

有限温度摂動論

日高 義将

(理研)

摂動論:

小さなパラメータによる展開

結合定数 $g, 1/g,$

温度: $T, 1/T,$

自由度: $N, 1/N,$

波数, 振動数: ω, k

g : 弱結合展開

$1/g$: 強結合展開

$1/T$: 3D 有効理論

$1/N_c$: Large- N_c QCD

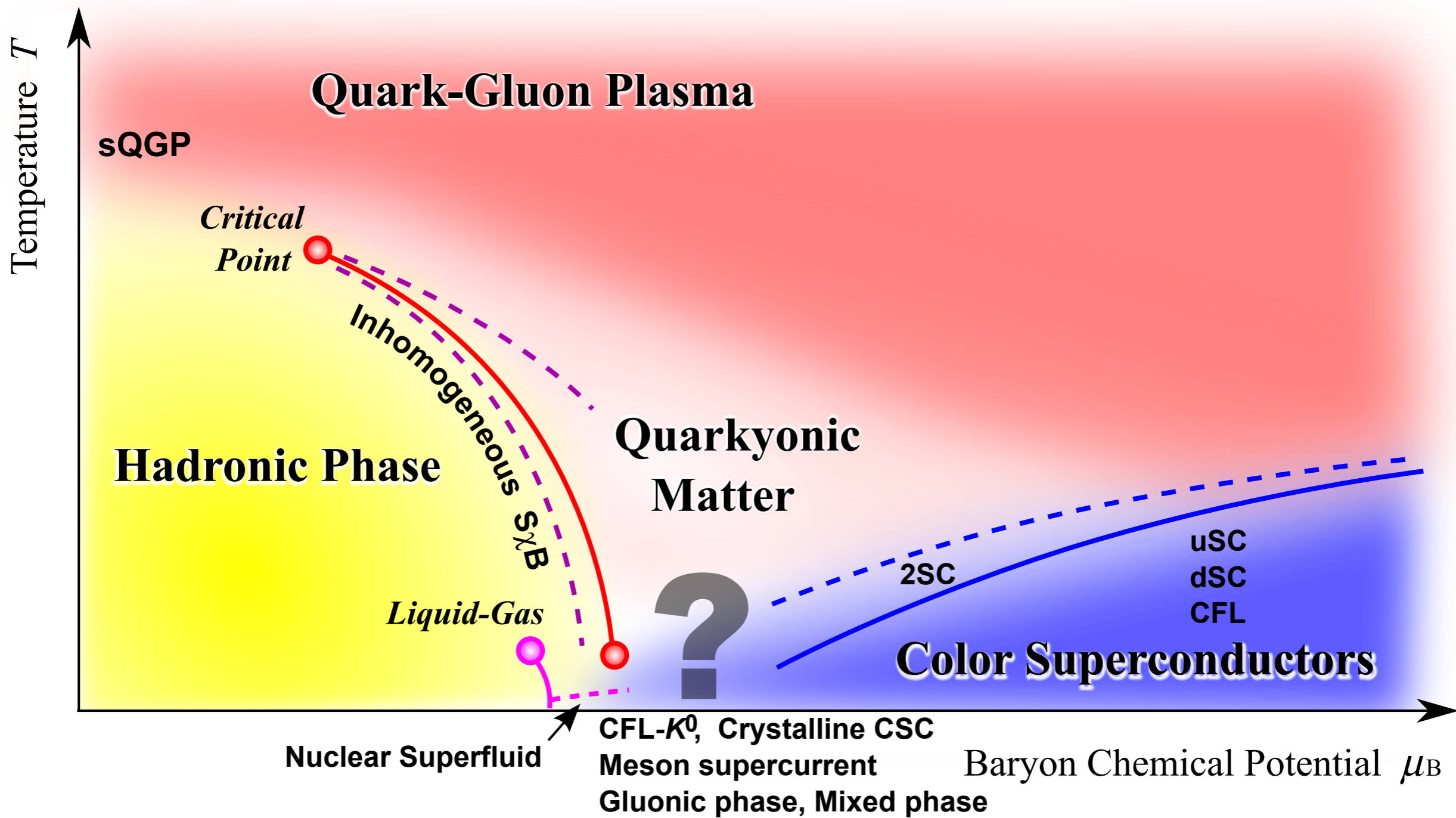
$1/N_c, 1/g^2 N_c$: Gauge/gravity対応

ω, k : 流体力学, カイラル摂動論

概要

- 弱結合展開
 - 静的
 - 動的
- 微分展開
 - Lorentz対称性がない場合の南部ゴールドストーンの定理
- まとめ

QCD 相図



QGPは強結合？

$$\alpha_{\text{eff}}(\mu = 2\pi T_c) \sim 0.4 \quad T = T_c \approx 170\text{MeV}$$
$$g_{\text{eff}} \sim 2 \quad N_c g^2 \sim 12$$

小さくは無いが巨大でも無い。

弱結合摂動論

$$g \ll 1$$

静的な物理量

圧力, エントロピー, 感受率など

動的な物理量

輸送係数, スペクトル関数など

真空:

ループ展開=結合定数の展開

有限温度:

ループ展開≠結合定数の展開

ループ: 量子ゆらぎ+熱ゆらぎ

**しばしば無限個のダイアグラムの
足し上げが必要**

赤外の振る舞い

有限温度一般

分布関数の特異性: Bose分布

Pinch特異性: 運動論的方程式と関係

ゲージ理論特有の赤外特異性

クーロン前方散乱

collinear特異性

超相対論的プラズマ

熱ゆらぎ \gg 量子ゆらぎ

半古典的

Soft, ultrasoftな励起に対して

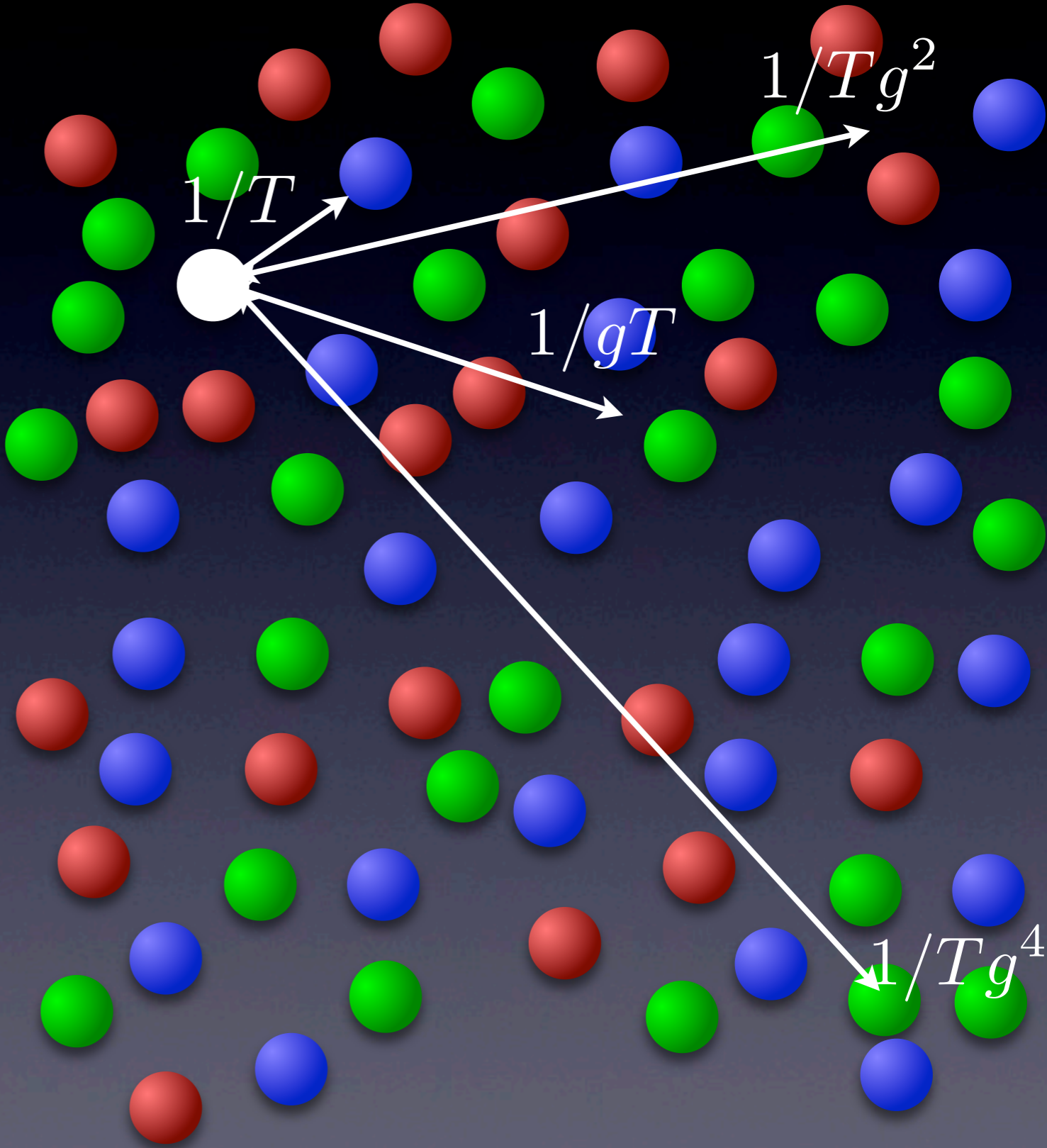
ボルツマン方程式が良い近似に

超相対論的プラズマの典型的なスケール

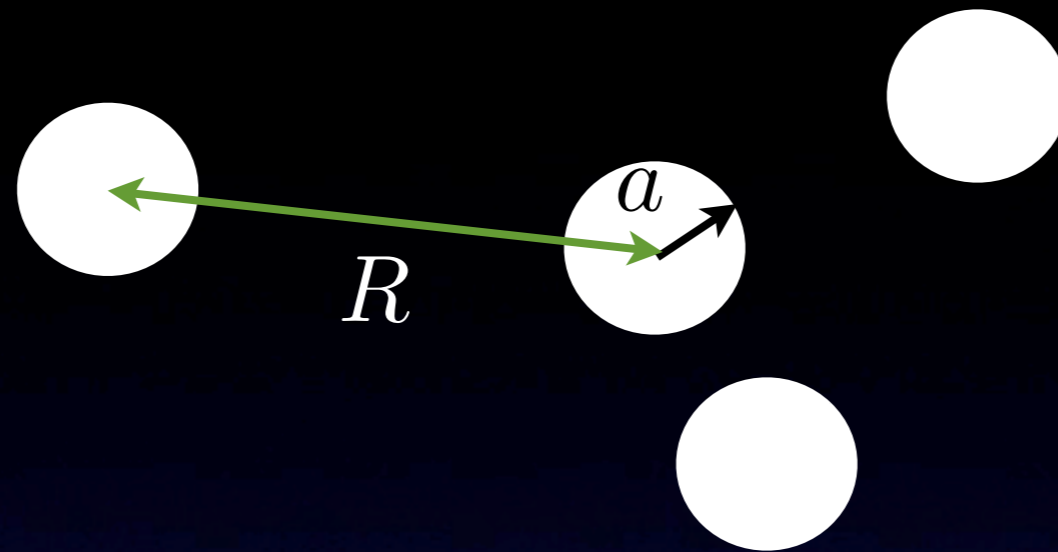
$$T \gg m$$



- 1 粒子励起
1 / 粒子間距離
- 集団励起
(plasmon, plasmino)
Debye遮蔽質量
- magnetic質量
1 / 平均自由行程
ultrasoftモード
- 1 / (輸送) 平均自由行程
- 流体モード



古典的な場合



ずれ粘性 $\eta_0 \sim pn\lambda_{\text{mfp}} \sim p/\sigma$ Maxwell (1860)

“Virial” 展開

$$\frac{\eta}{\eta_0} = 1 + c_1 na^3 + c_2 (na^3)^2 \ln(na^3) + \dots$$

n : 粒子密度 $\sim 1/R^3$
 a : 粒子のサイズ

超相対論的プラズマ

$$n \sim T^3 \quad a^3 \sim \sigma/T \sim g^4/T^3 \quad \Rightarrow \quad na^3 \sim g^4$$

(実際は赤外の振る舞いによりより複雑に)

