ対称性 ( $G$  ではない) のもとでゲージ不変な演算子はだまかに二つのグループに分けることができる。

一つはトレースを用いて作ることができるものであり、しばしばメソン演算子と呼ばれる。このような演算子については、 $G_{\text{SU}}$  のもとのゲージ不変性を課しておけば、自動的に  $G_B$  についてもゲージ不変になる。

$SU(N)$  の完全反対称不変テンソルを用いて構成した

$$\det \Phi_I \quad (204)$$

のような  $G_{\text{SU}}$  ゲージ不変な演算子はこのクラスには属さない。これらはバリオン演算子と呼ばれる。バリオン演算子は  $G_{\text{SU}}$  ゲージ不変ではあるが、 $G_B$  に対してはチャージを持ち、 $G_B$  ゲージ不変ではない。 $G_B$  はバリオン演算子に作用する対称性という意味でしばしばバリオン対称性と呼ばれる。

4次元ゲージ理論の場合、 $G_B$  のうちいくつかの  $U(1)$  はアノマリーを持っている。従って場の理論においてはその部分をゲージ化することは許されない。弦理論においてそのようなアノマリーを持つ理論を構成すると、対応するゲージ場はそのほかの場との結合をもち、Green-Schwarz 機構によってアノマリーが相殺している。この、ゲージ場と別の場との結合はアノマリーを持つ  $U(1)$  ゲージ場に質量を与え、低エネルギーではそのゲージ場は理論から分離する。従って、低エネルギー極限を考えている場合にはアノマリーを持つ  $U(1)$  対称性は大域的対称性と考えてよい。[27]

$G_B$  のうちアノマリーを持たない部分はもしその対称性が破れていればヒッグス機構によって有質量になり、低エネルギーでは理論から分離する。もしその対称性が破れていなければ、結合定数の漸近的非自由性によって赤外極限ではゲージ場と物質場との結合が切れ、大域的対称性になる。

こうしてゲージ群  $G$  のうち  $G_B$  部分は赤外極限では大域的対称性とみなすことができ、 $G_{\text{SU}}$  部分のみが実質的なゲージ対称性として残る。(その結果、バリオン演算子がゲージ不変演算子として定義できるようになる。)

3次元の場合には状況が異なることに注意しよう。ゲージ結合定数  $g_{\text{YM}}$  は質量次元  $1/2$  を持つため、赤外極限においては強結合であり理論から分離することはない。また、CS 結合定数  $k$  についても量子化されているために赤外極限で変化するというわけではない。従って、ゲージ群が  $U(1)$  対称性を含んでいればそれはヒッグス機構で破れない限りゲージ対称性として残り続ける。従って、ゲージ群として (201) を採用した場合には  $G_{\text{SU}}$  部分だけではなく  $G_B$  もゲージ対称性であることに注意する必要がある。(このため、バリオン演算子はゲージ不変演算子ではない。) ただし、§3.4 で述べる dual photon の効果によって  $G_B$  は部分的に自発的に破れる。

### 3.3 モジュライ空間

ここでは全てのゲージ群のサイズが共通で  $N_a = N$  であるクイバー CS 理論のモジュライ空間を調べる。一般に、モジュライ空間はいくつかのブランチからなるが、ここで調べたいのは  $N$  枚の M2-ブレーンの運動と解釈できるヒッグスブランチである。ヒッグスブランチは一般にある空間  $\mathcal{M}$  の対称積として与えられる。

$$\text{Higgs branch} = \text{Sym}^N \mathcal{M} \quad (205)$$

以下では単にモジュライ空間といった場合には  $\mathcal{M}$  のことを指すことにする。これはゲージ群のサイズが  $N = 1$  である場合のヒッグスブランチモジュライ空間であり、このときゲージ群は  $G_B$  である。

$N = 2$  ゲージ理論において、モジュライ空間は一般に

$$\mathcal{M} = \frac{\text{F-term 条件、D-term 条件の解}}{\text{ゲージ対称性}} \quad (206)$$

によって定義することができる。F-term 条件について議論するためには超ポテンシャルを与える必要がある。ここでは超ポテンシャルは与えることはせず、ここで考えているクイバー CS 理論と同じクイバー図形、同じ超ポテンシャルで与えられる 4 次元の  $N = 1$  ゲージ理論のモジュライ空間を既知っているものとしよう。そのような 4 次元のゲージ理論を母理論と呼ぶことにし、対応する CS 理論を娘理論と呼ぶことにする。そしてそれぞれのモジュライ空間を  $\mathcal{M}_{\text{mother}}$  および  $\mathcal{M}_{\text{daughter}}$  と呼ぶことにし、それらの間の関係を調べることにしよう。

ゲージ群のサイズが  $N = 1$  の場合、母理論と娘理論の作用は以下のようになる。

$$\begin{aligned} S_{\text{mother}} &= \sum_I \int d^4\theta (\bar{\Phi}_I e^{2V_{h(I)}} \Phi_I e^{-2V_{t(I)}}) + \left( - \int d^2\theta W + \text{c.c.} \right) \\ &\quad + \sum_a \frac{1}{2g_a^2} \int d^2\theta W_a^2 \\ &= \sum_I (F_I \bar{F}_I - W_I F_I - \bar{W}_I \bar{F}_I) + \sum_a \left( \frac{1}{2g_a^2} D_a^2 - D_a \mu_a \right) + \dots \quad (207) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{daughter}} &= \sum_I \int d^4\theta (\bar{\Phi}_I e^{2V_{h(I)}} \Phi_I e^{-2V_{t(I)}}) + \left( - \int d^2\theta W + \text{c.c.} \right) \\ &\quad + \sum_a \frac{k_a}{4\pi} \int d^4\theta \int_0^1 dt (V_a \bar{D}^\alpha (e^{2tV_a} D_\alpha e^{2tV_a})) \\ &= \sum_I (F_I \bar{F}_I - W_I F_I - \bar{W}_I \bar{F}_I) + \sum_a \left( - \frac{k_a}{2\pi} \sigma_a D_a - D_a \mu_a \right) \\ &\quad - \sum_I (\sigma_{h(I)} - \sigma_{t(I)})^2 |\phi_I|^2 + \sum_a \frac{k_a}{4\pi} A_a dA_a + \dots \quad (208) \end{aligned}$$

成分場による表示はモジュライ空間を決めるのに必要な部分だけを与えた。 $W_I$  は超ポテンシャル  $W(\phi)$  の  $\phi_I$  による微分である。 $\mu_a$  はゲージ群  $U(1)_a$  に対するモーメントマップで

$$\mu_a = \sum_I Q_{aI} |\phi_I|^2 \quad (209)$$

と与えられる。ただし  $Q_{aI}$  以前に定義したようにゲージ群  $U(1)_a$  のもとでのカイラル超場  $\Phi_I$  の電荷である。

補助場  $F_I$  を含む部分はどちらの理論も共通である。従って、運動方程式を用いて  $F_I$  を消去し、ポテンシャルが 0 であることを要請すればどちらの理論においても同じ  $F$ -term 条件

$$\bar{F}_I = \frac{\partial W}{\partial \phi_I} = 0 \quad (210)$$

を得る。

D-term 条件の取り扱いについて見てみよう。母理論においては補助場  $D_a$  についての運動方程式を解き、作用に再び代入すると、ポテンシャル

$$V = \sum_a g_a^2 \mu_a^2 \quad (211)$$

が得られる。これを 0 と置く事により  $D$ -term 条件

$$D_a = g_a \mu_a = 0 \quad (212)$$

を得ることができる。モーメントマップに対する条件 (212) を課し、その結果得られる空間をゲージ対称性で割るという操作は Kähler quotient と呼ばれ、次のように表記される。

$$\mathcal{M}_{\text{mother}} = F\text{-term 条件の解} // G_B \quad (213)$$

また、(212) の条件は複素化された  $U(1)_a$  ゲージ群の非コンパクトゲージ変換に対するゲージ固定の式とみなすことができる。このために、複素構造にのみ注目すれば (213) は次のように書き換えることもできる。

$$\mathcal{M}_{\text{mother}} = F\text{-term 条件の解} / G_B^C \quad (214)$$

このことから、モジュライ空間が複素多様体であることが保障される。

娘理論では補助場  $D_a$  はラグランジュ未定乗数であり、その運動方程式は

$$\mu_a = -\frac{k_a}{2\pi} \sigma_a \quad (215)$$

を与える。さらに、ベクトル多重項に含まれるスカラー場  $\sigma_a$  はカイラル多重項のスカラー場と次の相互作用をしている。

$$\mathcal{L} = - \sum_I \left( \sum_a Q_{aI} \sigma_a \right)^2 |\phi_I|^2 \quad (216)$$

これは、4次元におけるスカラー場の運動項を3次元にコンパクト化したときに、共変微分中のゲージ場のコンパクト方向の成分がスカラー場  $\sigma_a$  に置き換わって現れる項であると解釈することができる。ここでは M2-ブレーンによってプローブされるカラビヤウ空間の構造を調べたいので、 $\phi_I$  が真空期待値を持つヒッグスブランチのみに注目する。この場合、ポテンシャルが0になるためには次の式が成り立つ必要がある。

$$\sum_a Q_{aI} \sigma_a = 0, \quad \forall I \quad (217)$$

これは、あるカイラル多重項  $\Phi_I$  に結合する二つの U(1) ゲージ群に対するスカラー場  $\sigma_a$  の値が等しいということを表しており、従ってクイバー図形が連結であると仮定すればスカラー場  $\sigma_a$  が全て等しいことを要請している。この共通の値を  $\sigma$  と置こう。

$$\sigma_a = \sigma. \quad (218)$$

従って、(215) は次のように書くことができる。

$$\mu_a = -\frac{k_a}{2\pi} \sigma \quad (219)$$

この式を全ての  $a$  に対して和を取ってみよう。対角的 U(1) 対称性にはどの物質場も結合しないことから  $\mu_a$  の総和は0である。従って次の関係式が得られる。

$$\sigma \sum_a k_a = 0. \quad (220)$$

もし  $k_a$  の総和が0で無ければ  $\sigma = 0$  が得られ、その結果 (219) は母理論の D-term 条件 (212) と全く同じになってしまう。その場合のモジュライ空間は

$$\mathcal{M}_{\text{daughter}} = F\text{-term 条件の解} // G_B = \mathcal{M}_{\text{mother}} \quad (221)$$

となる。これでは  $\mathcal{M}_{\text{daughter}}$  を M2-ブレーンの背景とみなすことができない。M2-ブレーンの運動に対応するモジュライ空間を得ようとするには、次の条件を課す必要がある。

$$\sum_a k_a = 0. \quad (222)$$

((222) が成り立たない理論は massive IIA における D2-ブレーンのモジュライ空間を表していると解釈できる。ABJM 理論の場合に (222) を満足しない、すなわち二つのレベルの和が 0 でないものは [28, 29] などにおいて考察されている。) このとき、(220) は  $\sigma$  についての条件を課さず、モジュライ空間の次元が実で一つ増える。

一方  $\mathcal{N} = 2$  超対称性はモジュライ空間がケーラーであることを要請する。従って、D-term 条件だけではなく、ゲージ対称性についても数が一つ減り、Kähler quotient がうまく定義される必要がある。そのことを見るのが次の節の目的である。

### 3.4 dual photon とゲージ対称性の破れ

ゲージ群の因子が  $U(N_a)$  であるクイバー CS 理論においては必ず物質場と結合しない対角部分群  $U(1)_D$  が存在している。従ってこのゲージ群に対して双対スカラー場を定義することができる。このスカラー場を dual photon と呼ぶことにする。CS 項が存在するとこの dual photon が非線形なゲージ変換を受けるため、常に  $U(1)$  部分群が一つ自発的に破れる。このことを具体的に見ておこう。

ここではまずゲージ群のサイズ  $N_a$  が一般の場合について考える。それぞれの  $U(N_a)$  ゲージ場を次のように  $U(1)$  部分と  $SU(N_a)$  部分とに分解する。

$$A_a = A_a^{U(1)} \mathbf{1}_{N_a} + A_a^{SU(N_a)}. \quad (223)$$

$A_a^{U(1)}$  が  $n$  個 ( $n$  はクイバー図形の頂点の数) の  $U(1)$  ゲージ場を表す。これらを別の基底で表すことを考えよう。すなわち、次の線形変換を行う。

$$A_a^{U(1)} \leftrightarrow \{A_D, A_B, A'_i\} \quad (i = 1, \dots, n-2). \quad (224)$$

$A_D$  は対角的部分群  $U(1)_D$  に対応するゲージ場、 $A_B$  はすぐ後で定義される別の  $U(1)$  ゲージ場であり、それら以外の  $n-2$  個を  $A'_i$  とした。  $U(1)_D$  ゲージ場は、 $A_a^{U(1)}$  を (224) の右辺のゲージ場の線形結合として表したときに次のように係数 1 で現れる。<sup>3</sup>

$$A_a^{U(1)} = A_D + \dots \quad (225)$$

これを作用に代入し、(200) 中の CS 項に注目すると、

$$S = \frac{1}{4\pi} \int \sum_a k_a \text{tr}(A_a dA_a) + \dots = \frac{k_D}{4\pi} \int A_D \wedge F_D + \frac{1}{2\pi} \int A_B \wedge F_D + S' \quad (226)$$

が得られる。ただし  $F_D = dA_D$  であり

$$A_B = \sum_a k_a \text{tr} A_a = \sum_a k_a N_a A_a^{U(1)} \quad (227)$$

<sup>3</sup> $A_D$  はしばしば  $A_D = (1/n) \sum_a A_a^{U(1)}$  のように定義されるが、(224) の右辺の場の選び方によってはこれは必ずしも正しくないことに注意しよう。



を定義した。 $k_D$  は対角的 U(1) 対称性に対する CS のレベルであり

$$k_D = \sum_a N_a k_a \quad (228)$$

と与えられる。 $S'$  は  $A_D$  を含まない部分である。

$k_D = 0$  の場合、すなわち

$$\sum_a N_a k_a = 0 \quad (229)$$

の場合について見てみよう。このとき作用 (226) の右辺第 1 項は無くなり、ゲージ場  $A_D$  は場の強さ  $F_D$  を通してのみ作用に現れるから双対変換を行うことができる。そのために上記の作用を次のように書き換えよう。

$$S = \frac{1}{2\pi} \int (A_B \wedge F_D - da \wedge F_D) + S' \quad (230)$$

この式においては  $F_D$  はそれ自身独立な場であり、ラグランジュ未定乗数  $a$  の運動方程式がビアンキ項等式  $dF_D = 0$  を与え、これを代入すればもとの作用が再現される。一方  $F_D$  についての運動方程式は

$$da = A_B \quad (231)$$

となる。ここで定義されるスカラー場  $a$  が dual photon である。(231) の関係式より、ゲージ変換

$$\phi_I \rightarrow i\lambda_{h(I)}\phi_I - i\phi_I\lambda_{t(I)}, \quad A_a \rightarrow A_a + d\lambda_a - i[A_a, \lambda_a] \quad (232)$$

のもとで dual photon が次のように非線形に変換されることがわかる。

$$a \rightarrow a' + \sum_a k_a \text{tr} \lambda_a = a' + \sum_a k_a N_a \lambda_a^{\text{U}(1)}. \quad (233)$$

$a$  を動かすようなゲージ対称性は自発的に破れている。

U(1)<sub>D</sub> によるゲージ変換  $\lambda_a = \lambda_D \mathbf{1}$  を考えてみると、

$$a \rightarrow a' = a + k_D \lambda_D = a \quad (234)$$

であり、対角的 U(1) ゲージ場は dual photon にも結合していないことがわかる。従って理論から完全に分離しており、忘れてしまうことができる。そして dual photon の真空期待値は  $G_B$  の部分群を非自明に破ることになる。

$$G_B = \text{U}(1)^{n-1} \rightarrow G_{\text{unbroken}} = \text{U}(1)^{n-2} \times G_{\text{disc}} \quad (235)$$

ただし、 $G_{\text{disc}}$  は離散的部分群を表す。

残るゲージ対称性を離散的な部分まで含めて決めるためには、dual photon 場の周期性を明らかにする必要がある。(230) から  $a$  のゼロモードの正準共役運動量  $p$  を求めてみると

$$p = \frac{1}{2\pi} \oint F_D \quad (236)$$

となる。もしこのフラックスがある値  $f$  の整数倍に量子化されているとしよう。このフラックスが座標  $a$  に対する運動量であることから、この量子化は座標  $a$  が周期  $2\pi/f$  でコンパクト化されていることを意味している。

フラックスの量子化はディラックの量子化条件

$$\sum_{a=1}^n q^a \oint F_a^{U(1)} \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (237)$$

を満足するように決まる。ここで、 $q^a$  はその理論に含まれる任意の粒子の電荷である。クイバーゲージ理論の場合には、 $q^a$  は整数であり、しかも  $a$  についての総和は必ず 0 である。従って (237) を満足するフラックスは次のように与えられる。

$$\frac{1}{2\pi} \oint F_a^{U(1)} = m_a + c, \quad m_a \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (238)$$

ここで、 $c$  は実数値を取ることに注意しよう。これは対角部分群のフラックス  $F_D$  にいかなる量子化条件も課されないことを意味する。もし実際に  $F_D$  に対して任意のフラックスが許されるとすると、dual photon  $a$  には周期性が無くなる。場の理論として、このことはいかなる矛盾も生じないように思われるが、M2-ブレーン上の理論と解釈するためにはこれでは都合が悪い。(後で見るように、 $a$  の周期はモジュライ空間を決めるために重要な役割を果たし、ブレーン解釈ができるためにはその値が適切でなければならない。)

そこでここでは背後に M-理論、あるいは弦理論があるものと仮定し、もう少し強い条件を課すことにする。たとえば、ここで考えているクイバーゲージ理論を何らかのブレーン系で構成できたとしよう。その場合、そのブレーン系に両端を持つ開弦だけを考えればディラックの量子化条件は (238) しか与えないが、ブレーン系に片方の端点だけをのせた、無限に伸びる開弦を考えると (238) よりも強い次の条件が得られる。

$$\frac{1}{2\pi} \oint F_a^{U(1)} \in \mathbb{Z} \quad (239)$$

以下では量子化条件としては常に (239) を採用することにする。<sup>4</sup> この量子化条件より、 $F_D$  に対しても次の条件が課される。

$$\oint F_D \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (240)$$

<sup>4</sup>[26] においても同じ量子化条件が与えられているが、なぜ (238) の実数部分の任意性が無いのか、説明はされていないようである。

このとき dual photon に対する周期性は次のように与えられる。

$$a \sim a + 2\pi. \quad (241)$$

従って残る対称性に対する条件は

$$\sum_a k_a \operatorname{tr} \lambda_a \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (242)$$

である。

さてここで、モジュライ空間を求める問題に戻ろう。ゲージ固定  $a = 0$  を行えば、残ったゲージ対称性  $G_{\text{unbroken}}$  は条件 (242) によって与えられる。 $N = 1$  の場合には

$$\sum_a k_a \lambda_a \in 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (243)$$

である。 $G_{\text{unbroken}}$  はこの式にある整数  $m$  によって非連結成分に分けられる。ただし、 $\lambda_a \sim \lambda_a + 2\pi$  という周期性があるから、 $m$  が  $k_a$  だけ異なるものは同一視される。従って、非連結成分の個数は、このような関係によって同一視されないものの個数  $\gcd(k_a)$  である。このことから、破れずに残るゲージ群は次の構造を持つ。

$$G_B \supset G_{\text{unbroken}} = G_{\text{unbroken}}^0 \times \mathbb{Z}_{\gcd(k_a)} \quad (244)$$

$G_{\text{unbroken}}^0$  は

$$\sum_a \lambda^a k_a = 0. \quad (245)$$

によって定義される  $G_{\text{unbroken}}$  の連結成分である。実は、CS 理論の  $D$ -term 条件 (219)

$$\mu_a = -\frac{k_a}{2\pi} \sigma \quad (246)$$

から  $\sigma$  を消去すると次の形に書き換えることができる。

$$\sum_a \lambda^a \mu_a = 0 \quad (247)$$

ただし  $\lambda^a$  は (245) を満足する任意のパラメータである。これは (246) を  $G_{\text{unbroken}}^0$  に対応する  $D$ -term 条件とみなせることを意味している。つまり、モジュライ空間は Kähler quotient

$$\mathcal{M}_{\text{daughter}} = (F\text{-term 条件の解}) // G_{\text{unbroken}} = (F\text{-term 条件の解}) / G_{\text{unbroken}}^C \quad (248)$$

によって与えられる。ただし、 $G_{\text{unbroken}}$  の複素化は

$$G_{\text{unbroken}}^C = G_{\text{unbroken}}^{0C} \times \mathbb{Z}_{\text{gcd}(k_a)} \quad (249)$$

のように定義される。このことは、モジュライ空間がやはり複素多様体であることを保障している。

従って、 $\text{gcd}(k_a)$  が 1 でない場合にはモジュライ空間は次のようにオービフォルドになる。

$$\mathcal{M}_{\text{daughter}} = \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{daughter}} / \mathbb{Z}_{\text{gcd}(k_a)}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_{\text{daughter}} = (F\text{-term 条件の解}) // G_{\text{unbroken}}^0 \quad (250)$$

(222) の条件が成り立つ場合の母理論のモジュライ空間 (214) と娘理論のモジュライ空間 (248) の関係についてももう少し詳しく見てみよう。二つのモジュライ空間を見てみると、自然な写像

$$\mathcal{M}_{\text{daughter}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{mother}} \quad (251)$$

が定義できることがわかる。つまり、 $\mathcal{M}_{\text{daughter}}$  上の点のうち、 $G_B^C$  によって同一視されるものを一点に移すような写像を定義できる。この写像の核は

$$\mathbb{C}^* = G_B^C / G_{\text{unbroken}}^C \quad (252)$$

である。つまり、 $\mathcal{M}_{\text{daughter}}$  は  $\mathcal{M}_{\text{mother}}$  上の  $\mathbb{C}^*$  ファイバー束になっている。

### 3.5 モノポール演算子

dual photon  $a$  は周期  $2\pi$  を持つ場であるから、次の演算子を定義するのが自然である。

$$\mathfrak{M} = e^{ia} \quad (253)$$

dual photon のゲージ変換 (233) はこの演算子が  $U(1)_a$  に対して電荷  $N_a k_a$  を持つことを意味している。

演算子  $\mathfrak{M}$  は  $a$  に対する正準共役量であるフラックス (236) の値を 1 だけ変化させる。すなわち、 $\mathfrak{M}$  は  $U(1)_D$  に対して磁荷 1 を持つモノポール演算子である。

一方 dual photon  $a$  の定義 (231) より  $e^{ia}$  を Wilson line として次のように書くこともできる。

$$e^{ia} = \exp\left(i \int_{\infty}^x A_B\right) \quad (254)$$

これらのことより、CS 理論においては Wilson line とモノポールに付随するディラック弦がある意味で等価であるということになる。このことをもう少し詳しく見ておこう。

まずは議論を簡単にするために  $U(1)^n$  CS 理論の場合を考える。次の作用から出発しよう。

$$S = \frac{k_{ab}}{4\pi} \int_M A^a dA^b \quad (255)$$

クイバー CS 理論の場合には通常  $k_{ab} = k_a \delta_{ab}$  のように仮定されるが、ここでは一般形を用いておく。ここで Dirac 弦  $C$  を導入する。それぞれの  $U(1)$  に対する Dirac 弦の本数を  $w^a$  で表す。すなわち、 $C$  の周りでのゲージポテンシャルの積分が

$$\oint A^a = 2\pi w^a \quad (256)$$

と与えられるとする。このような Dirac 弦は  $\delta$  関数的なフラックスとみなすことができる。

$$F^a = 2\pi w^a \delta(C). \quad (257)$$

このようなフラックスがあると、CS 項を通して作用に寄与する。

$$S = \frac{k_{ab}}{4\pi} \int_M A^a F^b = \frac{w^a k_{ab}}{2} \int_M A^b \quad (258)$$

すなわち、Dirac 弦は Wilson line の挿入と同じ役割を果たす。Dirac 弦はゲージに依存するものであり、それ自身は物理的には見えず、その端点だけが意味をもつ。つまり、上記の Wilson line についても、 $A_B$  に対する Wilson line 同様、その端点の位置にのみ依存する。ディラック弦の端点はモノポールとみなすことができるため、この端点を表す演算子はモノポール演算子とも呼ばれる。

実は、上記の説明は厳密ではなく、式 (258) は正しい値とは因子 2 だけずれている。それは、Dirac 弦が持つ特異性をうまく処理していないためである。この点を改善するために曲線  $C$  を太さを持ったチューブ  $T$  で置き換える。(このような取り扱いは [30] に与えられている。) そしてその表面を時空の境界として取り扱う。

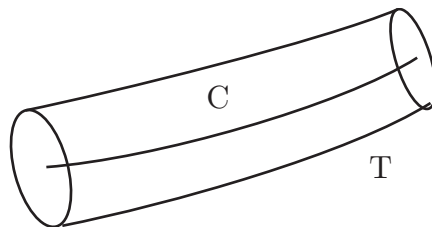


図 6: 曲線  $C$  とそれを囲むチューブ  $T$ .

