



非加法的式による 3K黒 体放射スペクトルの解析

鳥羽高専 溝口卓哉
信大理(非) 美谷島實

研究動機

- “Heavy-ion collisions”での p_t 分布を記述する公式の構築のためにnon-extensive formulationの研究をしている。

M. Biyajima, et al., Eur. Phys. J. C40, 243 (2005);

M. Biyajima, et al., Eur. Phys. J. C48, 597 (2006);

A. Adare et al., [PHENIX Coll.], Phys. Rev. D83, 052004 (2011)

[上の2つの論文をcite用している。]

- 物性基礎論の研究者は，NASAの cosmic microwave background (CMB)に存在する “non-extensive”効果を探し求めている(1995年～)。彼らの方法論を勉強しながら，解析の正否を検討している。

背景(1)

- Tsallis は, Non-extensive 統計力学 を提唱した。

C. Tsallis, Stat. Phys. 52, 479 (1988)

- Bose粒子に適用され non-extensive な Planck公式が計算された。 C. Tsallis, et al., Phys. Rev. E52, 1447 (1995)

$$U_{\text{Planck}}(T, \nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^x - 1}$$

$$x = h\nu/kT$$

h : Planck's constant

ν : frequency

k : Boltzmann's constant

T : temperature

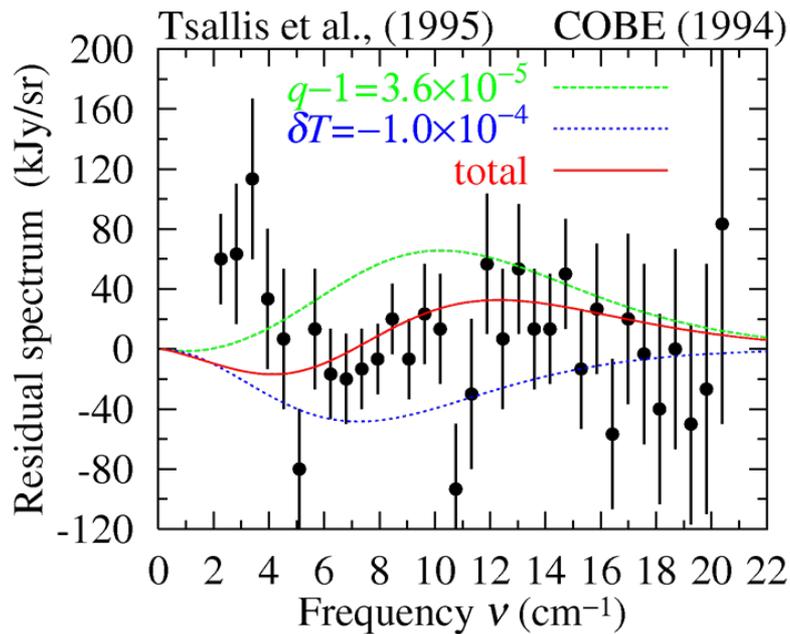
$$U^{(\text{NETD I})}(T, \nu, q) = U_{\text{Planck}}(T, \nu)[1 - e^{-x}]^{(q-1)}$$

$$\times \left\{ 1 + (1 - q)x \left[\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{x}{2} \frac{1 + 3e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right] \right\}$$

$$\approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{q - 1}{e^x - 1} \left[\ln(1 - e^{-x}) - x \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{x^2}{2} \frac{1 + 3e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right]$$

$q - 1$: non-extensive parameter (Tsallis parameter)

- その検証のため、NASA COBEのCMB黒体放射曲線の residual spectrum に適用した。
(但し、Tsallis達は、1994年の解析dataを用いた。)



[Residual spectrum]
= [Monopole spectrum] – [Planck dis.]

δT は、ここでは、Planck分布の温度揺らぎと名付ける。

$$\begin{aligned}
 & U_{\text{Planck}}(T + \delta T, \nu) \\
 &= U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{\partial U_{\text{Planck}}}{\partial T} \delta T \\
 &= U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{e^x x}{(e^x - 1)^2} \frac{\delta T}{T}
 \end{aligned}$$