擾動論

Stephan-Boltzmann

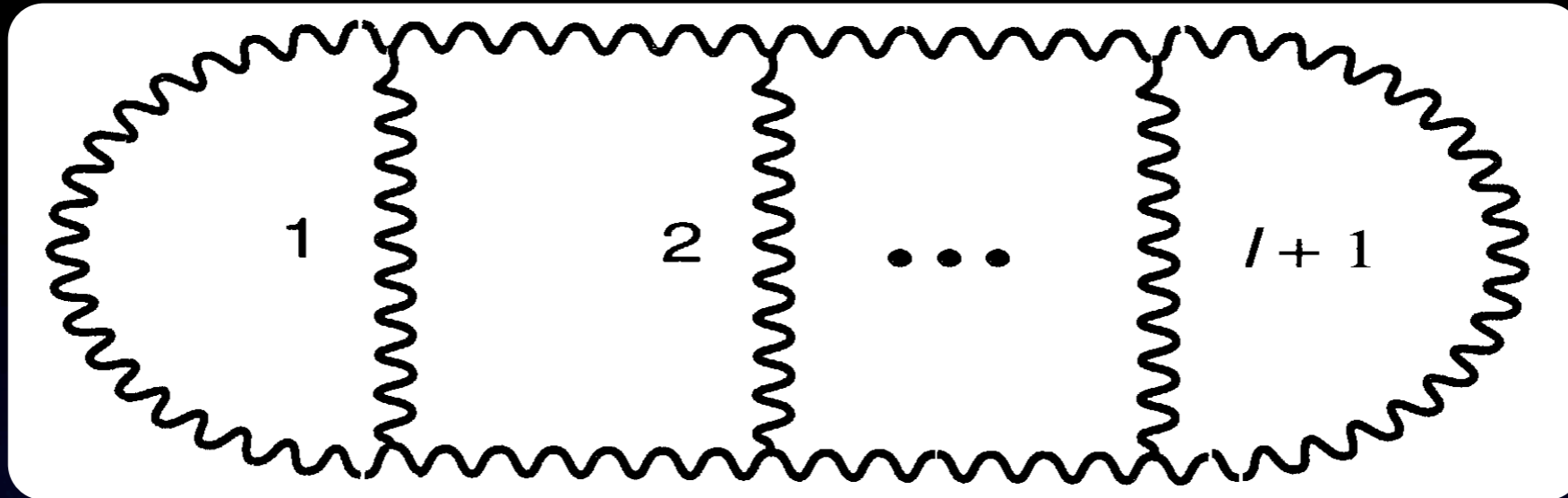
$$P_0 = \underbrace{\frac{1}{2} \text{tr} \ln D_{\mu\nu}}_{\text{gluon}} - \underbrace{\text{tr} \ln(\not{D})}_{\text{quark}} - \underbrace{\text{tr} \ln D}_{\text{ghost}} = \frac{8\pi^2 T^4}{45} \left(1 + \frac{21}{32} N_f \right)$$

Two-loop diagrams

$$= -\frac{g^2 T^4}{6} \left(1 + \frac{5N_f}{12} \right)$$

$$P/T^4 = c_0 + \overset{\text{Shuryak ('78), Chin('78)}}{c_2} g^2 + \overset{\text{Kapusta('79)}}{c_3} g^3 + \overset{\text{Toimela('83)}}{(c'_4 \ln g + c_4)} g^4 + \overset{\text{Arnold and Zhai('94)}}{(c'_5 \ln g + c_5)} g^5 + \overset{\text{Kajantie, Laine, Rummukainen, and Schröder ('03)}}{(c'_6 \ln g)} g^6 + \mathcal{O}(g^6)$$

Lindeの問題



$$\approx \left(T \int d^3 k \right)^{l+1} (gk)^{2l} \left(\frac{1}{k^2 + m^2} \right)^{3l}$$

ループ積分 バーテックス プロパゲータ

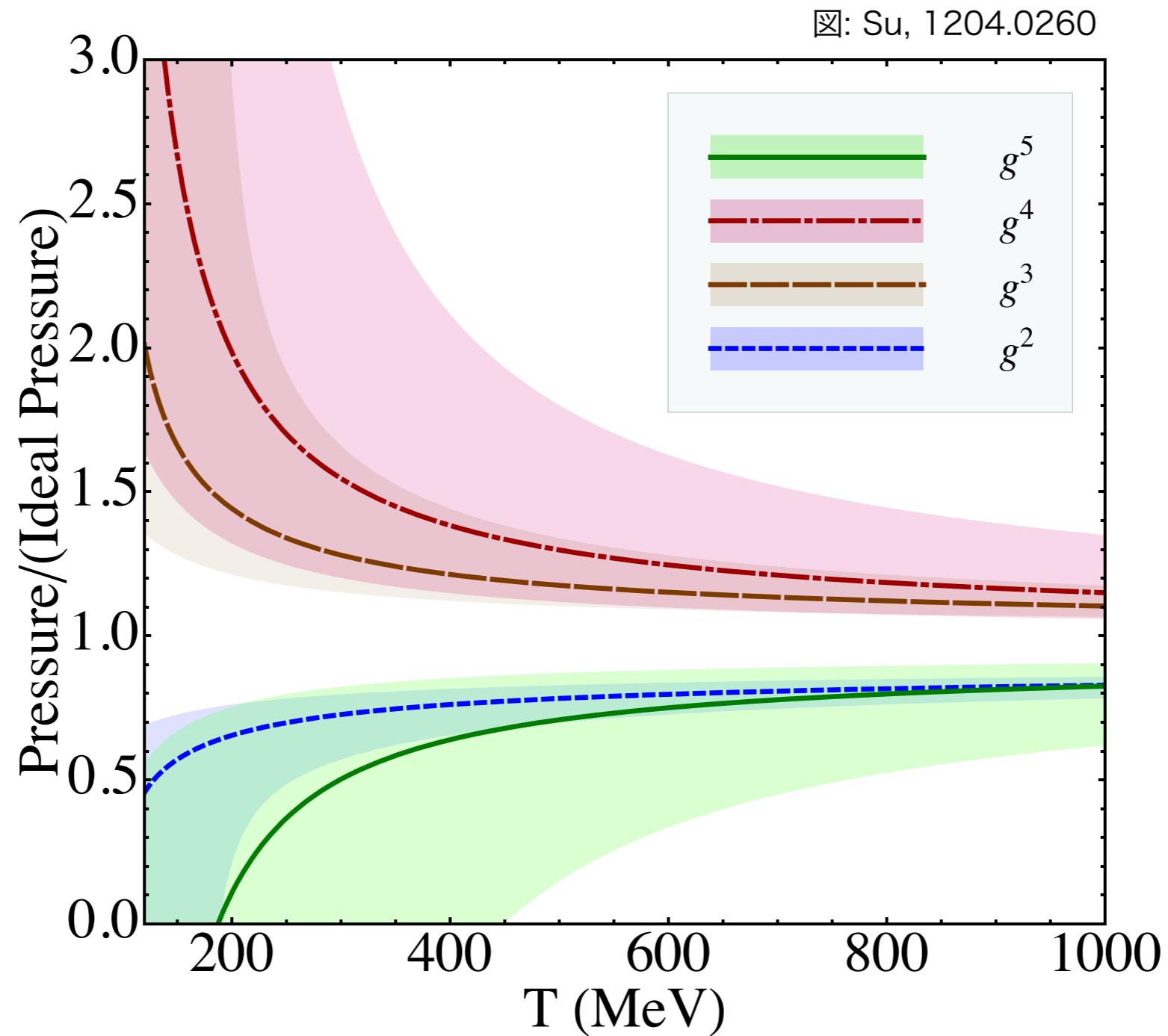
$$l = 3 \quad g^6 T^4 \ln \frac{T}{m}$$

$$l > 3 \quad g^6 T^4 \left(\frac{g^2 T}{m} \right)^{l-3}$$

magnetic遮蔽長 $\sim g^2 T$ とすると

g^6 には無限個のダイヤグラムが寄与.

圧力:擾動論



改善された摂動論

Blaizot, Iancu, Rebhan('03), Kraemmer, Rebhan('04), Andersen, Strickland('05)

2PI形式

D の汎関数

$$\beta\Omega[D] = -\log Z = \frac{1}{2} \text{Tr} \log D^{-1} - \frac{1}{2} \text{Tr} \Pi D + \Phi[D],$$

$$-\Phi[D] = \frac{1}{12} \text{Diagram 1} + \frac{1}{8} \text{Diagram 2} + \frac{1}{48} \text{Diagram 3} + \dots$$

The diagrams are:
1. A circle with a horizontal line through its center.
2. Two circles touching at a single point.
3. A circle with two horizontal lines forming an inner lens shape.

$$\frac{\delta\Omega}{\delta D} = 0 \quad \longrightarrow \quad D \text{が決まる.}$$

Hard-thermal loop 擾動論

Andersen, Braaten, Strickland('99)('00), Andersen, Braaten, Petitgirard, Strickland('02), Andersen, Petitgirard, Strickland('04), Andersen, Strickland, Su('09)('10), Andersen, Leganger, Strickland, Su('11)

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{\text{QCD}} + \mathcal{L}_{\text{HTL}}) \Big|_{g \rightarrow \sqrt{\delta}g} + \Delta\mathcal{L}_{\text{HTL}}.$$

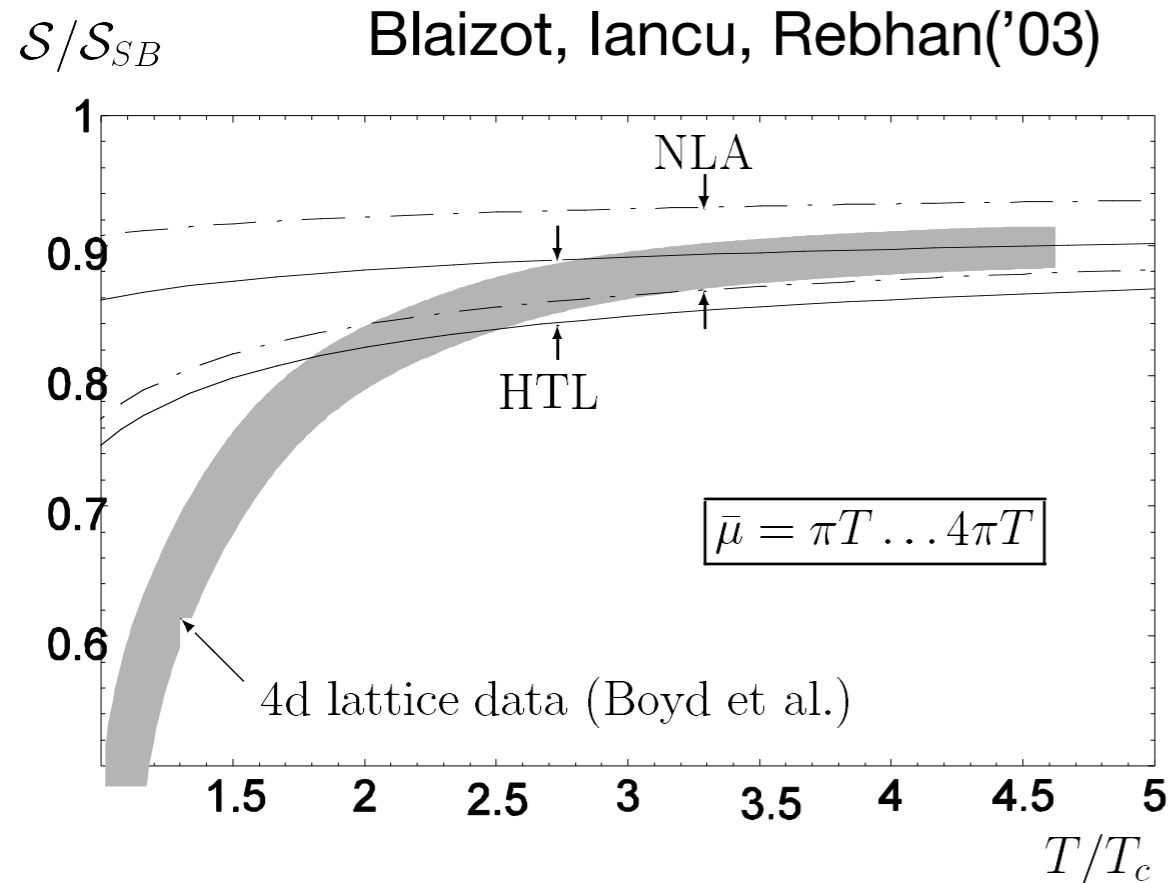
$$\mathcal{L}_{\text{HTL}} = -\frac{1}{2}(1 - \delta)m_D^2 \text{Tr} \left(G_{\mu\alpha} \left\langle \frac{y^\alpha y^\beta}{(y \cdot D)^2} \right\rangle_y G^\mu{}_\beta \right) + (1 - \delta)im_q^2 \bar{\psi} \gamma^\mu \left\langle \frac{y_\mu}{y \cdot D} \right\rangle_y \psi$$

δ について展開 ($\delta \rightarrow 1$) m_D, m_f はパラメータ.