$M$  を 3 次元時空とすると、ゲージ場  $A$  の任意の変分のもとで、作用は次のように変化する。

$$\delta S_0 = \frac{k_{ab}}{4\pi} \int_M (\delta A^a dA^b + A^a d\delta A^b) = \frac{k_{ab}}{2\pi} \int_M \delta A^a dA^b + \frac{k_{ab}}{4\pi} \int_M d(\delta A^a A^b) \quad (259)$$

ここで、チューブ  $T$  が存在する場合には  $M$  が境界をち表面項が現れることに注意する。この表面項はゲージ場に対して非自明な寄与を与えるので、適切に処理する必要がある。まずは「何もない」Wilson line を与えることを考えよう。何もないというのは、チューブ  $T$  が細くなって曲線  $C$  になる極限においてその存在が何の影響も与えないということである。チューブの存在による表面項は

$$\delta S_0 = -\frac{k_{ab}}{4\pi} \int_{\partial T} \delta A^a A^b = -\frac{k_{ab}}{4\pi} \int_{\partial T} (\delta A_\tau^a A_\sigma^b - \delta A_\sigma^a A_\tau^b) d\tau d\sigma \quad (260)$$

である。チューブの表面上に座標  $\tau$  と  $\sigma$  を導入した。 $\tau$  はチューブの長さ方向の座標であり、 $\sigma$  はチューブ表面を一周する座標で周期は  $2\pi$  であるとする。(260) はゲージ場に境界条件を与えてしまうので、それを避けるために次の表面項を導入しよう。

$$S_1 = -\frac{k_{ab}}{4\pi} \int_{\partial T} A_\tau^a A_\sigma^b d\tau d\sigma \quad (261)$$

この変分は

$$\delta S_1 = -\frac{k_{ab}}{4\pi} \int_{\partial T} (\delta A_\tau^a A_\sigma^b + \delta A_\sigma^a A_\tau^b) d\tau d\sigma \quad (262)$$

となるから和をとると

$$\delta(S_0 + S_1) = -\frac{k_{ab}}{2\pi} \int_{\partial T} (\delta A_\tau^a A_\sigma^b) d\tau d\sigma \quad (263)$$

これは  $A_\sigma = 0$  という条件を与えるが、これは無害な拘束条件である。つまり、 $T \rightarrow C$  の極限において、これは無視できる。

以上は「何もない」Wilson line であった。次に、この作用に対してゲージ変換を行ってみよう。

$$A^a = A'^a - d\lambda^a \quad (264)$$

ただし変換パラメータ  $\lambda^a$  はチューブ表面で次のように与えられるものとする。

$$d\lambda^a = w^a d\sigma \quad (265)$$

$w^i$  を巻き付き数と呼ぶことにする。(264) を作用に代入すると、

$$\begin{aligned} S[A] &= S[A'] - \frac{k_{ab}}{4\pi} \int_{\partial T} d\lambda^a A^b + \frac{k_{ab}}{4\pi} \int_{\partial T} A_\tau^a \partial_\sigma \lambda^b d\tau d\sigma \\ &= S[A'] + \frac{k_{ab}}{2\pi} \int_{\partial T} A_\tau^a \partial_\sigma \lambda^b d\tau d\sigma \end{aligned} \quad (266)$$

これは、 $T \rightarrow C$  の極限において

$$S[A] = S[A'] + w^a k_{ab} \int_C A^b \quad (267)$$

のように書き換えられる。この第2項はチャージが

$$q_a = k_{ab} w^b \quad (268)$$

である Wilson line を与えている。これは先ほどのナイーブな計算とは因子が2だけずれていることに注意しよう。

このようにゲージ変換の結果として Wilson line が得られたということは、この Wilson line の形状を観測することができないということを意味している。もしこの Wilson line に端点が無ければ、すなわち Wilson loop になっていれば、これは何も無いのと同じである。(ただし他の Wilson loop と絡んでいたりと話は別である。) しかし、もし Wilson line に端点があれば、その端点は局所的な演算子(モノポール演算子)として振舞う。

上記のディラック弦はゲージ変換を用いているが、そのゲージ変換が物質場への作用も含めて定義されるためには、ゲージ変換の結果得られるディラック弦がアハラノフボーム効果で観測できないことが必要である。その条件は次のように与えられる。

$$w^a Q_a \in \mathbb{Z} \quad (269)$$

ただし、 $Q_a$  は荷電粒子のそれぞれの  $U(1)$  に対する電荷である。この関係式は任意の荷電粒子に対して成り立つ必要がある。 $Q_a$  として任意の整数が許されるように電荷が規格化されていれば、 $w^a$  としても任意の整数値が許される。

クイバーゲージ理論の場合を考えよう。この場合、 $Q_a$  の全ての  $U(1)$  に対する和は常に0である。前節で述べたように、対角的な  $U(1)_D$  部分群に対するフラックスの規格化条件を得るには、クイバー図形上には含まれない、 $U(1)_D$  に結合する場が必要である。ここでもそのような場合を考え、必ずしも総和が0ではない  $Q_a$  に対しても (269) が成り立つことを要請しよう。この場合、 $w^a$  は整数でなければならない。

クイバーゲージ理論において、 $w^a$  がラベル  $a$  によらず全て等しいようなモノポール演算子は特別である。そのような演算子を「対角的」モノポール演算子と呼ぶことにしよう。以前に考えた dual photon を用いて構成した演算子  $e^{ia}$  は対角的モノポール演算子である。

上で与えた  $U(1)^n$  ゲージ理論の Wilson line は以下のように一般の群の場合に拡張することができる。まず、ゲージ変換 (265) はチューブ表面でのゲージ場に次の境界条件を課すことと同じである。

$$A^{ia} = w^a d\sigma. \quad (270)$$

$U(N)$  ゲージ群の場合にはこの境界条件をカルタン部分  $U(1)^N$  に対するものとしてみなすことができる。すなわち、一般には  $h$  をカルタン部分の固有値(ウェイトベクトル)として次のように書くことができる。

$$A^{iai} = h^{ai} d\sigma. \quad (271)$$

ただし、 $a$  はクイバー図形の頂点のラベルであり、 $U(N_a)$  の因子を指定する。そして  $i$  はそれぞれの  $U(N_a)$  に対してそのカルタン部分群  $U(1)^{N_a}$  のどの  $U(1)$  かを指定する添え字である。このような、カルタン部分群に対するディラックモノポールとして定義されるモノポールは Goddard-Nuyts-Olive モノポールと呼ばれる。[31] (271) において  $h^{ai}$  をモノポールの磁荷とみなすことができるが、このチャージはトポロジカルなものではない。実際、 $SU(N_a)$  部分については  $\pi_1(SU(N_a)) = 0$  であるから、トポロジカルなチャージを定義することができない。

$U(1)$  の場合にモノポールのチャージと電荷が (268) によって関係していたように、 $U(N_a)$  ゲージ群の場合にも (271) に現れる磁荷  $h^{ai}$  によってモノポールが属する  $U(N_a)$  の表現が決定される。すなわちモノポールが属する表現の最高ウェイトが  $W_a^i = k_{ab}h^{bi}$  によって与えられる。特に、レベルが  $k_{ab} = k_a\delta_{ab}$  のようにクイバー図形の頂点ごとに与えられる場合を考えよう。この場合、モノポール演算子の属する表現の最高ウェイトは

$$W_a^i = k_a h^{ai} \quad (272)$$

である。 $a$  を一つ固定し、一つの  $U(N_a)$  因子に注目しよう。最高ウェイトベクトルが  $W_a^i$  である  $U(N_a)$  の表現は、それぞれの行の箱の数が  $W_a^i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) であるようなヤング図形で表される表現である。(ただしこの場合には  $W_a^1 \geq W_a^2 \geq \dots \geq W_a^N$  のように  $W^a$  の成分を降順に並べておく。) ここでは  $SU(N_a)$  ではなく  $U(N_a)$  の表現を考えているので、縦に  $N_a$  個の箱が並んでいるような列も意味を持つことを注意しておこう。また、箱の数が負という場合も許される。

それぞれの頂点のゲージ群が  $U(N_a)$  であるクイバーゲージ理論において、その対角  $U(1)$  部分群のゲージ場の dual photon を用いて構成されたモノポール演算子  $\mathfrak{M} = e^{ia}$  に対しては、最高ウェイトは

$$h^{ai}[\mathfrak{M}] = 1, \quad W_a^i[\mathfrak{M}] = k_a, \quad (273)$$

である。それぞれの  $U(N_a)$  に対する表現は縦に  $N_a$  個、横に  $k_a$  個の箱が並んだヤング図形によって与えられる。これは  $U(1)$  チャージ  $N_a k_a$  を持つことを表すが、これはゲージ変換の式 (233) とつじつまが合っている。

モジュライ空間を構成する上で重要なのは全てのゲージ群に対して  $W_a^i = (1, 0, \dots, 0)$  であるようなモノポール演算子である。これを  $\mathfrak{m}$  を表すことにしよう。

$$h^{ai}[\mathfrak{m}] = \delta_{1i}, \quad W_a^i[\mathfrak{m}] = k_a \delta_{1i}. \quad (274)$$

このモノポール演算子は  $k_a$  が正であれば  $\text{Sym}^{k_a} \mathbf{N}$  表現、 $k_a$  が負であれば  $\text{Sym}^{-k_a} \bar{\mathbf{N}}$  表現に属する。

定義より、ゲージ群が全て  $U(1)$  である場合には  $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}$  である。ゲージ群が全て  $U(N)$  である場合には  $\mathfrak{m}$  を  $N$  個集めると次のように  $\mathfrak{M}$  を構成することができる。

$$\mathfrak{M} = \epsilon_{a_1 \dots a_N} \dots \epsilon^{b_1 \dots b_N} \mathfrak{m}^{a_1 \dots b_1} \dots \mathfrak{m}^{a_N \dots b_N} \quad (275)$$



$\mathfrak{m}$  はそれぞれの  $U(N)_a$  ごとに  $|k_a|$  個の  $U(N)_a$  添え字を持つ。一つの  $\mathfrak{m}$  が持つ添え字の数は全部で  $\sum_a |k_a|$  である。(275) では同じ数の  $\epsilon$  テンソルを用いて  $N$  個の  $mm$  の添え字を全てつぶしている。条件 (222) があるために  $\mathfrak{m}$  の添え字の数は偶数であり、二つの  $\mathfrak{m}$  の入れ替えからは負号が現れないことに注意しよう。

モノポール演算子の性質 (R-電荷、共形次元など) は動径量子化法を用いて調べることができる。[32, 33] ABJM モデルにおけるモノポール演算子は [34, 35] で議論されている。

### 3.6 ゲージ不変演算子とトーリックデータ

§3.4において  $\mathcal{M}_{\text{daughter}}$  は  $\mathcal{M}_{\text{mother}}$  上の  $\mathbb{C}^*$  ファイバー束であることを見たが、このことをもう少し具体的に見ておこう。そのために、 $\mathcal{M}_{\text{mother}}$  および  $\mathcal{M}_{\text{daughter}}$  上に座標を導入することを考えよう。議論を簡単にするために、ここではこれらがトーリックである場合、すなわち、複素構造を尊重するような  $U(1)^d$  対称性がある場合のみを考える。(  $d$  はモジュライ空間の複素次元であり、母理論では 3、娘理論では 4 であると仮定する。)

一般に、モジュライ空間上の座標はゲージ不変演算子によって張ることができる。特に、ここで考えているケーラーモジュライ空間の場合には、複素座標としてゲージ不変なカイラル演算子を取ることができる。以下ではゲージ群のサイズは  $N_a = 1$  である場合を考える。トーリックな場合、母理論のゲージ不変演算子はモジュライ空間の  $U(1)^3$  アイソメトリーに対応した 3 つのチャージで区別することができる。このチャージを格子  $\mathbb{Z}^3$  上のベクトルとして表したものを  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  とする。チャージ  $\mathbf{q}$  を持つ演算子は (存在するとすれば) カイラルリング上で一意的に定まり、ある生成元  $\mathcal{O}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) を用いて

$$\mathcal{O}_1^{q_1} \mathcal{O}_2^{q_2} \mathcal{O}_3^{q_3} \quad (276)$$

のように与えることができる。ここで、べき  $q_i$  は負であってもかまわないが、これを場  $\Phi_I$  で展開したときに負べきを含んではならないという条件から、 $\mathbf{q}$  は  $\mathbb{Z}^3$  の部分集合をなし、いくつかのベクトル  $\mathbf{s}_\mu \in \mathbb{Z}^3$  を用いて

$$\mathbf{s}_\mu \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (277)$$

のように与えられる。 $\mathbf{s}_\mu$  は  $U(1)^3$  のある  $U(1)$  部分群を指定するベクトルであり、(277) の左辺はその部分群のもとでの演算子のチャージとみなすことができる。 $\mathbf{s}_\mu$  は「トーリックデータ」と呼ばれ、これらのベクトルの集合を図示したものを「トーリック図」と呼ぶ。トーリックデータは「全てのメソン演算子のチャージが正であるような  $U(1)$  対称性の基底」という意味付けをすることができる。ここでいう基底とは、メソン演算子のチャージが常に正であるような任意の  $U(1)$  対称性が、 $c_\mu$  を非負係数として  $\sum_\mu c_\mu \mathbf{s}_\mu$  と与えることができるという意味である。

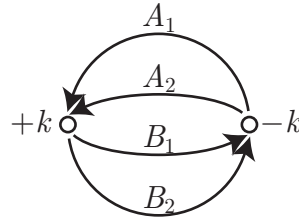


図 7: ABJM 理論のクイバー図形

例として母理論が Klebanov-Witten 理論の場合で考えてみよう。対応する娘理論は ABJM 理論であり、図 7 にあるクイバー図形で表される。ゲージ群のサイズが  $N = 1$  である場合にはこれらの理論の超ポテンシャルは恒等的に 0 になるので、 $F$ -term 条件はこの例では考える必要がない。母理論のモジュライ空間は 4 つのゲージ不変演算子

$$x = A_1 B_1, \quad y = A_2 B_2, \quad u = A_1 B_2, \quad v = A_2 B_1. \quad (278)$$

によって張ることができる。ただしこれらの間には依存関係

$$xy = uv \quad (279)$$

があり、この式は  $\mathbb{C}^4$  の部分空間として conifold を与えている。

Klebanov-Witten のゲージ不変演算子は

$$\mathcal{O} = (A_2 B_1)^{q_1} (A_2 B_2)^{q_2} (A_1 A_2 B_1 B_2)^{q_3} = A_1^{q_3} A_2^{q_1+q_2+q_3} B_1^{q_1+q_3} B_2^{q_2+q_3} \quad (280)$$

のように与えられる。(ここではゲージ群が  $U(1)^2$  の積である場合を考えているので順序は気にする必要がない。) ただし、それぞれの場のべきが非負でなければならないので、 $(q_1, q_2, q_3)$  は次の条件を満足する必要がある。

$$q_3 \geq 0, \quad q_1 + q_2 + q_3 \geq 0, \quad q_1 + q_3 \geq 0, \quad q_2 + q_3 \geq 0. \quad (281)$$

これらを (277) の形に書くことで、トーリックデータを次のように与えることができる。

$$\mathbf{s}_1 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{s}_2 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{s}_3 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{s}_4 = (0, 1, 1). \quad (282)$$

最後の成分が 1 である。モジュライ空間がカラビヤウである場合には、基底を適当に取ることによって (すなわち生成元を適当に選ぶことによって) 常にこのように取れることが保障されている。<sup>5</sup> そのためトーリック図を描く際には通常前二つの成分だけを用いる。(図 8)

<sup>5</sup>具体的には調和  $(3, 0)$ -形式  $\Omega$  に作用しない  $U(1)^2 \subset U(1)^3$  部分群の軌道で  $\Omega$  を積分して 1-形式とし、それをベース空間上で積分したものを一つの生成子にとれば、それに対応する  $s_\mu$  の成分は常に 1 になる。

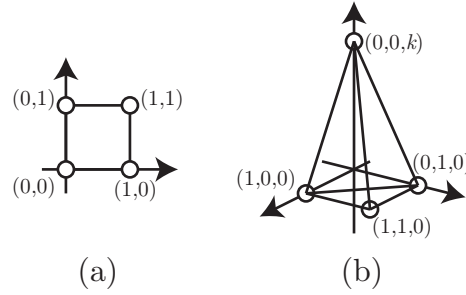


図 8: Klebanov-Witten 理論 (a) と ABJM 理論 (b) のモジュライ空間のトーリック図

次に、娘理論におけるゲージ不変演算子、すなわち  $G_{\text{unbroken}}$  不変演算子について考えてみよう。母理論におけるゲージ不変演算子、すなわち  $G_B$  不変演算子は常に  $G_{\text{unbroken}}$  不変演算子である。これに加えて、娘理論では新たなゲージ不変演算子を構成することができる。娘理論において  $G_B$  ゲージ対称性が破れたのは  $G_B$  不変ではない量  $e^{ia}$  が期待値を持つためである。従って、破れた後のゲージ対称性  $G_{\text{unbroken}}$  のもとである演算子がゲージ不変ということは、その演算子が  $e^{ia}$  のあるべきと同じ  $G_B$  チャージを持つということと等価である。

レベルの総和が 0 であるという条件 (229) が満足されているとしよう。このとき次の条件を満足する辺ごとに割り当てられる整数  $s_I$  が存在する。

$$k_a = \sum_I Q_{aI} s_I \quad (283)$$

ここで、次の演算子を定義しよう。

$$\mathcal{O}_B = \prod_I \Phi_I^{s_I} \quad (284)$$

それぞれのカイラル超場  $\Phi_I$  はゲージ変換 (232) のもとで

$$\Phi_I \rightarrow \Phi'_I = e^{iQ_{Ia}\lambda^a} \Phi_I \quad (285)$$

と変換される。従って上記の演算子のゲージ変換は

$$\mathcal{O}_B \rightarrow \mathcal{O}'_B = e^{is_I Q_{Ia}\lambda^a} \mathcal{O}_B = e^{ik_a\lambda^a} \mathcal{O}_B \quad (286)$$

となり、これは  $e^{ia}$  の変換則と全く同じである。つまり、 $\mathcal{O}_B$  は  $G_{\text{unbroken}}$  不変な演算子である。これが  $\mathcal{M}_{\text{daughter}}$  を  $\mathcal{M}_{\text{mother}}$  上の  $\mathbb{C}^*$  ファイバー束として表したときの  $\mathbb{C}^*$  ファイバー上の座標を与える。ここではゲージ群のサイズが  $N=1$  の場合を考えているが、一般の場合にはモノポール演算子  $\mathbf{m}$  を用いて  $\mathcal{O}_B = \mathbf{m}^{-1} \prod_I \Phi_I^{s_I}$  と定義される。(  $\mathbf{m}$  以外にも、異なる磁荷を持つモノポール演算子が一般には存在し、それらを用いることによってもゲージ不変演算子を構成することができるが、それらは M2-ブレーン背景の座標としての役割は果たさない。[71, 74])

この  $\mathcal{O}_B$  を 4 番目の生成元として用いることにより、 $G_{\text{unbroken}}$  不変な演算子が次のように与えられる。

$$\mathcal{O}_1^{q_1} \mathcal{O}_2^{q_2} \mathcal{O}_3^{q_3} \mathcal{O}_B^{q_4} \quad (287)$$

この演算子を  $\Phi_I$  で展開し、場のべきが正という条件を課すと次の不等式が得られる。

$$\mathbf{s}_\mu \cdot \mathbf{q} + z_\mu q_4 \geq 0 \quad (288)$$

ただし係数  $z_\mu$  は実際に上記の演算子を展開してみて決める。この式の左辺は  $\mathbb{Z}^4$  上の内積とみなすことができる。従って  $\mathcal{M}_{\text{daughter}}$  のトーリックデータは

$$\mathbf{S}_\mu = (\mathbf{s}_\mu, z_\mu) \quad (289)$$

と与えられる。この関係より母理論のトーリック図形は娘理論のものの射影として与えることができることがわかる。

先ほどの母理論 (Klebanov-Witten 理論) に対応する娘理論 (ABJM モデル) のモジュライ空間を調べてみよう。二つのゲージ群に対するレベルは図 7 のように与えるものとする。上記の手続きに従って娘理論のトーリックデータを得るために  $s_I$  を与える必要がある。これは一意的ではない。ここでは  $A_1$  にのみ  $s_I = k$  を割り当てたとすると、

$$\mathcal{O}_B = A_1^k \quad (290)$$

となる。一般のゲージ不変演算子は

$$\mathcal{O} = (A_2 B_1)^{q_1} (A_2 B_2)^{q_2} (A_1 A_2 B_1 B_2)^{q_3} (A_1^k)^{q_4} = A_1^{q_3 + k q_4} A_2^{q_1 + q_2 + q_3} B_1^{q_1 + q_3} B_2^{q_2 + q_3} \quad (291)$$

と与えられる。母理論との違いは、 $A_1$  のべきが  $q_3$  から  $q_3 + k q_4$  に変化したことである。このため (281) の第 1 式が  $q_3 + k q_4 \geq 0$  に変換し、トーリックデータは

$$\mathbf{S}_1 = (\mathbf{s}_1, k), \quad \mathbf{S}_2 = (\mathbf{s}_2, 0), \quad \mathbf{S}_3 = (\mathbf{s}_3, 0), \quad \mathbf{S}_4 = (\mathbf{s}_4, 0). \quad (292)$$

となる。常に 1 である  $s_\mu$  の第 3 成分以外を用いて 3 次元格子の上に図示すれば図 8 のようになる。この場合に  $\mathcal{M}_{\text{daughter}}$  が  $\mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}_k$  であることはゲージ不変演算子の生成元

$$\mathcal{O}_1 = A_2 B_1, \quad \mathcal{O}_2 = A_2 B_2, \quad \mathcal{O}_3 = A_1 A_2 B_1 B_2, \quad \mathcal{O}_4 = A_1^k \quad (293)$$

の値が与えられると

$$(A_1, A_2, B_1, B_2) \sim (\omega_k A_1, \omega_k A_2, \omega_k^{-1} B_1, \omega_k^{-1} B_2) \quad (294)$$

という不定性を除き  $\mathbb{C}^4$  座標  $(A_1, A_2, B_1, B_2)$  が決定されることからわかる。

### 3.7 タイリングとクリスタル

ここまでは、クイバー図形や超ポテンシャルの構造については特に限定しなかったが、より具体的な話をするためにここではブレーンタイリング [36, 37, 38] によって与えられるものに限定しよう。ブレーンタイリングと 4 次元  $\mathcal{N} = 1$  超対称ゲージ理論の関係についてのレビューとしては [39, 40] がある。

母理論のモジュライ空間  $\mathcal{M}_{\text{mother}}$  がトーリックである場合、母理論は表 3 にあるブレーン系の上のゲージ理論として実現することができる。このブレーン系に

表 3: トーリックモジュライ空間を持つ母理論を実現する D5-NS5 系。 $\Sigma$  は 6789 空間中の 2 次元曲面。89 方向は  $\mathbf{T}^2$  コンパクト化されている。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D5-brane $\times N$	○	○	○	○					○	○
NS5-brane	○	○	○	○					$\Sigma$	

含まれる NS5-ブレーンは 6789 空間中の二次元曲面  $\Sigma$  に巻きついている。この  $\Sigma$  は  $\mathbf{T}^2$  に巻きついた D5-ブレーンと交差しており、その形状を適当に選ぶことでさまざまなクイバーゲージ理論を D5-ブレーン上に実現できる。この交差の様子を図示したのがブレーンタイリングである。

図 9 は Klebanov-Witten 理論のブレーンタイリングである。これは  $\mathbf{T}^2$  に巻きついた D5-ブレーンを図示したもので、上下、左右は同一視されている。そこに描かれたグラフは D5-ブレーンと NS5-ブレーンの交差を表していて、必ず自己交差を持たない二部グラフになっている。二部グラフとは、頂点が二色で塗り分けられており、異なる色が線で結ばれているようなグラフである。以下では二種類の頂点を「黒丸」、「白丸」のように呼ぶ。