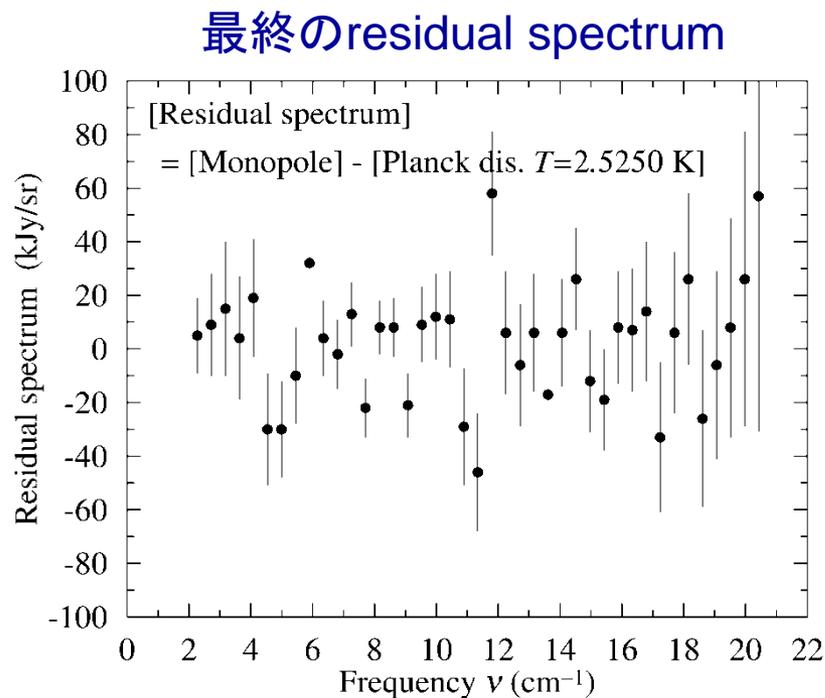
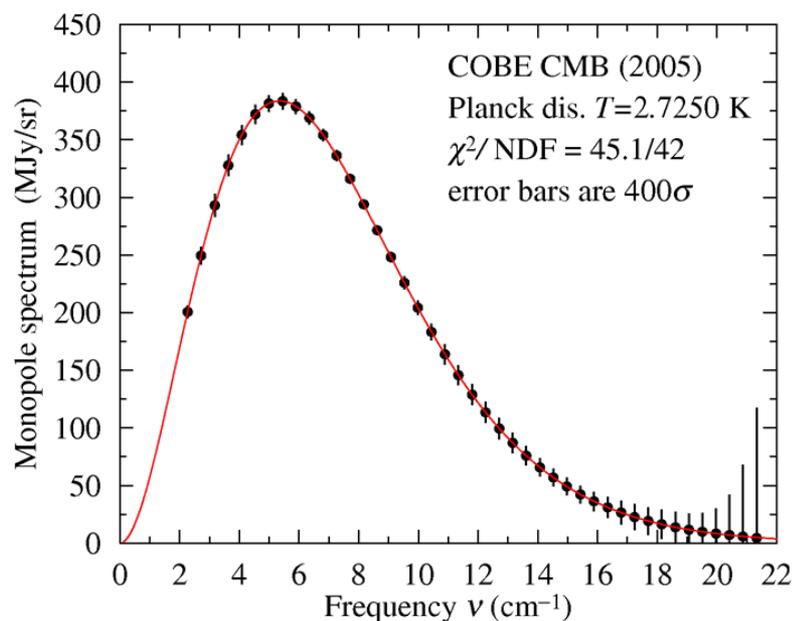
analyses	$(q - 1)$	δT (K)	χ^2/NDF
C. Tsallis et al., (1995)	3.6×10^{-5}	-1.0×10^{-4}	39.3/32
minimum- χ^2	$(0.3 \pm 1.4) \times 10^{-5}$	$(-0.9 \pm 5.1) \times 10^{-5}$	32.2/32
	$ q - 1 < 3.0 \times 10^{-5}$	$ \delta T < 1.1 \times 10^{-4}$	(95 % CL)

CL: confidence level

95%CL \Rightarrow mean $\pm 2\sigma$

背景(2)

- COBE/FILAS(Far-infrared absolute spectrophotometer) は1996年に下の図の形式(数値無し)で, 2005年にhome page上に数値の形で, CMB黒体放射曲線のfull dataの解析結果を発表した。



背景(3)

- Tsallis流の non-extensive な Planck分布の他に, dilute gas近似で求められた non-extensive な Planck分布が提唱された。

A. R. Plastino, et al., Phys. Lett. A207, 42 (1995);

U. Tirnakli, et al., Phys. Lett. A245, 62 (1998)

$$U^{(\text{NETD II})}(T, \nu, q) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{[1 + (q-1)x]^{1/(q-1)} - 1}$$
$$\approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{e^x x^2}{(e^x - 1)^2} \frac{q-1}{2}$$

[注 $e^{h\nu/kT}$ を温度の逆数で Γ 変換をすると同じ式が得られる.]

