

超演算子形式から見た 非平衡Thermo Field Dynamicsの 熱的真空の構造

2012年8月23日
基研研究会「熱場の量子論とその応用」

中村祐介 山中由也

早大 基幹理工 電子光システム

概要

平衡系なら $f_{\text{eq}} = e^{-\beta\omega}$

■ 非平衡Thermo Filed Dynamicsの出発点

1パラメータ $f(t)$ で決まる特別な形の密度行列

$$\hat{\rho}_0 = (1 - f(t)) \sum_{m=0}^{\infty} f^m(t) |m\rangle \langle m|$$



この特別な形になっているから、
自由度を2倍するだけで純粋状態で記述できる

$$\langle A(t) \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}_0 A(t)] = \langle 0 | A(t) | 0 \rangle$$

H. Umezawa, *Advanced Field Theory — Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1993).

■ 本発表では

ある基本的な要請から、密度行列がこの形に制限されることを示す。

超演算子形式

■ 超演算子 (演算子に対する演算子)

$A, B \in$ 演算子

$$\hat{O} : A \mapsto B \quad \rightarrow \quad \hat{O}|A\rangle\rangle = |B\rangle\rangle$$

■ 内積

$$\langle\langle A|B\rangle\rangle = \text{Tr}[A^\dagger B] = \sum_m \langle m|A^\dagger B|m\rangle$$

\rightarrow Liouville空間

簡単のため1-mode ボソン系を扱う
多モード、フェルミオン系への一般化は容易

$$\left(\begin{array}{l} [a, a^\dagger] = 1 \\ |m\rangle : a^\dagger a |m\rangle = m |m\rangle \end{array} \right)$$

Schumutz流の超演算子形式

■ 演算子 $|m\rangle\langle n|$ の超演算子形式

$$|m, n\rangle\rangle \equiv ||m\rangle\langle n|$$

$$\langle\langle m, n| \equiv \langle |n\rangle\langle m|$$



■ Liouville空間の完全正規直交系

$$\langle\langle m, n | m', n' \rangle\rangle = \delta_{m, m'} \delta_{n, n'}$$

$$\sum_{m, n} |m, n\rangle\rangle \langle\langle m, n| = 1$$

■ 左から作用する演算子、右から作用する演算子

$$\begin{aligned} \check{a} &: X \mapsto aX & \tilde{a} &: X \mapsto Xa^\dagger \\ \check{a}^\dagger &: X \mapsto a^\dagger X & \tilde{a}^\dagger &: X \mapsto Xa \end{aligned}$$

2-mode のFock空間の代数

$$[\check{a}, \check{a}^\dagger] = [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1 \quad \text{others} = 0$$

$$\check{a}|m, n\rangle\rangle = \sqrt{m}|m-1, n\rangle\rangle \quad \tilde{a}|m, n\rangle\rangle = \sqrt{n}|m, n-1\rangle\rangle \quad \text{など}$$

Liouville-von Neumann方程式

■ Schrödinger描像の密度行列演算子に対して

$$i \frac{d}{dt} \rho_S(t) = [H_S, \rho_S(t)] = H_S \rho_S(t) - \rho_S(t) H_S$$

$$\left[\hbar = 1 \right]$$

■ Liouville-von Neumann方程式の超演算子形式

$$i \frac{d}{dt} |\rho_S(t)\rangle\rangle = (\check{H}_S - \tilde{H}_S) |\rho_S(t)\rangle\rangle \equiv \hat{H}_S |\rho_S(t)\rangle\rangle$$

$$\left[\hat{H}_S = \check{H}_S - \tilde{H}_S \right]$$

■ 熱的な期待値の超演算子形式

$$\text{Tr}[A_S \rho_S(t)] = \langle\langle I | A_S(t) | \rho_S(t) \rangle\rangle$$

$$\left[\langle\langle I | = \sum_m \langle\langle m, m | \right]$$

Schrödinger描像から相互作用描像へ

非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_u(t)$ を選び、相互作用描像へ移行する

■ 相互作用描像

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_0(t, t_0) = \hat{U}_0(t, t_0) \hat{H}_u(t)$$

$$A(t) = \hat{U}_0^{-1}(t, t_0) A_S \hat{U}_0(t, t_0)$$

$$\hat{H}_u(t) \neq \omega(\check{a}^\dagger \check{a} - \tilde{a}^\dagger \tilde{a})$$