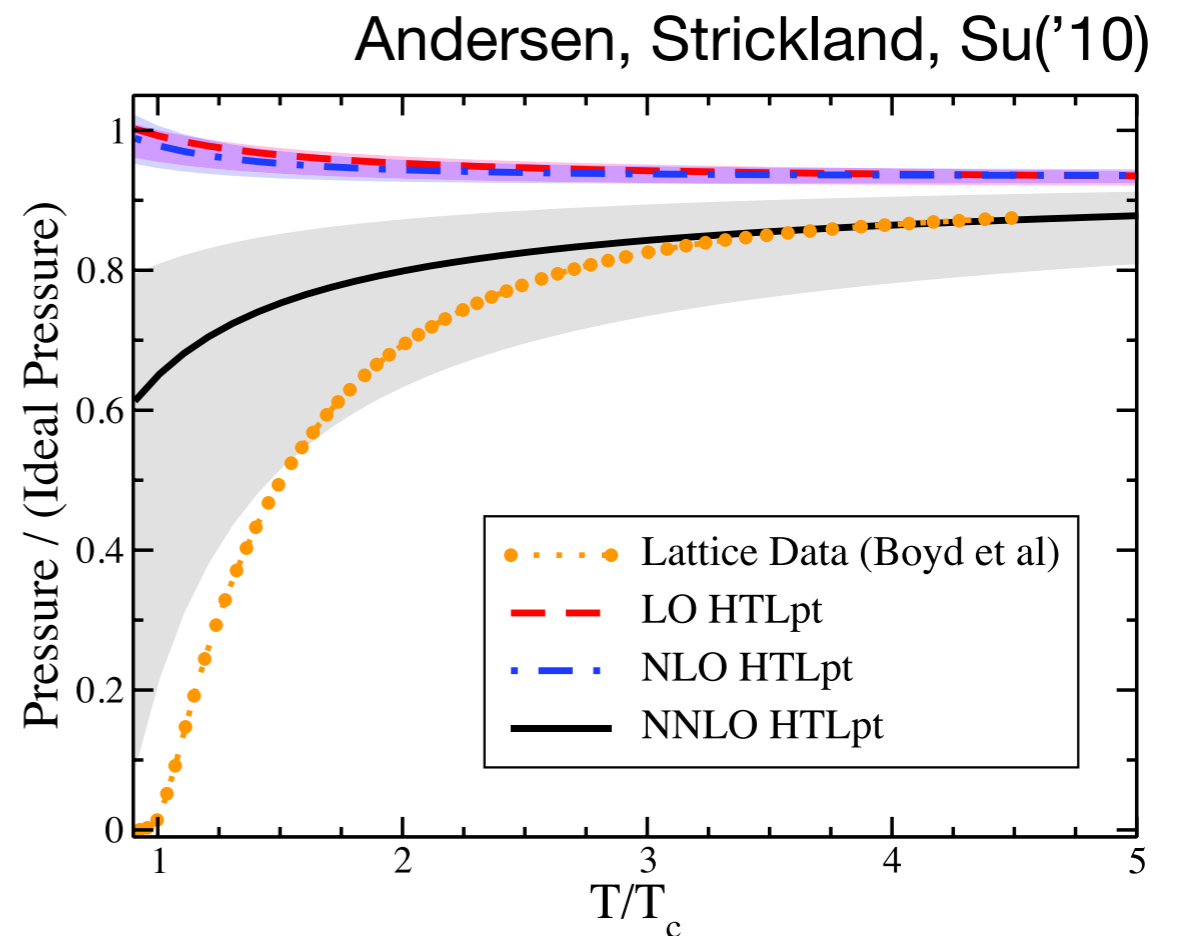
$$\frac{\partial}{\partial m_D} \Omega = \frac{\partial}{\partial m_f} \Omega = 0 \text{ となるように決める.}$$

格子QCDとの比較 (Pure glue)

2PI形式



HTL摂動論



ダイナミカル

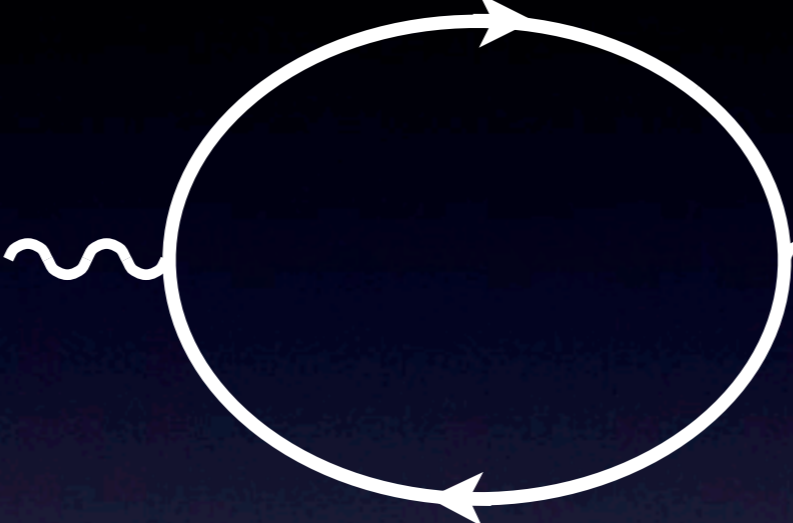
ボソンの集団励起

フェルミオンの集団励起

ボソンの集团励起

Hard Thermal loop 近似

內線:hard $k \sim T$

$\Pi_{\mu\nu}(p) =$  $p \sim gT$
外線:soft

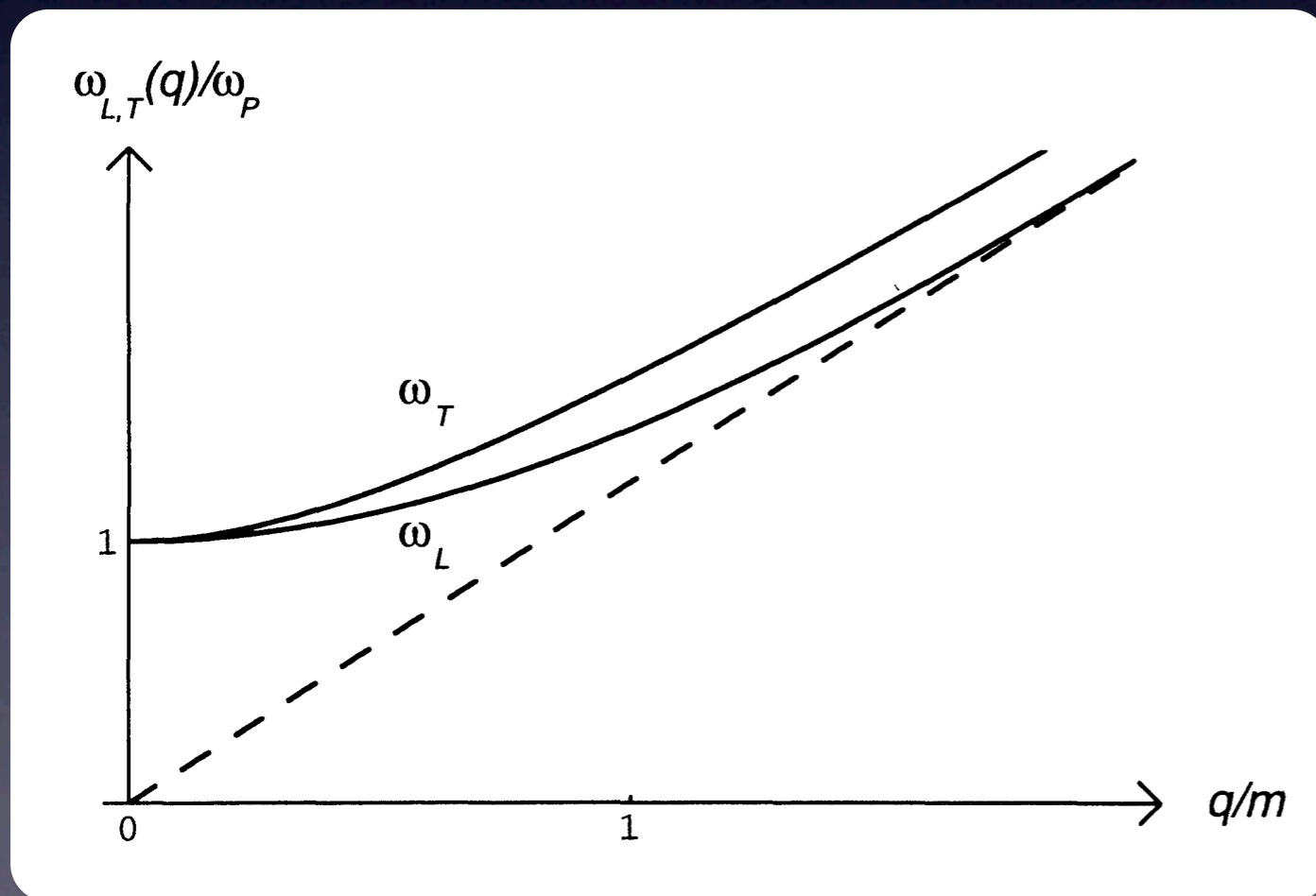
$$\Pi_{\mu\nu}(p) \simeq 2m^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left(\frac{k^0 \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{p \cdot k} + \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \right)$$

熱質量 $m^2 = 4g^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{n(k)}{k} = \frac{g^2 T}{6}$

Debye遮蔽

$$\langle A_0(\mathbf{x}) A_0(\mathbf{y}) \rangle \sim \frac{1}{r} \exp(-m_D r) \quad m_D \sim gT$$

Plasmon励起(集団励起モード)



$$\omega \sim gT$$

縦波も存在

運動論的方程式との対応

Vlasov方程式(簡単のためQED)

$$\hat{k}^\mu \partial_\mu f(t, x, k) = -e \hat{k}^\mu F_{\mu i} \partial_{k i} f(t, x, k)$$

線形化 $f = n(k) + \delta f(t, x, k)$

$$\delta f = -\frac{1}{\hat{k} \cdot \partial} e \hat{k}^\mu F_{\mu i} \partial_{k i} n(k)$$

$$\delta j_{\text{ind}}^i = e \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \hat{k}^i \delta f = 2m^2 \int \frac{d\Omega}{p \cdot k} k^i \hat{k}_m E_m$$

Hard thermal近似と同じ結果を与える。



久保公式

Kubo and Tomita('54), Nakano('56), Kubo('57)

輸送係数 \longleftrightarrow グリーン関数

ずれ粘性:

$$\eta = \frac{1}{10} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} \int d^4x e^{i\omega t} i\theta(t) \langle [\pi_{ij}(x), \pi^{ij}(0)] \rangle$$

体積粘性:

$$\zeta = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} \int d^4x e^{i\omega t} i\theta(t) \langle [\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(0)] \rangle$$

$$\mathcal{P}(x) = -T^i{}_i(x)/3, \quad \pi_{ij}(x) = T_{ij}(x) + g_{ij}\mathcal{P}(x)$$

摂動論

動的 e.g., ずれ粘性

$$\eta/T^3 = \frac{1}{g^4 (c'_1 \ln g + c_1)} (1 + \dots)$$

Arnold, Moore, Yaffe ('03)

cf., AdS/CFT $\eta/s=1/4\pi$

摂動の最低次しかわかっていない。

c.f 静的

$$P/T^4 = c_0 + c_2 g^2 + c_3 g^3 + (c'_4 \ln g + c_4) g^4 \\ + (c'_5 \ln g + c_5) g^5 + (c'_6 \ln g) g^6 + \mathcal{O}(g^6)$$

Shuryak ('78), Chin('78)

Kapusta('79)

Toimela('83)

Arnold and C. Zhai('94)