- 2009年には, 別の観点(g-on gas)から, 分数階微分の結果を含むPlanck分布が発表された。 H. Ertik et al., Phys. A 388, 4573 (2009).

(cf. N. Suzuki and M. Biyajima, Phys. Rev. E65, 016123 (2002))

$$U^{(\text{NETD III})}(T, \nu, \alpha) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{E_\alpha(x) - 1}, \quad E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$
$$(E_\alpha(x) |_{\alpha=1} = e^x)$$

g-on gasの分布関数 $\bar{n}_k(g, \alpha) = \frac{1}{E_\alpha(\beta(\varepsilon_k - \mu)) + (2g - 1)}, g = \begin{cases} 1 \text{ (FD)} \\ 0 \text{ (BE)} \\ 1/2 \text{ (MB)} \end{cases}$
--

研究目的(1)

- “Non-extensive”な効果（あるいは $(q-1)$ 因子）の検証を，単にNASA COBEのdataを用いて解析することの正否について。
- “Non-extensive”な効果を取り入れたPlanck公式の中でどの公式が正しいか？
- 留意点①：理論検証には，NASAが1996年以降に発表した full data の解析結果を用いる。

研究目的(2)

- 留意点②: 宇宙論の研究で分かっていることとどう折り合いを付けるか。COBEのdataにはdimensionless chemical potential μ の効果があると見做されている。

杉山 直 ``張宇宙とビッグバンの物理" (岩波書店 2001);

Y. B. Zeldovich and R. A. Sunyaev, *Astrophys. Space Sci.* 4, 301 (1969);

R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich, *Astrophys. Space Sci.* 7, 20 (1970).

$$U_{\text{Planck}}(T, \nu, \mu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{x+\mu} - 1}$$
$$\approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{-\mu e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad |\mu| < 9.0 \times 10^{-5} \text{ (95\% CL)}$$

- こういう状況の中でどうやって“Non-extensive” parameter $(q-1)$ の効果を見積もるか？

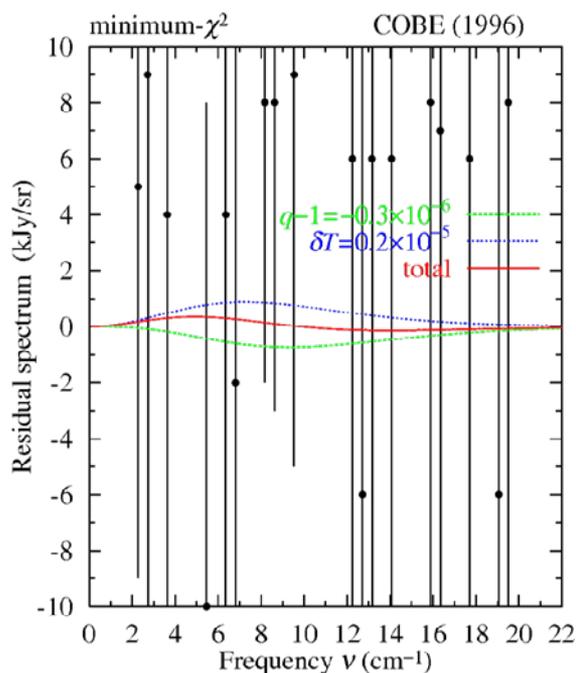
Residual spectrumの解析

(1) $U_{\text{Planck}}(T + \delta T, \nu) = U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{e^x x}{(e^x - 1)^2} \frac{\delta T}{T}$ [温度揺らぎがあるとき]

(2) $U^{(\text{NETD I})}(T, \nu, q)$ [Tsallis et al]

$$\approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{q-1}{e^x - 1} \left[\ln(1 - e^{-x}) - x \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{x^2}{2} \frac{1 + 3e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right]$$

(3) $U^{(\text{NETD II})}(T, \nu, q) \approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{e^x x^2}{(e^x - 1)^2} \frac{q-1}{2}$ [dilute gas近似]



