非可換インスタントンのADHM構成法

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科　浜中 真志
E-mail: hamanaka@math.nagoya-u.ac.jp

摂南大学 基礎理工学機構　中津 了勇
E-mail: nakatsu@mpg.setsunan.ac.jp

Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin (ADHM) 構成法とは, 任意のインスタントン解を与える強力な構成法の一つであり, インスタントン・バックグラウンドでの経路積分の計算など様々な応用がある．この構成法を非可換空間の設定に拡張すると, モジュライ空間の特異点が解消され，種々の議論が自然に進み, また U(1) インスタントンといった新しい物理的対象も生み出される．(ゲージ理論においては，非可換空間への拡張は背景フラックスの導入と理解できる.) この講演では，ADHM 構成法の非可換化について一通り詳しく議論する．特に U(1) インスタントンの巻きつき数の起源を ADHM 構成法の枠組みから明らかにする．余力があれば，解構成やモジュライ空間への群作用についても触れたい.

1　非可換空間上のゲージ場の理論

非可換空間は座標関数同士の積の非可換性で特徴付けられる：

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \tag{1}$$

ここで, $\theta^{\mu\nu}$ は反対称な実定数であり, 非可換パラメータと呼ばれる[1]. この関係式は, 量子力学の正準交換関係 $[q,p]=i\hbar$ に類似しており, 「空間の不確定性関係」を導く．このことから非可換空間上では, 粒子の位置は完全に決めることができず, ある広がった分布を持つ．その結果, 可換な空間上では存在した場の特異点が, 非可換空間上では解消されるということが起こりうる．分布の広がりの幅は大体 $\sqrt{|\theta^{\mu\nu}|}$ に比例し, 可換な空間への極限 $\theta^{\mu\nu}\to 0$ で特異性が復活する.

非可換空間上でゲージ場の理論を記述する方法は, Moyal 積を用いる記述とオペレーターでの記述の 2 つが知られている．後者では，座標関数の非可換性 (1) を出発点とし，座標関数を (ある空間 $\mathcal{H}$ に作用する) オペレーターとして扱う．場はすべてこの意味でオペレーターとなり，調和振動子の占有数表示で無限次元行列として具体的に表すことができる.

2　ADHM構成法

ADHM 構成法は, インスタントンの解空間 (4 次元反自己双対方程式の有限作用解の空間) と ADHM 方程式の解空間との 1 対 1 対応 (双対性) を利用したものであり, それらの解空間どうしは「Dirac 方程式の零モード」を介して対応づけられる．私達は, 論文 [2] におい

[1] 非可換パラメータ $\theta^{\mu\nu}$ は背景フラックスに関係し, 手で与えられる.

て, 非可換空間上での ADHM 構成法について, この 1 対 1 対応の証明を与え (cf. [3]), $U(1)$ インスタントンの解構成やインスタントン数の起源について議論を行った.

解の構成法は具体的には次の通りである.

- 手順 (i)： ADHM 方程式を解く：

$$
\begin{aligned}
&(\mu_{\mathbb{R}} :=) \qquad [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = -2(\theta_1 + \theta_2) =: \zeta, \\
&(\mu_{\mathbb{C}} :=) \qquad [B_1, B_2] + IJ = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

  ここで, B_1, B_2 は $k \times k$ 行列, $I, J^\dagger$ は $k \times N$ 行列である. 右辺の定数は, 座標の交換子 $-[z_1, \bar{z}_1] - [z_2, \bar{z}_2]$ から生じたもので, 可換空間ではもちろんゼロである. 座標 z_i は ADHM データ B_i と常に対になって現れるため, このような座標の交換子が現れる.

- 手順 (ii)： 「0 次元 Dirac 方程式」を規格化条件 $V^\dagger V = 1$ の下, 解く：

$$
\nabla^\dagger V := \begin{pmatrix} I & z_2 - B_2 & z_1 - B_1 \\ J^\dagger & -(\bar{z}_1 - B_1^\dagger) & \bar{z}_2 - B_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{3}
$$

- 手順 (iii)： 「0 次元 Dirac 方程式」(3) の規格化可能解 (零モード) V を用いて, ゲージ場を $A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V$ として構成する. これは自動的に反自己双対方程式を満たす.

