再訪：Pitaevskii-Stringariの定理

キヤノン㈱光学技術研究所
宇都宮大学情報システム科学研究科[A]
○藤嶋浩史、矢嶋徹[A]

２０１２年８月２４日　於　京都大学 基礎物理学研究所

○H.Fujishima@gmail.com

目次

- おことわり
- 平坦低次元系ＢＥＣを禁止する３定理
  - Hohenberg Theorem
  - Mermin-Wagner Theorem
  - Piaevskii-Stringari Theorem
- 後２定理の問題点
- 新証明の概略
- 補題について
- Lieb-Liniger模型からの知見
- まとめ

以下の議論では一様な無限系を考えますが

・・とはいっても最初から粒子数Nを無限にしたら理論が出来ません。
・・Nが有限で無限系だったら粒子密度０になっちゃいます。
以下、断りなく下記のレギュレーションを行います。

・L_C ：極めて大きい典型的系のスケール

$$\rho(x) = \frac{N}{L_c} e^{-\frac{2}{L_c}|x|} \Rightarrow N = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx.$$

・ほとんどの粒子はL_Cの範囲に閉じ込められている
⇒運動量ｐは１/ L_Cだけ不確定

$$\therefore \quad \delta_{p0} = \text{ hight } L_c \text{ and width } \frac{1}{L_c}$$

低次元系におけるＢＥＣ？

- 理想気体の場合

Hohenberg Theorem (1967)

$$N = \int_0^\infty \frac{\rho(\epsilon)}{e^{\frac{\epsilon}{k_B T_c}} - 1} d\epsilon \to \infty (\mathrm{D} = 1, 2)$$

$$\rho(\epsilon) \propto \epsilon^{\frac{D}{2} - 1}$$

⇒**熱揺らぎのせい**で凝縮は不可能

※トラップがあれば話は別です

低次元系における一様ＢＥＣ

- 短距離斥力相互作用をする場合(Ｔ＞０)

Mermin-Wagner Theorem (1966)

$$n_{\mathbf{p}} \geq \frac{mk_BT}{p^2}\frac{|<\hat{a}_0>|^2}{N} - \frac{1}{2}$$

Bogoliubov近似によりＮ$_{\mathrm{C}}$

$$\int n_{\mathbf{p}} dp^D \to \infty (\mathrm{D}=1,2,T>0)$$

$\Rightarrow \quad <\hat{a}_0> = \sqrt{N_{\mathrm{C}}} = 0$ でなくてはならない

またも**<u>熱揺らぎのせい</u>**で凝縮は不可能

では、Ｔ＝０ならどうか？

※強磁性体の理論などにも適用できます。

低次元系における一様ＢＥＣ

- 短距離斥力相互作用をする場合(Ｔ＝０)

Pitaevskii-Stringari Theorem(1991)

$$n_{\mathbf{p}} \geq \frac{mc}{2}\frac{|<\hat{a}_0>|^2}{pN} - \frac{1}{2}$$

Bogoliubov近似
によりＮ$_{C}$

$$\int n_{\mathbf{p}} dp^D \to \infty (\mathrm{D}=1)$$

⇒温度が関係しない不等式だがここでも

$<\hat{a}_0> = \sqrt{N_C} = 0$ でなくてはならない

純粋な**量子揺らぎ**のせいで転移は不可能

両定理の問題点(Stringariのトラペから)

Mermin-Wagner Theorem (1966)

$$< \left\{A^{+}, A\right\} >< [B^{+},[H,B]] > \geq k_B T \left| < [A,B] > \right|^2$$

Bogoliubov inequality

$A = a_p$	**particle** operator (annihilates particle with momentum p)
$B = \rho_q^{+} = \sum_k a_{k+\hbar q}^{+} a_k$	**density** operator (q-component)
$\left\{A^{+}, A\right\} = 2a_p^{+} a_p + 1$	$n_p = < a_p^{+} a_p >$ particle **occupation number** normalized to $\sum_p n_p = N$
$\left[B^{+}\left[H, B\right]\right] = N \frac{p^2}{m}$	**f-sum rule** (model independent)
$\left[A, B\right] = a_0 = \sqrt{N_0}$	Bogoliubov prescription (**gauge symmetry breaking**)