T=2.7250 Kで固定

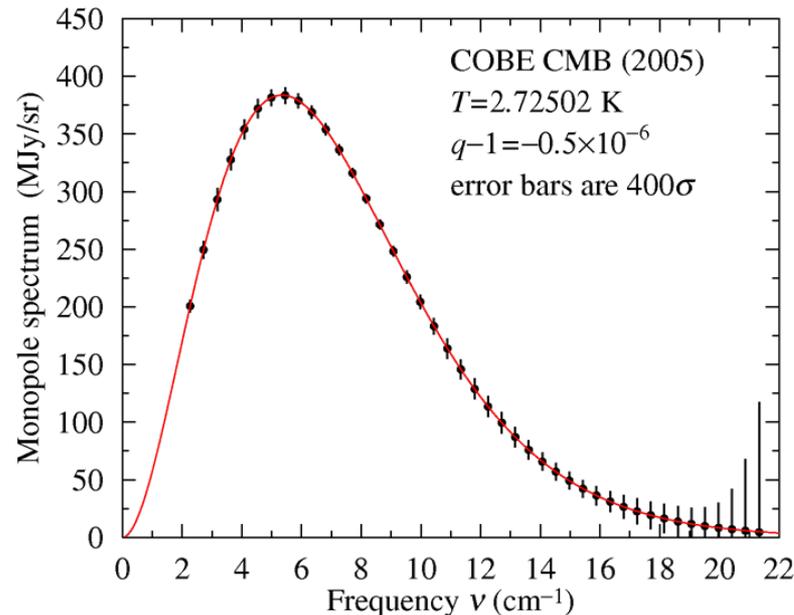
analyses	$q - 1$	δT (K)	χ^2/NDF
(1)	—	$(0.4 \pm 7.6) \times 10^{-6}$ $ \delta T < 1.6 \times 10^{-5}$	45.0/42 (95 % CL)
(1) + (2)	$(-0.2 \pm 5.9) \times 10^{-6}$ $ q - 1 < 1.2 \times 10^{-5}$	$(0.1 \pm 2.1) \times 10^{-5}$ $ \delta T < 4.3 \times 10^{-5}$	45.0/41 (95 % CL)
(1) + (3)	$(-0.3 \pm 5.0) \times 10^{-6}$ $ q - 1 < 1.0 \times 10^{-5}$	$(0.2 \pm 3.0) \times 10^{-5}$ $ \delta T < 6.2 \times 10^{-5}$	45.0/41 (95 % CL)
(3)	$(0.04 \pm 1.28) \times 10^{-6}$ $ q - 1 < 3.2 \times 10^{-6}$	—	45.0/42 (95 % CL)

1994年のdataと比べて、
 $|q-1|$ の上限値は1/3程度、 $|\delta T|$ の上限値は1/2程度

Monopole spectrumの解析

(2) $U^{(\text{NETD } 1)}(T, \nu, q)$ [Tsallis et al]

$$\approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{q-1}{e^x - 1} \left[\ln(1 - e^{-x}) - x \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{x^2}{2} \frac{1 + 3e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right]$$



analyses	T (K)	$(q-1)$	χ^2/NDF
$U_{\text{Planck}}(T, \nu)$	$2.725016 \pm 8 \times 10^{-6}$	—	45.097/42
(2)	$2.72502 \pm 2 \times 10^{-5}$	$(-0.5 \pm 5.9) \times 10^{-6}$	45.089/41
		$ q-1 < 1.23 \times 10^{-5}$ (95 % CL)	

$|q-1|$ の上限値は, residual spectrumで温度揺らぎ δT を入れたときとほぼ等しい。

Chemical potential μ の効果と $(q-1)$

(2) $U^{(\text{NETD I})}(T, \nu, q)$ [Tsallis et al]

$$\approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{q-1}{e^x-1} \left[\ln(1-e^{-x}) - x \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} + \frac{x^2}{2} \frac{1+3e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} \right]$$

(4) $U_{\text{Planck}}(T, \nu, \mu) \approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{-\mu e^x}{(e^x-1)^2}$ [Chemical Potential]

analyses	T (K)	$(q-1)$	μ	χ^2/NDF
(4)	$2.72501 \pm 2 \times 10^{-5}$	—	$(-1.1 \pm 3.2) \times 10^{-5}$ $ \mu < 7.5 \times 10^{-5}$	45.097/41 (95 % CL)
(2) + (4)	$2.72499 \pm 7 \times 10^{-5}$	$(0.3 \pm 1.0) \times 10^{-5}$ $ q-1 < 2.3 \times 10^{-5}$	$(-2.5 \pm 5.6) \times 10^{-5}$ $ \mu < 1.4 \times 10^{-4}$	44.89/40 (95 % CL)