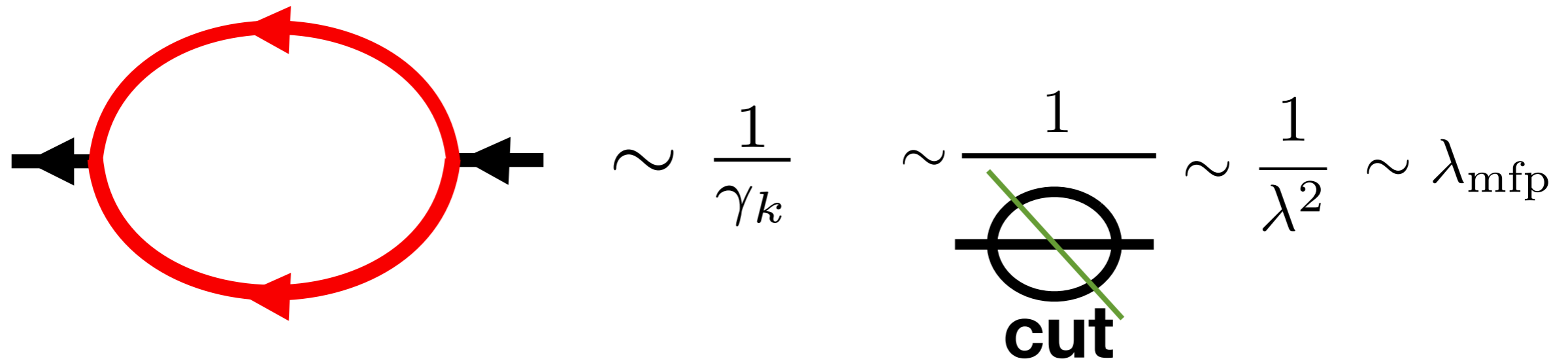
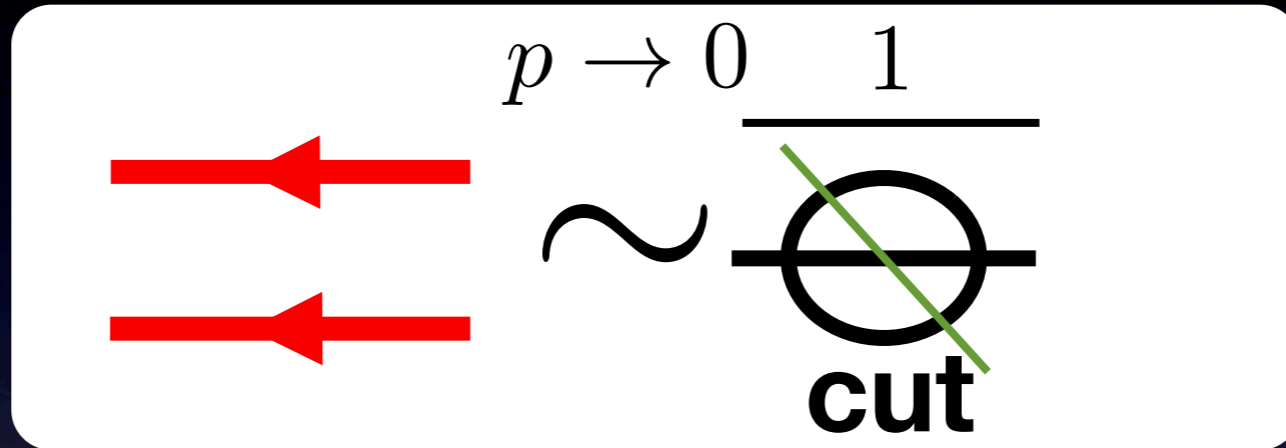
Zhai and B. Kastening('95)

Kajantie, Laine, Rummukainen, and Schröder ('03)

1ループ解析 (Φ^4 理論)

$$\frac{1}{p \cdot k} \rightarrow \frac{1}{p \cdot k + 2ik_0 \gamma_k}$$

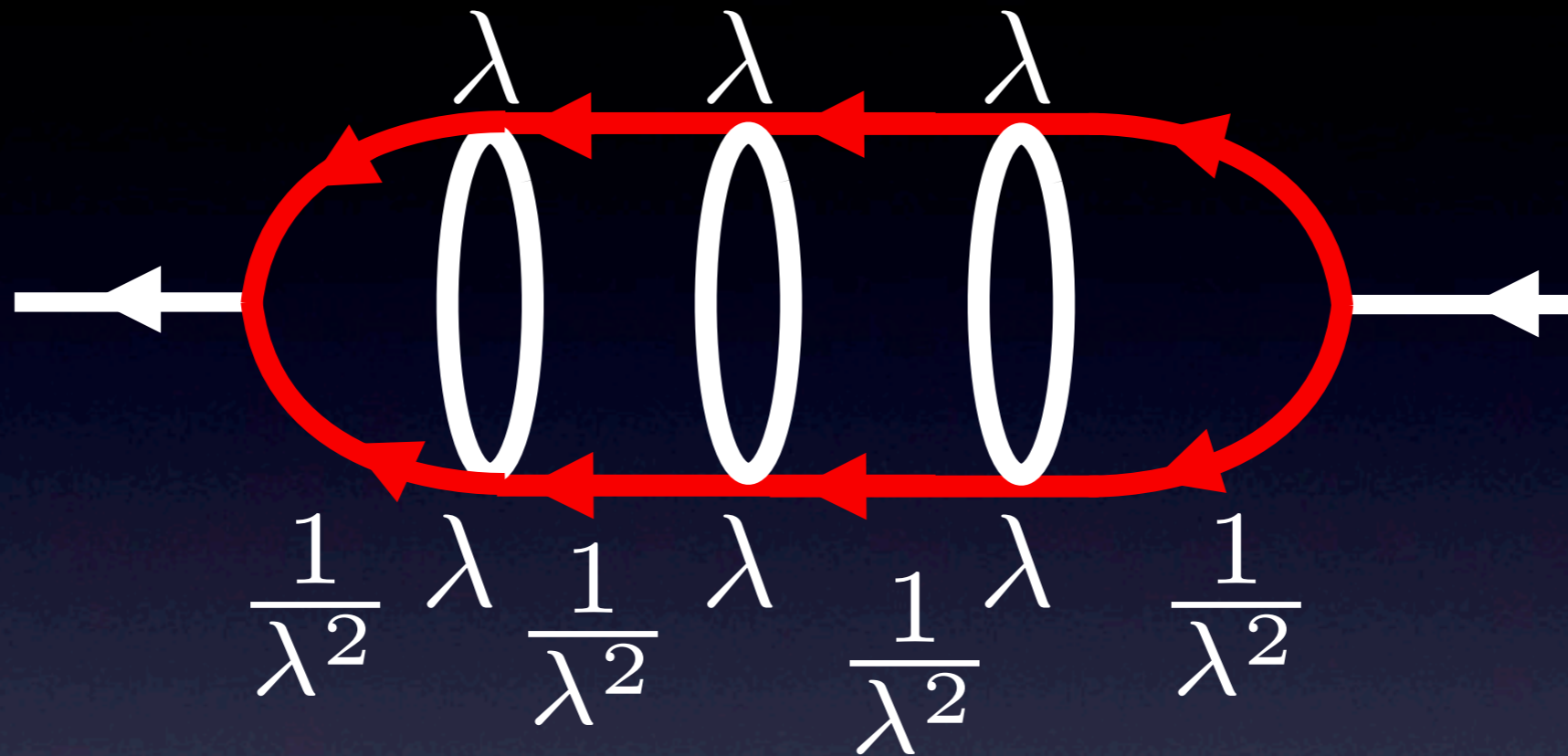
減衰率も考慮



運動学的解析 $\eta \approx \frac{1}{3} \bar{p} n \lambda_{\text{mfp}}$ Maxwell('60)

1ループ解析はオーダーは正しい。

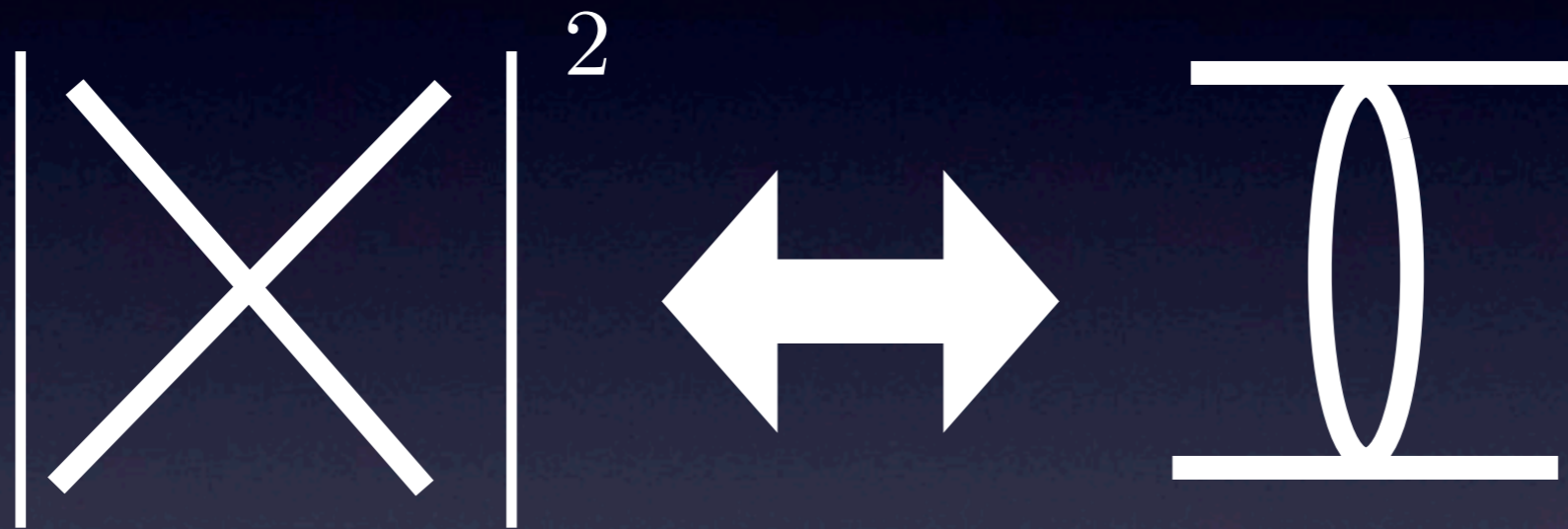
高次項



1ループと同じオーダー

足し上げ必要.

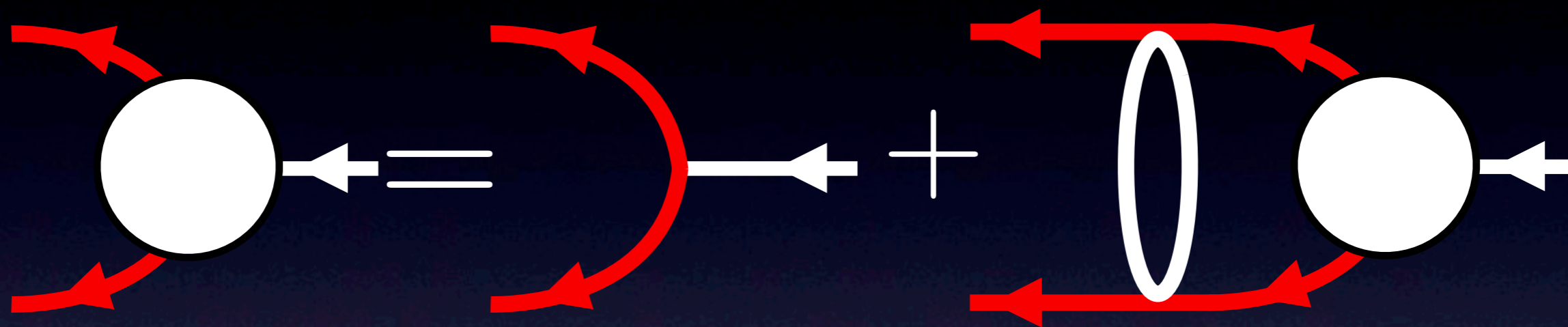
光学定理



散乱振幅の2乗

ループダイアグラムの虚部

自己無撞着方程式



= 線形ボルツマン方程式

Jeon('95)