これをどう決めるか？

■ Liouville空間の生成消滅演算子

$$\check{a}(t) = \hat{U}_0^{-1}(t, t_0) \check{a}_S \hat{U}_0(t, t_0)$$

$$\tilde{a}(t) = \hat{U}_0^{-1}(t, t_0) \tilde{a}_S \hat{U}_0(t, t_0)$$

$$i \frac{d}{dt} \check{a}(t) = [\check{a}(t), \hat{H}_u(t)]$$

$$i \frac{d}{dt} \tilde{a}(t) = [\tilde{a}(t), \hat{H}_u(t)]$$

$$\hat{H}_u(t) = \hat{H}_u(\check{a}(t), \dots; n(t), \omega(t))$$

$$n(t) = \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle$$

$$= \langle\langle I | \check{a}^\dagger(t) \check{a}(t) | \rho(t) \rangle\rangle$$

非摂動表現のための3つの基本要請

A) 各時刻において準粒子描像が存在すること

- $\hat{\rho}_0(t)$ と $\hat{H}_u(t)$ の存在

B) 熱的因果律

- 未来の $n(t)$ が現在の微視的な運動に影響しないこと

C) $t = \infty$ で熱平衡になること

- 熱力学の基本法則

この要請に従う、 $\hat{\rho}_0(t)$ は？ $\hat{H}_u(t)$ は？

この要請だけでどこまで決まるか？

基本要請A

以下では、自発的な対称性の破れは無いものとする！

■ Liouville空間上での準粒子描像

unperturbed Schrödinger描像において

$$\hat{H}_{uS}(t) = \eta_1(t)\check{a}_S\check{a}_S + \eta_2(t)\check{a}_S^\dagger\check{a}_S^\dagger + \eta_3(t)\check{a}_S^\dagger\check{a}_S + \eta_4(t)\check{a}_S^\dagger\check{a}_S + \eta_5(t)$$

(双線形で位相変換対称性の破れてない場合の一般形)



Liouville空間が定義される

$$|\rho_0(t)\rangle\rangle = \sum_m p_m(t) |m, m\rangle\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} |\rho_0(t)\rangle\rangle = \hat{H}_{uS}(t) |\rho_0(t)\rangle\rangle$$

パラメータの数 η_i ($i = 1, \dots, 5$) $p_m(t)$ ($m = 0, 1, \dots$)

■ 密度行列に対する条件

● エルミート性 $\rho_0^\dagger(t) = \rho_0(t)$

● 規格化 $\text{Tr}[\rho_0(t)] = 1$

● 正値性 $\langle \varphi | \rho_0(t) | \varphi \rangle \geq 0$ for any $|\varphi\rangle$



$$p_m^*(t) = p_m(t)$$

$$\sum_m p_m(t) = 1$$

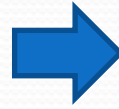
$$p_m \geq 0$$

$$(\hat{H}_u)^\sim = -\hat{H}_u$$

$$\langle\langle I | \hat{H}_u = 0$$

5つの複素パラメータ

$$\eta_i(t) \quad (i = 1, \dots, 5)$$



3つの実パラメータ

$$n(t), \omega(t), \gamma(t)$$

- $\eta_1(t) = i\{\dot{n}(t) + \gamma(t)\}$
- $\eta_2(t) = -\eta_5(t) = i\left\{\dot{n}(t) + \frac{n(t)}{1+n(t)}\gamma(t)\right\}$
- $\eta_3(t) = -\eta_4^*(t) = \omega(t) - i\left\{\dot{n}(t) + \frac{1+2n(t)}{2(1+n(t))}\gamma(t)\right\}$
- $n(t) = \sum_m mp_m(t)$

非摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}_{uS}(t) = \eta_1(t)\check{a}_S\tilde{a}_S + \eta_2(t)\check{a}_S^\dagger\tilde{a}_S^\dagger + \eta_3(t)\check{a}_S^\dagger\check{a}_S + \eta_4(t)\tilde{a}_S^\dagger\tilde{a}_S + \eta_5(t)$$



$$\begin{aligned} \hat{H}_{uS}(t) = & \omega(t) \left(\check{a}_S^\dagger\check{a}_S - \tilde{a}_S^\dagger\tilde{a}_S \right) + i\dot{n}(t) \left(\check{a}_S\tilde{a}_S + \check{a}_S^\dagger\tilde{a}_S^\dagger - \check{a}_S^\dagger\check{a}_S - \tilde{a}_S^\dagger\tilde{a}_S - 1 \right) \\ & + i\gamma(t) \left(\check{a}_S\tilde{a}_S + \frac{n(t)}{1+n(t)}\check{a}_S^\dagger\tilde{a}_S^\dagger - \frac{1+2n(t)}{2(1+n(t))} \left\{ \check{a}_S^\dagger\check{a}_S + \tilde{a}_S^\dagger\tilde{a}_S \right\} - 1 \right) \end{aligned}$$