両定理の問題点(Stringariのトラペから)

Pitaevskii-Stringari Theorem(1991)

Use uncertainty type inequality

$$<\{A^+, A\}><\{B^+, B\}>\geq |<[A,B]>|^2$$

$$A = a_p$$

$$B = \rho_q^+ = \sum_p a^+_{p+\hbar q} a_p$$

$$<\{B^+, B\}>= 2 < \rho_{-q}\rho_q >\equiv 2NS(q)$$

S(q) static structure factor (density fluctuations)

ここでもまた、

$$[A,B] = a_0 = \sqrt{N_0}$$

Bogoliubov prescription (**gauge symmetry breaking**)

両定理の問題点(Stringariのトラペから)

- Bogoliubov近似
  - 正準交換関係を壊す $[\hat{a}_0, \hat{a}_0{}^{\dagger}] = [\sqrt{N_C}, \sqrt{N_C}] = 0?$
  - 最初 $\hat{a}_0$ を演算子として扱っていたのだから
    最終的に $<\hat{a}_0> = 0$ となるのはトートロジー
- 第一＜＞はどんな真空についてとられたもの？

PSが $\hat{a}_0$ を演算子として扱っている証拠

$$\hat{\rho}_k = \int \hat{\psi}^{\dagger}(x)\hat{\psi}(x)e^{-ikx}dx$$

場の演算子をｃ数(凝縮体)から始めれば密度演算子
は生成消滅演算子を一個だけ持つ項を含むはず
しかし彼らは

$$\rho_q^{+} = \sum_p a_{p+\hbar q}^{+} a_p$$

本研究の目的

- 真空の取り方を明確にしたうえで、Bogoliubov近似を用いずに、Pitaevskii-Stringariの定理を再証明する。

我々のStrategy

⇒正準交換関係を保ちつつ場の演算子の展開をｃ数から始め(凝縮相の存在を仮定)、その上で矛盾を導くことによって凝縮相の非存在を示す（背理法）。

基本的な道具立て

$$\hat{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2m} \frac{\partial \hat{\psi}^{\dagger}(x)}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}(x)}{\partial x} + \frac{g}{2} \hat{\psi}^{\dagger}(x) \hat{\psi}^{\dagger}(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x) \right) dx$$

$$\hat{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{L_c}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{a}_p e^{ipx} \qquad \hat{a}_p |0\rangle = 0$$

$$[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')] = 0, \qquad [\hat{a}_p, \hat{a}_q] = 0,$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^{\dagger}(x')] = \delta(x - x') \qquad [\hat{a}_p, \hat{a}_q^{\dagger}] = \delta_{pq}$$

P=0コヒーレント状態の導入

$$|0(\theta)\rangle \equiv \exp(-\frac{1}{2}N_c)\exp(\sqrt{N_c}\hat{a}_0^\dagger)|0\rangle$$

$$\hat{a}_{\theta,p} \equiv \hat{a}_p - \sqrt{N_c}\delta_{p0}. \qquad \hat{a}_{\theta,p}|0(\theta)\rangle = 0$$

⇒凝縮体の存在を仮定した真空の取り方！！

$$\hat{\psi}(x) = \sqrt{\frac{N_c}{L_c}} + \hat{\phi}(x),$$

$$\hat{\phi}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{L_c}}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\hat{a}_{\theta,p}e^{ipx}$$

⇒凝縮体の存在を仮定した場の演算子の展開の仕方！！

オーダーパラメタ、正準交換関係

$$\langle 0(\theta)|\hat{\psi}(x)|0(\theta)\rangle = \sqrt{\frac{N_c}{L_c}}$$

$$[\hat{a}_{\theta,p}, \hat{a}_{\theta,q}] = 0, \quad [\hat{a}_{\theta,p}, \hat{a}^{\dagger}_{\theta,q}] = \delta_{pq}$$

$$\Updownarrow$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(x')] = 0, \quad [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^{\dagger}(x')] = \delta(x - x')$$

$$[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')] = 0, \quad [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^{\dagger}(x')] = \delta(x - x')$$