この図形のそれぞれの面には  $U(N)$  ゲージ群が住んでおり、それぞれの辺にはその両側の辺をつなぐ開弦から bi-fundamental field が現れる。従って、ブレーンタイリングはクイバー図形の双対グラフとみなすことができる。クイバー図形の矢印の向きは、「黒丸の周りで左回り、白丸の周りで右回り」になるように選ぶ。

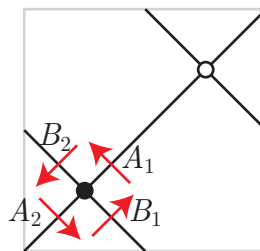


図 9: Klebanov-Witten 理論のブレーンタイリング

ブレンタイリングの特徴は、その図形から超ポテンシャルも一意的に読み取ることができる点である。これは次のように与えられる。

$$W = \sum_k \pm \text{tr} \prod_{I \in k} \Phi_I \quad (295)$$

$k$  は二部グラフの頂点の、 $I$  は辺のラベルである。 $I \in k$  は  $I$  が頂点  $k$  から出る辺の一つであることを表す。すなわち、超ポテンシャルはそれぞれの頂点ごとにそれを取り囲む辺に対応する場を全て掛け合わせ、そのトレースを取ることで得られたゲージ不変演算子を符号をつけて足し挙げたものである。符号はその頂点の色によって決める。

トーリックデータを得るためには、 $\mathbb{Z}^3$  の基底  $\mathbf{q} = \mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) に対応する 3 つのメソン演算子  $\mathcal{O}_i$  と、 $\mathbf{s}_\mu$  に対応する大域的  $U(1)$  対称性を与えればよい。

$\mathbb{Z}^3$  の基底に対応する演算子  $\mathcal{O}_i$  は、任意のゲージ不変演算子をカイラルリングの元として

$$\mathcal{O} \stackrel{F=0}{=} \mathcal{O}_1^{q_1} \mathcal{O}_2^{q_2} \mathcal{O}_3^{q_3} \quad (296)$$

のように与えるものである。ブレンタイリング上では、ゲージ不変演算子は辺を横切る閉曲線として表される。特に  $\mathcal{O}_i$  としては、トーラスの二つのサイクルに対応する演算子  $\mathcal{O}_\alpha, \mathcal{O}_\beta$  および頂点のどれか一つを周回するパス  $\omega$  に対応する  $\mathcal{O}_\omega$  を用いることができる。 $\mathcal{O}_\omega$  は超ポテンシャル中の一つの項に一致する。(図 10)

$\mathbf{s}_\mu$  に対する対称性  $U(1)_\mu$  は、全てのメソン演算子のチャージが非負であるような大域的対称性である。ブレンタイリング上においてこれは「パーフェクトマッチング」によって与えられる。パーフェクトマッチングは白と黒の頂点を対に組むような辺の集合である。そのようなマッチングを  $m_\mu$  とすれば対応する  $U(1)_\mu$  は  $m_\mu$  に含まれる辺に対応する場をチャージ 1 で回転させるようなものである。これは超ポテンシャル中の全ての項をチャージ 1 で回転させるので、理論の対称性である。(4次元の母理論においてはこれらは一般にアノマリーを持つが、これは以下の議論に影響を与えない。) また任意のメソン演算子のチャージが非負であることは明らかであり、さらに (296) のように与えられた演算子が全ての  $U(1)_\mu$  に対してチャージが正であれば、それは必ずメソン演算子として、すなわちべきが非負である場の単項式として書くことができる。

パス  $P$  に対応する演算子  $\mathcal{O}_P$  の  $U(1)_\mu$  チャージは  $P$  と  $m_\mu$  の交差数  $m_\mu \cdot P$  として与えることができる。特に、 $\mathbf{s}_\mu$  の成分は  $\mathbf{e}_i$  に対応するパス  $\alpha, \beta, \omega$  との交わりによって与えることができる。

$$\mathbf{s}_\mu = (m_\mu \cdot \alpha, m_\mu \cdot \beta, m_\mu \cdot \omega) \quad (297)$$

最後の成分は定義より常に 1 である。従って始めの二成分を与えれば十分である。図 10 は Klebanov-Witten 理論のブレンタイリングである。この図形は黒と白

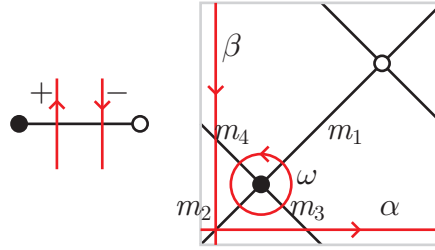


図 10: 生成演算子  $\mathcal{O}_\alpha$ 、 $\mathcal{O}_\beta$ 、 $\mathcal{O}_\omega$  を定義するサイクルの例。左の図はサイクルと辺の交差数の符号の取り方を表している。

の頂点を一つずつ含むから、パーフェクトマッチングは辺を一つだけ含む。つまり、この図形においては 4 つの辺に対応して 4 つのパーフェクトマッチング  $s_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ) がある。3 つのサイクル  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\omega$  を図のように選ぶと、トーリックデータは (282) に与えたようになる。例えば

$$s_1 = (m_1 \cdot \alpha, m_1 \cdot \beta, m_1 \cdot \omega) = (0, 0, 1) \tag{298}$$

などである。

ここまでは表 3 のブレーン系で実現される母理論について考えてきた。次に、同じブレーンタイリングで記述される CS 理論 [41] について見てみよう。今度は IIA 型弦理論における表 3 のブレーン系を用いる [42]。今度もブレーン系の構造は 89

表 4: 娘理論を実現する D4-NS5 系。 $\Sigma$  は 56789 空間中の 3 次元曲面。89 方向は  $\mathbf{T}^2$  コンパクト化されている。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D4-brane $\times N$	o	o	o						o	o
NS5-brane	o	o	o					$\Sigma$		

平面を表すブレーンタイリングによって表される。ゲージ群や超ポテンシャルなどの読み取り方は先ほどと同様である。

$\mathcal{M}_{\text{daughter}}$  のトーリックデータを決めることを考えよう。やるべきことは (284) で定義されたあらたな座標演算子  $\mathcal{O}_B$  に伴ってトーリックデータの成分を一つ増やすだけである。(284) より、 $U(1)_\mu$  チャージは次のように与えられる。

$$z_\mu = \sum_I (m_\mu \cdot I) s_I \tag{299}$$

つまり、トーリックデータの成分は

$$s_\mu = \left( m_\mu \cdot \alpha, m_\mu \cdot \beta, \sum_I (m_\mu \cdot I) s_I \right) \tag{300}$$

と与えられる。演算子  $\mathcal{O}_\omega$  に対応する成分  $m_\mu \cdot \omega$  は常に 1 であるので、ここでは省略した。

(300) に与えたトーリックデータの表示では、はじめ二つの成分と 3 番目の成分が一見異なる形をしている。しかしブレーンタイリングを 3 次元図形として書き換えることにより、これらを対等に扱うことができる。

そのために、 $\alpha$  サイクルと  $\beta$ -サイクルの二つのサイクルを持つ  $\mathbf{T}^2$  上に描かれていた二部グラフを  $\mathbf{T}^3$  上に描くことにしよう。新たに導入されたサイクルを  $\gamma$  とする。 $\mathbf{T}^3$  上の二部グラフは次の条件を満足するように描く

- $\gamma$  方向への射影を行った時にもとのブレーンタイリングに戻る。
- 辺  $I$  の  $\gamma$  方向への巻きつき数は  $s_I$  によって与えられる。

このルールによって得られる図形は  $\mathbf{T}^3$  上に描かれた二部グラフであり、ブレーンクリスタルと呼ばれる。ブレーンクリスタルはもともと M5-ブレーン系の構造を与える図形として与えられた [43, 44, 45] ものである。CS 理論を与えるブレーンクリスタルを構成する上記のルールは [42] において与えられたものである。

ブレーンクリスタルからトーリックデータを読み取るために、 $\alpha$ -サイクルと  $\beta$ -サイクルに  $\gamma$  方向への広がりを追加することによって 2-サイクル  $A$  と  $B$  を定義する。すると、 $\mathbf{T}^2$  上での交差数  $m_\mu \cdot \alpha$  は  $\mathbf{T}^3$  上の交差数として次のように与えることができる。

$$m_\mu \cdot \alpha = m_\mu \cdot A, \quad m_\mu \cdot \beta = m_\mu \cdot B. \quad (301)$$

これらの式の右辺は 3 次元空間中での線と面の間の交差数を表している。さらに、もう一つ、 $\gamma$  に直交する 2-サイクル  $C$  を定義する。辺  $I$  の巻き付き数を  $s_I$  としたので、次の式が成り立つ。

$$I \cdot C = s_I. \quad (302)$$

従って、トーリックデータの第 3 成分が次のように与えられる。

$$(m_\mu \cdot I)s_I = m_\mu \cdot C. \quad (303)$$

こうして、3 つの成分について対等なトーリックデータの次の表示を得る。

$$\mathbf{S}_\mu = (\mu \cdot A, \mu \cdot B, \mu \cdot C) \quad (304)$$

頂点の位置、サイクルの位置を連続的に動かすとこのトーリックデータは変化しうるが、それはトーリック図形の平行移動の自由度に対応する。

図 11 は  $k = 2$  の ABJM モデルの例である。左の図では上り勾配を矢印で表した。

ここで与えたブレーンクリスタルは  $\mathbf{T}^3$  コンパクト化された M-理論における M5-ブレーン系の形状を与えており、クイバー CS 理論はその上の理論として実現



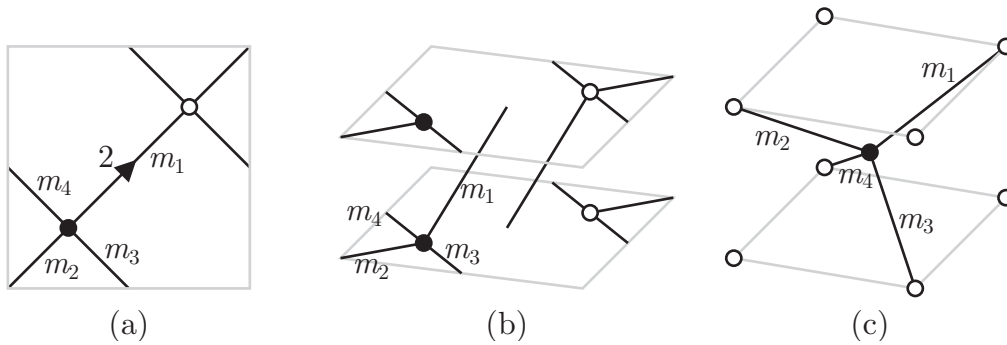


図 11: ABJM モデルのブレンタイリング (a) と、そこから得られたブレンク  
リスタル (b)。 (b) は連続変形によって (c) のようにも描くことができる。

表 5: ブレンクリスタルが表すブレン系。  $\Sigma$  は  $56789M$  空間中の 3 次元曲面。  
 $89M$  方向は  $\mathbf{T}^3$  コンパクト化されている。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$M$
M5-brane $\times N$	○	○	○						○	○	○
M5-brane	○	○	○						$\Sigma$		

されていると期待されている。(表 5) しかしながら複数枚の M5-ブレン上の理  
論についてはほとんど何も分かっていないため、そのことを実際に示すのは難し  
い。ブレンを用いた明確な解釈が与えられているのは、一方向のコンパクト化  
によって表 4 のような IIA 型理論のブレン系と解釈できる場合である。

表 4 のブレン系において CS 項がどのように得られるかを見ておこう。[42] D4-  
ブレンが NS5-brane に端を持つとき、その D4-ブレン上の  $U(N)$  ゲージ場は  
NS5-ブレン上のスカラー場  $c$  と次のように結合している。

$$S = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D4} dc \wedge \text{tr}(A \wedge dA) \tag{305}$$

従って、 $dc$  を D4 ブレンの境界にそって積分することで CS-項のレベルが得られ  
る。NS5-ブレン上のスカラー場  $c$  は M-理論においては M5-ブレンの  $X^{11}$  座  
標と解釈される。(305) では  $c$  の周期が 1 になるように規格化されている。従っ  
て、 $dc$  の積分は  $X^{11}$  方向への巻き付き数を与える。つまり、

$$k_a = \int_{\partial D4} dc = \sum_{\partial D4} s_I \tag{306}$$

となるが、これはちょうど (283) と同じことを意味している。

## 4 $\mathcal{N} \geq 4$ CS 理論

### 4.1 $\mathcal{N} = 4$ クイバー CS 理論

§2.11 では運動項の存在を仮定した上で  $\mathcal{N} = 4$  超対称ゲージ理論に CS 項を導入するとどうしても超対称性が  $\mathcal{N} = 3$  に破れてしまうことを示した。しかし、運動項がない理論を考えると、 $\mathcal{N} \geq 4$  の超対称 CS 理論を構成することができる。

以下ではそのような理論を具体的に構成するが、なぜ前章の議論が適用されなくなるのかということを見るために、運動項がある理論から運動項のない理論への極限操作を考えてみよう。そのために、運動項の前にゲージ結合定数が現れるような場の規格化を採用する。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \dots \right) + k \left( \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho + \dots \right). \quad (307)$$

式中の  $\dots$  はベクトル多重項のそのほかの場の運動項及び質量項を表す。このとき、ベクトル多重項の質量は次のように与えられる。

$$\mu = g^2 k. \quad (308)$$

運動項がない理論へ移行するには強結合極限  $g \rightarrow \infty$  を取ればよい。この極限において、粒子の質量 (308) は発散する。すなわち、一粒子状態は理論から分離してしまうため。前節で与えたフェルミオンの一粒子状態のスピンから対称性の破れを読み取った方法はもはや用いることができなくなる。

また、運動項が存在しない場合、ラグランジアン (196) に現れる  $R$ -対称性を破る項も、必ずしも物理的な対称性の破れを表しているとはいえなくなる。なぜなら、ベクトル多重項に属する場のうち、ベクトル場  $A_\mu$  を除き全てが補助場になってしまうため、それらを積分してしまうことによって対称性を破る項を消し去ることができ、残った作用においては対称性が回復するという可能性があるからである。

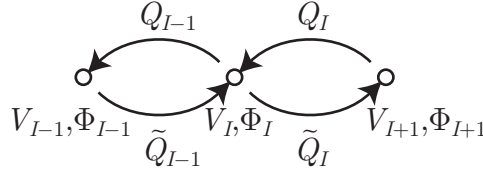
実際にそのような方法で対称性が回復する  $\mathcal{N} = 4$  超対称 CS 理論を構成できることが [20] によって示された。以下ではその拡張として [21] において構成されたクイバー型  $\mathcal{N} = 4$  超対称 CS 理論のラグランジアンを具体的に構成する。

ゲージ群が

$$G = \prod_I \mathrm{U}(N_I) \quad (309)$$

であり、その双基本表現に属するハイパー多重項を含むゲージ理論を考えよう。ただし、クイバー図形は円形になる場合のみを考える。すなわち、 $(Q_I, \tilde{Q}_I)$  をハイパー多重項とし、カイラル超場  $Q_I$  と  $\tilde{Q}_I$  は次の表現に属しているものとする。

$$Q_I(\mathbf{N}_I, \bar{\mathbf{N}}_{I+1}), \quad \tilde{Q}_I(\bar{\mathbf{N}}_I, \mathbf{N}_{I+1}). \quad (310)$$

図 12:  $\mathcal{N} = 4$  CS 理論のクイバー図形の一部

これらは  $\mathcal{N} = 4$  ハイパー多重項をなす。

上でも述べたように、ベクトル多重項には運動項を導入しない。ハイパー多重項には次の運動項、および超ポテンシャル項を導入しておく。

$$\begin{aligned}
S_{\text{hyper}} &= \sum_{I=1}^n \int d^3x d^4\theta \text{tr}(\bar{Q}_I e^{2V_I} Q_I e^{-2V_{I+1}} + \tilde{Q}_I e^{-2V_I} \bar{\tilde{Q}}_I e^{2V_{I+1}}) \\
&\quad + \sum_{I=1}^n \left( - \int d^3x d^2\theta \sqrt{2} \text{tr}(\tilde{Q}_I \Phi_I Q_I - \tilde{Q}_I Q_I \Phi_{I+1}) + \text{c.c.} \right) \\
&= \sum_{I=1}^n \int d^3x \text{tr} \left[ - D_\mu \bar{q}_{IA} D^\mu q_I^A + \bar{\psi}_I^A \gamma^\mu D_\mu \psi_{I\dot{A}} - F_I^A{}_B (\mu_I^B{}_A - \tilde{\mu}_{I-1}^B{}_A) \right. \\
&\quad - \lambda_{I\dot{A}\dot{B}} (j_I^{A\dot{B}} - \tilde{j}_{I-1}^{A\dot{B}}) + \psi_{I\dot{B}} \bar{\psi}_I^{\dot{A}} \phi_{I\dot{A}}^{\dot{B}} - \bar{\psi}_{I-1}^{\dot{A}} \psi_{I-1\dot{B}} \phi_{I\dot{A}}^{\dot{B}} \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} q_I^A \bar{q}_{IA} \phi_I^{\dot{B}} \dot{c} \phi_{I\dot{B}}^{\dot{C}} - \frac{1}{2} \bar{q}_{I-1A} q_{I-1}^A \phi_{I-1}^{\dot{B}} \dot{c} \phi_{I\dot{B}}^{\dot{C}} + \bar{q}_{IA} \phi_{I\dot{C}}^{\dot{B}} \dot{c} q_I^A \phi_{I+1\dot{B}}^{\dot{C}} \right]. \quad (311)
\end{aligned}$$

これは以前に与えた一般系と同じであるが、 $Q$  と  $\tilde{Q}$  が双基本表現に属していることを用いて行列表示を用いて書いた。 $Q_I$  や  $\tilde{Q}_I$  に含まれる補助場は既に消去してある。次のものを定義した。

$$\begin{aligned}
\mu_I^A{}_B &= q_I^A \bar{q}_{IB} - \text{tr} = q_I^A \bar{q}_{IB} - \frac{1}{2} q_I^C \bar{q}_{IC} \delta_B^A, \\
\tilde{\mu}_I^A{}_B &= \bar{q}_{IB} q_I^A - \text{tr} = \bar{q}_{IB} q_I^A - \frac{1}{2} \bar{q}_{IC} q_I^C \delta_B^A, \quad (312)
\end{aligned}$$

(312) にある “ $-\text{tr}$ ” は  $SU(2)$  添え字についてトレース部分を除くことを意味している。 $\mu_I$  は  $V_I$  に結合するモーメントマップに対するハイパー多重項 ( $Q_I, \tilde{Q}_I$ ) の寄与、 $\tilde{\mu}_I$  は  $V_{I+1}$  に結合するモーメントマップに対する同じハイパー多重項の寄与を表す。ゲージ群  $U(N_I)$  に対するモーメントマップは作用 (311) に現れているように  $\mu_I - \tilde{\mu}_{I-1}$  である。 $\mu_I$  および  $\tilde{\mu}_I$  はカレント多重項と呼ばれる多重項の成分であり、その多重項の別の成分として次のものも定義しておく。

$$j_I^{A\dot{B}} = \sqrt{2} q_I^A \bar{\psi}_I^{\dot{B}} - \sqrt{2} \epsilon^{AC} \epsilon^{\dot{B}\dot{D}} \psi_{I\dot{D}} \bar{q}_{IC}, \quad \tilde{j}_I^{A\dot{B}} = \sqrt{2} \bar{\psi}_I^{\dot{B}} q_I^A - \sqrt{2} \epsilon^{AC} \epsilon^{\dot{B}\dot{D}} \bar{q}_{IC} \psi_{I\dot{D}}. \quad (313)$$

CS 項が無い場合の  $\mathcal{N} = 4$  超対称性変換はベクトル多重項に対しては既に §2.9 に与えられている。(添え字  $I$  をつけるだけである。) ハイパー多重項についても、

一般の表現の場合に対して 2.10 に与えられているが、ここでは双基本表現に属していることを考慮して改めて次の形に書いておく。

$$\delta q_I^A = \sqrt{2}i(\xi^{A\dot{B}}\psi_{I\dot{B}}), \quad (314)$$

$$\delta\psi_{I\dot{A}} = \sqrt{2}\xi_{C\dot{B}}\phi_{I\dot{A}}^{\dot{C}}q_I^C - \sqrt{2}\xi_{C\dot{B}}q_I^C\phi_{I+1\dot{A}}^{\dot{B}} + \sqrt{2}\gamma^\mu\xi_{B\dot{A}}D_\mu q_I^B, \quad (315)$$

この段階ではまだ CS 項は導入しておらず、 $SU(2)_L \times SU(2)_R$  対称性が存在する。それぞれの場の変換性は表 6 に与えられている。

表 6:  $\mathcal{N} = 4$  ゲージ理論の R-対称性  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  のもとでの変換パラメータ  $\xi$  およびベクトル多重項、ハイパー多重項の成分場の変換性

	$\xi$	vector milt.				hyper milt.	
		$v_{I\mu}$	$\phi_I$	$\lambda_I$	$F_I$	$q_I$	$\psi_I$
$SU(2)_L$	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
$SU(2)_R$	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>

ここで次の CS 項を導入しよう。

$$\begin{aligned} S_{\text{CS}} &= \sum_{I=1}^n k_I \text{tr} \left[ \int d^3x d^4\theta \left( -\frac{1}{2} D^\alpha V_I \bar{D}_\alpha V_I + \dots \right) + \left( -\frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta \Phi_I^2 + \text{c.c.} \right) \right] \\ &= \sum_{I=1}^n k_I \int d^3x \text{tr} \left[ \epsilon^{\mu\nu\rho} \left( \frac{1}{2} A_{I\mu} \partial_\nu A_{I\rho} - \frac{i}{3} A_{I\mu} A_{I\nu} A_{I\rho} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \phi_{I\dot{B}}^{\dot{A}} F_{I\dot{A}}^{\dot{B}} - \frac{1}{6} \phi_{I\dot{B}}^{\dot{A}} \phi_{I\dot{C}}^{\dot{B}} \phi_{I\dot{A}}^{\dot{C}} - \frac{i}{2} \lambda_I^{A\dot{B}} \lambda_{I\dot{B}}^A \right]. \end{aligned} \quad (316)$$

前にも述べたように、 $\mathcal{N} = 4$  対称性をそのまま保つことはできない。 $\mathcal{N} = 3$  対称性を保つために  $\Phi_I$  に対して質量項を導入した。(316) の中で点つき添え字と点なし添え字が縮約されているために、 $SU(2)_L \times SU(2)_R$  対称性はその対角部分群に破れる。

## 4.2 $\mathcal{N} = 4$ 超対称変換

R-対称性の回復を見るためには、補助場を消去することが必要となる。 $S_{\text{hyper}} + S_{\text{CS}}$  から得られる補助場  $F_I$  と  $\lambda_I$  の運動方程式は

$$\frac{k_I}{2} \phi_{I\dot{B}}^{\dot{A}} = -\mu_{I\dot{B}}^{\dot{A}} + \tilde{\mu}_{I-1\dot{B}}^{\dot{A}}, \quad (317)$$

$$k_I \lambda_I^{B\dot{A}} = -j_I^{A\dot{B}} + \tilde{j}_{I-1}^{A\dot{B}}. \quad (318)$$

これを代入することで作用から  $\phi_I, F_I, \lambda_I$  を消去できる。

まず最初にハイパー多重項中のフェルミオンの超対称変換則 (315) について見てみよう。この変換則はベクトル多重項のスカラー場  $\phi_I$  と  $\phi_{I+1}$  が含まれているが、そこに (317) を代入すると

$$\delta\psi_{IA} = -\frac{2\sqrt{2}}{k_I}\xi_{CB}(\mu_{IA}^B - \tilde{\mu}_{I-1A}^B)q_I^C + \frac{2\sqrt{2}}{k_{I+1}}\xi_{CB}q_I^C(\mu_{I+1A}^B - \tilde{\mu}_{IA}^B) - \sqrt{2}\gamma^\mu\xi_{BA}D_\mu q_I^B, \quad (319)$$