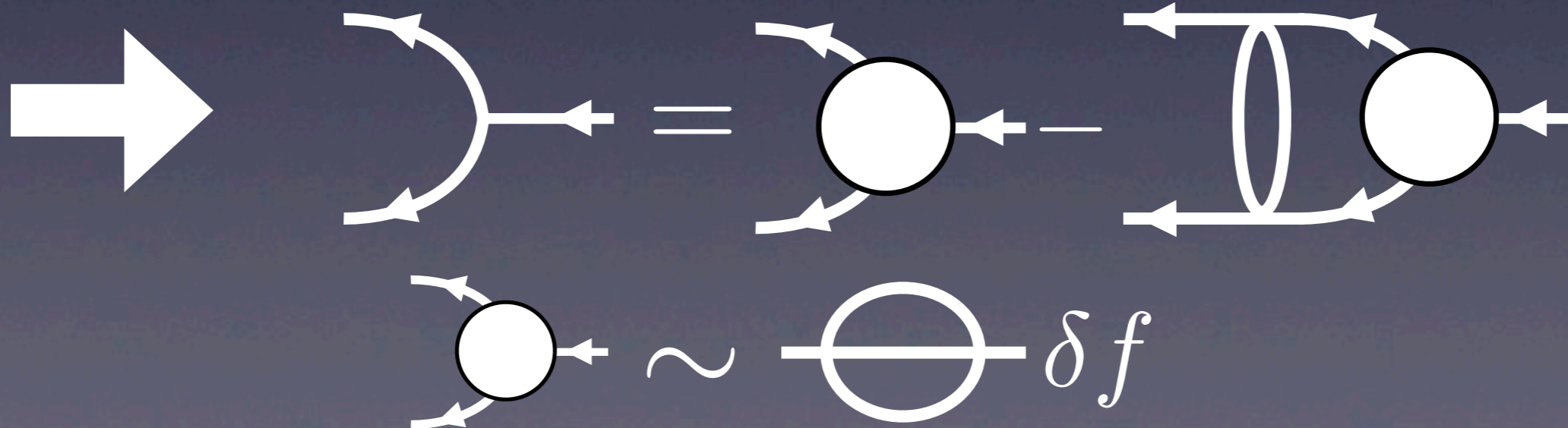
ボルツマン方程式 $2k^\mu \partial_\mu f = C[f]$

線形化 $f = f_0 + \delta f$ $f_0 = \frac{1}{\exp(\beta(x)u_\mu(x)k^\mu) \pm 1}$

$$2k^\mu \partial_\mu f_0 = C'[f_0] \delta f$$

$$2k^\mu \partial_\mu f_0 \sim k^i k^j \partial_i u_j \sim \text{Curl} \partial_i u_j$$

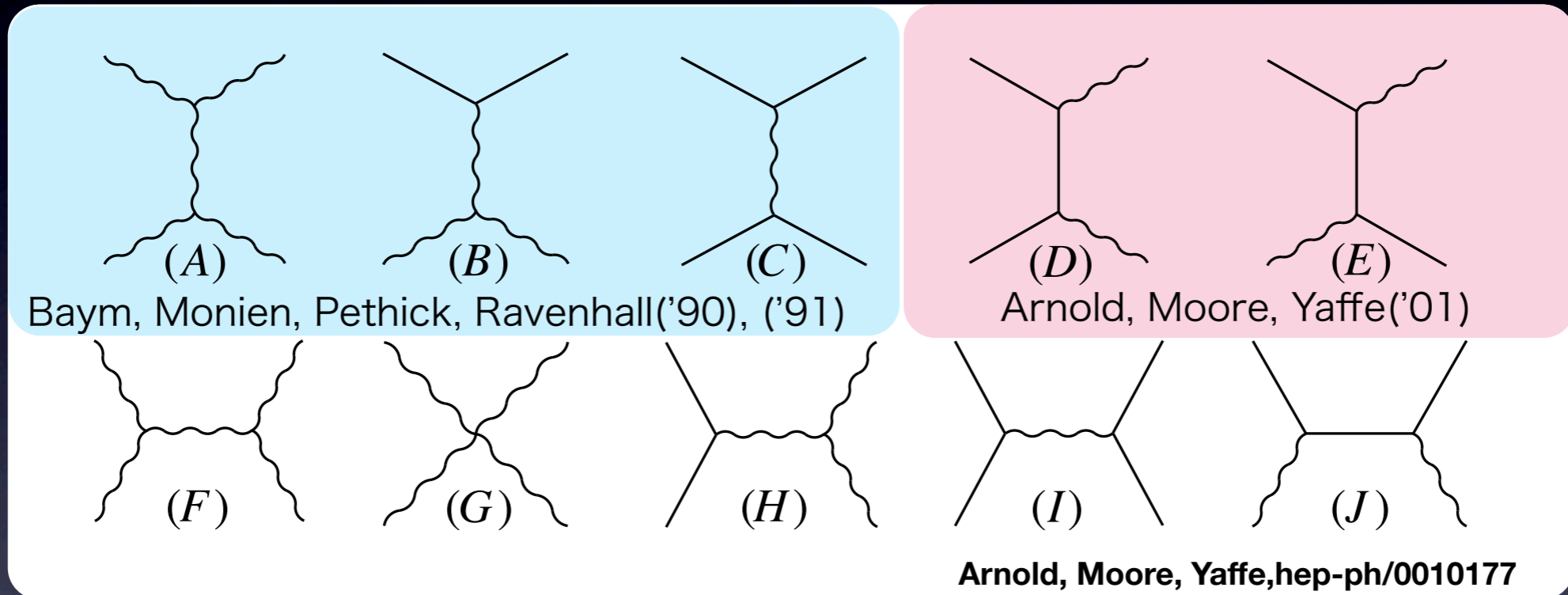
$$C'[f_0] \delta f \sim \text{Circ} \delta f + \text{Curl} \delta f$$



輸送係数

$$\eta \sim np\lambda_{\text{mfp}} \quad \lambda_{\text{mfp}} = 1/(n\sigma)$$

2→2散乱



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \frac{g^4}{\sin^4 \theta}$$

前方散乱に発散

$$\sigma_{\text{tr}} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} (1 - \cos \theta) \sim g^4 \int \frac{d\theta}{\theta}$$

Debye遮蔽で有限に

$$\sigma_{\text{tr}} \sim \frac{g^4}{T^2} \ln 1/g \quad \longrightarrow \quad \eta \sim np\lambda_{\text{mfp}} \sim \frac{T^3}{g^4 \ln 1/g}$$

輸送係数

ずれ粘性 (leading log order)

Arnold, Moore, Yaffe ('01)

$$\eta \simeq 270 d_A \zeta(5)^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^5 (v^t c^{-1} v) \frac{T^3}{g^4 \ln 1/g}$$

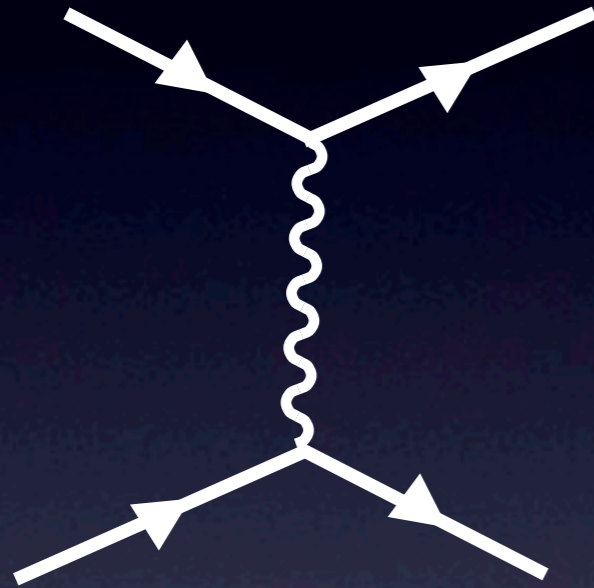
$$v = \begin{bmatrix} d_A \\ \frac{15}{8} N_f d_F \end{bmatrix} \quad c = (d_A C_A + N_f d_F C_F) \begin{bmatrix} d_A C_A & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} N_f d_F C_F \end{bmatrix} + \frac{9\pi^2}{128} N_f d_F C_F^2 d_A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d_F = C_A = N_c, C_F = (N_c^2 - 1)/(2N_c), d_A = N_c^2 - 1$$

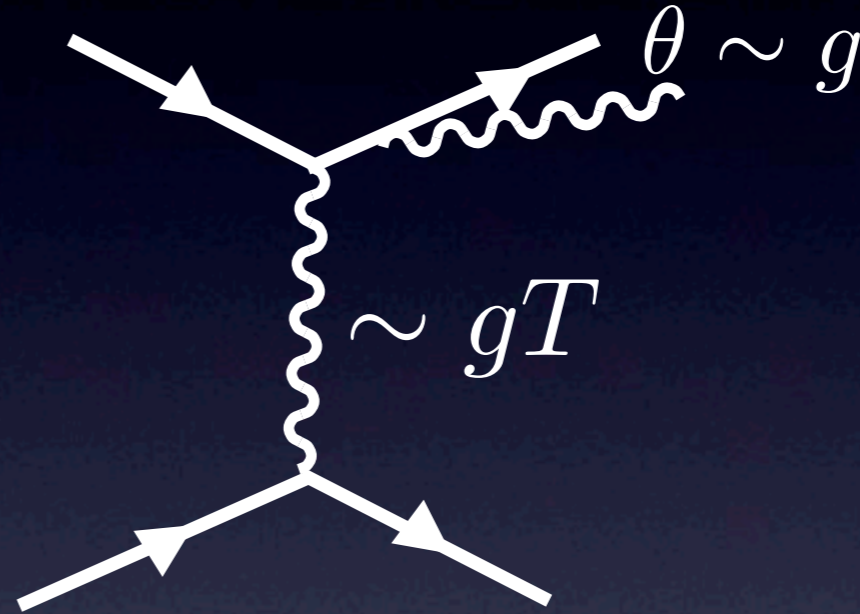
輸送係数

Leading order

2→2散乱



2→3散乱



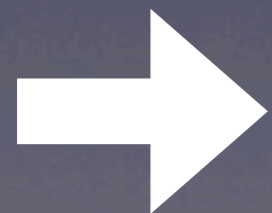
2→3体Collinear散乱の寄与は

2→2体散乱のleading orderと同じorder.

Aurenche, Gelis, Kobes, Zaraket ('98)

3→4体, 4→5体,.....も同じオーダー

Aurenche, Gelis, Zaraket ('00), Arnold, Moore, Yaffe('01)



LPM effect

Landau, Pomeranchuk ('53), Migdal ('56) ('57)

輸送係数

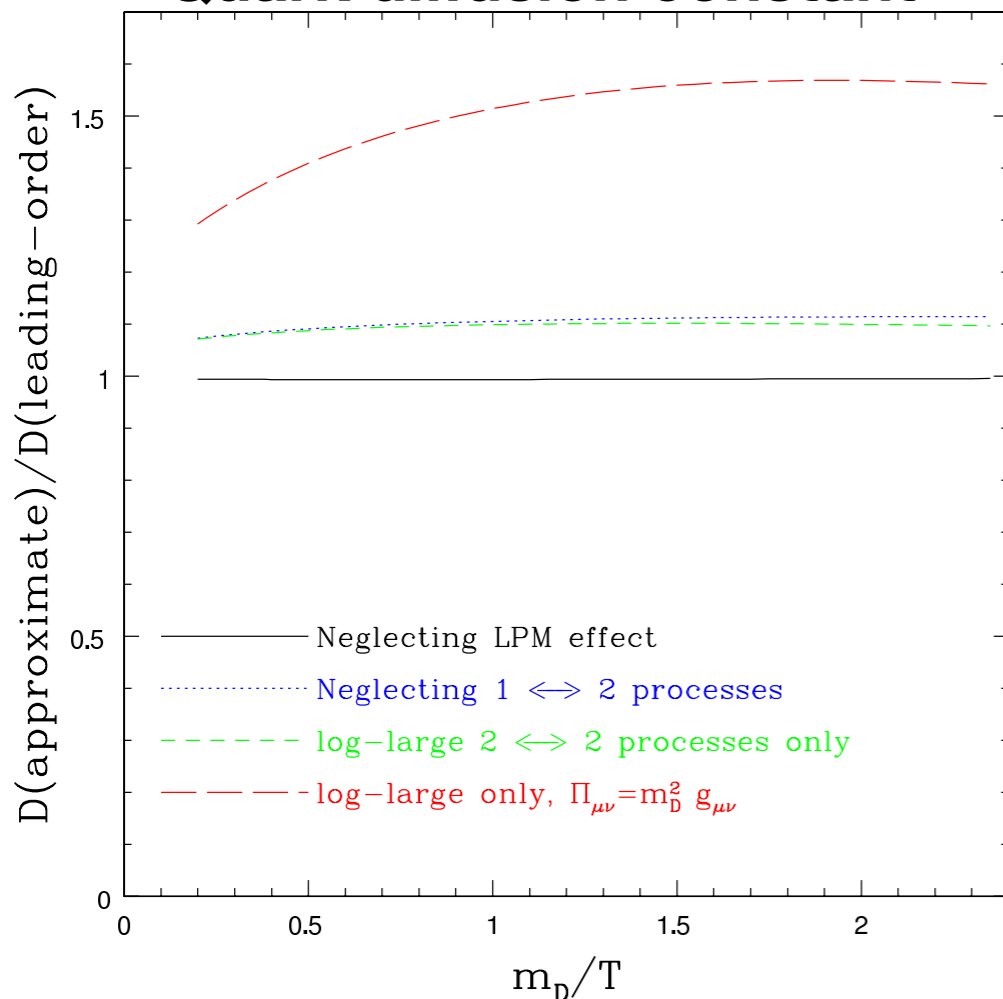
2→2体, effective 1→2体散乱を含んだ
ボルツマン方程式をとけば良い。