相互作用描像へ移行

非摂動ハミルトニアン

$$\hat{H}_u(t) = \omega(t) \left[\check{a}^\dagger(t)\check{a}(t) - \tilde{a}^\dagger(t)\tilde{a}(t) \right] + i\dot{n}(t) \left[\check{a}(t)\tilde{a}(t) + \check{a}^\dagger(t)\tilde{a}^\dagger(t) - \check{a}^\dagger(t)\check{a}(t) - \tilde{a}^\dagger(t)\tilde{a}(t) - 1 \right] \\ + i\gamma(t) \left[\check{a}(t)\tilde{a}(t) + \frac{n(t)}{1+n(t)}\check{a}^\dagger(t)\tilde{a}^\dagger(t) - \frac{1+2n(t)}{2(1+n(t))} \{ \check{a}^\dagger(t)\check{a}(t) + \tilde{a}^\dagger(t)\tilde{a}(t) \} - 1 \right]$$

$\omega(t)$ の部分を取り除く変換

$$\check{a}(t) = e^{-i\int^t\omega(s)ds} \check{\alpha}(t) \quad \check{a}^\dagger(t) = e^{i\int^t\omega(s)ds} \check{\alpha}^\dagger(t) \\ \tilde{a}(t) = e^{i\int^t\omega(s)ds} \tilde{\alpha}(t) \quad \tilde{a}^\dagger(t) = e^{-i\int^t\omega(s)ds} \tilde{\alpha}^\dagger(t)$$

$$\alpha\text{-演算子に対する非摂動ハミルトニアン: } \hat{H}_{\alpha u}(t) \quad i\frac{d}{dt}\check{\alpha}(t) = [\check{\alpha}(t), \hat{H}_{\alpha u}(t)]$$

$$\hat{H}_{\alpha u}(t) = i\dot{n}(t) \left[\check{\alpha}(t)\tilde{\alpha}(t) + \check{\alpha}^\dagger(t)\tilde{\alpha}^\dagger(t) - \check{\alpha}^\dagger(t)\check{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}^\dagger(t)\tilde{\alpha}(t) - 1 \right] \\ + i\gamma(t) \left[\check{\alpha}(t)\tilde{\alpha}(t) + \frac{n(t)}{1+n(t)}\check{\alpha}^\dagger(t)\tilde{\alpha}^\dagger(t) - \frac{1+2n(t)}{2(1+n(t))} \{ \check{\alpha}^\dagger(t)\check{\alpha}(t) + \tilde{\alpha}^\dagger(t)\tilde{\alpha}(t) \} - 1 \right]$$

基本要請B

～熱的因果律～

■ a -演算子に対する伝搬関数

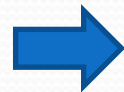
$$A_i(t) = \check{a}(t), \check{a}^\dagger(t), \tilde{a}(t), \tilde{a}^\dagger(t)$$

$$\begin{aligned}\Delta(t_1, t_2) &= -i \langle\langle I | T[A_1(t_1)A_2(t_2)] | \rho_0 \rangle\rangle \\ &= -i\theta(t_1 - t_2) \langle\langle I | A_1(t_1)A_2(t_2) | \rho_0 \rangle\rangle - i\theta(t_2 - t_1) \langle\langle I | A_2(t_2)A_1(t_1) | \rho_0 \rangle\rangle\end{aligned}$$

未来の $n(t)$, $\gamma(t)$ 等が現在に影響しない



$\langle\langle I | A_i(t) \rangle\rangle$ が $n(t)$, $\gamma(t)$ に依存しない



$$\langle\langle I | \dot{\check{a}}(t) \rangle\rangle = \langle\langle I | \dot{\check{a}}^\dagger(t) \rangle\rangle = \langle\langle I | \dot{\tilde{a}}(t) \rangle\rangle = \langle\langle I | \dot{\tilde{a}}^\dagger(t) \rangle\rangle = 0$$



$$\gamma(t) = 0$$

非摂動ハミルトニアンのパラメータだった



補足: TFDにおける $\gamma(t) = 0$

$\alpha = 1$ 表現の熱的Bogoliubov変換の一般形

$$B^{\mu\nu} = e^{s(t)\sigma_3} \sqrt{1+n(t)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n(t)}{1+n(t)} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$

$$a^\mu = \begin{pmatrix} \check{a} \\ \check{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad \xi^\mu = \begin{pmatrix} \check{\xi} \\ \check{\xi}^\dagger \end{pmatrix}$$

$$\check{\xi}|0\rangle = 0 \quad \check{\xi}|0\rangle = 0$$

$$\xi^\mu = B^{\mu\nu} a^\nu$$



$$s(t) = \log \sqrt{1+n(t)}$$

$$\hat{Q}(t)$$

本発表の言葉で云うと

$$\gamma(t) = 0$$

$$\hat{H}_{\alpha u}(t)$$

$$B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1+n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mu\nu}$$