が得られる。R-対称性の破れを反映して点つき添え字と点なし添え字が縮約されているところがある。SO(3)  $\rightarrow$  SO(4) の対称性の拡大の結果得られる SO(4) がもとの SO(4) と同じでなければならない理由はない。そこで、もとの SO(4) 対称性のことは忘れて、点つき、点なしの添え字の区別をなくし全ての添え字から点を取り除こう。また、一旦対称性が SO(3) に落ちるとパラメータ  $\xi_{AB}$  のうちの対称部分だけが超対称性変換を与えることを踏まえ、 $\xi_{AB}$  が二つの添え字について対称であるとしておこう。すると (319) は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} \delta\psi_{IA} = & -\frac{2\sqrt{2}}{k_I}\xi_{CB}(\mu_{IA}^B)q_I^C - \frac{2\sqrt{2}}{k_{I+1}}\xi_{CB}q_I^C(\tilde{\mu}_{IA}^B) \\ & + \frac{2\sqrt{2}}{k_I}\xi_{CB}(\tilde{\mu}_{I-1A}^B)q_I^C + \frac{2\sqrt{2}}{k_{I+1}}\xi_{CB}q_I^C(\mu_{I+1A}^B) - \sqrt{2}\gamma^\mu\xi_{BA}D_\mu q_I^B. \end{aligned} \quad (320)$$

この変換則を SO(4) 共変な形に書けるかどうかを考えてみよう。ここで考える SO(4) 対称性はもとの SO(4) 対称性と同じでなくてもよいので、考えるべき問題は、もともと添え字が点つきであったか点なしであったかということにはこだわらずに、この変換則の SU(2) 添え字を二種類の添え字に分解できるかということになる。新たな二種類の SU(2) 添え字を  $\bar{A}$  および  $\underline{A}$  のように上下の線で区別し、対応する対称性を SU(2) $_A$  および SU(2) $_B$  と呼ぶことにしよう。

(320) の二行目に対しては次のように添え字を分離することができる。

$$\delta\psi_{I\underline{A}} = \cdots + \frac{2\sqrt{2}}{k_I}\xi_{C\underline{B}}(\tilde{\mu}_{I-1\underline{A}}^B)q_I^{\bar{C}} + \frac{2\sqrt{2}}{k_{I+1}}\xi_{C\underline{B}}q_I^{\bar{C}}(\mu_{I+1\underline{A}}^B) - \sqrt{2}\gamma^\mu\xi_{\underline{B}\underline{A}}D_\mu q_I^{\bar{B}}. \quad (321)$$

ただし、ハイパー多重項のスカラー場であっても、その番号  $I$  によって添え字の付き方が異なることに注意しよう。

$$q_{I-1}^{\underline{A}}, \quad q_I^{\bar{A}}, \quad q_{I+1}^{\underline{A}}. \quad (322)$$

(ここでは  $I$  は一つ固定されているものとし、 $q_I$  が SU(2) $_A$  で変換されるものと仮定した。) フェルミオンについても、次のように番号ごとに添え字を変えなければならない。

$$\psi_{I-1\underline{A}}, \quad \psi_{I\underline{A}}, \quad \psi_{I+1\underline{A}}. \quad (323)$$

さらに (320) の一行目についても見てみよう。

((320) の一行目)

$$\begin{aligned}
&= -2\sqrt{2}\xi_{CB} \left( \frac{1}{k_I}(\mu_{IA}^B)q_I^{\bar{C}} + \frac{1}{k_{I+1}}q_I^C(\tilde{\mu}_{IA}^B) \right) \\
&= -2\sqrt{2}\xi_{CB} \left( \frac{1}{k_I}q_I^{\bar{B}}\bar{q}_{IA}q_I^{\bar{C}} + \frac{1}{k_{I+1}}q_I^{\bar{C}}\bar{q}_{IA}q_I^{\bar{B}} \right) + \sqrt{2}\xi_{CA} \left( \frac{1}{k_I}q_I^{\bar{D}}\bar{q}_{ID}q_I^{\bar{C}} + \frac{1}{k_{I+1}}q_I^{\bar{C}}\bar{q}_{ID}q_I^{\bar{D}} \right)
\end{aligned} \tag{324}$$

この式の二つの項のうち、二項目は添え字がうまく縮約されており、 $SU(2)_A \times SU(2)_B$  共変性を持っている。しかし第1項は CS レベル  $k_I$  と  $k_{I+1}$  が一般の値の場合にはどうやってもうまく添え字を縮約することができない。

しかしもし

$$k_I + k_{I+1} = 0 \tag{325}$$

である場合には ( $\xi_{AB}$  の二つの添え字が対称であることを用いれば) (324) の一つ目の括弧の中の二つの項が相殺し、フェルミオンの超対称性変換則が完全に  $SU(2)_A \times SU(2)_B$  共変になる。

同様の解析をそのほかの場の変換則に対しても行くと、(325) が成り立っている場合には超対称性変換則が全て  $SU(2)_A \times SU(2)_B$  共変になることが示される。

この対称性がもとの  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  対称性と大きく異なるのは、ハイパー多重項のラベル  $I$  ごとに変換性が異なるという点である。ある  $I$  に対して  $q_I$  と  $\psi_I$  がそれぞれ  $SU(2)_A$  と  $SU(2)_B$  によって変換されるとすれば、その隣のハイパー多重項の成分場に対するこれらの群の作用は逆になる。これらはそれぞれ untwisted ハイパー多重項および twisted ハイパー多重項と呼ばれる。これまでは  $I$  を一つ固定し、 $I$  番目が untwisted ハイパー多重項に属すると仮定して議論してきたが、一般の場合には

$$k_I = +k \text{ for untwisted hypermultiplet} \quad k_I = -k \text{ for twisted hypermultiplet} \tag{326}$$

のようなルールで表現を決めることができる。以下では  $k$  を  $\mathcal{N} = 4$  CS 理論のレベルと呼ぶことにし、 $k > 0$  を仮定する。

変換性の違いに対応して、untwisted ハイパー多重項と twisted ハイパー多重項では添え字の線の上下位置が変化するので、超対称変換則もそのことを考慮して書く必要がある。たとえばスカラー場の変換則が次のように与えられる。

$$\delta q_I^{\bar{A}} = \sqrt{2}(\xi^{\bar{A}B}\psi_{IB}) \quad (k_I = +k), \quad \delta q_I^A = \sqrt{2}(\xi^{\bar{B}A}\psi_{I\bar{B}}) \quad (k_I = -k). \tag{327}$$

変換パラメータ  $\xi_{\bar{A}B}$  については、前の添え字が上線、あとの添え字が下線になるように添え字の順序を決める。 $k_I = +k$  の変換則が与えられると、その  $SU(2)$  添

え字の全ての線の位置を逆転させ、変換パラメータの添え字の位置を入れ替えることによって  $k_I = -k$  の場合の変換則が得られる。フェルミオンの変換則とベクトル場の変換則については  $k_I = +k$  の場合のみを与えておこう。

$$\begin{aligned} \delta\psi_{IA} = & -\sqrt{2}\gamma^\mu \xi_{\underline{BA}} D_\mu q_I^{\underline{B}} + \frac{\sqrt{2}}{k_I} \xi_{\underline{CA}} (q_I^{\underline{D}} \bar{q}_{I\underline{D}} q_I^{\underline{C}} - q_I^{\underline{C}} \bar{q}_{I\underline{D}} q_I^{\underline{D}}) \\ & + \frac{2\sqrt{2}}{k_I} \xi_{\underline{CB}} \tilde{\mu}_{I-1A}^{\underline{B}} \bar{q}_I^{\underline{C}} - \frac{2\sqrt{2}}{k_I} \xi_{\underline{CB}} q_I^{\underline{C}} \mu_{I+1A}^{\underline{B}} \end{aligned} \quad (328)$$

$$\delta A_{I\mu} = \frac{i}{k_I} \xi_{\underline{AB}} \gamma_\mu (j_I^{\underline{AB}} - \tilde{j}_{I-1}^{\underline{BA}}). \quad (329)$$

表 7:  $\mathcal{N} = 4$  CS 理論の大域的対称性

	untwisted		twisted	
	$q_I$	$\psi_I$	$q_I$	$\psi_I$
$SU(2)_A$	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
$SU(2)_B$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>1</b>
$U(1)_d$	+1	+1	+1	+1
$U(1)_b$	+1	+1	-1	-1

### 4.3 作用の $SU(2) \times SU(2)$ 不変性

次に、作用が  $SU(2)_A \times SU(2)_B$  不変であることを示そう。 $I$  ごとに  $SU(2)$  添え字を区別して書くのは面倒なので、以下では上線つき添え字や下線つき添え字の線は省略して書くことにする。まず、運動項は明らかに  $SO(4)$  不変である。

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\text{kin}} = & \sum_{I=1}^n \int d^3x \text{tr} \left[ k_I \epsilon^{\mu\nu\rho} \left( \frac{1}{2} A_{I\mu} \partial_\nu A_{I\rho} - \frac{i}{3} A_{I\mu} A_{I\nu} A_{I\rho} \right) \right. \\ & \left. - D_\mu \bar{q}_{IA} D^\mu q_I^A + \bar{\psi}_I^A \gamma^\mu D_\mu \psi_{IA} \right]. \end{aligned} \quad (330)$$

以下では、 $SU(2)_A \times SU(2)_B$  対称性が明らかな項には hat をつけていくことにする。スカラー場のみを含むポテンシャル項は次のように与えられる。

$$S_{\text{pot}} = \sum_{I=1}^n (S_{\text{pot}1}^I + S_{\text{pot}2}^I), \quad (331)$$

右辺のそれぞれの項は以下のように定義される。

$$S_{\text{pot1}}^I = \int d^3x \text{tr} \left[ -\frac{k_I}{2} \phi_{I B}^A F_{I A}^B - F_{I B}^A (\mu_{I A}^B - \tilde{\mu}_{I-1 A}^B) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} q_I^A \bar{q}_{I A} \phi_{I C}^B \phi_{I B}^C - \frac{1}{2} \bar{q}_{I-1 A} q_{I-1}^A \phi_{I C}^B \phi_{I B}^C - \frac{k_I}{6} \phi_{I B}^A \phi_{I C}^B \phi_{I A}^C \right], \quad (332)$$

$$S_{\text{pot2}}^I = \int d^3x \text{tr} (\bar{q}_{I A} \phi_{I C}^B q_I^A \phi_{I+1 B}^C). \quad (333)$$

これらはさらに次のように分解することができる。

$$S_{\text{pot1}}^I = \widehat{S}_{\text{pot1}}^I + B^I + A^I, \quad S_{\text{pot2}}^I = \widehat{S}_{\text{pot2}}^I - A^I - B^{I+1}. \quad (334)$$

ただし、それぞれの項は以下のように与えられる。

$$\widehat{S}_{\text{pot1}}^I = \frac{2}{k^2} \int d^3x \text{tr} \left[ -\mu_{I B}^A \mu_{I A}^B \bar{q}_{I-1 C} q_{I-1}^C - \tilde{\mu}_{I-1 B}^A \tilde{\mu}_{I-1 A}^B q_I^C \bar{q}_{I C} \right. \\ \left. - q_I^A \bar{q}_{I A} \mu_{I C}^B \mu_{I B}^C - \bar{q}_{I-1 A} q_{I-1}^A \tilde{\mu}_{I-1 C}^B \tilde{\mu}_{I-1 B}^C \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \mu_{I B}^A \mu_{I C}^B \mu_{I A}^C - \frac{2}{3} \tilde{\mu}_{I-1 B}^A \tilde{\mu}_{I-1 C}^B \tilde{\mu}_{I-1 A}^C \right], \quad (335)$$

$$\widehat{S}_{\text{pot2}}^I = \int d^3x \text{tr} \left[ \frac{4}{k^2} \bar{q}_{I A} \mu_{I C}^B q_I^A \tilde{\mu}_{I B}^C + \frac{4}{k^2} \bar{q}_{I A} \tilde{\mu}_{I-1 C}^B q_I^A \mu_{I+1 B}^C \right], \quad (336)$$

$$A^I = \frac{4}{k^2} \int d^3x \text{tr} (q_I^A \tilde{\mu}_{I C}^B \bar{q}_{I A} \tilde{\mu}_{I-1 B}^C), \quad (337)$$

$$B^I = \frac{4}{k^2} \int d^3x \text{tr} (\bar{q}_{I-1 B} \mu_{I-1 C}^A q_{I-1}^B \mu_{I A}^C) \quad (338)$$

$\widehat{S}_{\text{pot1}}^I$  と  $\widehat{S}_{\text{pot2}}^I$  については、 $SU(2)$  添え字が上線つきと下線付きに矛盾無く分離できることがわかるが、 $A^I$  と  $B^I$  についてはそのような構造にはなっていない。しかし全ての和を取ると、 $A$  や  $B$  は互いに相殺して次のように明らかに  $SU(2)_A \times SU(2)_B$  不変な項のみが残る。

$$S_{\text{pot}} = \sum_{I=1}^n (\widehat{S}_{\text{pot1}}^I + \widehat{S}_{\text{pot2}}^I) \quad (339)$$

フェルミオンとスカラー場を含む湯川項は次のように与えられる。

$$S_{\text{Yukawa}} = \sum_{I=1}^n S_{\text{Yukawa}}^I, \quad (340)$$

$$S_{\text{Yukawa}}^I = \int d^3x \text{tr} \left[ -\frac{k_I}{2} \lambda_I^{AB} \lambda_{I B A} - \lambda_{I A B} (j_I^{AB} - \tilde{j}_{I-1}^{AB}) \right. \\ \left. + \psi_{I B} \bar{\psi}_I^A \phi_{I A}^B - \bar{\psi}_{I-1}^A \psi_{I-1 B} \phi_{I A}^B \right]. \quad (341)$$



と与えられる。ここから運動方程式 (317) や (318) を用いて補助場  $\lambda_I$  や  $\phi_I$  を消去すると、

$$S_{\text{Yukawa}}^I = -\frac{1}{k_I}(Y_{I-1} + X_I) + \widehat{S}_{\text{Yukawa}}^I, \quad (342)$$

と書くことができる。ただし、それぞれの項は次のように定義される。

$$\widehat{S}_{\text{Yukawa}}^I = -\frac{1}{k_I} \int d^3x \text{tr} \left[ \widetilde{j}_{I-1BA}^I j_I^{AB} - 2\psi_{IB} \bar{\psi}_I^A \widetilde{\mu}_{I-1A}^B - 2\bar{\psi}_{I-1}^A \psi_{I-1B} \mu_I^B \right], \quad (343)$$

$$X_I = \int d^3x \text{tr} \left[ -\frac{1}{2} j_I^{AB} j_{IBA} + 2\psi_{IB} \bar{\psi}_I^A \mu_I^B \right], \quad (344)$$

$$Y_I = \int d^3x \text{tr} \left[ -\frac{1}{2} \widetilde{j}_I^{AB} \widetilde{j}_{IBA} + 2\bar{\psi}_I^A \psi_{IB} \widetilde{\mu}_I^B \right], \quad (345)$$

$X$  と  $Y$  それぞれは  $SU(2)_A \times SU(2)_B$  のもとで不変では無いが、その差は次のように不変になっている。

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_I &= Y_I - X_I \\ &= \int d^3x \text{tr} \left[ \epsilon_{AB} \epsilon_{CD} q_I^A \bar{\psi}_I^C q_I^B \bar{\psi}_I^D - \epsilon^{AB} \epsilon^{CD} \bar{q}_{IA} \psi_{IC} \bar{q}_{IB} \psi_{ID} \right. \\ &\quad \left. + \psi_{IA} \bar{\psi}_I^A q_I^B \bar{q}_{IB} - \bar{\psi}_I^A \psi_{IA} \bar{q}_{IB} q_I^B \right]. \end{aligned} \quad (346)$$

これを用いれば、Yukawa 項も次のように共変な形に書き換えることができる。

$$S_{\text{Yukawa}} = \sum_{I=1}^n \left( \frac{1}{k_I} \widehat{Z}_I + \widehat{S}_{\text{Yukawa}}^I \right) \quad (347)$$

全てを加えると、作用が次のように与えられる。

$$S_{\text{CS}} + S_{\text{hyper}} = \widehat{S}_{\text{kin}} + \sum_{I=1}^n \left( \widehat{S}_{\text{pot1}}^I + \widehat{S}_{\text{pot2}}^I + \frac{1}{k_I} \widehat{Z}_I + \widehat{S}_{\text{Yukawa}}^I \right), \quad (348)$$

## 4.4 一般化

前節まで、Hosomichi らによって [21] において与えられた  $\mathcal{N} = 4$  CS 作用について見てきた。この理論をクイバー図形として表すと図 13 のようになる。この図

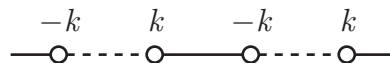


図 13: 頂点は  $U(N)$  ゲージ群を、実線は untwisted hyper 多重項を、点線は twisted hyper 多重項を表している。

はクイバー図形の一部のみを示している。両側はあるところで同一視されていて

円形につながっているとしても良いし、どこかで切れていてもよい。(ゲージ群のサイズ  $N$  は頂点ごとに異なってもよいので、途中で切れているクイバー図形はある頂点において  $N = 0$  になっているものだと解釈することができる。)

特に、頂点を二つだけ含む線形クイバー図形によって表される  $\mathcal{N} = 4$  理論は Gaiotto-Witten[20] によって与えられたものである。さらに [20] には、ハ

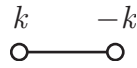


図 14: Gaiotto-Witten 理論のクイバー図形

イパー多重項を自由場から一般のハイパーケーラー上の非線形シグマ模型に取り替えることができるということも触れられている。そのような非線形シグマ模型は hyper-Kähler quotient として構成することもできる。そのようなモデルは CS レベルが 0 であるようなゲージ群を含むクイバー図形によって表すことができる。(図 15) このような一般化は twisted hyper Kähler 多重項を含む理論においても行

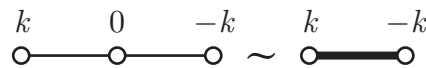


図 15: 非自明なハイパーケーラー非線形シグマモデルを含む Gaiotto-Witten 理論のクイバー図形

うことができる。すると、二種類のハイパー多重項を任意の順序で含むクイバー CS 理論を考えることができる。(図 16) そのような理論は [46] において最初に議

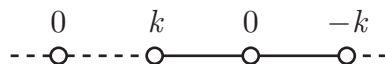


図 16: 頂点は  $U(N)$  ゲージ群を、実線は untwisted hyper 多重項を、点線は twisted hyper 多重項を表している。

論され、 $\mathcal{N} = 4$  超対称性を持つことの直接的な証明は [47] において与えられた。このような理論においては、 $I$  でラベルされた辺それぞれに対応するハイパー多重項がどちらの種類であるのかを表す量  $t_I$  を導入するのが便利である。 $t_I = k$  の場合が untwisted ハイパー多重項、 $t_I = 0$  の場合が twisted ハイパー多重項であるように  $t_I$  を定義すれば、レベルは次のように与えられる。

$$k_I = t_I - t_{I-1} \tag{349}$$

$t_I$  が 3 つ以上の値をとる場合にはそれらを二種類のハイパー多重項と対応させることはできなくなり、超対称性は  $\mathcal{N} = 3$  になる。

上で挙げた以外に、オービフォールドとして  $\mathcal{N} = 4$  を理論を構成した文献として [49, 50, 51] を挙げておこう。

4.5  $\mathcal{N} = 1$  超場を用いた構成

$\mathcal{N} = 4$  超対称理論を  $\mathcal{N} = 1$  超場形式を用いて表すのも便利である。[20]  $\mathcal{N} = 1$  超空間は  $x^\mu$  と実スピノル  $\theta$  によって張られる空間であり、スカラー超場

$$Q = q + \theta\psi + \frac{1}{2}\theta^2 F \quad (350)$$

とスピノル超場

$$V_\alpha \stackrel{\text{WZ}}{=} -(\gamma^\mu \theta)_\alpha v_\mu + \theta^2 \epsilon_{\alpha\beta} \lambda^\beta. \quad (351)$$

が基本的な多重項を与える。スカラー多重項のラグランジアンは超空間上の積分として次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S_Q &= -\frac{1}{2} \int d^2\theta (\mathcal{D}^\alpha Q \mathcal{D}_\alpha Q - W(Q)) \\ &= -\frac{1}{2} (D_\mu q)(D^\mu q) + \frac{1}{2} (\psi \gamma^\mu D_\mu \psi) + \frac{1}{2} F^2 - i(\psi \lambda)q + \text{potential} \end{aligned} \quad (352)$$

$\mathcal{D}$  はゲージ変換に対して共変化されたスピノル共変微分であり、次のように定義される。

$$\mathcal{D}_\alpha = D_\alpha + V_\alpha, \quad D_\alpha = \partial_\alpha - (\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu. \quad (353)$$

超場  $V_\alpha$  はゲージ場とゲージノを含む。CS 項は超場  $V_\alpha$  を用いて与えることもできるが、ここでは成分場を用いて展開したものを与えておく。

$$S_{\text{CS}} = \frac{k_{ab}}{2} \left[ \epsilon^{\mu\nu\rho} \left( A_\mu^a \partial_\nu A_\rho^b - \frac{i}{3} A_\mu^a [A_\nu, A_\rho]^b \right) + \lambda^a \lambda^b \right] \quad (354)$$

$\mathcal{N} = 4$  理論を  $\mathcal{N} = 1$  超場形式を用いて表した場合、 $\text{Spin}(4)_R$  対称性は見かけ上破れて  $\text{Spin}(3) = \text{SU}(2)$  フレーバー対称性だけが残る。 $Q$  はこの二重項として変換されなければならない。この  $\text{SU}(2)$  添え字を  $A, B$ 、ゲージ変換の添え字を  $I, J$  とする。 $Q$  は実であるから、ゲージ対称性の擬実表現に属していなければならない。これらの添え字をあらわに書けば、(352) 中の湯川項は次のようになる。

$$S_{\text{Yukawa}} = -i(\psi \lambda)q = \epsilon_{AB} (T_a)_{IJ} \psi^{AI} \lambda^a q^{BJ} \quad (355)$$

ただし、 $\text{SO}(4k) \supset \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(k)$  の分解に対応して

$$\delta_{ij} \rightarrow \epsilon_{AB} \omega_{IJ}, \quad (T_a)_{ij} \rightarrow i\epsilon_{AB} (T_a)_{IJ} \quad (356)$$

の置き換えを行った。

超ポテンシャルは、 $\text{SU}(2)$  フレーバー対称性、ゲージ不変性、共形不変性を仮定すれば次のように与えられるはずである。

$$W = \epsilon_{AB} \epsilon_{CD} t_{IJ, KL} Q^{AI} Q^{BJ} Q^{CK} Q^{DL} \quad (357)$$

ただし  $t_{IJ,KL}$  はゲージ対称性の不変テンソルである。

以上のように与えられたラグランジアンが  $SO(4)_R$  不変であるための条件を求めよう。そのためには補助場を消去する必要がある。不変性をチェックしなければならないのは、スカラー場のみからなるポテンシャル項、フェルミオンとスカラー場を含む項などがある。ここでは後者に注目してどのような条件が得られるかを見てみよう。

まず、 $\lambda$  の運動方程式の解

$$k_{ab}\lambda^a = \epsilon_{AB}(T_a)_{IJ}\psi^{AI}q^{BJ} \quad (358)$$

を用いて  $\lambda$  を消去すると、

$$S = \frac{k_{ab}}{2}\lambda^a\lambda^b = \frac{1}{2}k^{ab}\epsilon_{CA}\epsilon_{DB}(T_a)_{KI}(T_b)_{LJ}q^{AI}q^{BJ}\psi^{CK}\psi^{DL} \quad (359)$$

超ポテンシャル項は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S_{\text{pot}} &= \frac{1}{2} \int W(Q) d^2\theta \\ &= 2\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}t_{IJ,KL}q^{AI}q^{BJ}\psi^{CK}\psi^{DL} + 4\epsilon_{AC}\epsilon_{BD}t_{IK,JL}q^{AI}q^{BJ}\psi^{CK}\psi^{DL} + \dots \end{aligned} \quad (360)$$

まとめると、 $qq\psi\psi$  項は次のようになる。

$$S_{\text{int}} = q^{AI}q^{BJ}\psi^{CK}\psi^{DL} \left( 2\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}t_{IJ,KL} + 4\epsilon_{AC}\epsilon_{BD}t_{IK,JL} + \frac{1}{2}k^{ab}\epsilon_{AC}\epsilon_{BD}(T_a)_{IK}(T_b)_{JL} \right) \quad (361)$$

これが  $SO(4)$  不変でなければならない。つまり、フェルミオンとスカラー場を独立に回転させるような二つの  $SU(2)$  対称性がなければならない。括弧の中の第 1 項は明らかにそのような対称性を持つから、問題は残りの二つの項の和である。

スカラー場のみには作用する  $SU(2)$  対称性があるためには

$$\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} \left( 4t_{IK,JL} + \frac{1}{2}k^{ab}(T_a)_{IK}(T_b)_{JL} \right) + (AI \leftrightarrow BJ) \quad (362)$$