Arnold, Moore, Yaffe('03)

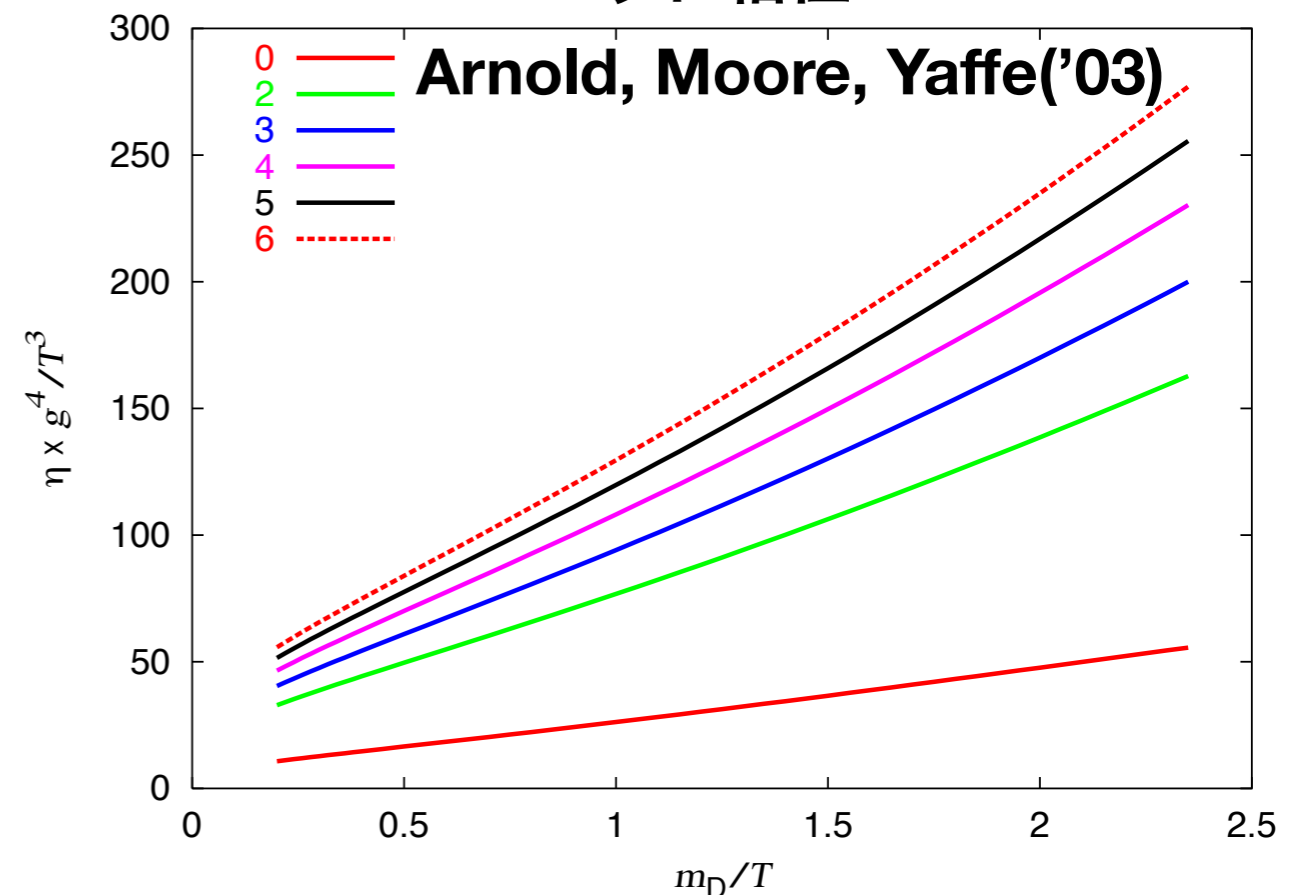
c.f. Diagrammatic derivation

Gagnon, Jeon('07)

Quark diffusion constant



ずれ粘性



さらに高次項は？

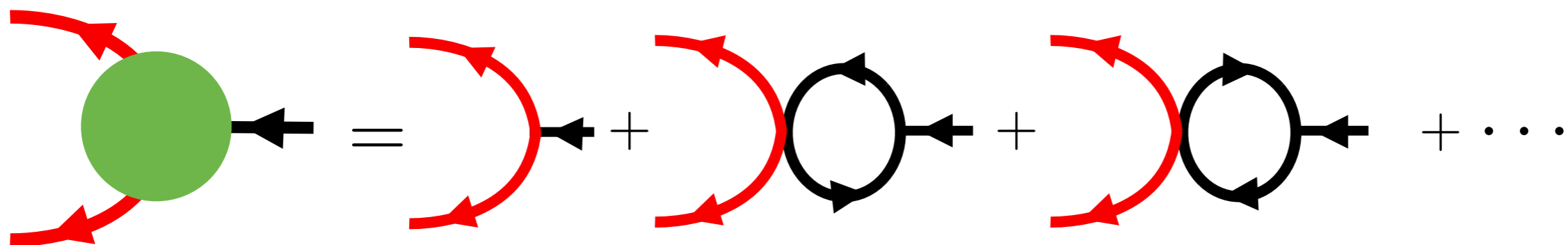
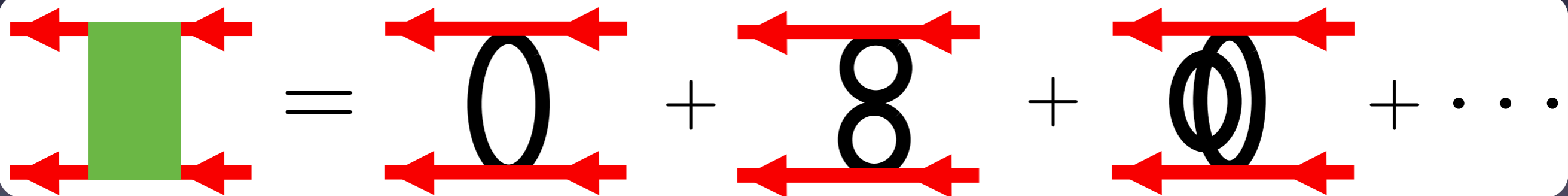
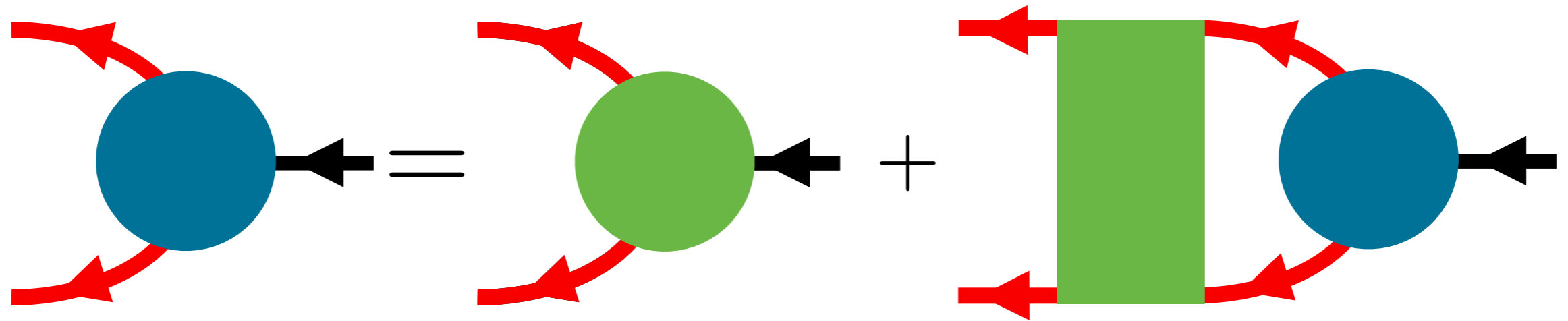
Open question.

Challenging problem.

Beyond the Boltzmann Eq.

YH, Kunihiro('10)

Leading-order orders

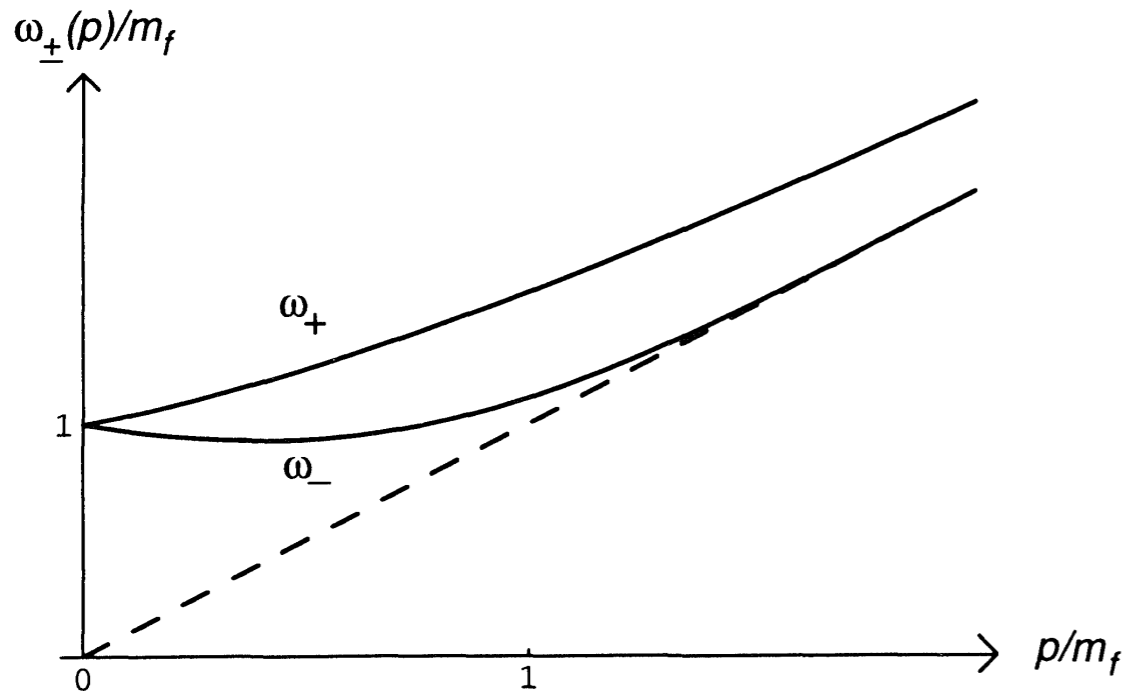
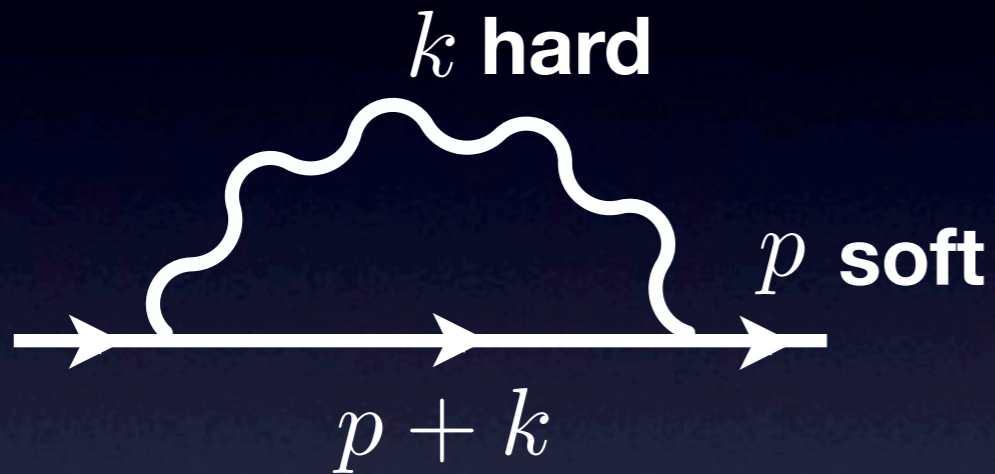