$(q-1)$ と μ の項を含んだ式を用いた解析では、 $|q-1|$ の上限値は、 $(q-1)$ のみの式より大きくなる。

μ の効果によるPlanck分布の歪みと($q-1$)

■ 歪み ε を含んだPlanck分布

$$U_{\text{Planck}}(T, \nu, \varepsilon) = \frac{\pi^{d/2}(d-1)dh\nu^d}{\Gamma(d/2+1)c^d(e^x-1)}, \quad d = 3 + \varepsilon$$

T (K)	ε	χ^2/NDF
monopole spectrum		
$2.7250 \pm 5.0 \times 10^{-5}$	$(0.3 \pm 2.4) \times 10^{-5}$	45.1/41
	$ \varepsilon < 5.1 \times 10^{-5}$	(95 % CL)
subtracted monopole spectrum		
2.7250 (fixed)	$(-0.1 \pm 3.7) \times 10^{-6}$	45.4/42
$(\mu = -1.1 \times 10^{-5})$	$ \varepsilon < 7.6 \times 10^{-6}$	(95 % CL)

■ μ の効果を引いた monopole spectrum

$$= [\text{monopole spectrum}] - \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{-\mu e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (\mu = -1.1 \times 10^{-5})$$

■ subtract monopole spectrum における ($q-1$)

T (K)	$(q-1)$	χ^2/NDF
2.7250 K (fixed)	$(2.2 \pm 2.1) \times 10^{-6}$	45.4/42
	$ q-1 < 6.4 \times 10^{-6}$	(95 % CL)

Dataから μ の効果を引くと, $|q-1|$ の上限値は元のdataの1/2程度になる。

Monopole spectrum & dipole spectrum

H. Ertik et al., Phys. A 388, 4573 (2009).

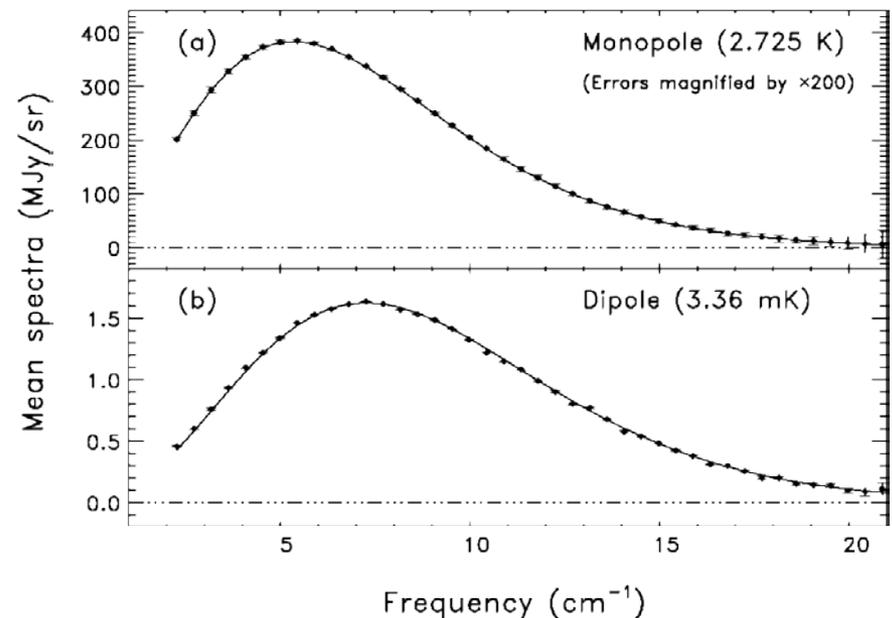
where the first and second terms of Eq. (31) are included and which describes well enough the experimental cosmic spectrum where $T_{CMBR} = 2.725$ °K, $T_{dipol} = 2.717$ °K and $T_{amp} = 3.381 \times 10^{-3}$ °K [37,38], one can write

$$D_{COBE}^{exp}(\nu) = \frac{4\pi}{c} I_0(\nu) = \frac{4\pi}{c} \left\{ B_\nu(T_{CMBR}) + T_{amp} \frac{\partial B_\nu(T_{dipol})}{\partial T} \right\} \quad (33)$$

for the experimental cosmic photon energy density, where $B_\nu(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$.