が添え字  $AB$  に対する  $SU(2)$  作用で不変でなければならない。つまり、 $AB$  について反対称でなければならない。上の式の括弧の中を  $T_{IK,JL}$  と置けばこの条件は

$$(\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} + \epsilon_{BC}\epsilon_{AD})(T_{IK,JL} + T_{JK,IL}) = 0 \quad (363)$$

と書くことができるから、結局

$$T_{IK,JL} + T_{JK,IL} = 0 \quad (364)$$

が成り立てばよい。これよりはじめ 3 つの添え字について完全対称化したものも 0 である。

$$T_{(IK,J)L} = 0 \quad (365)$$

$t_{IK,JL}$  ははじめ二つの添え字の入れ替えについて反対称であるから、(365) には寄与せず、(365) はゲージ群の生成子に対する次の条件を与える。

$$k^{ab}(T_a)_{(IK}(T_b)_{J)L} = 0 \quad (366)$$

実は、この条件さえ満足されればラグランジアンは  $SO(4)_R$  不変になることが示される。このとき superpotential は次のようになる。

$$W = \frac{1}{12} \epsilon_{AB} \epsilon_{CD} k^{ab} (Q^{AI} (T_a)_{IK} Q^{BJ}) (Q^{CK} (T_b)_{JL} Q^{DL}) \quad (367)$$

条件 (366) はリー代数の Jacobi 恒等式

$$f_{[ab}{}^d f_{c]d}{}^e = 0 \quad (368)$$

に類似している。実は (366) は super Lie 代数の Jacobi 恒等式であり、generator  $T_a$  にグラスマン奇の生成子  $G_I$  を加えた  $(T_a, G_I)$  が super Lie 代数をなすための条件を与えている。つまり、super Lie 代数を一つ与えると、それに対応して  $\mathcal{N} = 4$  CS 理論が存在する。

## 4.6 U(1) 対称性について

ここまでは、ゲージ群は常に  $U(N)$  であると考えてきた。それらから  $U(1)$  部分を取り除いて  $SU(N)$  に置き換えることができるかどうかを考えてみよう。ここでは議論を簡単にするために  $k_I \neq 0$  の場合のみを考える。ゲージ場の超対称変換則は (329) に与えられている。両辺のトレースを取れば以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \delta \operatorname{tr} A_{I\mu} &= \frac{i}{k_I} \xi_{\overline{AB}} \gamma_\mu \operatorname{tr} (j_I^{\overline{AB}} - j_{I-1}^{\overline{BA}}) \quad (k_I = k) \\ \delta \operatorname{tr} A_{I\mu} &= \frac{i}{k_I} \xi_{\overline{AB}} \gamma_\mu \operatorname{tr} (j_I^{\overline{BA}} - j_{I-1}^{\overline{AB}}) \quad (k_I = -k). \end{aligned} \quad (369)$$

である。 $j$  および  $\tilde{j}$  の定義 (313) より  $\operatorname{tr} j_I^{AB} = \operatorname{tr} \tilde{j}_I^{AB}$  であることを用い、 $\tilde{j}$  を  $j$  に置き換えた。この変換則の右辺は一般には 0 ではないから、勝手にゲージ場の  $U(1)$  部分を 0 と置くことは許されない。しかし次のように (227) によって定義される  $A_B$  の変換則は恒等的に 0 になる。

$$\delta A_B = i \sum_{I=1}^n [\xi_{AB} \gamma_\mu \operatorname{tr} (j_I^{AB/BA} - j_{I-1}^{BA/AB})] = 0. \quad (370)$$

( $j$  の二つの添え字は  $k_I$  の値に従って適当な順序を採用する。) 従って、ゲージ場  $A_B$  は超対称性に反することなく 0 におくことができる。ゲージ場  $A_B$  は対角  $U(1)$  部分群のゲージ場  $A_D$  が結合する唯一の場であった。そして  $A_D$  の運動方程式  $F_B = 0$  より  $A_B$  はもともと純粋ゲージであり、 $A_B = 0$  と置くことは物理的内容も変えない。また、 $A_D$  が  $A_B$  にのみ結合するということは、 $A_D$  も  $A_B$  とともに消してしまうことができることを意味している。この結果、ゲージ群は

$$U(N)^n \rightarrow SU(N)^n \times U(1)^{n-2} \quad (371)$$

のようになる。4次元のクイバーゲージ理論の場合と異なり、 $U(1)$  部分を勝手に取り除くことはできないことに注意しよう。

§4.5 で見たように、Gaiotto-Witten 理論においてはそのゲージ群と物質場の表現は超群の表現として統一されなければならない [20]。ここで取り除かれた二つの  $U(1)$  部分群は超群  $U(N_1|N_2)$  から  $PSU(N_1|N_2)$  を構成する際に取り除かれる二つの  $U(1)$  に対応する。より正確には、“Special” に相当する部分が  $A_B$ 、“Projective” に相当する部分が  $A_D$  である。

$\mathcal{N} = 3$  超対称性しか要請しない場合には、補助場  $\lambda_I$  などを消去する前から  $SO(3)_R$  対称性が明らかであり、ベクトル多重項中の全ての場から同時に  $U(1)$  部分を取り除くことにより任意の  $U(N)$  ゲージ群を  $SU(N)$  にすることができる。

## 4.7 モジュライ空間

$\mathcal{N} = 4$  クイバー CS 理論のモジュライ空間を決定しよう。M2-ブレーンの背景となる時空の構造を見るのが目的であるので、ここではゲージ群のサイズが  $N = 1$  の場合を考える。また、R-対称性のことは特に気にせずに  $\mathcal{N} = 2$  の形式を用いて議論をすることにしよう。

まずは  $F$ -term 条件から見てみよう。超ポテンシャルはハイパー多重項とベクトル多重項の結合を与える項 (311) と、CS 項の導入に伴う質量項を与える項 (316) がある。あわせると、

$$W = \sum_{I=1}^n \left[ \sqrt{2}(\tilde{Q}_I \Phi_I Q_I - \tilde{Q}_I Q_I \Phi_{I+1}) + \frac{k_I}{2} \Phi_I^2 \right] \quad (372)$$

である。従って、 $\Phi_I$  に対する  $F$ -term 条件は

$$k_I \phi_I = -\sqrt{2}(q_I \tilde{q}_I - \tilde{q}_{I-1} q_{I-1}) \quad (373)$$

さらに  $Q_I$  と  $\tilde{Q}_I$  に対する  $F$ -term 条件は

$$\tilde{q}_I(\phi_I - \phi_{I+1}) = q_I(\phi_I - \phi_{I+1}) = 0 \quad (374)$$

である。

次に、ベクトル多重項の場合  $\sigma$  と  $D$ -term 条件について見てみよう。一般のカイラル多重項の運動項 (113) に含まれるポテンシャル項を bi-fundamental field の場合について書き換えたものと、CS 項 (136) をあわせれば次の項が現れる。

$$S = \sum_I \left[ -k_I \sigma_I D_I - (D_I - D_{I+1})(q_I \bar{q}_I - \tilde{q}_I \tilde{q}_I) - (\sigma_I - \sigma_{I+1})^2 (\bar{q}_I q_I + \tilde{q}_I \tilde{q}_I) \right] \quad (375)$$

ここで、全ての  $q$  および  $\tilde{q}$  が 0 ではないような Higgs branch を考えることにしよう。これは M2-ブレーンの運動に対応するブランチである。この場合、(374) は

$$\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n =: \phi \quad (376)$$

を意味する。また、(375) 中の最後の項はポテンシャルとして見たときに非負であり、ポテンシャルが 0 であるためには、次のように全ての  $\sigma_I$  の値が一致する必要がある。

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n =: \sigma \quad (377)$$

これらを用いて  $\phi_I$  や  $\sigma_I$  の添え字を取り除けば、(373) は

$$k_I \phi = -\sqrt{2}(q_I \tilde{q}_I - \tilde{q}_{I-1} q_{I-1}) \quad (378)$$

となり、(375) から得られる  $D_I$  の運動方程式は

$$k_I \sigma = -(q_I \bar{q}_I - \tilde{q}_I \tilde{q}_I) + (\bar{q}_{I-1} q_{I-1} - \tilde{q}_{I-1} \tilde{q}_{I-1}) \quad (379)$$

となる。(378) と (379) は  $\mathcal{N} = 3$  超対称性理論の  $SU(2)_R$  対称性の多重項をなししており、次のようにまとめることができる。

$$-\frac{k_I}{2} \phi^A_B = \hat{\mu}_{I B}^A := \mu_{I B}^A - \tilde{\mu}_{I-1 B}^A. \quad (380)$$

ただし  $\hat{\mu}_{I B}^A$  はゲージ群  $U(1)_I$  に対するハイパーケーラーモーメントマップであり、 $\mu_{I B}^A$  と  $\tilde{\mu}_{I-1 B}^A$  はそのモーメントマップへの異なる二つのハイパー多重項それぞれの寄与を表す。これらは (312) で定義されている。 $N = 1$  の場合には  $\mu_{I B}^A = \tilde{\mu}_{I B}^A$  であり、これらを区別する必要はない。 $\phi_I$  と  $\sigma_I$  の値が全て共通であるから  $\phi_{I B}^A$  についてもそうであり、その共通の値を  $\phi^A_B$  と書いた。

ここで、 $\mathcal{N} = 4$  超対称性が存在するためには  $k_I$  にきつい制限が課されるが、ここではより一般の  $k_I$  について考えることにしよう。この場合超対称性は  $\mathcal{N} = 3$  である。ただし M2-ブレーン上の理論として解釈するためには正しいモジュライ空間の次元 8 を与える必要があり、§3.3 で述べたように  $k_I$  に対する次の条件を課しておく。

$$\sum_{I=1}^n k_I = 0 \quad (381)$$

このクラスに属する理論のモジュライ空間は [48] において調べられている。

この場合、(380) の両辺の和を取ると自明な式  $0 = 0$  が得られるので、(378) が与える条件の個数は  $3(n-1)$  個である。ここで、以上の式を解いて得られるモジュライ空間の次元を確認しておこう。

- $\phi^A_B$  の自由度が 3 個
- $q_I$  と  $\tilde{q}_I$  が実で  $4n$  個
- dual photon  $a$  が 1 個
- F-term, D-term 条件合わせて  $3(n-1)$  個 (式 (380))
- ゲージ対称性が  $n-1$  個

これらを全部あわせると

$$\dim \mathcal{M} = (3 + 4n + 1) - (3(n-1) + (n-1)) = 8 \quad (382)$$

となり、ちょうど M2-ブレーンの背景時空を表すためにほしい次元を与える。

ハイパーケーラー構造が明らかになるようにするには、 $n-1$  個の独立な関係式を含む (380) を次のように書き換えておくのが良い。

$$\sum_{I=1}^n \lambda^I \hat{\mu}_I^A = 0 \quad (383)$$

ただし  $\lambda^I$  は次の式を満足する任意のパラメータである。

$$\sum_{I=1}^n k_I \lambda^I = 0. \quad (384)$$

実は (384) は  $\lambda^I$  をゲージ変換のパラメータであると解釈すると、ちょうど dual photon のゲージ変換が 0 になるべしという条件 (245) であり、破れていないゲージ対称性

$$G_{\text{unbroken}} = \text{U}(1)^{n-2} \times \text{discrete part} \quad (385)$$

連続部分  $G_{\text{unbroken}}^0$  の定義式になっている。そして (383) は  $G_{\text{unbroken}}^0$  に対応した  $n-2$  個のハイパーケーラーモーメントマップが 0 であるという条件になっている。つまり、モジュライ空間は次の hyper-Kähler quotient で与えられる。

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \mathbb{H}^n // G_{\text{unbroken}}, \quad (386)$$

さて、 $\mathcal{N} = 2$  超場を用いた議論に戻って、モジュライ空間の構造を見ていこう。 $k_I$  に対する条件 (381) を用いて次のように書き換えておくのが便利である。

$$k_I = t_I - t_{I-1}. \quad (387)$$



$\mathcal{N} = 4$  超対称性を要請すると、 $t_I$  は二つの値だけをとることができる。ここではその二つの値を  $k$  と  $0$  とする。ハイパー多重項は  $t_I = k$  の場合が untwisted ハイパー多重項  $t_I = 0$  の場合が twisted ハイパー多重項である。また、破れずに残るゲージ対称性は

$$G_{\text{unbroken}} = G_{\text{unbroken}}^0 \times \mathbb{Z}_k \quad (388)$$

と与えられる。モジュライ空間の座標はゲージ不変なカイラル演算子で与えられる。場  $\phi_I$  は (373) によって  $q$  と  $\tilde{q}$  で書けてしまうので独立ではなく、考える必要は無い。 $q$  と  $\tilde{q}$  で作ることのできるゲージ不変演算子を考えればよい。ただしここで「ゲージ不変」といった場合には、破れずに残っているゲージ対称性  $G_{\text{unbroken}}$  のもとでのゲージ不変性を意味している。(378) に (387) を代入して  $q_I$  と  $\tilde{q}_I$  が満足すべき次の方程式が得られる。

$$\sqrt{2}q_I\tilde{q}_I + t_I\phi = \sqrt{2}\tilde{q}_{I-1}q_{I-1} + t_{I-1}\phi \quad (389)$$

この式は、メソン演算子  $q_I\tilde{q}_I$  の値が  $t_I$  の値によって二つの値をとることを意味している。それらを  $m_u$  および  $m_t$  と置こう。

$$m_u = q_I\tilde{q}_I \quad (t_I = k), \quad m_t = q_I\tilde{q}_I \quad (t_I = 0). \quad (390)$$

さらに、次の演算子を定義する。

$$x = \prod_{\text{untwisted}} q_I, \quad y = \prod_{\text{twisted}} q_I, \quad \tilde{x} = \prod_{\text{untwisted}} \tilde{q}_I, \quad \tilde{y} = \prod_{\text{twisted}} \tilde{q}_I \quad (391)$$

これらはどれも  $G_{\text{unbroken}}^0$  不変な演算子である。定義より次の関係が成り立つ。

$$x\tilde{x} = m_t^p, \quad y\tilde{y} = m_u^q. \quad (392)$$

これらはそれぞれ orbifold  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p$  および  $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_q$  を定義する式である。(391) の変数は  $G_{\text{unbroken}}^0$  のもとでは不変であるが、離散的な部分  $\mathbb{Z}_k$  のもとでは不変ではなく次のように変換される。

$$x \rightarrow \omega_k x, \quad y \rightarrow \omega_k^{-1} y, \quad \tilde{x} \rightarrow \omega_k^{-1} \tilde{x}, \quad \tilde{y} \rightarrow \omega_k \tilde{y}. \quad (393)$$

従ってモジュライ空間は

$$\mathcal{M} = ((\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_p) \times (\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_q))/\mathbb{Z}_k \quad (394)$$

である。

## 4.8 ブレーン構成

$\mathcal{N} = 4$  クイバー CS 理論は IIB 型弦理論において 5-ブレーンに端を持つ D3-ブレーンを用いて構成することができる。[52, 53]

IIB 型弦理論には R-R チャージと NS-NS チャージの二種類の 5-ブレーンチャージがあり、このことに対応して  $(p, q)$  5-ブレーンと呼ばれる、二つの整数でラベルされる 5-ブレーンが存在する。 $p$  は R-R チャージ、 $q$  は NS-NS チャージを表し、 $(1, 0)$  5-ブレーンは D5-ブレーンと、 $(0, 1)$  5-ブレーンは NS5-ブレーンと同じ意味である。(文献によっては逆の場合もあるので注意すること。)  $(p, q)$  5-ブレーンは  $p$  枚の D5-ブレーンと  $q$  枚の NS5-ブレーンの束縛状態であるとみなすことができる。

CS 理論を構成するためには、 $(p, 1)$  5-ブレーンを用いる。この 5-ブレーン上に D3-ブレーンが端を持つと、その境界上に次の相互作用が存在する。

$$S = \frac{p}{4\pi} \int_{\partial D3} \text{tr} \left( AdA - \frac{2i}{3} A^3 \right). \quad (395)$$

積分範囲は NS5-ブレーン上にある D3-ブレーンの境界であり、 $A$  は D3-ブレーン上のゲージ場の境界への引き戻しである。

相互作用 (395) が存在することが分かれば、D3-ブレーン上で CS 理論を構成することは簡単である。まず 012345 方向に伸びた二枚の NS5-ブレーンがある間隔  $L$  だけ離して配置しよう。そしてそのブレーンの間に張った D3-ブレーンを考える。D3-ブレーンの伸びている方向は 0126 であるとする。

もともと D3-ブレーンの上には 4 次元の  $\mathcal{N} = 4$  のベクトル多重項

$$(A_\mu, A_4, \phi_i, \phi_a) \quad (\mu = 0, 1, 2, i = 3, 4, 5, a = 7, 8, 9) \quad (396)$$

が存在していたが、NS5-ブレーンの存在によってこの超対称性は半分に落ち、次の二つの多重項に分かれる。

$$(A_\mu, \phi_i, ) \quad (A_4, \phi_a). \quad (397)$$

このことは、これらの場の超対称変換を調べることで分かる。D3-ブレーンが NS5-ブレーン上に端を持つと、D3-ブレーンは NS5-ブレーンの伸びている 345 方向にしか運動できなくなり、789 方向の自由度は固定される。これは  $\phi_a$  に対して Dirichlet 境界条件が課されるためであると解釈できる。同じ超対称多重項に属する  $A_4$  についても同様である。これらの場は  $L$  が十分小さければ大きな Kaluza-Klein 質量を持ち、低エネルギーの理論から分離する。結果として、3 次元の  $\mathcal{N} = 4$  ベクトル多重項

$$(A_\mu, \phi_i, ) \quad (398)$$

が得られる。

CS 項を導入するためには D3-ブレーン境界における相互作用 (395) を用いる。二枚の NS5-ブレーンのうち片方を  $(k, 1)$  5-ブレーンに置き換えよう。すると、相互作用項 (395) によって次の CS 項が現れる。

$$S = \frac{k}{4\pi} \int \left( AdA - \frac{2i}{3} A^3 \right). \quad (399)$$

図 16 のクイバー図形で表される  $\mathcal{N} = 4$  CS 理論を実現するためには  $I$  でラベルされる  $n$  枚の 5-ブレーンを用意し、それらのチャージを  $(t_I, 0)$  にとればよい。そうすると、5-ブレーン  $I$  と  $I-1$  の間に張った D3-ブレーン上のゲージ場に対しては境界上での相互作用項により (349) によって与えられるレベルを持った CS-項が現れる。 $\mathcal{N} = 4$  の超対称性を要請しなければ  $t_I$  に対しては任意の整数値が許

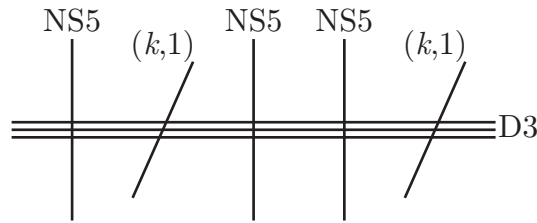


図 17:  $\mathcal{N} = 4$  クイバー CS 理論を与えるブレーン系

される。 $\sum_a k_a \neq 0$  の場合には、コンパクト化されている  $x^4$  方向に対して、

$$\sum_{a=1}^n k_a = \frac{1}{2\pi} \oint dC_0 \quad (400)$$

となるようにアクシオン場に対して非自明なモノドロミーを与えておけばよい。

D3-ブレーンと NS5-ブレーンの交差は、D3-ブレーンを複数の部分に分割し、クイバー型の理論を実現しているのであるが、NS5-ブレーンを、ゲージ群を変更せずにフレーバーを導入するためのブレーンであるとみなすこともできる。たとえば IIB 型弦理論の S-双対性変換を行えば D3-NS5 系は D3-D5 系になるが、この場合には D3-ブレーンと D5-ブレーンの間に張った開弦は簡単に量子化することができ、D3-ブレーン上のゲージ群の基本表現に属するハイパー多重項を与える。 $(k, 1)$  ブレーンについても同様にフレーバーブレーンとみなすことができる。このような二つの見方の存在は、3次元のミラー対称性 [54] と呼ばれる双対性に関係しているが、ここでは詳しくは述べない。

CS 項が現れると、光子が有質量になるので、超対称性を保つためには以前に述べたようにスカラー場に対しても同じ質量を与える必要がある。このためには、平行であった二枚の 5-ブレーンの向きを少し傾ければよい。片方の 5-ブレーンの向きを 37, 48, 59 平面上でそれぞれ  $\theta_{37}, \theta_{48}, \theta_{59}$  だけ傾ければ、それぞれのスカラー場に角度に比例した質量が与えられる。

これらの角度と電荷の関係をうまくとると、 $\mathcal{N} = 3$  の超対称性を実現できることをブレーンの立場からも見ておこう。まずは CS 項を導入する前の状況についてみておく。IIB 型弦理論の超対称変換パラメータを  $\epsilon = \epsilon_L + i\epsilon_R$  とする。これは次のカイラリティ条件を満足する。

$$\Gamma^{11}\epsilon = \epsilon. \quad (401)$$

D3-ブレーンの存在のもとで残る超対称性に対する条件は

$$i\Gamma^{0126}\epsilon = \epsilon \quad (402)$$

NS5-ブレーンの存在のもとで残る超対称性に対する条件は

$$\Gamma^{012345}\epsilon = \epsilon^* \quad (403)$$

これらは全て独立であり、残る超対称性の数は実で 8 個となる。

これら 3 つののうち、(401) と (402) が複素 32 成分のスピンルを複素 8 成分に落とし、(403) はそれを実 8 成分にすると考えることができる。

二枚の NS5-ブレーンを一般の  $(p, 1)$  5-ブレーンに置き換えると、さらに次の条件が付け加わる。

$$\Gamma^{012345}e^{\theta_{37}\Gamma^{37}}e^{\theta_{48}\Gamma^{48}}e^{\theta_{59}\Gamma^{59}}e^{i\theta_p}\epsilon = \epsilon^* \quad (404)$$

ただし  $\theta_p$  はブレーンの電荷に依存する内部空間における回転角で、次のように定義される

$$\tan \theta_p = 1 + ig_s p. \quad (405)$$

今度は (403) を  $\epsilon$  から  $\epsilon^*$  を決める式であると解釈し、(401) と (402)、そして (403) と (404) を組み合わせて得られる

$$\exp(\theta_{37}\Gamma^{37} + \theta_{48}\Gamma^{48} + \theta_{59}\Gamma^{59} + i\theta_p)\epsilon = \epsilon \quad (406)$$

の 3 つの式が  $\epsilon$  を決める式であると解釈するのがよい。

10 次元の座標を  $\mu = 012$  と  $i = 345789$  そして 6 に分解するとローレンツ対称性が  $SO(1, 9) = SO(1, 2) \times SO(6)$  と破れることに対応して  $\Gamma$  行列を

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes \mathbf{1}_8 \otimes \tau_x, \quad \Gamma^i = \mathbf{1}_2 \otimes \gamma^i \otimes \tau_y, \quad \Gamma^6 = \mathbf{1}_2 \otimes \bar{\gamma} \otimes \tau_y, \quad \Gamma^{11} = \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_8 \otimes \tau_z. \quad (407)$$

と分解しよう。ただし  $\bar{\gamma}$  は  $SO(6)$   $\gamma$ -行列  $\gamma^i$  に対するカイラリティ行列である。カイラル条件 (401) より、 $\epsilon$  を次のように分解することができる。

$$\epsilon = \eta_2 \otimes \chi_{4+\bar{4}} \otimes \uparrow \quad (408)$$

ただし  $\eta_2$  は 3 次元マヨラナスピノル、 $\chi_8$  は  $SO(6)$  のディラックスピノルである。さらに (402) は  $(\mathbf{1} \otimes \bar{\gamma} \otimes \tau_z)\epsilon = \epsilon$  と書き換えることができるから、

$$\epsilon = \eta_2 \otimes \chi_4 \otimes \uparrow \quad (409)$$

ここで、 $\epsilon_1$  の 16 個の成分を (406) に現れる行列の固有値で分解しよう。 $s_i = \pm 1$  を次の式によって導入する。

$$\Gamma^{37}\chi_4 = is_1\chi_4, \quad \Gamma^{48}\chi_4 = is_2\chi_4, \quad \Gamma^{59}\chi_4 = is_3\chi_4. \quad (410)$$

