A double-well SUSY matrix model as 2D type IIA superstrings in RR background

岡山光量子科学研究所 杉野文彦
E-mail: fumihiko_sugino@pref.okayama.lg.jp

我々は double-well ポテンシャルを持つ簡単な超対称行列模型と RR 背景場中の 2 次元タイプ IIA 超弦理論との新たな対応を議論する。RR 背景場は Seiberg bound を満たさない nonlocal operator を含む vertex operator たちによる変形で与えられる。

行列模型の single-trace operator たちとタイプ IIA 理論の vertex operator たちの間の対応について、両側の理論で相関関数を直接計算して、それらの振る舞いが一致することで確認できる。特に、RR sector の operator たちの相関関数には、非臨界弦においてこれまで見られなかった新たな臨界的振る舞いが現われる。

この行列模型は target space SUSY のある超弦理論に対するもので、具体的に相関関数が計算可能な興味深い例と思われる。

この講演は黒木経秀氏 (立教大学) との共同研究 (arXiv:0909.3952, arXiv:1208.3263 および現在準備中の論文) に基づく。

我々は次の作用で与えられる超対称行列模型を考える。

$$S = N\mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}B^2 + iB(\phi^2-\mu^2) + \bar{\psi}(\phi\psi+\psi\phi)\right], \tag{1}$$

ここで B, ϕ は $N\times N$ エルミート行列、$\psi, \bar{\psi}$ は Grassmann-odd な $N\times N$ 行列である。この作用は 2 つの超対称変換

$$Q\phi = \psi, \quad Q\psi = 0, \quad Q\bar{\psi} = -iB, \quad QB = 0, \tag{2}$$

$$\bar{Q}\phi = -\bar{\psi}, \quad \bar{Q}\bar{\psi} = 0, \quad \bar{Q}\psi = -iB, \quad \bar{Q}B = 0. \tag{3}$$

で不変で、これらは nilpotent ($Q^2 = \bar{Q}^2 = 0$) である。B を積分した後に得られるポテンシャルは double-well 型 $\frac{1}{2}(\phi^2-\mu^2)^2$ をしている。その右側 (左側) の minimum に貯まる行列 ϕ の固有値の数を ν_+N (ν_-N) と書くと、large-N saddle point 方程式

$$\int dy\,\rho(y)\,\mathrm{P}\frac{1}{x-y} + \int dy\,\rho(y)\,\mathrm{P}\frac{1}{x+y} = x^3-\mu^2 x \tag{4}$$

を満たす固有値分布密度 $\rho(x) \equiv \frac{1}{N}\mathrm{tr}\,\delta(x-\phi)$ は

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{\nu_+}{\pi}\,x\,\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)} & (a<x<b) \\ \frac{\nu_-}{\pi}\,|x|\,\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)} & (-b<x<-a) \end{cases} \tag{5}$$

with $a=\sqrt{\mu^2-2}$, $b=\sqrt{\mu^2+2}$ で与えられる。これは $\mu^2>2$ の時に存在する解で、この解の下で large-N free energy や $\frac{1}{N}\mathrm{tr}\,B^n$ $(n=1,2,\cdots)$ の期待値がゼロになることが言えるため、large-N

limit で超対称性を保つ解であることが強く示唆される。ν_+, $\nu_-(= 1-\nu_+)$ は $[0,1]$ 区間に値を持つため、超対称な真空は large-N 極限で無数にあり、filling fraction (ν_+, ν_-) で parametrize されるものになっている。

Eq. (4) は random surface 上の $O(n)$ model の saddle point 方程式で $n=-2$ としたものとみなせ、ϕ の偶数べきのオペレーターに関してはその振る舞いは $c=-2$ topological gravity もしくは (2,1) minimal string 理論で記述されることが、Gaiotto-Rastelli-Takayanagi (2004) によって議論されている。