フェルミオン励起

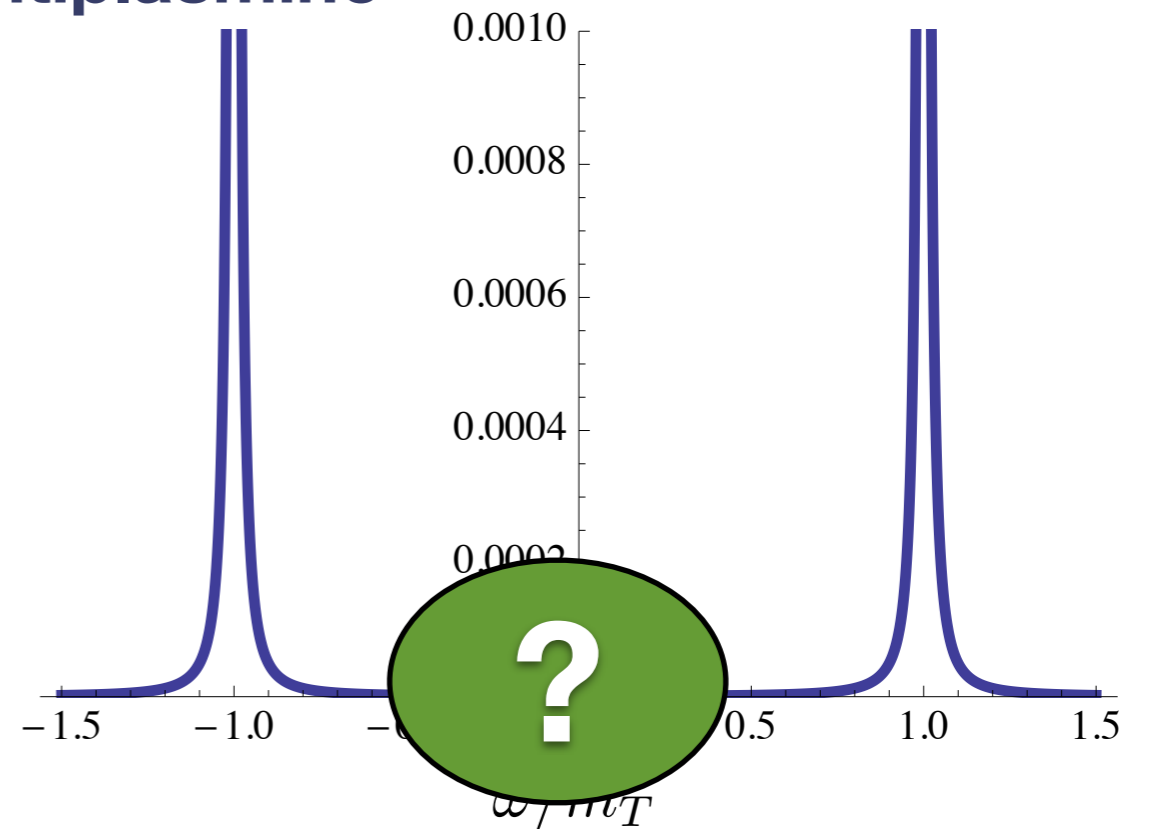
フェルミオン集団励起

Klimov ('82), Weldon ('83), Braaten, Pisarski ('89)

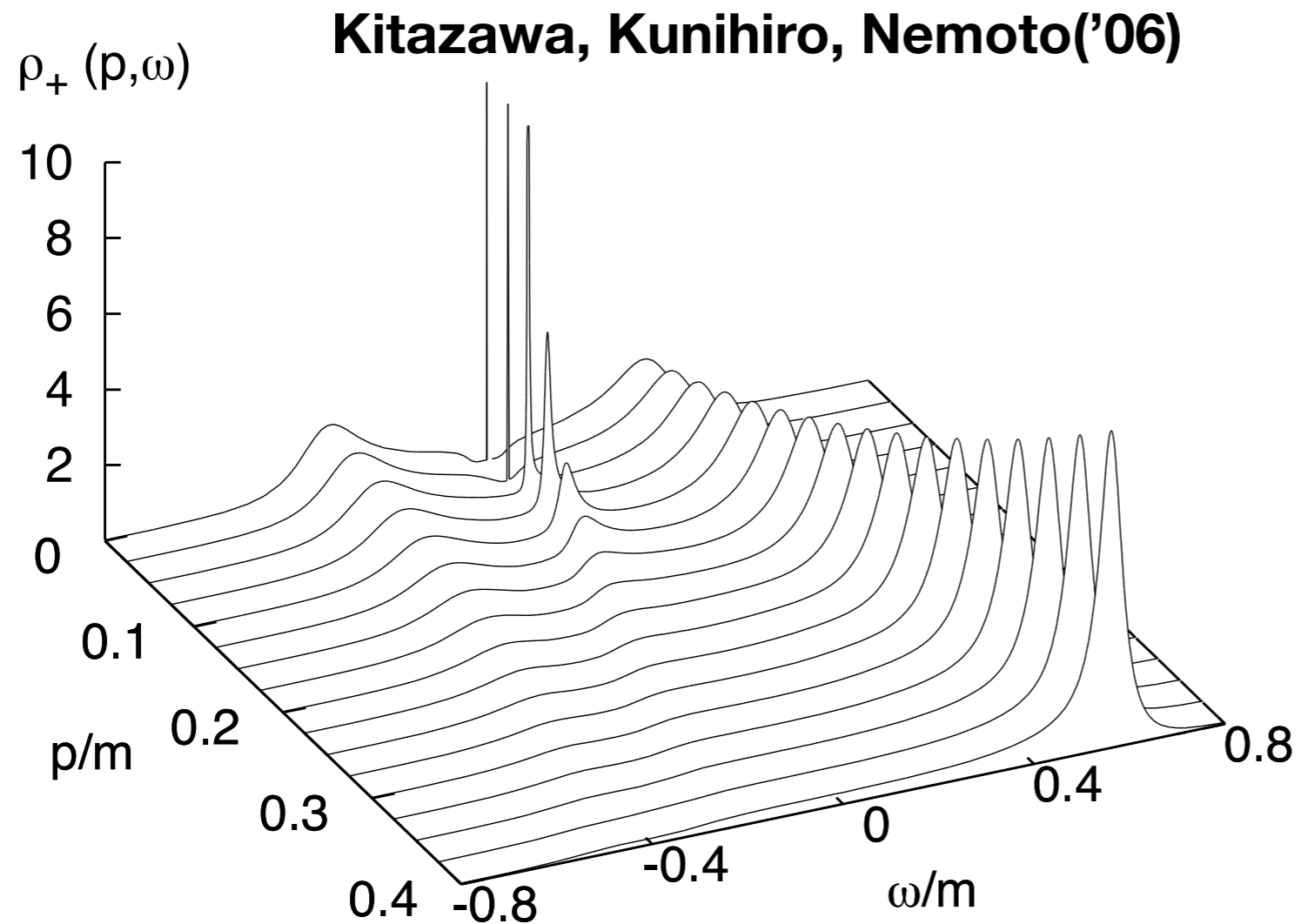
HTL近似



Antiplasmino $\rho(\omega, p = 0)$ Normal mode



Ultrasoft Fermionic mode



原点にピーク

massless fermion

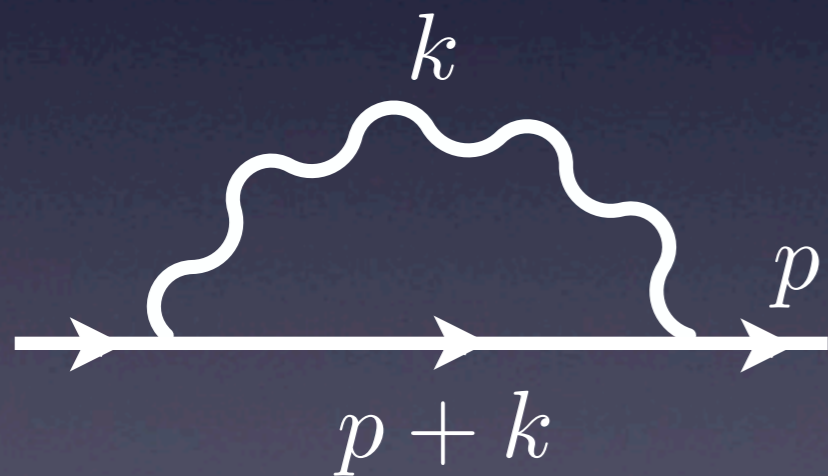
massive boson

Dressed perturbation theory

Dressed propagators

$$D_R(k) = \frac{\not{k}}{k^2 - m_f^2 + 2ik^0\gamma_f} \quad G_A(k) = \frac{1}{k^2 - m_b^2 - 2ik^0\gamma_b}$$

m_f^2, m_b^2 : 熱質量 γ_f, γ_b : 減衰率

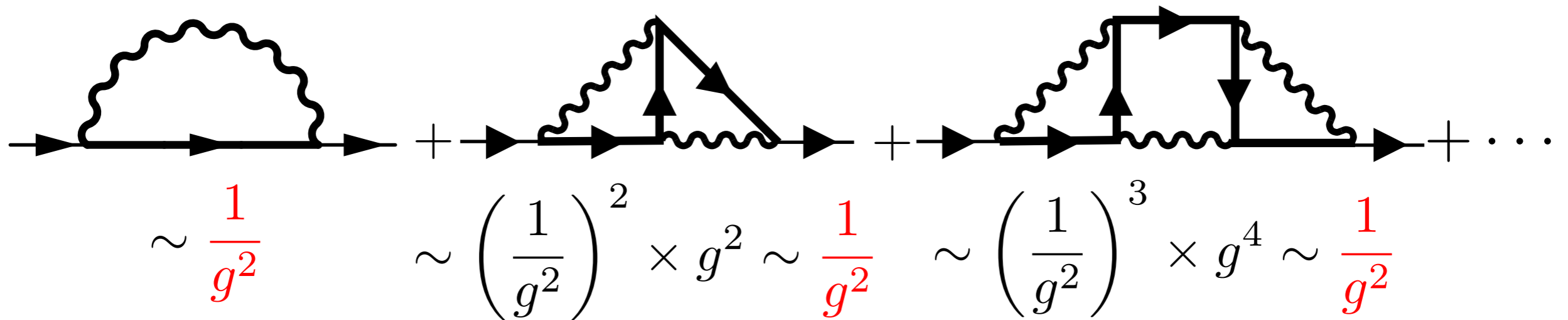


$$\xrightarrow{p \rightarrow 0} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \not{k} (n_F(k) + n_B(k)) \frac{1}{\delta m^2 + 2(ik^0\gamma)}$$