を導入し、全ての角度が等しいとしてみよう。すると、

$$\theta(s_1 + s_2 + s_3 + 1) = 0 \quad (411)$$

であれば、上の式を満足する  $\epsilon$  が存在する。 $\chi_4$  のカイラリティが正であるということは  $s_1s_2s_3 = +1$  を意味するので、許されるのは 4 通りである。そのうち、(406) を満足するのは

$$(s_1, s_2, s_3) = (+, -, -), (-, +, -), (+, -, -) \quad (412)$$

の 3 とおり。

従って、残る超対称性は  $\mathcal{N} = 3$  である。

## 4.9 SO および Sp ゲージ群

これまではもっぱらゲージ群が  $U(N)$  ( $SU(N)$ ) あるいはその積の場合のみを扱ってきた。そのような理論に対して“オリエンティフォールド射影”を行うことで  $SO(N)$  および  $Sp(N/2)$  ゲージ群を含む理論を得ることができる。

この射影は  $U(N)$  ゲージ群の基本表現  $\mathbf{N}$  と反基本表現  $\bar{\mathbf{N}}$  の間に関係をつけるような射影である。双基本表現に属するハイパー多重項  $h$  については（非常に大雑把に）

$$h = Mh^* \quad (413)$$

のような条件を課す。ただし  $M$  はあるユニタリー変換である。

射影を行う前、ハイパー多重項は対称性  $U(N)_1 \times U(N)_2 \times SU(2)_A \times SU(2)_B$  の表現  $(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$  または  $(\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$  に属する。ただし  $U(N)_1$  と  $U(N)_2$  は注目しているハイパー多重項に結合している二つのゲージ群である。

これらはどちらも複素表現である。オリエンティフォールド射影が超対称性を破らないとすると、射影の後も R-対称性はそのまま残る。また、(413) は  $h$  が実表現に属することを意味している。射影の後にゲージ群が  $G_1 \times G_2 \subset U(N)_1 \times U(N)_2$  になり、ハイパー多重項がこのゲージ群の表現  $(N, N)$  に属していたとしよう。 $G_1$

および  $G_2$  は  $SO(N)$  または  $Sp(N/2)$  である。 $h$  は R-対称性の擬実表現に属しているから、 $h$  が実であるためにはゲージ群の表現も擬実でなければならない。これは、 $G_1 \times G_2$  が  $SO(N) \times SO(N)$  や  $Sp(N/2) \times Sp(N/2)$  ではあり得ず、 $Sp(N/2) \times SO(N)$  か  $SO(N) \times Sp(N/2)$  でなければならないことを意味している。従って、クイバー図形上ではゲージ群  $SO$  と  $Sp$  が交互に現れる必要がある。

ブレーン構成では、このような理論は D3-ブレーンに平行な O3-ブレーンを導入することによって実現することができる。ゲージ群が  $SO$  になるか  $Sp$  になるか

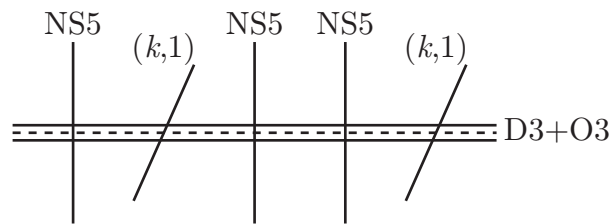


図 18:  $SO$  群や  $Sp$  群をゲージ群とする  $\mathcal{N} = 4$  CS 理論を実現するためのブレーン系。

はその O3-ブレーンの RR チャージが正か負かによって決まる。二種類のゲージ群が交互にあらわれるという現象は、NS5-ブレーンと O3-ブレーンが交差したときにその両側で O3-ブレーンのチャージが逆転するという性質 [55, 56, 57, 58] のためであると理解することができる。これは NS5-ブレーンが O3-ブレーン周りの  $B$  場の discrete torsion[59] を反転させるためである。

### 4.10 $\mathcal{N} \geq 5$

$\mathcal{N} = 4$  のクイバー CS 理論はクイバー図形の周長を 2 にすると R-対称性および超対称性が拡大することが知られている。[23, 22]

周期が 2 の円形クイバー図形で表される、二種類のハイパー多重項を一つずつ含む  $U(N_1) \times U(N_2)$   $\mathcal{N} = 4$  理論を考えよう。(図 19(a)) untwisted ハイパー多重



図 19: (a)  $\mathcal{N} = 6$ , (b)  $\mathcal{N} = 5$

項のスカラー場は  $SU(2)_A$  の  $\mathbf{2}$  表現として、twisted ハイパー多重項のスカラー場は  $SU(2)_B$  の  $\mathbf{2}$  表現として変換される。これらはどちらも同じゲージ群に結合しており、twisted ハイパー多重項の成分の複素共役を取っておけば、全て  $(N_1, \bar{N}_2)$  表現に属する。大域的対称性のもとでこれらは表 8 のように変換される。大域的

表 8:  $\mathcal{N} = 4$  CS 理論の大域的対称性

	untwisted		twisted	
	$q_1$	$\psi_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{\psi}_2$
$SU(2)_A \times SU(2)_B \times U(1)_D$	$(\mathbf{2}, \mathbf{1})_{+1}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{+1}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1}$	$(\mathbf{2}, \mathbf{1})_{-1}$
$U(1)_b$	+1	+1	+1	+1

対称性  $SU(2)_A \times SU(2)_B \times SU(2)_D$  は  $SU(4)$  に拡大する。スカラー場、フェルミオン場は以下のような表現に属する。

$$q : (\mathbf{2}, \mathbf{1})_{+1} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1} = \mathbf{4}, \quad \Psi : (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{+1} + (\mathbf{2}, \mathbf{1})_{-1} = \bar{\mathbf{4}}. \quad (414)$$

$U(1)_B$  対称性はそのまま残り、理論の大域的対称性は

$$SU(4) \times U(1)_B \quad (415)$$

である。これに伴い超対称性も  $\mathcal{N} = 6$  にまで拡大する。このモデルは ABJM モデル [23] と呼ばれる。

ABJM モデルのラグランジアンと変換則を  $SU(4)$  対称性が明らかな形で書き換えておこう。 $\mathcal{N} = 4$  のラグランジアンにおいて、レベルを次のように置く。

$$k_1 = k, \quad k_2 = -k, \quad (416)$$

このモデルでは  $(q_1^{\bar{A}}, \psi_{1A})$  が  $(N, \bar{N})$  表現に、 $(q_2^{\bar{A}}, \psi_{2\bar{A}})$  が  $(\bar{N}, N)$  表現に属しているから、後者の複素共役をとり、 $(N, \bar{N})$  に属する場を次のようにまとめておくのがよい。

$$q^i = (q_1^{\bar{A}}, \bar{q}_{2A}), \quad \Psi_i = (\epsilon_{\bar{A}\bar{B}} \bar{\psi}_2^{\bar{B}}, \epsilon^{AB} \psi_{1B}) \quad (417)$$

作用は以下の 3 つの和として与えられる。

$$S_{\text{kin}} = \int d^3x \text{tr} \left[ k \epsilon^{\mu\nu\rho} \left( \frac{1}{2} A_{1\mu} \partial_\nu A_{1\rho} - \frac{i}{3} A_{1\mu} A_{1\nu} A_{1\rho} - \frac{1}{2} A_{2\mu} \partial_\nu A_{2\rho} + \frac{i}{3} A_{2\mu} A_{2\nu} A_{2\rho} \right) - D_\mu \bar{q}_i D^\mu q^i - i \bar{\Psi}^i \gamma^\mu D_\mu \Psi_i \right], \quad (418)$$

$$S_{\text{pot}} = \frac{2}{k^2} \int d^3x \text{tr} \left[ -q^i \bar{q}_i q^k \bar{q}_j q^j \bar{q}_k + \frac{1}{6} q^k \bar{q}_i q^i \bar{q}_j q^j \bar{q}_k + \frac{1}{6} q^i \bar{q}_i q^j \bar{q}_j q^k \bar{q}_k + \frac{2}{3} q^i \bar{q}_k q^j \bar{q}_i q^k \bar{q}_j \right], \quad (419)$$

$$S_{\text{Yukawa}} = \frac{i}{k} \int d^3x \text{tr} \left[ 2 \Psi_i \bar{\Psi}^j q^i \bar{q}_j - 2 \bar{\Psi}^i \Psi_j \bar{q}_i q^j - \Psi_i \bar{\Psi}^i q^j \bar{q}_j + \bar{\Psi}^i \Psi_i \bar{q}_j q^j \right] + \frac{i}{k} \int d^3x \text{tr} \left[ \epsilon^{ijkl} \Psi_i \bar{q}_j \Psi_k \bar{q}_l - \epsilon_{ijkl} \bar{\Psi}^i q^j \bar{\Psi}^k q^l \right] \quad (420)$$

ポテンシャルは正定値であることが明らかな次の形に書き換えることができる。

$$S_{\text{pot}} = -\frac{2}{3k^2} \int d^3x \text{tr}(Q^i_k{}^j (Q^i_k{}^j)^\dagger) \quad (421)$$

ただし  $Q$  は次のように定義される。

$$Q^i_k{}^j = T^i_k{}^j - \frac{1}{2} \delta_k^j T^i_l{}^l + \frac{1}{2} \delta_k^i T^j_l{}^l, \quad T^i_k{}^j = q^i \bar{q}_k q^j - q^j \bar{q}_k q^i \quad (422)$$

$\mathcal{N} = 4$  対称性の変換パラメータは  $SU(2) \times SU(2)$  の双スピノル表現に属している。R-対称性の添え字の上げ下げは次のように行う。

$$(\xi_{\bar{A}\bar{B}})^* = \xi^{\bar{A}\bar{B}} = \epsilon^{\bar{A}\bar{C}} \epsilon^{\bar{B}\bar{D}} \xi_{\bar{C}\bar{D}} \quad (423)$$

このパラメータを  $\mathcal{N} = 6$  のパラメータに次のように埋め込まれる。

$$\xi_{ij} = \begin{pmatrix} & \epsilon_{\bar{A}\bar{B}} \xi^{\bar{B}\bar{A}} \\ \epsilon^{AB} \xi_{\bar{A}\bar{B}} & \end{pmatrix} \quad (424)$$

(423) を用いれば  $\xi_{ij}$  が次の式を満足することが示される。

$$\xi_{ij} = -\xi_{ji}, \quad (\xi_{ij})^* = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} \xi_{kl} \quad (425)$$

ただし、 $SU(4)$  不変反対称テンソルは次のように定義する。

$$\epsilon_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}} = \epsilon_{\bar{A}\bar{B}} \epsilon^{\bar{C}\bar{D}} \quad (426)$$

作用が  $SU(4)$  不変であるから、(425) を満足する任意の変換パラメータのもとで作用は不変である。変換則は次のように与えられる。[60, 22, 61]

$$\delta q^i = \sqrt{2} \xi^{ji} \Psi_j, \quad (427)$$

$$\delta \Psi_i = -\sqrt{2} \gamma^\mu \xi_{ij} D_\mu q^j + \frac{\sqrt{2}}{k} \xi_{ij} (q^k \bar{q}_k q^j - q^j \bar{q}_k q^k) - \frac{2\sqrt{2}}{k} \xi_{jk} (q^j \bar{q}_i q^k), \quad (428)$$

$$\delta A_{1\mu} = -\frac{\sqrt{2}i}{k} [\xi_{ij} \gamma_\mu (q^i \bar{\Psi}^j) + \xi^{ij} \gamma_\mu (\Psi_i \bar{q}_j)], \quad (429)$$

$$\delta A_{2\mu} = \frac{\sqrt{2}i}{k} [\xi^{ij} \gamma_\mu (\bar{q}_i \Psi_j) + \xi_{ij} \gamma_\mu (\bar{\Psi}^i q^j)] \quad (430)$$

フェルミオンの変換則は次のように書くこともできる。

$$\delta \Psi_i = -\sqrt{2} \gamma^\mu \xi_{ij} D_\mu q^j - \frac{\sqrt{2}}{k} \xi_{jk} Q^j_i{}^k \quad (431)$$

ABJM モデルにおいても Gaiotto-Witten 理論の場合と同じ方法で二つの  $U(1)$  部分を取り除くことができ、ゲージ群を  $SU(N_1) \times SU(N_2)$  とすることができる。



ABJM モデルにおいてゲージ群が  $SU(2) \times SU(2)$  の場合には 4 つの複素スカラー場が属するゲージ群の表現  $(N, \bar{N})$  が実表現  $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$  になる。このため、R 対称性は  $SU(4) \times U(1)_B$  から  $SO(8)$  にまで拡大し、超対称性の個数は  $\mathcal{N} = 8$  となる。スカラー場とフェルミオン場が属する表現は以下のようなになる。

$$q : \mathbf{4}_{+1} + \bar{\mathbf{4}}_{-1} = \mathbf{8}_v, \quad \Psi : \bar{\mathbf{4}}_{+1} + \mathbf{4}_{-1} = \mathbf{8}_s. \quad (432)$$

これは  $A_4$  代数の BLG モデル [1, 2, 3, 4, 5] に他ならない。

最後に  $\mathcal{N} = 5$  理論 [22] について述べておこう。 $\mathcal{N} = 5$  理論を得るためには、§4.9 で考えた  $SO(N)$  と  $Sp(N/2)$  を含むクイバー CS 理論のクイバーの周期を 2 に取ればよい。すなわちゲージ群を  $Sp(k) \times SO(N)$  に取ればよい。(図 19 (b)) このとき大域的対称性は  $Sp(2) \sim SO(5)$  に拡大し、それに伴い超対称性は  $\mathcal{N} = 5$  になる。スカラー場とフェルミオンは  $Sp(2)$  の次の表現に属する。

$$(\mathbf{2}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \mathbf{4}, \quad (\mathbf{1}, \mathbf{2}) + (\mathbf{2}, \mathbf{1}) = \mathbf{4}. \quad (433)$$

この理論は ABJM モデルの射影として与えることもできる。すなわち、スカラー場  $q^{ia}{}_{\alpha}$  に対しては次の射影を行う。

$$(\bar{q})_{ia}{}^{\alpha} = \omega_{ij} \Omega^{ab} \delta^{\alpha\beta} q^{jb}{}_{\beta} \quad (434)$$

ただし、 $\omega, \Omega, \delta$  はそれぞれ  $Sp(2), Sp(k), SO(N)$  の不変テンソルである。

## 5 $AdS_4/CFT_3$

### 5.1 一般の $AdS_4$ 古典解について

$AdS_4/CFT_3$  について議論する準備として  $AdS_4 \times X_7$  の構造をもった 11 次元超重力理論の古典解について考えよう。 $X_7$  は 7 次元 Einstein 多様体である。 $AdS_4 \times X_7$  の計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = \frac{R_4^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2) + R_7^2 ds^2[\tilde{X}_7] \quad (435)$$

ただし  $\tilde{X}_7$  はリッチテンソルが  $R_{ij} = 6g_{ij}$  と与えられるように  $X_7$  の大きさを規格化したものである。 $X_7$  を貫くフラックスの本数を  $N$  とする。すなわち次のように  $N$  を定義する。

$$\oint_{X_7} F_7 = 2\pi N \quad (436)$$

11 次元超重力理論の運動方程式を解くことにより  $R_4$  と  $R_7$  を  $N$  の関数として与えることができる。Freund-Rubin 形の ansatz [62] を仮定すると簡単に次の関係式が得られる。

$$R_7 = 2R_4, \quad (437)$$

$$T_{M5} = \frac{2\pi}{(2\pi l_p)^6} = \frac{2\pi N}{6R_7^6 \text{Vol}(\tilde{X}_7)} \quad (438)$$

内部空間  $X_7$  の構造によって、超対称性がどれだけ残るかが決まる。表 9 にその関係を与えておく。

表 9: 3 次元の超対称性と、対応する多様体。  $X_7$  は 7 次元アインシュタイン空間である。超対称性の数は  $Q$  の個数（即ち  $S$  は含まない）で与えてある。

SUSY	$X_7$	cone over $X_7$
$\mathcal{N} = 1$	weak $G_2$	Spin(7)
$\mathcal{N} = 2$	Sasaki-Einstein	Calabi-Yau
$\mathcal{N} = 3$	tri-Sasakian	hyper-Kähler
$\mathcal{N} \geq 4$	locally $\mathbf{S}^7$	Locally flat

$X_7$  を内部空間であるとして 11 次元超重力理論をコンパクト化すると次の 4 次元重力理論の作用が得られる。

$$S = \frac{1}{2\kappa_4^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \frac{12}{R_4^2} \right) + \dots \quad (439)$$

宇宙定数はこの作用から得られるアインシュタイン方程式の解である  $AdS$  空間の半径が  $R_4$  になるように決めた。ニュートン定数は 11 次元の超重力理論のアインシュタイン項が  $2\pi(2\pi l_p)^{-9} \sqrt{-g} R$  と与えられることを用いれば次のように決まる。

$$\frac{1}{2\kappa_4^2} = \frac{2\pi \text{Vol}(X_7)}{(2\pi l_p)^9} = \frac{2\pi}{R_7^2} \left( \frac{N^3}{6^3 \text{Vol}(\tilde{X}_7)} \right)^{1/2} \quad (440)$$

4 次元超重力理論の作用 (439) と GKP-Witten 関係式 [63, 64] を用いて境界上の CFT のエネルギー運動量テンソル  $T$  の相関関数を計算してみよう。ここでは数係数やテンソル添え字などを無視した大雑把な議論を行い、 $N$  への依存性を見ることにする。共形対称性より相関関数の座標依存性は次のように決まる。

$$\langle T(x)T(y) \rangle \sim \frac{c}{|x-y|^6} \quad (441)$$

$c$  は次元を持たない数係数で、これが  $N$  にどのように依存するかということがここでの問題である。GKP-Witten 関係式

$$\langle e^{\int d^3x h T} \rangle_{\text{CFT}} = e^{S[g]} \quad (442)$$

は、CFT における相関関数を超重力理論の作用を用いて与える式である。右辺の  $S[g]$  は、境界において  $g \sim g_0 + h$  となるような古典解を作用に代入したものである。二点関数の部分を取り出せば

$$\langle TT \rangle_{\text{CFT}} = \left. \frac{\delta^2 S}{\delta h \delta h} \right|_{h=0} \quad (443)$$

となる。

ここで、右辺は明らかに作用の overall factor  $1/2\kappa_4^2$  を含む。そしてニュートン定数以外に用いることができる次元を持つパラメータは宇宙定数として現れる  $R_4$  だけである。従って

$$c \sim \frac{R_4^2}{\kappa_4^2} \sim \frac{R_4^2 R_7^7 \text{Vol}(\tilde{X}_7)}{\kappa_{11}^2} \sim \frac{N^{3/2}}{\text{Vol}^{1/2}(\tilde{X}_7)} \quad (444)$$

となり、これは有効な自由度の数が  $N^{3/2}$  に比例することを意味している [65]。これを場の理論側で証明することは難しく、いまだに成功していない。

一般に、演算子の共形次元  $\lambda$  と、対応する  $\text{AdS}_4$  上の場の質量  $M$  の間には次の関係がある。

$$\lambda = R_4 M. \quad (445)$$

実際にこの関係によって超重力理論側で予想される結果が場の理論側の解析と合っていることを、メソン演算子と Kaluza-Klein モード、バリオン演算子と wrapped M5-ブレーンの対応などについていくつかの具体例で見てみよう。

## 5.2 $\mathcal{N} = 6$ ( $\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k$ )

ABJM 理論の重力双対の内部空間  $\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k$  上の Kaluza-Klein モードとメソン演算子の対応について見てみよう。11 次元の超重力理論の  $\mathbf{S}^7$  コンパクト化における Kaluza-Klein モードについては [66] で調べられているが、ここでは詳しい解析は行わず、大雑把な議論だけにとどめる。

$\mathbf{S}^7$  上の Kaluza-Klein モードの質量  $M_{\text{KK}}$  はその半径の逆数の整数倍として  $M_{\text{KK}} = n/R_7$  与えられる。(437) の関係式  $R_7 = 2R_4$  を用いれば、

$$\lambda = \frac{R_4}{R_7} n = \frac{1}{2} n \quad (446)$$

となる。これはスカラー場の共形次元が  $1/2$  であり、メソン演算子の次元はその整数倍になることに対応している。

もう少し丁寧な解析を行おう。まず  $\mathcal{N} = 2$  の部分代数に注目しその部分代数の意味でのプライマリー演算子を搜してみよう。ABJM モデルを  $\mathcal{N} = 2$  のクイバー

ゲージ理論として表すと、図 7 のクイバー図形で表される。R-対称性は見かけ上次のように分解される。

$$\mathrm{SU}(4)_R \rightarrow \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)_R. \quad (447)$$

最後の  $\mathrm{U}(1)_R$  が  $\mathcal{N} = 2$  部分代数の R-対称性である。二種類のカイラル超場  $A_i$  と  $B_i$  はそれぞれ異なる  $\mathrm{SU}(2)$  で変換される。

(274) によって定義されるモノポール演算子  $\mathbf{m}$  は ABJM モデルの場合には  $\mathrm{U}(N)_1$  の基本表現添え字を  $k$  個、 $\mathrm{U}(N)_2$  の反基本表現添え字を  $k$  個持っている。

$$\mathbf{m}_{b_1 \dots b_k}^{a_1 \dots a_k} \quad (448)$$

$N = 1$  の場合には  $\mathfrak{M} = \mathbf{m} = e^{ia}$  であり、その  $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$  チャージがレベルと同じ、すなわち  $(k, -k)$  である。

カイラル多重項のスカラー成分とモノポール演算子  $\mathbf{m}$  について、共形次元、や R-電荷などを表 10 にまとめておく。演算子  $\mathbf{m}$  が共形次元などに寄与しないこと

表 10: ABJM モデルに現れる基本的なプライマリ演算子。ゲージ不変なプライマリ演算子はこれらを組み合わせることで構成される。

	$(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1))_{\mathrm{gauge}}$	$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$	$R$	$\Delta$
$A_i$	$(1, -1)$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$B_i$	$(-1, 1)$	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{m}$	$(k, -k)$	$(0, 0)$	0	0

は動径量子化法 [32, 33] を用いて示すことができる。

これらを組み合わせることによりゲージ不変なプライマリ演算子を次のように与えることができる。

$$\mathcal{O} = \mathbf{m}^{(b-a)/k} A^a B^b. \quad (449)$$

モノポール演算子のべきが整数でなければならないので、

$$a - b \in k\mathbb{Z} \quad (450)$$

でなければならない。(449) では省略したが  $A_i$  や  $B_i$  は  $\mathrm{SU}(2)$  添え字を持つため、この演算子は  $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$  対称性のスピン  $(a/2, b/2)$  表現に属する。共形次元は

$$\lambda = \frac{1}{2}(a + b) \quad (451)$$

である。

これらのプライマリー演算子を本来の  $SU(4)_R$  対称性の表現へと拡張すると、次のようになる。

$$\mathcal{O} = \mathbf{m}^{(b-a)/k} f_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} q^{i_1} \dots q^{i_a} \bar{q}_{j_1} \dots \bar{q}_{j_b} \quad (452)$$

ただし  $q^i$  は  $A_i$  と  $(B_i)^\dagger$  を組み合わせた  $SU(4)_R$  4 重項である。係数  $f$  はトレースレスで、上付き、下付きそれぞれの添え字に対して完全対称なテンソルであり、 $SU(4)_R$  の表現  $(a, 0, b)$  に属している。ディンキン図は図 20 に与えられている。

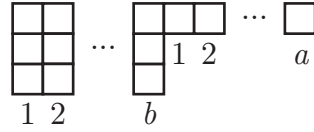


図 20:  $SU(4)_R$  の表現  $(a, 0, b)$  のディンキン図形

これに対応する  $\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k$  上の Kaluza-Klein モードを見てみよう。ここでは議論を簡単にするために、 $\mathbf{S}^7$  上の零質量のスカラー場  $\phi$  を考える。11 次元超重力理論にはスカラー場は含まれないから、この計算は近似としてしか意味を持たないことに注意すること。解くべきラプラス方程式は

$$(4\Delta_{\text{AdS}_4} + \Delta_{\mathbf{S}^7})\phi = 0 \quad (453)$$

である。ただし  $\Delta_{\text{AdS}_4}$  と  $\Delta_{\mathbf{S}^7}$  は半径が 1 の AdS および  $\mathbf{S}^7$  上のラプラシアンであり、第 1 項に 4 という係数があるのは  $R_4$  と  $R_7$  の間の関係 (437) のためである。次のような ansatz をおく。

$$\phi = z^\lambda f^{(a,b)}(\theta) \quad (454)$$

ただし  $\theta$  は  $\mathbf{S}^7$  上の座標であり、座標  $z$  は (435) にある、AdS の半径方向の座標である。 $f^{(a,b)}$  は  $\mathbf{S}^7$  上の球面調和関数であり、 $\mathbf{S}^7$  を含む  $\mathbb{C}^4$  上の座標を  $z^i$  とすると次のように与えることができる。

$$f^{(a,b)} = f_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} z^{i_1} \dots z^{i_a} \bar{z}_{j_1} \dots \bar{z}_{j_b} \quad (455)$$