我々は他のオペレーターに関しての相関関数も調べた。まず、ϕ の奇数べきのオペレーターの connected 相関関数を計算すると、その $\omega \equiv (\mu^2-2)/4 \to +0$ の際の singular part は

$$\left\langle \prod_{i=1}^{n} \Phi_{2k_i+1} \right\rangle_{C,0} = (\nu_+ - \nu_-)^n (\mathrm{const.})\, \omega^{2-\gamma+\sum_{i=1}^{n}(k_i-1)} (\ln\omega)^n + (\text{less singular}) \tag{6}$$

と、$\ln\omega$ のべきの特徴的な振る舞いを見せる。ここで、Φ_{2k+1} は $\frac{1}{N}\mathrm{tr}\,\phi^{2k+1}$ に ϕ の偶数べきのオペレーターの線形結合を加えたオペレーターの基底を表す。$\gamma=-1$ であるので、$(\ln\omega)^n$ の因子を別にすれば $c=-2$ の topological gravity の string susceptibility と同じであり、Φ_{2k+1} の gravitational scaling 次元は k と読める。また、フェルミオンの奇数べきのオペレーター

$$\Psi_{2k+1} = \frac{1}{N}\mathrm{tr}\,\psi^{2k+1} + \cdots, \qquad \bar{\Psi}_{2k+1} = \frac{1}{N}\mathrm{tr}\,\bar{\psi}^{2k+1} + \cdots \tag{7}$$

($\cdots$ はそれぞれ ψ, $\bar{\psi}$ の低いべきを含むオペレーターの線形結合を表す。) の 2 点相関関数を計算したところ、$\ln\omega$ の因子を別にして Ψ_{2k+1}, $\bar{\Psi}_{2k+1}$ が Φ_{2k+1} と同じ gravitational scaling 次元を持つことがわかる。($\mathrm{tr}\,\psi^{2k} = \mathrm{tr}\,\bar{\psi}^{2k} = 0$ に注意。)

$\ln\omega$ の振る舞いは 2 次元 bosonic string、あるいはそれを記述する行列変数の量子力学の $c=1$ matrix model を想起させる。ゼロ次元行列模型で $c=1$ matrix model と同じ臨界現象を起こすものとして Penner model が知られている。よって、我々の行列模型 (1) は Penner model の超対称版であり、target space SUSY を持つ 2 次元超弦理論を表すと期待できそうである。ψ と $\bar{\psi}$ が対応する超弦理論の target-space フェルミオンを表すと考えてみよう。すなわち、RNS formalism において、ψ を (NS, R) sector, $\bar{\psi}$ を (R, NS) sector に属するオペレーターに対応させると、left (right) mover の R sector のオペレーターの符号を変える $(-1)^{\mathbf{F}_L}$ ($(-1)^{\mathbf{F}_R}$) 変換の下で

$$\begin{aligned} (-1)^{\mathbf{F}_L}: &\quad \psi \to \psi, \qquad \bar{\psi} \to -\bar{\psi}, \\ (-1)^{\mathbf{F}_R}: &\quad \psi \to -\psi, \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}. \end{aligned} \tag{8}$$

と振る舞う。行列模型の作用 (1) がこれらの変換で不変となるためには、B および ϕ は

$$\begin{aligned} (-1)^{\mathbf{F}_L}: &\quad B \to B, \qquad \phi \to -\phi, \\ (-1)^{\mathbf{F}_R}: &\quad B \to B, \qquad \phi \to -\phi. \end{aligned} \tag{9}$$

と変換すべきであり、B は (NS, NS) sector, ϕ は (R, R) sector のオペレーターに対応することを意味する。よって、(6) における $\ln\omega$ のべきの振る舞いは R sector のオペレーターが関与するところから現われると考えられる。