ここで, インスタントン・モジュライ空間 $\mathcal{M}$ についてコメントする. インスタントン・モジュライ空間 $\mathcal{M}$ は, ADHM 方程式の右辺の定数値によって決まる. ($\mathcal{M} = \mathcal{M}_\zeta$.) ADHM 方程式 (2) の第 1 式の右辺の定数 ζ がノンゼロであれば (完備化された) インスタントン・モジュライ空間の特異点が解消することが知られている. したがって解消された特異点の部分に対応する, 可換空間にはないインスタントン解が存在することになる. これが $U(1)$ インスタントンであり, 実際に非可換 $\mathbb{R}^4$ 上で非特異な解として構成された.

簡単な具体解を実際に構成してみよう.

BPST 解 ($G = SU(2),\ k = 1,\ \dim \mathcal{M}_{2,1}^{\mathrm{BPST}} = 5$)

この解は最も基本的かつ重要なインスタントン解であるが, ADHM 構成法によって極めて簡単に構成される.

- 手順 (i)：ADHM 方程式は $k \times k$ 行列の方程式であるから, 今の場合 ($k = 1$) 自明に解ける. 交換子の部分は落ちるので, 行列 B_1, B_2 は任意の複素数とすればよく, I, J についても簡単に求まる. 結果は次の通り：

$$
B_1 = \alpha_1, \quad B_2 = \alpha_2, \quad I = (\rho, 0), \quad J = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{1,2} \in C, \quad \rho \in \mathbb{R}. \tag{4}
$$

  α の実部, 虚部を $\alpha_1 = b_2 + ib_1,\ \alpha_2 = b_4 + ib_3$ のように b_μ で表す.

- 手順 (ii)：「0 次元 Dirac 方程式」は $\nabla^\dagger V = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{matrix} & \bar{e}_\mu(x_\mu - b_\mu) \end{pmatrix} V = 0$ となり (ただし $\bar{e}_\mu = (i\sigma, 1)$), その解は

$$V = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \begin{pmatrix} \bar{e}_\mu(x_\mu - b_\mu) \\ \begin{matrix} -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad \phi = |x-b|^2 + \rho^2 \tag{5}$$

  と簡単に求まる. 規格化因子 ϕ は規格化条件 $V^\dagger V = 1$ から決まった.

- 手順 (iii)：ゲージ場および曲率は V から容易に計算される：

$$A_\mu = V^\dagger \partial_\mu V = \frac{i(x-b)^\nu \eta^{(-)}_\mu \nu}{(x-b)^2 + \rho^2}, \quad F_{\mu\nu} = \frac{2i\rho^2}{(|x-b|^2+\rho^2)^2} \eta^{(-)}_{\mu\nu}. \tag{6}$$

  ここで, $\eta^{(-)}_{\mu\nu}$ は't Hooft の eta symbol と呼ばれる ASD tensor であり, 曲率が反自己双対であることが分かる. モジュライ空間の次元 5 は, 1 インスタントンの位置 b^μ (4 つ) とサイズ[2] ρ (1 つ) の自由度に対応する. 一般に, ADHM データ $B_{1,2}$ の対角成分がインスタントンの位置を表し, ADHM データ I, J がインスタントンのサイズの情報を含む. ADHM データ $B_{1,2}$ が座標 $z_{1,2}$ と常に対になって現れる理由はここにある.

ここでサイズ・ゼロ極限を取ると, このとき $F_{\mu\nu}$ は特異な配位に近付くことが分かる. インスタントンは定義により滑らかな関数でなければならないので, サイズ・ゼロのインスタントンは存在しない. これはちょうどインスタントン・モジュライ空間の特異点 (スモール・インスタントン特異点) に対応する. 非可換空間ではこの特異点が解消し, 新しいクラスのインスタントンが現れる.