$\mathbb{Z}_k$  は  $z^i$  と  $\bar{z}_i$  に逆位相で作用する。従って関数  $f^{(a,b)}$  には次のように作用する。

$$f^{(a,b)} \rightarrow \omega_k^{(a-b)} f^{(a,b)}. \quad (456)$$

従って、 $\mathbb{Z}_k$  のもとでの不変性が条件 (450) を与える。波動関数 (454) をラプラス方程式 (453) に代入すると次の式が得られる。

$$4\lambda(\lambda - 6) = (a + b)(a + b + 6) \quad (457)$$

従って、 $\lambda$  や  $a + b$  が十分大きい場合には

$$\lambda = \frac{a+b}{2} + 3. \quad (458)$$

という関係式が得られる。上でも述べたように、スカラー場を用いて得られたこの結果は近似であり、定数部分は意味がない。より詳しい解析によれば、 $\delta g_\mu^\mu$ ,  $\delta g_i^i$ ,  $\delta A_{\mu\nu\rho}$  のある線形結合から次のモードが現れることが示される。

$$\lambda = \frac{a+b}{2}. \quad (459)$$

詳しくはレビュー [67] やそこに乗っている参考文献などを参照すること。以上の解析は演算子 (452) の次元や表現を再現している。

次に、バリオンの演算子について考えてみよう。これは次のように定義される。

$$B^{i_1 \dots i_N} = \epsilon_{a_1 \dots a_N} \epsilon^{b_1 \dots b_N} (q^{i_1})_{a_N}^{a_1} \dots (q^{i_N})_{b_N}^{a_N} \quad (460)$$

これは  $SU(4)_R$  対称性の  $\text{Sym}^N \mathbf{4}$  表現に属しており、共形次元

$$\lambda = \frac{N}{2} \quad (461)$$

を持つ。AdS/CFT におけるこのようなバリオン演算子については [68] において議論されている。そこでは共形次元がブレーンの質量によって再現されること、そのブレーンの集団運動の量子化によって縮退度も計算できることが示されている。ここでは共形次元のみについて確認する。

一般に CFT におけるバリオン演算子は AdS 側では内部空間のサイクルに巻きついたブレーンとして表される。そこで  $\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k$  にどのようなサイクルがあるかを調べよう。 $\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k$  は  $\mathbf{CP}^3$  上の  $\mathbf{S}^1$  ファイバー束として与えることができるから、 $\mathbf{CP}^3$  のホモロジー  $H_i(\mathbf{CP}^3, \mathbb{Z})$  が

$$H_0 = \mathbb{Z}, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = \mathbb{Z}, \quad H_3 = 0, \quad H_4 = \mathbb{Z}, \quad H_5 = 0, \quad H_6 = \mathbb{Z}. \quad (462)$$

と与えられることと、Gysin 完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\sigma} & H_{n+1}(\mathbf{CP}^3) & \xrightarrow{g} & H_{n-1}(\mathbf{CP}^3) & \xrightarrow{f} & H_n(\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k) & \xrightarrow{\sigma} & H_n(\mathbf{CP}^3) & \xrightarrow{g} & H_{n-2}(\mathbf{CP}^3) & \xrightarrow{f} \\ & & & & & & & & & & \end{array} \quad (463)$$

を用いて導くことができる。ただし  $\sigma$  はファイバー束からベースへの射影、 $g$  はオイラークラスのポアンカレ双対 (Dirac 弦のようなもの) との交差、 $f$  はファイバーを付け加える操作を表す。 $g$  で用いられるサイクルは  $H_4(\mathbf{CP}^3)$  の生成元の  $k$  倍である。その結果  $H_i(\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z})$  は次のように与えられる。

$$\begin{array}{ccccccc} H_0 = \mathbb{Z}, & H_1 = \mathbb{Z}_k, & H_2 = 0, & H_3 = \mathbb{Z}_k, \\ H_4 = 0, & H_5 = \mathbb{Z}_k, & H_6 = 0, & H_7 = \mathbb{Z}. \end{array} \quad (464)$$

バリオン演算子と関係するのは  $H_5 = \mathbb{Z}_k$  である。このサイクルに巻きついた M5-ブレーンをバリオン演算子と同定することができる。  $H_5$  の生成元に対応する 5-サイクルを  $\Sigma$  としよう。  $\Sigma$  は、  $\mathbf{S}^7$  中の  $\mathbf{S}^5$  を  $\mathbb{Z}_k$  で割ったものであり、そのサイズは

$$\text{Vol}(\Sigma) = \frac{R_7^5}{k} \text{Vol}(\tilde{\mathbf{S}}^5) \quad (465)$$

によって与えられる。従って、そこに巻きついた M5-ブレーンに対応する演算子の次元は

$$\lambda = R_4 T_{M5} \text{Vol}(\Sigma) = \frac{\pi N}{6} \frac{\text{Vol}(\tilde{\Sigma})}{\text{Vol}(\tilde{X}_7)} \quad (466)$$

ただし、  $\text{Vol}(\tilde{\Sigma}) = R_7^5 \text{Vol}(\Sigma)$  はサイズが規格化された多様体  $\tilde{X}_7$  上でのサイクルの体積である。最後の表式を得るのに (437) と (438) を用いた。  $\Sigma$  も  $X_7$  もどちらも  $\mathbb{Z}_k$  で割られるので、この値は  $k$  に依存しない。球面の体積は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\tilde{\mathbf{S}}^1) &= 2\pi, & \text{Vol}(\tilde{\mathbf{S}}^2) &= 4\pi, & \text{Vol}(\tilde{\mathbf{S}}^3) &= 2\pi^2, & \text{Vol}(\tilde{\mathbf{S}}^4) &= \frac{8\pi^2}{3}, \\ \text{Vol}(\tilde{\mathbf{S}}^5) &= \pi^3, & \text{Vol}(\tilde{\mathbf{S}}^6) &= \frac{16\pi^3}{15}, & \text{Vol}(\tilde{\mathbf{S}}^7) &= \frac{\pi^4}{3}. \end{aligned} \quad (467)$$

これを用いると、(466) は次のようになる。

$$\lambda = \frac{\pi N}{6} \frac{\text{Vol}(\tilde{\mathbf{S}}^5)}{\text{Vol}(\tilde{\mathbf{S}}^7)} = \frac{N}{2}. \quad (468)$$

これはちょうどバリオン演算子の次元を再現している。

$H_5 = \mathbb{Z}_k$  であるということは、バリオン演算子が  $k$  個集まるとメソン演算子の積に分解できることを意味している。実際に (275) の関係を用いると次のような分解が可能である。

$$\mathfrak{m}^{-1} B^k = (\mathfrak{m}^{-1} q^k)^N \quad (469)$$

IIA 型弦理論の立場ではこの式の左辺は  $H_4(\mathbf{CP}^3) = \mathbb{Z}$  のサイクルに巻きついた  $k$  枚の D4-ブレーン、右辺は  $N$  個の D-粒子に対応している。上記の Gysin 完全系列の 5-サイクルに関係する部分

$$H_6(\mathbf{CP}^3) \xrightarrow{g} H_4(\mathbf{CP}^3) \xrightarrow{f} H_5(\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k) \xrightarrow{\sigma} 0 \quad (470)$$

はまさにこのような分解が可能であることを表している。すなわち、この完全系列は「 $\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k$  の 5-サイクルに巻きついた M5-ブレーンは大まかには  $\mathbf{CP}^3$  の 4-サイクルに巻きついた D4-ブレーンと同一視できるが、D4-ブレーンは  $k$  枚集まる

と NS5-ブレーンインスタントンを用いて解くことができる。」と読むことができる。(  $N$  個の D-particle が生成されることを示すには NS5 インスタントンと背景の RR フラックスの結合を考慮する必要がある。)

$\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k$  には (464) にあるように 3 サイクルが存在しているので、そこに M5-ブレーンをまきつけることによって分数的 M2-ブレーンを実現することができる [69]。これは、Klebanov-Witten 理論の場合同様に、二つのゲージ群のサイズの差  $N_1 - N_2$  を表す自由度であるとみなすことができる。 $N_1$  と  $N_2$  はブレーン構成においては二枚のブレーンの間に張った D3-ブレーンの枚数である。注意しなければならないのは、NS5-ブレーンと  $(k, 1)$  5-ブレーンの位置を入れ替えると、Hanany-Witten 効果 [70] によって  $k$  枚の D3-ブレーンが生成されるという点である。このため、ブレーンの入れ替えはブレーンの枚数を次のように変化させる。

$$\leftrightarrow (N_2, 2N_2 - N_1 + k) \leftrightarrow (N_1, N_2) \leftrightarrow (2N_1 - N_2 + k, N_1) \leftrightarrow (471)$$

特に二つのゲージ群のサイズの差に注目すると、

$$\leftrightarrow N_1 - N_2 - k \leftrightarrow N_1 - N_2 \leftrightarrow N_1 - N_2 + k \leftrightarrow (472)$$

のように、ブレーンの入れ替えによって  $k$  だけ変化する。このことは、分数的 M2-ブレーンの枚数が  $\text{mod } k$  でのみ定義できることを意味している。このことは  $\mathbf{S}^7/\mathbb{Z}_k$  のホモロジー  $H_3 = \mathbb{Z}_k$  と対応している。

### 5.3 $\mathcal{N} = 4 ((\mathbf{S}^7/(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))/\mathbb{Z}_k)$

$\mathcal{N} = 4$  CS 理論のモジュライ空間は (394) に与えられている。これより、対応する内部空間が

$$X_7 = (\mathbf{S}^7/(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))/\mathbb{Z}_k \quad (473)$$

によって与えられることが分かる。このオービフォールドのホモロジー  $H_i(X_7, \mathbb{Z})$  は [71] において調べられ、次のように与えられることが分かっている。

$$\begin{aligned} H_0 &= \mathbb{Z}, & H_1 &= \mathbb{Z}_k, & H_2 &= \mathbb{Z}^{p+q-2}, & H_3 &= (\mathbb{Z}_{kp}^{q-1} \times \mathbb{Z}_{kq}^{p-1} \times \mathbb{Z}_{kpq})/(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q), \\ H_4 &= 0, & H_5 &= \mathbb{Z}^{p+q-2} \times \mathbb{Z}_k, & H_6 &= 0, & H_7 &= \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (474)$$

5-サイクルに巻きついた M5-ブレーンとバリオン演算子の対応、3-サイクルに巻きついた M5-ブレーンと CS 理論における Seiberg 双対性 [72, 73] の対応などは ABJM モデルの場合と同様に調べることができる [71]。 $p = q = 1$  の場合には ABJM モデルに帰着する。

ABJM モデルにはないこの理論の特徴として、(464) には無かった 2-サイクルが存在しているという点が挙げられる。これら 2-サイクルに巻きついた M2-ブレーンはモノポール演算子のうちの対角的でないものに対応している [71]。CS 理論におけるモノポール演算子のスペクトルと 2-サイクルに巻きついた M2-ブレーンとの比較は [74] において部分的に行われ、スペクトルが一致していることが示された。



5.4  $\mathcal{N} = 2$  ( $Q^{1,1,1}$ )

次に、 $\mathcal{N} = 2$  の超対称性を与え、CFT 側で量子効果が重要となるような非自明な例を見てみよう。AdS 側ではこれは  $S^7$  のオービフォールドではない Sasaki-Einstein 多様体を取ることを意味する。そのような多様体としては長い間等質なものだけが知られていたが、最近そうではない多様体の例がいくつか知られるようになった。たとえば  $Y^{p,k}$  と呼ばれる、無限個の多様体の系列について [75] において調べられている。しかしここでは最も簡単な等質多様体の一つである  $Q^{1,1,1}$  について見てみる。この多様体についての AdS/CFT 対応は他の等質多様体とともに [76] で詳しく調べられている。

AdS<sub>5</sub>/CFT<sub>4</sub> において、 $\mathbb{C}^3$  およびそのオービフォールド以外の背景時空の初めての例は Klebanov-Witten[77] によって提案された conifold である。この例は AdS/CFT の理解に大きな役割を果たした。conifold は次のように定義される 5 次元 Sasaki-Einstein 多様体  $T^{1,1}$  上の cone として表すことができる。

$$T^{1,1} = \frac{SU(2) \times SU(2)}{U(1)}. \quad (475)$$

7 次元 Sasaki-Einstein 多様体である  $Q^{1,1,1}$  はこの拡張として次のように与えられる。

$$Q^{1,1,1} = \frac{SU(2) \times SU(2) \times SU(2)}{U(1) \times U(1)} \quad (476)$$

これは  $S^2 \times S^2 \times S^2$  上の  $S^1$  ファイバー束であり、それぞれの  $S^2$  上の Chern クラスが 1 であるようなものである。アイソメトリーは

$$SU(2)^3 \times U(1)_R \quad (477)$$

である。最後の  $U(1)$  は  $R$  対称性である。 $\mathbb{Z}_n \subset U(1)_R$  によるオービフォールドとして等質多様体  $Q^{n,n,n}$  を得ることができるが、これは超対称性を残さないで、ここでは  $Q^{1,1,1}$  だけを考えることにする。

対応する cone は 6 個の場  $(a^1, a^2, b^1, b^2, c^1, c^2)$  と二つの  $U(1)$  ゲージ群を持つ GLSM によって与えることができる。電荷行列は次のように与えられる。

$$Q_{aI} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (478)$$

この電荷行列から、トーリック図形 (図 21) が直ちに得られる。<sup>6</sup> Klebanov-Witten 理論の場合には、対応するゲージ理論は conifold を GLSM で表し、そのゲージ群を一般の  $U(N)$  に格上げし、超ポテンシャル

$$W \sim \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \text{tr}(A^i B^j A^k B^l) \quad (479)$$

<sup>6</sup>生成演算子を例えば  $\mathcal{O}_1 = a_1/a_2$ ,  $\mathcal{O}_2 = b_1/b_2$ ,  $\mathcal{O}_3 = a_2 b_2 c_2$ ,  $\mathcal{O}_4 = a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2$  のように取って §3.6 に与えた手続きを踏めばよい。

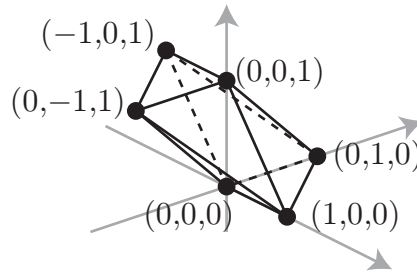


図 21:  $Q^{1,1,1}$  のトーリック図形

を導入することで構成することができた。この超ポテンシャルは  $N = 1$  の場合には恒等的に 0 になるが、一般の  $N$  の場合には正しいモジュライ空間を与えるために不可欠である。

$Q^{1,1,1}$  の場合についても、GLSM 場  $a^i, b^i, c^i$  を双基本表現の  $N \times N$  行列場  $A^i, B^i, C^i$  に格上げし、図 22 のようなクイバーゲージ理論にすればよさそうに思われる。しかしこの場合にはモジュライ空間を正しく与えるための拘束条件を  $F$ -term

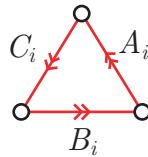


図 22:  $Q^{1,1,1}$  を与えそうなクイバーゲージ理論

条件として与えるような超ポテンシャルを与えることができない。ためしに次のような超ポテンシャルを書いてみよう。

$$W \sim \epsilon_{il} \epsilon_{jm} \epsilon_{kn} \text{tr}(A^i B^j C^k A^l B^m C^n) \tag{480}$$

これは Klebanov-Witten 理論の場合と異なり  $N > 1$  であっても恒等的に 0 になってしまう。しかしながらこの点を除けば (22) のクイバーゲージ理論の性質は  $Q^{1,1,1}$  の構造とうまく合致しているように思われる。CS 理論を用いることでこの問題がどのように解決されるかはあとで述べる。

メソン演算子と Kaluza-Klein モードの対応を見ておこう。

コンフォーマル代数を用いると R チャージ  $n$  のカイラルプライマリー演算子の共次元  $\lambda$  に対して

$$\lambda = n \tag{481}$$

が成り立つはずである。

$S^1$  方向へのアイソメトリーが  $R$  対称性であるから、R チャージ  $n$  のメソン演算子は  $S^1$  方向の Kaluza-Klein モードの  $n$  番目のレベルに対応しているはずであ

る。従って関係式 (481) は  $\mathbf{S}^1$  の半径が AdS 半径  $R_4$  に一致することを示唆している。(このような議論は Klebanov-Witten 理論の場合にも行うことができた。) 実際にそうなっていることを確かめよう。そのためにまず  $\tilde{Q}^{1,1,1}$  (すなわち条件 ( $R_{ij} = 6g_{ij}$ ) によって大きさを規格化した  $Q^{1,1,1}$ ) の計量を具体的に決めることから始める。

この多様体はそれぞれの  $\mathbf{S}^2$  に作用する  $SU(2)$  対称性が 3 つと、ファイバーに作用する  $U(1)$  をアイソメトリーとして持つ。このアイソメトリーと、3 つの  $\mathbf{S}^2$  に対する入れ替えの対称性を仮定すれば、計量は次のように置く事ができる。

$$ds^2 = R^2 \sum_{i=1}^3 (d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2) + r^2 (d\psi + A)^2. \quad (482)$$

ただし、 $\psi$  の周期は  $4\pi$  であるとし、 $A$  は次のように与えられる、それぞれの  $\mathbf{S}^2$  上でのモノポールゲージ場の和である。

$$A = \sum_{i=1}^3 \cos \theta_i d\phi_i. \quad (483)$$

一般に、 $\mathbf{S}^1$  コンパクト化された空間の計量が

$$ds^2 = ds_B^2 + L^2 (dy + A) \quad (484)$$

と与えられるとき、リッチテンソルは次のように与えられる。

$$R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}}^{(\text{base})} - \frac{L^2}{2} F_{\hat{\mu}\hat{\sigma}} F_{\hat{\nu}\hat{\sigma}}, \quad R_{\hat{\mu}\hat{y}} = -\frac{L}{2} D_{\hat{\kappa}} F_{\hat{\kappa}\hat{\mu}}, \quad R_{\hat{y}\hat{y}} = \frac{L^2}{4} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} F_{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \quad (485)$$

$R^{(\text{base})}$  はベース空間上の計量を用いて構成されたリッチテンソルである。 $F_{\mu\nu}$  の積分値は座標  $y$  の周期を単位として量子化されることを知っておくと便利である。

この公式を用いて計量 (482) で与えられる多様体上の計量を決定しよう。ベース空間は半径  $R$  の  $\mathbf{S}^2$  の直積であるが、それぞれの  $\mathbf{S}^2$  上の場の強さ  $F_2$  は、 $\mathbf{S}^2$  上の積分が  $\psi$  座標の周期  $4\pi$  を与えることから  $\mathbf{S}^2$  の体積 2-形式  $\omega_2$  を用いて  $F_2 = R^{-2}\omega_2$  と与えられる。また、ベース空間は半径  $R$  の  $\mathbf{S}^2$  の直積であるから、そのリッチテンソルは計量の  $1/R^2$  倍に一致する。従って公式を用いて上記の計量に対するリッチテンソルは次のように与えられる。

$$R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{1}{R^2} \delta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{r^2}{2R^4} \delta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}, \quad R_{\hat{\mu}\hat{\psi}} = 0, \quad R_{\hat{\psi}\hat{\psi}} = \frac{3r^2}{2R^4}. \quad (486)$$

従って、計量がアインシュタインで  $R_{MN} = 6g_{MN}$  であるためには、パラメータ  $r$  と  $R$  が次の値をとらなければならないことが分かる。

$$r^2 = \frac{1}{16}, \quad R^2 = \frac{1}{8}. \quad (487)$$

すなわち、規格化されていない  $Q^{1,1,1}$  における  $\mathbf{S}^2$  と  $\mathbf{S}^1$  の半径は

$$R_{\mathbf{S}^1} = \frac{R_7}{2} = R_4, \quad R_{\mathbf{S}^2} = \frac{R_7}{\sqrt{8}} = \frac{R_4}{\sqrt{2}} \quad (488)$$

と与えられる。(ψ 座標の周期が  $4\pi$  であるので  $\mathbf{S}^1$  の半径は  $2R_7r$  であることに注意。) こうして  $R_{\mathbf{S}^1} = R_4$  が得られ、その Kaluza-Klein モードに対応する演算子の共形次元 (481) が再現される。

演算子の縮退度を決定するためにもうすこし丁寧に解析してみよう。 $Q^{1,1,1}$  は (476) によって与えられるから、この空間上の Kaluza-Klein モードは  $SU(2)^3 \sim (\mathbf{S}^3)^3$  上の調和関数のうち電荷行列 (478) によって指定される  $U(1)^2$  で不変なものとして与えられる。それぞれの  $\mathbf{S}^3$  上の調和関数は GLSM 場を用いて与えることができる。たとえば

$$f^{(l,n)}(a, \bar{a}) = f_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} a^{i_1} \dots a^{i_p} \bar{a}_{j_1} \dots \bar{a}_{j_q} \quad (489)$$

と与えられる。ただし  $f$  は上付き、下付きそれぞれの添え字に対して対称であり、トレースレスなテンソルである。この調和関数の  $\mathbf{S}^2$  の回転に対する角運動量  $l$  と  $\mathbf{S}^1$  の回転に対するチャージ  $n$  は  $p, q$  と次のように関係している。

$$l = \frac{1}{2}(p + q), \quad n = p - q. \quad (490)$$

ここで、 $\mathbf{S}^2$  上のラプラシアンはこの関数に次のように作用する。

$$\Delta_{\mathbf{S}^2}^n f^{(l,n)} = \left[ l(l+1) - \frac{n^2}{4} \right] f^{(l,n)} \quad (491)$$

$n$  依存性はラプラシアンが  $\mathbf{S}^1$  ファイバーのねじれを表すゲージ場 (483) を含む共変微分を用いて定義されており、 $f^{(l,n)}$  はそのゲージ場とチャージ  $n$  で結合していることからくる。 $l \geq n/2$  が成り立つので (491) の右辺に現れる固有値は常に正である。演算子がカイラルであるのは、関数  $f$  が正則である場合、すなわち  $l = n/2$  である場合である。この場合には

$$\Delta_{\mathbf{S}^2}^n f^{(n/2,n)} = \frac{n}{2} f^{(n/2,n)} \quad (492)$$

となり、角運動量  $l = n/2$  を持つにも関わらずラプラシアンへの  $l^2$  オーダーの寄与が存在しない。

$Q^{1,1,1}$  上の調和関数はこのような関数 3 つの積として表すことができる。カイラル演算子に対応する波動関数は

$$\phi = z^\lambda f^{(n/2,n)}(a) f^{(n/2,n)}(b) f^{(n/2,n)}(c) \quad (493)$$

であり、アイソメトリの

$$\left( \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)_n \quad (494)$$

表現に属している。 $Q^{1,1,1}$  上のラプラシアンに対する固有値は次のように与えられる。

$$\Delta_{\tilde{Q}^{1,1,1}}\phi = (3 \times 8\Delta_{\mathbf{S}^2}^n + 4 \times \Delta_{\mathbf{S}^1})\phi = 4n(n+3)\phi \quad (495)$$

従って、

$$4\lambda(\lambda - 6) = 4n(n+3) \quad (496)$$

となり、 $n$  が十分大きいときには (481) が得られる。

上で与えたクイバーゲージ理論において、これらの Kaluza-Klein モードに対応する演算子を次のように与えることができる。

$$\mathcal{O} = \text{Sym tr}(ABC)^n \quad (497)$$

Sym は  $SU(2)^3$  添え字に対する対称化を意味する。もしそれぞれのカイラル演算子の  $R$ -電荷が  $1/3$  であれば、この演算子は表現 (494) に属しており、Kaluza-Klein モードとちょうど対応する。

次に、バリオン演算子について考えよう。もし上記のようなゲージ理論によって  $Q^{1,1,1}$  が記述されるとすると、 $\det A$  のようなバリオン演算子を作ることができる。この共次元は  $N/3$  になるはずである。これが AdS 側の解析と一致するか見てみよう。

$Q^{1,1,1}$  のホモロジーは Gysin 完全系列を用いることで簡単に求まる。

$$\begin{aligned} H_0 = \mathbb{Z}, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = \mathbb{Z}^2, \quad H_3 = \mathbb{Z}_2, \\ H_4 = 0, \quad H_5 = \mathbb{Z}^2, \quad H_6 = 0, \quad H_7 = \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (498)$$