Kutasov-Seiberg (1990) によって構成された noncritical superstring 理論の内、2 次元のものは target space として $(\varphi, x) \in$ (Liouville 方向) $\times$ ($S^1$with self-dual radius) を持つ。これは Penner model の表す 2 次元 string の target space と正確に同じである。World-sheet 上の ゴースト部分以外の (holomorphic) energy-momentum tensor は

$$T_m = -\frac{1}{2}(\partial x)^2 - \frac{1}{2}\psi_x\partial\psi_x - \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{Q}{2}\partial^2\varphi - \frac{1}{2}\psi_\ell\partial\psi_\ell \tag{10}$$

with $Q = 2$ である。ψ_x, ψ_ℓ はそれぞれ x, φ の superpartner を表す。超対称性は 2 つの生成子

$$q_+(z) = e^{-\frac{1}{2}\phi - \frac{i}{2}H - ix}(z), \qquad Q_+ = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, q_+(z), \tag{11}$$

$$\bar{q}_-(\bar{z}) = e^{-\frac{1}{2}\bar{\phi} + \frac{i}{2}\bar{H} + i\bar{x}}(\bar{z}), \qquad \bar{Q}_- = \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i}\, \bar{q}_-(\bar{z}) \tag{12}$$

($\psi_\ell \pm i\psi_x = \sqrt{2}e^{\mp iH}$) から成り (type II 理論)、nilpotent ($Q_+^2 = \bar{Q}_-^2 = 0$) である。これも我々の行列模型の超対称性と合致している。

さらに上の期待を強固にするために type IIA 理論の physical vertex operator の組として Ita-Nieder-Oz (2005) によって議論された winding background のスペクトルを考えよう：

$$\begin{array}{rcl}
(\mathrm{NS},\ \mathrm{NS}): & T_k(z)\,\bar{T}_{-k}(\bar{z}) & (k \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}) \\
(\mathrm{R}+,\ \mathrm{R}-): & V_{k,+1}(z)\,\bar{V}_{-k,-1}(\bar{z}) & (k = 1/2,\ 3/2, \cdots) \\
(\mathrm{R}-,\ \mathrm{R}+): & V_{-k,-1}(z)\,\bar{V}_{k,+1}(\bar{z}) & (k = 0, 1, 2, \cdots) \\
(\mathrm{NS},\ \mathrm{R}-): & T_{-k}(z)\,\bar{V}_{-k,-1}(\bar{z}) & (k = 1/2,\ 3/2, \cdots) \\
(\mathrm{R}+,\ \mathrm{NS}): & V_{k,+1}(z)\,\bar{T}_k(\bar{z}) & (k = 1/2,\ 3/2, \cdots).
\end{array} \tag{13}$$

これは NS sector の (-1)-picture の vertex operator $T_k = e^{-\phi + ikx + p_\ell\varphi}$ と R sector の $(-\frac{1}{2})$-picture の vertex operator $V_{k,\epsilon} = e^{-\frac{1}{2}\phi + \frac{i}{2}\epsilon H + ikx + p_\ell\varphi}$ ($\epsilon = \pm$) から構成され、conformal invariance から $p_\ell = 1 - |k|$, Dirac equation constraint から $k = \epsilon|k|$ である。

行列模型の supercharge $(Q, \bar{Q})$ と type IIA 理論の supercharge $(Q_+, \bar{Q}_-)$ を対応させると、超対称変換の性質から行列模型の single-trace operator と type IIA 理論の integrated vertex operator との間に次の対応が見える：

$$\Phi_{2k+1} \quad \Leftrightarrow \quad \int d^2z\, V_{k+\frac{1}{2},+1}(z)\,\bar{V}_{-k-\frac{1}{2},-1}(\bar{z}),$$

$$\Psi_{2k+1} \quad \Leftrightarrow \quad \int d^2z\, T_{-k-\frac{1}{2}}(z)\,\bar{V}_{-k-\frac{1}{2},-1}(\bar{z}),$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_{2k+1} &\Leftrightarrow \int d^2z\, V_{k+\frac{1}{2},\,+1}(z)\, \bar{T}_{k+\frac{1}{2}}(\bar{z}), \\
\frac{1}{N}\mathrm{tr}(-iB)^{k+1}+\cdots &\Leftrightarrow \int d^2z\, T_{-k-\frac{1}{2}}(z)\, \bar{T}_{k+\frac{1}{2}}(\bar{z})
\end{aligned} \tag{14}$$

for $k=0,1,2,\cdots$. これは上の $(-1)^{\mathbf{F}_L}$, $(-1)^{\mathbf{F}_R}$ 変換の議論の帰結と consistent である。