- 上記の著者らは, monopole とdipoleを一体と考えている。
- monopoleとdipoleを独立な量と見做すと, $D_{COBE}^{exp}(\nu)$ に dipoleは無く, 温度分布の揺らぎと考えるのが自然である。

D.J.Fixsen, Apj, 594, L67 (2003), Fig.1



結論

- Residual spectrumの解析から, $|q-1| < (1 \sim 1.2) \times 10^{-5}$ (95% CL), $|\delta T| < (4.2 \sim 6.2) \times 10^{-5}$ (95% CL) で, 1994年のdataのparametersの上限値(95% CL)と比べて1/3及び1/2程度となった。
- DataからChemical potential μ の効果を引くと, $|q-1| < 6.4 \times 10^{-6}$ (95% CL) なので, 元の $|q-1|$ の上限値(95% CL)の1/2程度となった。
- μ の項を含んだ式では, $(|q-1| < 2.3 \times 10^{-5}) < (|\mu| < 1.4 \times 10^{-4})$ (95% CL) となった。 $|q-1|$ の値は, dataに含まれるChemical potentialの効果によって, 大きく変化するので, この効果を除いたdataから $|q-1|$ を求めるべきである。

補足

- “Heavy-ion collisions” においても, Chemical potential の役割は大きく, この効果によって温度が変化する。

(Mizoguchi and Biyajima, a poster at NEX2012, Mar. 2012, Nara.)

Mizoguchi and Biyajima, a poster at NEXT2012, Mar. 2012, Nara.

Non-extensive formula by Cleymans and Worku [7]

$$E \frac{d\sigma}{dp^3} = cE \left[1 + (q-1) \frac{m_t}{T} \right]^{q/(1-q)} \quad (8)$$

Modified formula including mass term

$$E \frac{d\sigma}{dp^3} = cE \left[1 + (q-1) \frac{m_t - m_0}{T} \right]^{q/(1-q)} \quad (9)$$

Normalized formula

$$\left. \frac{d\sigma}{dp_t dy} \right|_{y \approx 0} = p_t m_t \frac{d\sigma}{dy} \frac{\beta^3 (n+1)(n+2)(n+3) [1 + \beta(m_t - m_0)]^n}{-(\beta m_0)^2 (n+2)(n+3) + 2(\beta m_0)(n+3) - 2} \quad (10)$$

with $\beta = (q-1)/T$ and $n = q/(1-q)$

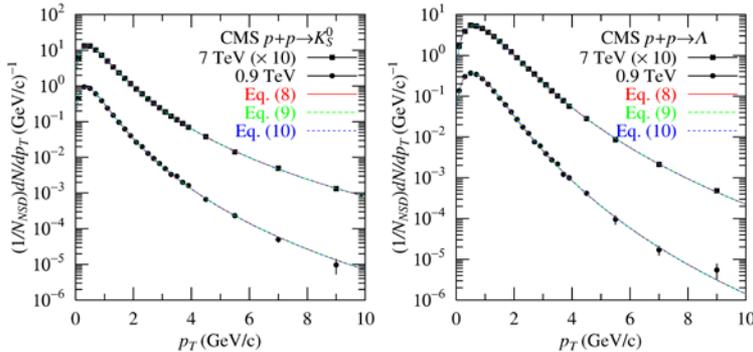


Figure 3: Analyses of transverse momentum spectra of strange p using Eqs. (8), (9) and (10).

Table 3: Estimated values of parameters on Fig. 3.

Data	Eq.	T_0	q	c or $d\sigma/dy$	χ^2/NDF
K_0^S dis. at 0.9 TeV	(8)	0.098 ± 0.004	1.130 ± 0.003	762 ± 121	7.9/21
	(9)	0.163 ± 0.002	1.130 ± 0.003	9.24 ± 0.37	7.9/21
	(10)	0.163 ± 0.002	1.130 ± 0.003	0.78 ± 0.02	7.9/21
K_0^S dis. at 7 TeV	(8)	0.109 ± 0.004	1.151 ± 0.002	684 ± 88	2.3/21
	(9)	0.184 ± 0.002	1.151 ± 0.002	12.6 ± 0.46	2.3/21
	(10)	0.184 ± 0.002	1.151 ± 0.002	1.33 ± 0.03	2.3/21
Λ dis. at 0.9 TeV	(8)	0.083 ± 0.009	1.106 ± 0.004	10910 ± 6600	5.7/21
	(9)	0.202 ± 0.005	1.106 ± 0.005	1.07 ± 0.07	5.7/21
	(10)	0.202 ± 0.005	1.106 ± 0.005	0.40 ± 0.02	5.7/21
Λ dis. at 7 TeV	(8)	0.124 ± 0.010	1.116 ± 0.004	1314 ± 527	3.3/21
	(9)	0.254 ± 0.005	1.116 ± 0.004	1.37 ± 0.08	3.3/21
	(10)	0.254 ± 0.005	1.116 ± 0.004	0.72 ± 0.02	3.3/21
Ξ dis. at 0.9 TeV	(8)	0.113 ± 0.008	1.093 ± 0.005	405 ± 160	7.1/19
	(9)	0.236 ± 0.011	1.094 ± 0.014	0.070 ± 0.006	7.1/19
	(10)	0.236 ± 0.011	1.094 ± 0.014	0.043 ± 0.002	7.1/19
Ξ dis. at 7 TeV	(8)	0.179 ± 0.029	1.100 ± 0.013	38.7 ± 27.7	3.3/19
	(9)	0.311 ± 0.012	1.100 ± 0.012	0.088 ± 0.007	3.3/19
	(10)	0.311 ± 0.012	1.100 ± 0.012	0.080 ± 0.003	3.3/19