<u>非可換 BPST インスタントン解 ($G = U(2),\ k = 1$)</u>

非可換空間上の $G = U(2)$ ASD 1 インスタントン解 (非可換 BPST 解) も ADHM 構成法により同様に求められる. これを与える非可換 ADHM 方程式 (2) の解としては

$$B_1 = \alpha_1, \quad B_2 = \alpha_2,\ I = (\sqrt{\rho^2+\zeta}, 0), J = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} \tag{7}$$

(ほぼ自明解) を取ればよい. ($\zeta > 0$ とした.) 可換空間の場合と比べると I の値が少し異なるため, さっきと同様に ρ をゼロにもっていっても I はゼロにならず, サイズ有限の非特異なインスタントンが生き残る. これが実は $U(1)$ インスタントンであり, スモール・インスタントン特異点が解消されたことによって生じた新しいインスタントン解に相当する. $U(1)$ インスタントンは位置を表すモジュライ・パラメータしか持たず, 広がりのサイズは一定 (大体 $\sqrt{\zeta}$ ぐらい) である.
この $U(1)$ インスタントンをより詳しく調べてみよう.

---
[2] ここでインスタントンのサイズとは, $F_\mu \nu$ の半値幅のことである.

非可換 ASD $U(1)$ インスタントン解 ($k=1,\ \theta:$ SD)

簡単のためインスタントンの位置を原点にとり, 非可換パラメータの自己双対性を SD とする. $k=1$ なので ADHM 方程式は自明に解ける：

$$B_{1,2}=0, I=\sqrt{\zeta}, J=0. \tag{8}$$

問題は Dirac 零モードである.「0 次元 Dirac 方程式」は, $\hat{\nabla}^\dagger\hat{V}=\begin{pmatrix}\sqrt{\zeta} & \hat{z}_2 & \hat{z}_1\\ 0 & -\hat{\bar{z}}_1 & \hat{\bar{z}}_2\end{pmatrix}\hat{V}=0.$ となり, この解としては, 規格化因子を除いて次のものが自然に取れる：

$$\hat{V}_1=\begin{pmatrix}\hat{z}_1\hat{\bar{z}}_1+\hat{z}_2\hat{\bar{z}}_2\\ -\sqrt{\zeta}\hat{\bar{z}}_2\\ -\sqrt{\zeta}\hat{\bar{z}}_1\end{pmatrix},\quad \hat{\nabla}^\dagger\hat{V}_1=0. \tag{9}$$

しかしこれはオペレータの意味で $\mathcal{H}$ 全体での規格化条件を満たさない. $\hat{V}_1$ が零モード $|0,0\rangle$ を持ち, 規格化因子を求める際 $\hat{V}_1^\dagger\hat{V}_1$ の逆行列を $\mathcal{H}$ の中で求めることができないからである. したがって $\hat{V}$ を規格化する際はこの点に注意する必要がある.

古内氏は [1] において, すべての議論を $\mathcal{H}_1:=\mathcal{H}-|0,0\rangle\langle 0,0|$ に制限すれば, $\hat{V}_1$ が正しい自己双対ゲージ場を与えることを示し, さらにシフト演算子を用いて, $\mathcal{H}_1$ に制限された議論を $\mathcal{H}$ に変換し (ラベルを付け変え), $\mathcal{H}$ で規格化された $\hat{V}$ を求めた [1].

3　U(1) インスタントンのインスタントン数の起源

ADHM 構成法においてはオペレーター零モードが他の場面でも存在することがあるが, 古内氏の方法を用いて常に零モードを持たないオペレーターを再構成することができる. この方法と, 非可換場の理論の性質を駆使して, 以下の公式を証明した：

$$\int d^4x\ \mathrm{Tr}_N(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})=-\int d^4x\partial^2\partial_\mu(\mathrm{Tr}_k f^{-1}\partial^\mu f),\ f:=(\nabla^\dagger\nabla)^{-1}. \tag{10}$$

これを用いると, サイズ k の ADHM データがちょうどインスタントン数 k のインスタントン解を与えることが示される. この議論は $U(1)$ の場合にも適用でき, インスタントン数の直接の起源の説明となっている.

紙数も尽きたので詳しい議論は論文 [2] にゆずる.

Acknowledgements

この研究は豊秋奨学会および科学研究費補助金から経済援助を受けています.

References

[1] K. Furuuchi, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 1043 ; Commun. Math. Phys. **217** (2001) 579.

[2] M. Hamanaka and T. Nakatsu, "ADHM Construction and Group Actions for Noncommutative Instantons," to appear.

[3] Y. Maeda, A. Sako, J. Math. Phys. **53**, 022303 (2012).