従って、ベッチ数は  $b_2 = b_5 = 2$  である。これはトーリック図形の表面にある頂点の数から 4 を引くことによっても得ることができる。(  $\mathbf{S}^7$  の場合、トーリック図形は 4 面体であり、ベッチ数は  $b_5 = 4 - 4 = 0$  である。)

$H_5$  の生成元は二つの  $\mathbf{S}^2$  と  $\mathbf{S}^1$  を組み合わせて作ることができる。 $\mathbf{S}^2$  は 3 つあるので、それらから二つを選ぶ組み合わせは 3 とおりあるが、それらのうち独立なのは二つだけである。バリオン演算子はそれらのサイクルに巻きついた M5-ブレーンに対応する。ここから導かれる共次元は (466) を用いれば

$$\lambda = \frac{\pi N}{6} \frac{\text{Vol}(\tilde{\Sigma})}{\text{Vol}(\tilde{X}_7)} = \frac{N}{3} \quad (499)$$

と与えられる。ただし  $X_7 = Q^{1,1,1}$  および  $\Sigma$  の体積

$$\text{Vol}(\tilde{Q}^{1,1,1}) = (4\pi R^2)^3 (4\pi r) = \frac{\pi^4}{8}, \quad \text{Vol}(\Sigma) = (4\pi R^2)^2 (4\pi r) = \frac{\pi^3}{4} \quad (500)$$

を用いた。(499) は図 21 クイバーゲージ理論のバリオン演算子の次元に一致する。

上で述べたように図 21 のクイバーゲージ理論は適切な超ポテンシャルを導入できないという問題がある。そこで、以前に解説したブレンタイリングを用いて  $Q^{1,1,1}$  を与えるクイバー CS 理論を構成してみよう。そのためにはまず  $Q^{1,1,1}$  のトーリック図形を平面に射影する必要がある。図 21 でベクトル  $(1, 1, -1)$  の方向に射影を行うと、図 23 の (a) に与えたトーリック図形を得る。頂点のそばに書いた数はもとのトーリック図中での高さを表している。得られた四角形の頂点のうち二つはもともと二つの点だったものが重なっている。(b) および (c) には対応す

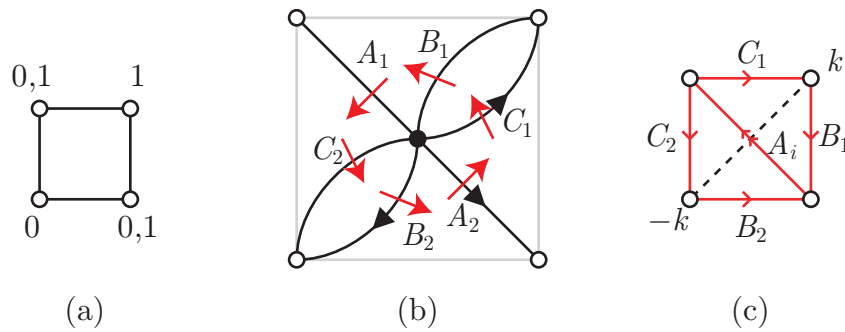


図 23: (a)  $Q^{1,1,1}$  のトーリック図形を平面に射影したもの (b) 対応するブレンタイリング (c) 対応するクイバー CS 理論

るブレンタイリングとクイバー CS 理論が与えられている。ブレンタイリングから読み取ることのできる超ポテンシャルは

$$W = \epsilon^{ij} A_i B_1 C_1 A_j B_2 C_2 \tag{501}$$

である。この超ポテンシャルは  $SU(2)^3$  対称性を尊重していない代わりに、恒等的に 0 になることは無く、正しいモジュライ空間を再現する。ゲージ群は  $U(N)^4$  であり、以前に考えたクイバーゲージ理論の  $U(N)^3$  とは異なる。しかし、モノポール演算子は二つの  $U(N)$  (図中で点線で結ばれているもの) の双基本表現に属しているため、モノポール演算子を通してそれら二つの  $U(N)$  ゲージ対称性の添え字を縮約することができる。これは、ゲージ不変演算子を構成する際にはそれら二つの  $U(N)$  が対角部分群に破れているようにみなせばよい。その結果、クイバー図形は図 21 になり、effective に大域的対称性  $SU(2)^3$  が回復すると期待される。

たとえばゲージ対称性が  $N = 1$  の時には  $W = 0$  であり、ゲージ不変演算子は

$$M_{ijk} = A_i B_j C_k \tag{502}$$

の多項式として書くことができる。この 8 個の複素座標の間関係式を書き下せば、これは次のように書き換えることができる。

$$\epsilon^{ij} M_{ikm} M_{jln} = \epsilon^{kl} M_{ikm} M_{jln} = \epsilon^{mn} M_{ikm} M_{jln} = 0 \tag{503}$$

となる。これは  $Q^{1,1,1}$  を与えている。

3次元のトーリック図形を平面に射影する方法は一意的ではない。今度はベクトル  $(0, 0, 1)$  を用いてみよう。すると図 24 の (a) にある図形を得る。対応するタイリングとクイバー図形を (b) と (c) に与えてある。タイリングから読み取るこ

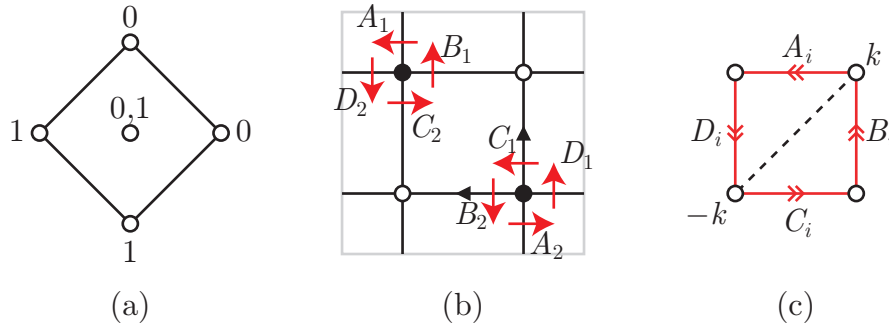


図 24: (a)  $Q^{1,1,1}$  のトーリック図形を平面に射影したもの (b) 対応するブレンダタイリング (c) 対応するクイバー CS 理論

とのできる超ポテンシャルは

$$W = \epsilon^{ik} \epsilon^{jl} A_i B_j C_k D_l \quad (504)$$

である。従って、 $A$  から  $D$  までの場の  $R$  電荷は  $1/2$  であると期待される。今度はモノポール演算子による対称性の破れを考慮しても最初に与えた三角クイバー理論にはならない。しかしモジュライ空間がやはり  $Q^{1,1,1}$  であることは以下のようにして示される。 $N = 1$  の場合を考えよう。8 個の複素ゲージ不変量  $M_{ijk}$  が定義できる。

$$M_{1ij} = B_i C_j, \quad M_{2ij} = D_i A_j. \quad (505)$$

今度は  $N = 1$  であっても超ポテンシャルは 0 にはならず、次の  $F$ -term 条件は次の関係式を与える。

$$\epsilon^{ij} M_{1ik} M_{2jl} = \epsilon^{kl} M_{1ik} M_{2jl} = 0. \quad (506)$$

実はこれは (503) と等価であり、 $Q^{1,1,1}$  上の cone を与える。

この理論で一つ問題なのは  $\det A$  のようなバリオン演算子の共形次元が  $N/2$  になり、AdS 側の解析とつじつまが合っていないことである。

## 6 おわりに

このノートでは主に超対称性を持つ CS 理論の作用の構成と、そのモジュライ空間の導出方法について見てきた。これらのことは弦理論を用いた場の理論の解析の第 1 歩に過ぎない。

AdS/CFT を用いると、CS 理論が持つであろういろいろな性質を予想することができる。たとえば、このノートでもいくつかの例を挙げたように、共形場理論において最も基本的な物理量である演算子の共次元は、少なくともプライマリー演算子については、重力側の内部空間の計量などが分かればカルツァクラインモードの解析などにより厳密な値を予想することができる。同様の解析は 3 次元 CFT だけではなく 4 次元 CFT でも行うことができたが、4 次元の場合には、弦理論を用いない、純粹に場の理論的な解析からも同様の結果を得ることができ、AdS/CFT のチェックとして大きな役割を果たした。この成功は、 $\alpha$ -最大化法 [78] や厳密な  $\beta$ -関数 [79] などといった、大きな量子効果を系統的に扱う方法が開発されたことに大きく依存している。これに比べると 3 次元の CFT に於ける解析手法はまだ確立されていない。

このほかにも、弦理論、あるいは M 理論側での解析は 3 次元 CFT に対する多くの情報（たとえばこれまでに知られていなかった双対性の存在など）を与えてくれる。これらの情報それぞれに対して、場の理論的な解釈、意味づけを与えていくことは、3 次元ゲージ理論のダイナミクスを理解していくうえでたいへん重要である。近い将来このノートにまとめたような CS 理論と M2 ブレーンの関係を通して、3 次元ゲージ理論における何らかの進展があることを期待したい。

## 謝辞

このノートは以下の勉強会の資料として作成したものです。

第 9 回、第 10 回ストリング勉強会

東京大学 (本郷キャンパス) 理学部一号館中央棟 2 階 233 号教室

(第 9 回)1 月 28 日 (水) 9:30 より (第 10 回)2 月 2 日 (月) 14:00 より

勉強会の日程の調整をしてくださった橋本幸二さんをはじめ、勉強会に参加して長時間の話に付き合ってくださった方々に感謝いたします。

## 参考文献

- [1] J. Bagger and N. Lambert, “Modeling multiple M2’s,” Phys. Rev. D **75**, 045020 (2007) [arXiv:hep-th/0611108].
- [2] J. Bagger and N. Lambert, “Gauge Symmetry and Supersymmetry of Multiple M2-Branes,” Phys. Rev. D **77**, 065008 (2008) [arXiv:0711.0955 [hep-th]].
- [3] J. Bagger and N. Lambert, “Comments On Multiple M2-branes,” JHEP **0802**, 105 (2008) [arXiv:0712.3738 [hep-th]].
- [4] A. Gustavsson, “Algebraic structures on parallel M2-branes,” arXiv:0709.1260 [hep-th].



- [5] A. Gustavsson, “Selfdual strings and loop space Nahm equations,” JHEP **0804**, 083 (2008) [arXiv:0802.3456 [hep-th]].
- [6] M. A. Bandres, A. E. Lipstein and J. H. Schwarz, “ $N = 8$  Superconformal Chern–Simons Theories,” JHEP **0805**, 025 (2008) [arXiv:0803.3242 [hep-th]].
- [7] M. Van Raamsdonk, “Comments on the Bagger-Lambert theory and multiple M2-branes,” JHEP **0805**, 105 (2008) [arXiv:0803.3803 [hep-th]].
- [8] G. Papadopoulos, “M2-branes, 3-Lie Algebras and Plucker relations,” JHEP **0805**, 054 (2008) [arXiv:0804.2662 [hep-th]].
- [9] J. P. Gauntlett and J. B. Gutowski, “Constraining Maximally Supersymmetric Membrane Actions,” arXiv:0804.3078 [hep-th].
- [10] N. Lambert and D. Tong, “Membranes on an Orbifold,” arXiv:0804.1114 [hep-th].
- [11] J. Distler, S. Mukhi, C. Papageorgakis and M. Van Raamsdonk, “M2-branes on M-folds,” JHEP **0805**, 038 (2008) [arXiv:0804.1256 [hep-th]].
- [12] J. Gomis, G. Milanesi and J. G. Russo, “Bagger-Lambert Theory for General Lie Algebras,” arXiv:0805.1012 [hep-th].
- [13] S. Benvenuti, D. Rodriguez-Gomez, E. Tonni and H. Verlinde, “ $N=8$  superconformal gauge theories and M2 branes,” arXiv:0805.1087 [hep-th].
- [14] P. M. Ho, Y. Imamura and Y. Matsuo, “M2 to D2 revisited,” arXiv:0805.1202 [hep-th].
- [15] M. A. Bandres, A. E. Lipstein and J. H. Schwarz, “Ghost-Free Superconformal Action for Multiple M2-Branes,” arXiv:0806.0054 [hep-th].
- [16] J. Gomis, D. Rodriguez-Gomez, M. Van Raamsdonk and H. Verlinde, “The Superconformal Gauge Theory on M2-Branes,” arXiv:0806.0738 [hep-th].
- [17] P. M. Ho and Y. Matsuo, “M5 from M2,” JHEP **0806**, 105 (2008) [arXiv:0804.3629 [hep-th]].
- [18] P. M. Ho, Y. Imamura, Y. Matsuo and S. Shiba, “M5-brane in three-form flux and multiple M2-branes,” JHEP **0808**, 014 (2008) [arXiv:0805.2898 [hep-th]].
- [19] D. Gaiotto and X. Yin, “Notes on superconformal Chern-Simons-matter theories,” JHEP **0708**, 056 (2007) [arXiv:0704.3740 [hep-th]].

- [20] D. Gaiotto and E. Witten, “Janus Configurations, Chern-Simons Couplings, And The Theta-Angle in N=4 Super Yang-Mills Theory,” arXiv:0804.2907 [hep-th].
- [21] K. Hosomichi, K. M. Lee, S. Lee, S. Lee and J. Park, “N=4 Superconformal Chern-Simons Theories with Hyper and Twisted Hyper Multiplets,” arXiv:0805.3662 [hep-th].
- [22] K. Hosomichi, K. M. Lee, S. Lee, S. Lee and J. Park, “N=5,6 Superconformal Chern-Simons Theories and M2-branes on Orbifolds,” JHEP **0809**, 002 (2008) [arXiv:0806.4977 [hep-th]].
- [23] O. Aharony, O. Bergman, D. L. Jafferis and J. Maldacena, “N=6 superconformal Chern-Simons-matter theories, M2-branes and their gravity duals,” arXiv:0806.1218 [hep-th].
- [24] G. V. Dunne, “Aspects of Chern-Simons theory,” arXiv:hep-th/9902115.
- [25] E. A. Ivanov, “Chern-Simons matter systems with manifest N=2 supersymmetry,” Phys. Lett. B **268**, 203 (1991).
- [26] D. Martelli and J. Sparks, “Moduli spaces of Chern-Simons quiver gauge theories,” arXiv:0808.0912 [hep-th].
- [27] K. A. Intriligator and N. Seiberg, “The runaway quiver,” JHEP **0602**, 031 (2006) [arXiv:hep-th/0512347].
- [28] M. Fujita, W. Li, S. Ryu and T. Takayanagi, “Fractional Quantum Hall Effect via Holography: Chern-Simons, Edge States, and Hierarchy,” arXiv:0901.0924 [hep-th].
- [29] D. Gaiotto and A. Tomasiello, “The gauge dual of Romans mass,” arXiv:0901.0969 [hep-th].
- [30] G. W. Moore and N. Seiberg, “Taming the Conformal Zoo,” Phys. Lett. B **220**, 422 (1989).
- [31] P. Goddard, J. Nuyts and D. I. Olive, “Gauge Theories And Magnetic Charge,” Nucl. Phys. B **125**, 1 (1977).
- [32] V. Borokhov, A. Kapustin and X. k. Wu, “Topological disorder operators in three-dimensional conformal field theory,” JHEP **0211**, 049 (2002) [arXiv:hep-th/0206054].

- [33] V. Borokhov, A. Kapustin and X. k. Wu, “Monopole operators and mirror symmetry in three dimensions,” JHEP **0212**, 044 (2002) [arXiv:hep-th/0207074].
- [34] D. Berenstein and D. Trancanelli, “Three-dimensional N=6 SCFT’s and their membrane dynamics,” Phys. Rev. D **78**, 106009 (2008) [arXiv:0808.2503 [hep-th]].
- [35] I. Klebanov, T. Klose and A. Murugan, “AdS<sub>4</sub>/CFT<sub>3</sub> – Squashed, Stretched and Warped,” arXiv:0809.3773 [hep-th].
- [36] A. Hanany and K. D. Kennaway, “Dimer models and toric diagrams,” arXiv:hep-th/0503149.
- [37] S. Franco, A. Hanany, K. D. Kennaway, D. Vegh and B. Wecht, “Brane dimers and quiver gauge theories,” JHEP **0601** (2006) 096, arXiv:hep-th/0504110.
- [38] S. Franco, A. Hanany, D. Martelli, J. Sparks, D. Vegh and B. Wecht, “Gauge theories from toric geometry and brane tilings,” JHEP **0601** (2006) 128, arXiv:hep-th/0505211.
- [39] K. D. Kennaway, “Brane Tilings,” Int. J. Mod. Phys. A **22**, 2977 (2007) [arXiv:0706.1660 [hep-th]].
- [40] M. Yamazaki, “Brane Tilings and Their Applications,” arXiv:0803.4474 [hep-th].
- [41] A. Hanany and A. Zaffaroni, “Tilings, Chern-Simons Theories and M2 Branes,” arXiv:0808.1244 [hep-th].
- [42] Y. Imamura and K. Kimura, “Quiver Chern-Simons theories and crystals,” JHEP **0810**, 114 (2008) [arXiv:0808.4155 [hep-th]].
- [43] S. Lee, “Superconformal field theories from crystal lattices,” Phys. Rev. D **75**, 101901 (2007) [arXiv:hep-th/0610204].
- [44] S. Lee, S. Lee and J. Park, “Toric AdS(4)/CFT(3) duals and M-theory crystals,” JHEP **0705**, 004 (2007) [arXiv:hep-th/0702120].
- [45] S. Kim, S. Lee, S. Lee and J. Park, “Abelian Gauge Theory on M2-brane and Toric Duality,” Nucl. Phys. B **797**, 340 (2008) [arXiv:0705.3540 [hep-th]].
- [46] Y. Imamura and K. Kimura, “On the moduli space of elliptic Maxwell-Chern-Simons theories,” Prog. Theor. Phys. **120**, 509 (2008) [arXiv:0806.3727 [hep-th]].

- [47] Y. Imamura and K. Kimura, “N=4 Chern-Simons theories with auxiliary vector multiplets,” JHEP **0810**, 040 (2008) [arXiv:0807.2144 [hep-th]].
- [48] D. L. Jafferis and A. Tomasiello, “A simple class of N=3 gauge/gravity duals,” arXiv:0808.0864 [hep-th].
- [49] H. Fuji, S. Terashima and M. Yamazaki, “A New N=4 Membrane Action via Orbifold,” Nucl. Phys. B **810**, 354 (2009) [arXiv:0805.1997 [hep-th]].
- [50] M. Benna, I. Klebanov, T. Klose and M. Smedback, “Superconformal Chern-Simons Theories and AdS<sub>4</sub>/CFT<sub>3</sub> Correspondence,” arXiv:0806.1519 [hep-th].
- [51] S. Terashima and F. Yagi, “Orbifolding the Membrane Action,” arXiv:0807.0368 [hep-th].
- [52] T. Kitao, K. Ohta and N. Ohta, “Three-dimensional gauge dynamics from brane configurations with (p,q)-fivebrane,” Nucl. Phys. B **539**, 79 (1999) [arXiv:hep-th/9808111].
- [53] O. Bergman, A. Hanany, A. Karch and B. Kol, “Branes and supersymmetry breaking in 3D gauge theories,” JHEP **9910**, 036 (1999) [arXiv:hep-th/9908075].
- [54] K. A. Intriligator and N. Seiberg, “Mirror symmetry in three dimensional gauge theories,” Phys. Lett. B **387**, 513 (1996) [arXiv:hep-th/9607207].
- [55] N. J. Evans, C. V. Johnson and A. D. Shapere, “Orientifolds, branes, and duality of 4D gauge theories,” Nucl. Phys. B **505**, 251 (1997) [arXiv:hep-th/9703210].
- [56] A. Hanany and B. Kol, “On orientifolds, discrete torsion, branes and M theory,” JHEP **0006**, 013 (2000) [arXiv:hep-th/0003025].
- [57] Y. Hyakutake, Y. Imamura and S. Sugimoto, “Orientifold planes, type I Wilson lines and non-BPS D-branes,” JHEP **0008**, 043 (2000) [arXiv:hep-th/0007012].
- [58] O. Bergman, E. G. Gimon and S. Sugimoto, “Orientifolds, RR torsion, and K-theory,” JHEP **0105**, 047 (2001) [arXiv:hep-th/0103183].
- [59] E. Witten, “Baryons and branes in anti de Sitter space,” JHEP **9807**, 006 (1998) [arXiv:hep-th/9805112].
- [60] D. Gaiotto, S. Giombi and X. Yin, “Spin Chains in N=6 Superconformal Chern-Simons-Matter Theory,” arXiv:0806.4589 [hep-th].

- [61] S. Terashima, “On M5-branes in N=6 Membrane Action,” JHEP **0808**, 080 (2008) [arXiv:0807.0197 [hep-th]].
- [62] P. G. O. Freund and M. A. Rubin, “Dynamics Of Dimensional Reduction,” Phys. Lett. B **97**, 233 (1980).
- [63] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” Phys. Lett. B **428**, 105 (1998) [arXiv:hep-th/9802109].
- [64] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) [arXiv:hep-th/9802150].
- [65] I. R. Klebanov and A. A. Tseytlin, “Entropy of Near-Extremal Black p-branes,” Nucl. Phys. B **475**, 164 (1996) [arXiv:hep-th/9604089].
- [66] B. Biran, A. Casher, F. Englert, M. Roman and P. Spindel, “The Fluctuating Seven Sphere In Eleven-Dimensional Supergravity,” Phys. Lett. B **134**, 179 (1984).
- [67] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, “Kaluza-Klein Supergravity,” Phys. Rept. **130**, 1 (1986).
- [68] C. S. Park, “Comments on Baryon-like Operators in N=6 Chern-Simons-matter theory of ABJM,” arXiv:0810.1075 [hep-th].
- [69] O. Aharony, O. Bergman and D. L. Jafferis, “Fractional M2-branes,” JHEP **0811**, 043 (2008) [arXiv:0807.4924 [hep-th]].
- [70] A. Hanany and E. Witten, “Type IIB superstrings, BPS monopoles, and three-dimensional gauge dynamics,” Nucl. Phys. B **492**, 152 (1997) [arXiv:hep-th/9611230].
- [71] Y. Imamura and S. Yokoyama, “N=4 Chern-Simons theories and wrapped M-branes in their gravity duals,” arXiv:0812.1331 [hep-th].
- [72] A. Giveon and D. Kutasov, “Seiberg Duality in Chern-Simons Theory,” arXiv:0808.0360 [hep-th].
- [73] V. Niarchos, “Seiberg Duality in Chern-Simons Theories with Fundamental and Adjoint Matter,” JHEP **0811**, 001 (2008) [arXiv:0808.2771 [hep-th]].
- [74] Y. Imamura, “Monopole operators in N=4 Chern-Simons theories and wrapped M2-branes,” arXiv:0902.4173 [hep-th].

- [75] D. Martelli and J. Sparks, “Notes on toric Sasaki-Einstein seven-manifolds and  $\text{AdS}_4/\text{CFT}_3$ ,” JHEP **0811**, 016 (2008) [arXiv:0808.0904 [hep-th]].
- [76] D. Fabbri, P. Fre’, L. Gualtieri, C. Reina, A. Tomasiello, A. Zaffaroni and A. Zampa, “3D superconformal theories from Sasakian seven-manifolds: New nontrivial evidences for  $\text{AdS}(4)/\text{CFT}(3)$ ,” Nucl. Phys. B **577**, 547 (2000) [arXiv:hep-th/9907219].
- [77] I. R. Klebanov and E. Witten, “Superconformal field theory on threebranes at a Calabi-Yau singularity,” Nucl. Phys. B **536**, 199 (1998) [arXiv:hep-th/9807080].
- [78] K. A. Intriligator and B. Wecht, “The exact superconformal R-symmetry maximizes a,” Nucl. Phys. B **667**, 183 (2003) [arXiv:hep-th/0304128].
- [79] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, “Exact Gell-Mann-Low Function Of Supersymmetric Yang-Mills Theories From Instanton Calculus,” Nucl. Phys. B **229**, 381 (1983); Nucl. Phys. B **260**, 157 (1985); Phys. Lett. B **166**, 329 (1986).

## 更新履歴

**ver. 1:** (2009年2月2日) 勉強会にて配布

**ver. 2:** (2009年3月4日) 多少直して素粒子論研究・電子版へ投稿

**ver. 3:** (2009年) スピノルの convention など変更。超空間の構成法追加、(2016年1月) 素粒子論研究・電子版へ投稿