Γ 変換

Biyajima et al., Arxiv:cond-mat/0407792v1 (2004)

First of all, according to Refs. [4, 5], we consider the gamma distribution for the temperature fluctuation as

$$P(\alpha, \beta, \beta_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\beta_0} \right)^\alpha \beta^{\alpha-1} e^{-\frac{\alpha}{\beta_0} \beta} \quad (3)$$

The formula, Eqs. (3), is also named the χ^2 distribution. The convolution integral is given as

$$F^{(gamma)}(\beta_0, \nu, \alpha) = \int_0^\infty d\beta P(\alpha, \beta, \beta_0) \times D_{Planck}(\beta, \nu, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_B \nu^3 e^{-n\mu} \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta_0}{\alpha} \omega n\right)^\alpha}$$
$$\xrightarrow{\alpha \gg 1} \sum_{n=1}^{\infty} C_B \nu^3 e^{-n\mu - \beta_0 \omega n + \frac{1}{2} \beta_0^2 \omega^2 n^2 (q-1) + O((q-1)^2)}, \quad (4)$$

where $\alpha = \frac{1}{q-1}$ and $(q-1) \ll 1$ are assumed.

Phys. A 388, 4573 (2009) (33)式で, 2005年のdataを解析した値

H. Ertik et al., Phys. A 388, 4573 (2009).

where the first and second terms of Eq. (31) are included and which describes well enough the experimental cosmic spectrum where $T_{CMBR} = 2.725$ °K, $T_{dipol} = 2.717$ °K and $T_{amp} = 3.381 \times 10^{-3}$ °K [37,38], one can write

$$\begin{aligned} D_{COBE}^{exp}(\nu) &= \frac{4\pi}{c} I_0(\nu) \\ &= \frac{4\pi}{c} \left\{ B_\nu(T_{CMBR}) + T_{amp} \frac{\partial B_\nu(T_{dipol})}{\partial T} \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

for the experimental cosmic photon energy density, where $B_\nu(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$.

$T_{CMBR} = 2.725$ K, $T_{dipole} = 2.717$ K と固定して, T_{amp} を求めると,
 $T_{amp} = 1.566 \times 10^{-5}$ となり, 上の論文数値の1/200程度になった。

Sunyaev-Zeldovich 効果

Biyajima et al., Arxiv:cond-mat/0407792v1 (2004)

5) To look for the origin of the magnitude of the non-extensivity or the temperature fluctuation, we analyze the data by the following formula including the Sunyaev-Zeldovich (S-Z) effect [6, 15],