Bogoliubov近似なし⇒ＣＣＲの堅持！！

不等式への代入

$$\langle\{\hat{A}^\dagger,\hat{A}\}\rangle\langle\{\hat{B}^\dagger,\hat{B}\}\rangle \geq |\langle[\hat{A}^\dagger,\hat{B}]\rangle|^2$$

$$A = a_p \qquad \langle\{\hat{B}^\dagger,\hat{B}\}\rangle = 2\langle\hat{\rho}_p\hat{\rho}_p^\dagger\rangle \equiv S_p$$

$$\hat{\rho}_p \equiv \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{n}(x)e^{-ipx}dx = N_c\delta_{p0} + \sqrt{N_c}(\hat{a}_{\theta,p} + \hat{a}^\dagger_{\theta,-p}) + \sum_q \hat{a}^\dagger_{\theta,q}\hat{a}_{\theta,q+p} = \hat{\rho}^\dagger_{-p}$$

$$[\hat{A}^\dagger,\hat{B}] = -(\sqrt{N_c}\delta_{p0} + \hat{a}^\dagger_{\theta,0})$$

期待値の意味

$$\langle\hat{A}\rangle \equiv \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\{e^{-\beta\hat{H}}\hat{A}\} = \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{Z}\sum_i e^{-\beta E_i}\langle i|\hat{A}|i\rangle$$

$$\langle\hat{A}\rangle \equiv \langle\Omega|\hat{A}|\Omega\rangle \qquad \hat{H}|\Omega\rangle = E_0|\Omega\rangle$$

※｜Ω＞は｜0(θ)＞上に構築されていることに注意

不等式からの帰結

$$n_p \geq \frac{|\langle \sqrt{N_c}\delta_{p0} + \hat{a}_{\theta,0}\rangle|^2}{2S_p} - \frac{1}{2}$$

ところが一般に $S_p \leq \frac{N}{mc}p$

$$\boxed{n_p \geq \frac{mcL_c^2}{4N}\frac{N_c}{p} - \frac{1}{2} \quad (p \to 0)}$$

$N_C = 0$でない限り $\int n_{\mathbf{p}} dp^D \to \infty (\mathrm{D} = 1)$

N_Cを有限とした当初の仮定が誤り⇒１ＤＢＥＣは存在しない

補助定理について $S_p \leq \frac{N}{mc}p$

ちゃんと示すなら線形応答⇒圧縮率総和則＋Schwartzの不等式
しかし、静的構造因子がｐに比例することだけをいうのなら

$$\epsilon(p) = \frac{p^2}{2mS(p)}$$

(Bijl 1940,Feynmann 1954)

においてエネルギースペクトルが線形フォノンであることを考慮すれば十分。
（ただしFeynmannの議論はかなりPlausible Argument）

Lieb-Linigerモデル（可積分模型）

$$\hat{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2m} \frac{\partial \hat{\psi}^\dagger(x)}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}(x)}{\partial x} + \frac{g}{2} \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x) \right) dx$$

$$\lim_{|x| \to \infty} \langle \Omega | \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(0) | \Omega \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{|x|}} \to 0$$

(Haldane 1981)

Penrose-OnsagerのBEC判定条件より
ＯＤＬＲＯがないのでＮＧ⇒ＰＳ定理をサポート！！

※現在は代数的Bethe仮設＋Slavnovの公式により有限領域有限個数の相関関数を任意の精度で数値計算できます。

まとめ

- 絶対零度・１次元におけるＢＥＣ相転移を禁止するStringari-Pitaevskiiの定理を、Bogoliubov近似を導入することなく再証明した。この方法ではＣＣＲを維持でき、論理的問題が少ない。