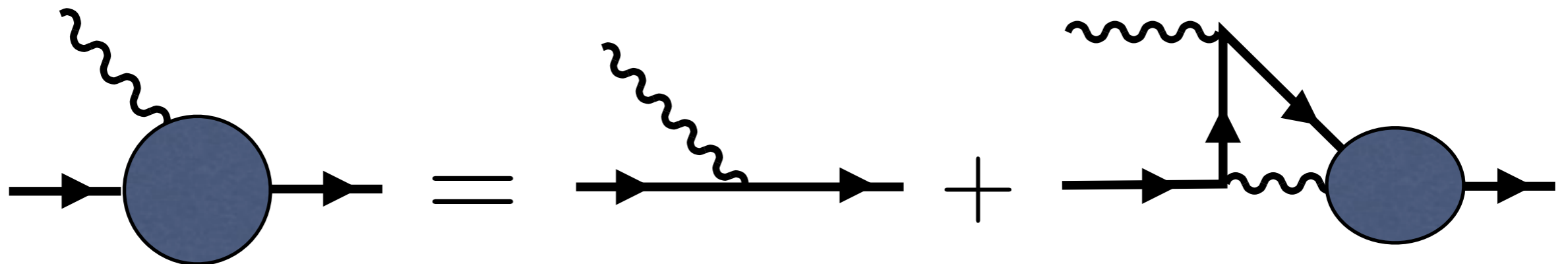
where

$$\delta m^2 = m_b^2 - m_f^2 \quad \gamma = \gamma_b + \gamma_f$$

高次項も同じオーダーで効く



自己無撞着方程式



Ultrasoft Fermionic pole

YH, Satow, Kunihiro ('11)

cf. Lebedev, Smilga ('90)

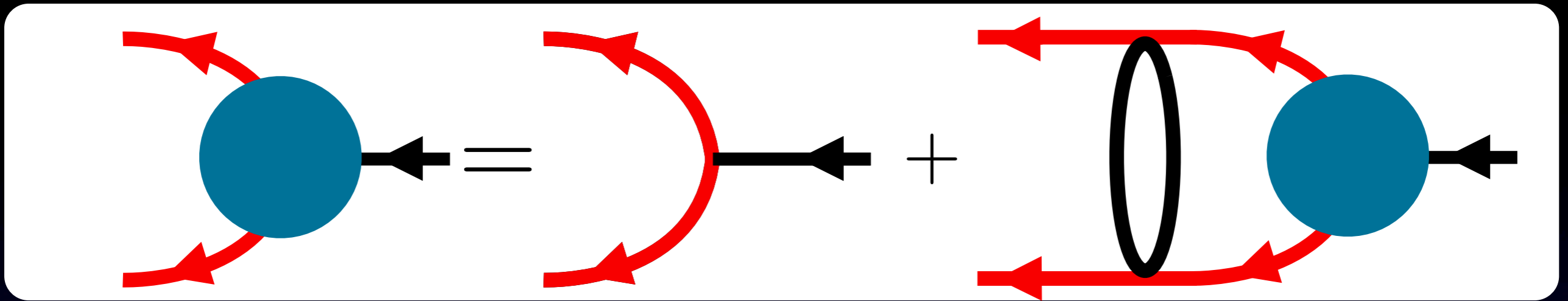
Pole

$$\omega = \pm \frac{1}{3}p + i\gamma$$

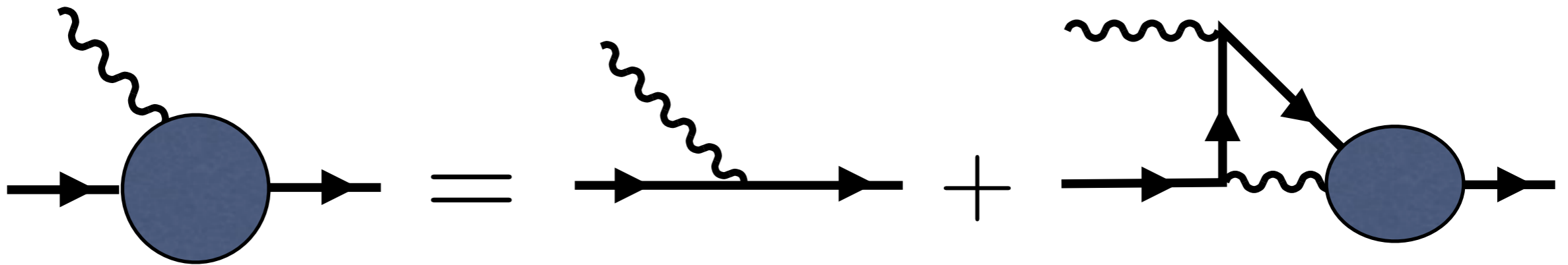
Residue

$$Z = \frac{g^2}{16\pi^2} c$$

	γ	c
Yukawa model	$\sim g^4 T$	$2/9$
QED	$\sim g^2 T$	$1/9$
QCD	$\sim g^2 T$	$4(N_f + 5)/3$



線形ボルツマン方程式



フェルミオン励起の運動論的方程式

YH, Satow ('12)

微分展開

低エネルギーの有効理論

流体力学

保存電荷に対する有効理論

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_{\mu} J^{\mu} = 0$$

自発的対称性の破れがある場合

南部-Goldstoneモードも自由度

自発的対称性の破れの数と
NGモードの数の関係は？

南部-Goldstone(NG)の定理

Lorentz不変性がある場合

$$N_{NG} = N_{BS}$$

N_{BS} :破れた対称性の数

N_{NG} :NGモードの数

分散関係:

$$E_k = v|k| \quad \text{Type-I NGモード}$$

$$(E_k = vk^2 \quad \text{Type-II NGモード})$$

南部-Goldstoneの定理

Lorentz不変性がない場合(ゼロ温度)

Nielsen and Chadha ('76)

$$N_{\text{type-I}} + 2N_{\text{type-II}} \geq N_{\text{BS}}$$

Schafer, Son, Stephanov, Toublan, and Verbaarschot ('01)

$$\langle [Q_a, Q_b] \rangle = 0 \quad \longrightarrow \quad N_{\text{NG}} = N_{\text{BS}}$$

Watanabe and Brauner ('11)

$$N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} \leq \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_a, Q_b] \rangle$$

Watanabe-Brauner予想 ('11)

$$N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_a, Q_b] \rangle$$

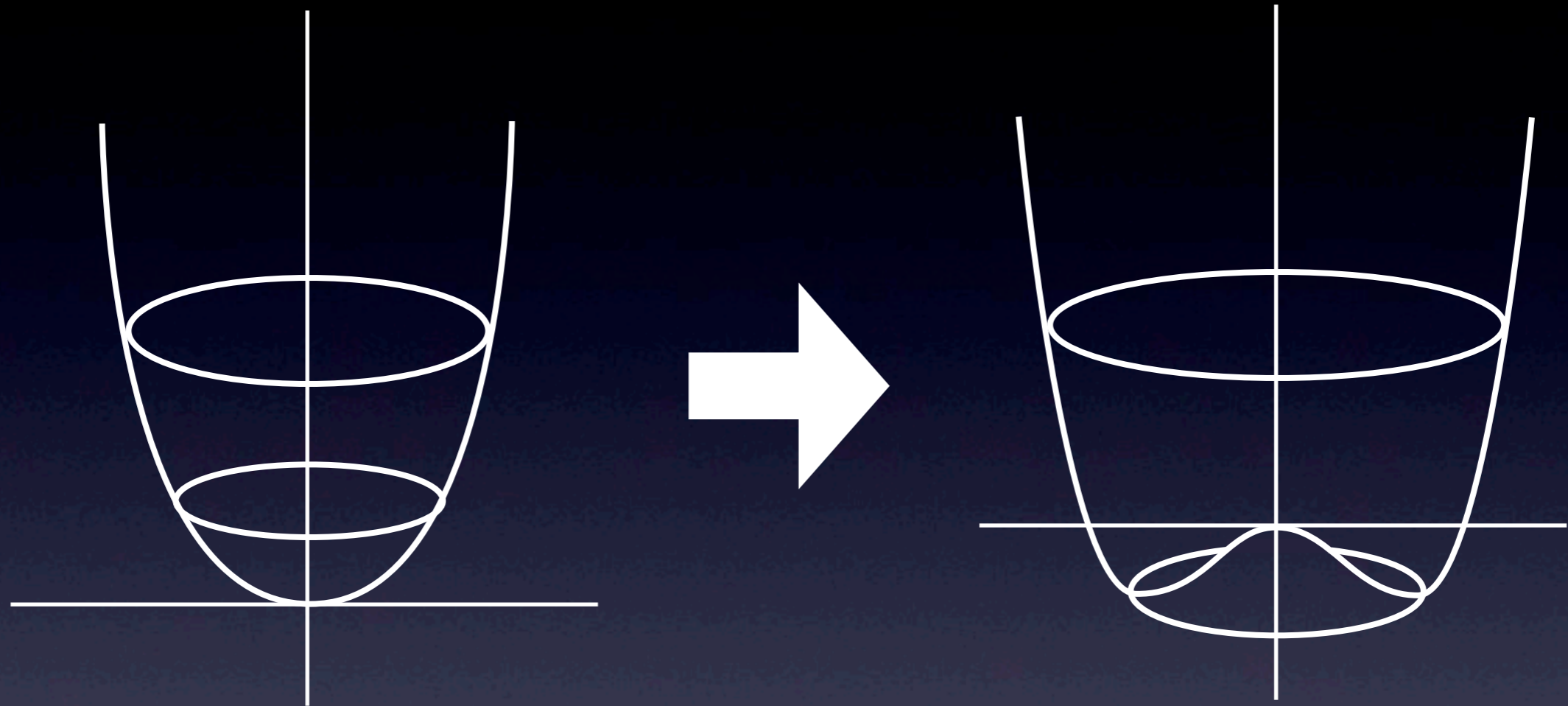
	N_{BS}	$N_{\text{type-I}}$	$N_{\text{type-II}}$	$\frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_a, Q_b] \rangle$	WB予想
Helium4超流動 U(1)	1	1	0	0	OK
強磁性体 O(3)→O(2)	2	0	1	1	OK

等号は成立する!

有効理論, ゼロ温度: Watanabe-Murayama ('12)

射影演算子法: YH ('12)

自発的対称性の破れ



平らな方向の数 = 破れた対称性の数

しかし、

NGモードの数 \neq 破れた対称性の数

運動方程式

$$\partial_t A_n = \{A_n, H\}_P = \{A_n, A_m\}_P H^{ml} A_l + \dots$$

モードは $H^{ml} \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial A_m \partial A_l}$ と $\{A_n, A_m\}_P$ で決まる.

簡単な例: 自由度: A_1, A_2 $\{A_1, A_2\}_P = 1$ $H_{nm} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

運動方程式: $\partial_t A_1 = a^2 A_2$ $\partial_t A_2 = -k^2 A_1$

➡ $\partial_t^2 A_1 = -a^2 k^2 A_1$ 1つのモード $E = ak$

ポテンシャルが平ら $k \rightarrow 0$ $E \rightarrow 0$ ゼロモード

Type-II発現機構

$$\partial_t \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & k^2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$

$C=0$: 2つのゼロモード $E = ak$

$C \neq 0$: 1つのmassive mode $E = c + O(k^2)$

1つのzero mode $E = \frac{k^2}{c} + O(k^4)$

φ_1 が φ_2 独立な自由度では無くなった。

逆ヒッグス機構 Nambu ('04)

場の量子場の理論では,

YH('12)

$H(A_n)$ 有効作用

射影演算子法で導出

$$\{A_n, A_m\}_P = -i\langle [A_n, A_m] \rangle$$

Mori('12)

$$\frac{\partial H}{\partial A_n \partial A_m}$$

自発的対称性の破れ:

平な方向は破れた対称性の数だけ存在

$$\text{rank}(\langle [Q_a, \phi_i] \rangle) = N_{BS}$$

逆Higgs機構により $N_{\text{massive}} = \frac{1}{2} \text{rank}(\langle [Q_a, Q_b] \rangle)$

$$N_{\text{type-II}} = N_{\text{massive}}$$

$$N_{\text{type-I}} = N_{BS} - N_{\text{type-II}} - N_{\text{massive}}$$

$$N_{BS} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_a, Q_b] \rangle$$

有限温度の場合

Langevin方程式

$$\partial_0 A_n = \{A_n, A_m\}_P \frac{\partial H}{\partial A_m} + L_{nm} \frac{\partial H}{\partial A_m} + R_n$$

$$\{A_n, A_m\}_T = \{A_n, A_m\}_P + L_{nm}$$

とすると同じ議論が可能

$$\rightarrow N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_a, Q_b] \rangle$$

まとめ

弱結合摂動論

単純な摂動論は g^6 で破綻.

改善された摂動論は $T > 3T_c$ によさそう.

動的な計算の高次補正は挑戦的問題.

Lorentz対称性がない場合の

南部-Goldstoneの定理

$$N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2} \text{rank} \langle [Q_a, Q_b] \rangle$$