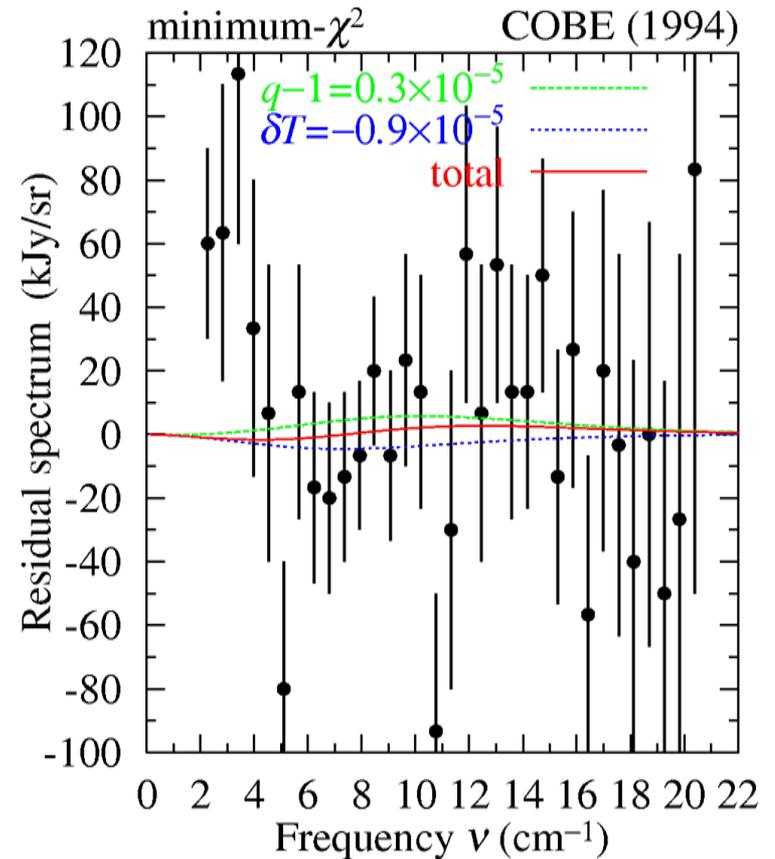
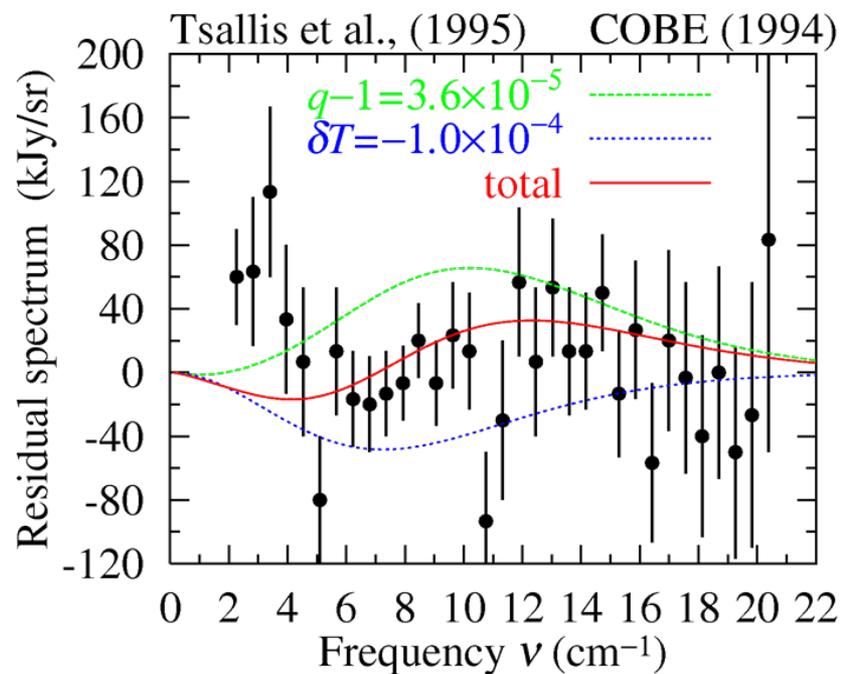
$$F^{(S-Z\ effect)}(x, \beta, \mu, y) = D_{Planck}(\beta, \nu, \mu) + C_B \nu^3 \frac{xye^x}{(e^x - 1)^2} \left[x \coth \frac{x}{2} - 4 \right], \quad (11)$$

where $x = \beta_0 \omega + \mu$. y is named the y parameter in the Compton scattering,

$$y = \int dl n_e \sigma_T \frac{k_B T_e}{m_e c^2}, \quad (12)$$

where l , n_e , σ_T and T_e are the size of region with high temperature in the cosmos, the number density of electrons, the cross section of Thomson scattering and the temperature of electron, respectively. Our estimated values are shown in Table II.

1994年のresidual spectrumの解析



analyses	$(q - 1)$	δT (K)	χ^2/NDF
Tsallis et al., (1995)	3.6×10^{-5} (fixed)	-1.0×10^{-4} (fixed)	39.3/32
minimum- χ^2	$(0.3 \pm 1.4) \times 10^{-5}$ $ q - 1 < 3.0 \times 10^{-5}$	$(-0.9 \pm 5.1) \times 10^{-5}$ $ \delta T < 1.1 \times 10^{-4}$	32.2/32 (95 % CL)