平衡系なら s は何にとっても良い

T. S. Evans et al., J. Math. Phys. **33**, 370 (1992).

$\{p_m(t)\}$ の特別な解の集合

$$\gamma(t) = 0$$

α -演算子に対するハイゼンベルグ方程式より

$$\frac{d}{dt} \{ \tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}^\dagger(t) \} = \frac{d}{dt} \{ \tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}^\dagger(t) \} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \{ (1 + n(t))\tilde{\alpha}(t) - n(t)\tilde{\alpha}^\dagger(t) \} = \frac{d}{dt} \{ (1 + n(t))\tilde{\alpha}(t) - n(t)\tilde{\alpha}^\dagger(t) \} = 0$$

$$\dot{p}_m(t) = \dot{n}(t) \left\{ (m+1)p_{m+1}(t) - (2m+1)p_m(t) + mp_{m-1}(t) \right\}$$

$$n(t) = \sum_m mp_m(t)$$

$$1 = \sum_m p_m(t)$$

$q_m(t) = (1 + n(t))p_{m+1}(t) - n(t)p_m(t)$ と定義して、書き換えると



$\{p_m(t)\}$ の特別な解の集合

$$\dot{q}_m(t) = \dot{n}(t) \left\{ (m+2)q_{m+1}(t) - 2(m+1)q_m(t) + mq_{m-1}(t) \right\}$$

$$\sum_m q_m = -(1+n(t))p_0(t) + 1$$

$$\sum_m mq_m = (1+n(t))p_0(t) - 1$$

- $q_m(t) = 0$ for all t, m となる $\{p_m(t)\}$ は解である
- ある時刻で $q_m(\tau) = 0$ ならば、任意の時刻 t で $q_m(t) = 0$

$$\dot{p}_m(t) = \dot{n}(t) \left\{ (m+1)p_{m+1}(t) - (2m+1)p_m(t) + mp_{m-1}(t) \right\}$$

$$q_m(t) = (1+n(t))p_{m+1}(t) - n(t)p_m(t)$$

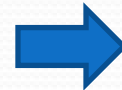
基本要請C ~ $t = \infty$ で熱平衡になること ~

■ 熱平衡では

$$|\rho_0\rangle\rangle = \sum_m p_{\text{eq},m} |m, m\rangle\rangle$$

$$p_{\text{eq},m} = (1 - f_{\text{eq}}) f_{\text{eq}}^m$$

$$f_{\text{eq}} = e^{-\beta\omega}$$



$$q_{\text{eq},m} = 0$$

$$\left[q_m(t) = (1 + n(t))p_{m+1}(t) - n(t)p_m(t) \right]$$

■ 非平衡系において

● $q_m(t) \neq 0$ ならば、 $q_m(t = \infty) \neq 0 \Rightarrow q_m(t = \infty) \neq q_{\text{eq},m}$

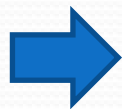
● 基本要請C $\Rightarrow q_m(t) = 0 \Rightarrow \frac{p_{m+1}(t)}{p_m(t)} = \frac{n(t)}{1 + n(t)} \equiv f(t)$

$\Rightarrow p_m(t) = (1 - f(t)) f^m(t)$ という等比分布

まとめ

■ 3つの基本要請

- 各時刻において準粒子描像が存在すること
- 熱的因果律
- $t = \infty$ で熱平衡になること



$$|\rho_0(t)\rangle\rangle = (1 - f(t)) \sum_m f^m(t) |m, m\rangle\rangle$$

$$\hat{H}_u(t) = \omega(t) \{ \check{a}(t) \check{a}^\dagger(t) - \tilde{a}^\dagger(t) \tilde{a}(t) \} - i\dot{n}(t) \{ \tilde{a}(t) - \check{a}^\dagger(t) \} \{ \tilde{a}^\dagger(t) - \check{a}(t) \}$$

■ 今後の展望

- $\dot{n}(t)$ を決める繰り込み条件の、超演算子形式からの見通しは？
- 自発的対称性の破れがある場合への拡張