(R−, R+) のオペレーターは超対称変換で一重項であり、行列模型側の対応物はなさそうに見える。しかし、Ramond charge を持つオペレーターの期待値 $\langle\Phi_{2k+1}\rangle_0$ が一般にノンゼロなので、行列模型はある RR background の下での type IIA 理論に対応すると考えるのが自然である。RR background として SUSY を保つ一般的な (R−, R+) vertex operator たち

$$W_{\mathrm{RR}} = (\nu_+-\nu_-)\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\,\omega^{k+1}\mathcal{V}_k^{\mathrm{RR}}, \qquad (a_k \text{ は数係数}) \tag{15}$$

$$\mathcal{V}_k^{\mathrm{RR}} \equiv \begin{cases} \int d^2z\, V_{k,\,-1}(z)\bar{V}_{-k,\,+1}(\bar{z}) & (k=0,-1,-2,\cdots) \\ \int d^2z\, V^{(\mathrm{nonlocal})}_{-k,\,-1}(z)\bar{V}^{(\mathrm{nonlocal})}_{k,\,+1}(\bar{z}) & (k=1,2,\cdots). \end{cases} \tag{16}$$

を exponential の肩に上げたもの $e^{W_{\mathrm{RR}}}$ を考えよう。ここで、$V^{(\mathrm{nonlocal})}_{k,\,\epsilon}$ は p_ℓ として Seiberg の locality constraint を満たさない branch $p_\ell=1+|k|$ をとるところ以外は $V_{k,\,\epsilon}$ と同一である。この background の下で具体的に type IIA 理論の振幅を計算した。Liouville 型相互作用としては、行列模型との対応から (NS, NS) tachyon $T_{-\frac{1}{2}}(z)\bar{T}_{\frac{1}{2}}(\bar{z})$ の 0-picture 版を考えた。($T_{\frac{1}{2}}(z)\bar{T}_{-\frac{1}{2}}(\bar{z})$ を含めないところが通常の $\mathcal{N}=2$ super Liouville 理論と異なる。) 計算結果を行列模型側で得た相関関数と比較することで、対応が振幅のレベルで成り立つことが具体的に示せ、行列模型の相関関数の $\ln\omega$ のべきは type IIA 理論では (R−, R+) background との resonance と解釈できる。

我々の行列模型は、target-space SUSY を有する超弦理論を表す行列模型で具体的に相関関数が計算可能な、興味深い例を与えていると言える。

今後の課題として、positive-winding tachyon $T_{k-\frac{1}{2}}(z)\bar{T}_{-k+\frac{1}{2}}(\bar{z})$ $(k=1,2,\cdots)$ の行列模型側の対応物がまだ見えていないことが挙げられる。Penner model の場合では Imbimbo-Mukhi (1995) が議論しているように、2 次元 string の negative-momentum tachyon については行列のべきとして表されるが、positive-momemtum tachyon に関しては行列の外場と結合させた Kontsevich-Penner model において見えるようになっていた。我々の場合も、同様に行列の外場を導入することで positive-winding tachyon の対応物を見い出せると期待している。

また、ここで見た行列模型と超弦理論との対応は不安定な D-brane の描像に依らないものである。我々の行列模型が D-brane の描像としても解釈できるのか？調べてみることは面白いだろう。

最後に、type IIA 側の振幅の計算では技術上の事情のため、$(\nu_+-\nu_-)$ が小さいとして background を vertex operator の挿入として考慮した。$(\nu_+-\nu_-)$ が小さくない場合、RR background は target space を曲げて black hole に変形させる可能性がある。$\mathcal{N}=2$ super Liouville 理論では Hori-Kapustin (2001) により示されているが、我々の場合にこのような可能性を調べてみることは興味深い。

研究会の世話人の皆様、研究会中に議論してくださった皆様に感謝いたします。