

# *Early onset problem in low temperature finite density QCD*

永田桂太郎

広島大学 情報メディア教育研究センター

## アブストラクト

格子QCDを用いた低温有限密度系の研究には”early onset”と呼ばれる問題が存在する。

ここではフェルミオン行列式の縮約公式を用いて格子QCDの低温極限を取るアイデアを導入し、それを用いてearly onsetの問題を考察する。



# Early onsetの問題



- ✓ 低温においてクォークはハドロン中に閉じ込められる。
- ✓ クォーク化学ポテンシャル $\mu$ が $mN/3$ 以下ではバリオンを励起できずにバリオン密度は零となるはず
- ✓ 格子QCD計算では $\mu = m\pi/2$ からクォーク数密度が有限になる問題がある。
- ✓ ここでは格子QCDにおけるある行列の固有値とこの問題の関係を調べる。

# クォーク行列式



$$Z = \int \mathcal{D}U [\det \Delta(\mu)]^{N_f} e^{-S_G}$$

- ✓クォークが格子サイトの時間方向をホップすることで化学ポテンシャルが導入される
- ✓同時に符号問題が発生する
- ✓多次元の行列式であり、計算上のホットスポット.

# クォーク行列式の縮約公式



✓  $\det D$  の時間部分を解析的に実行する公式(転送行列法に対応した方法)があり、以下の利点を持つ

1. 行列式のランクの縮小
2. リンク変数と化学ポテンシャルの分離

✓ さらに以下のような特徴を持つ。

1. クォーク行列式の密度依存性が扱いやすい
2. 公式に現れるある行列の固有値が有限密度の物理において重要な意味を持つ。



# Reduction Formula for fermion determinant

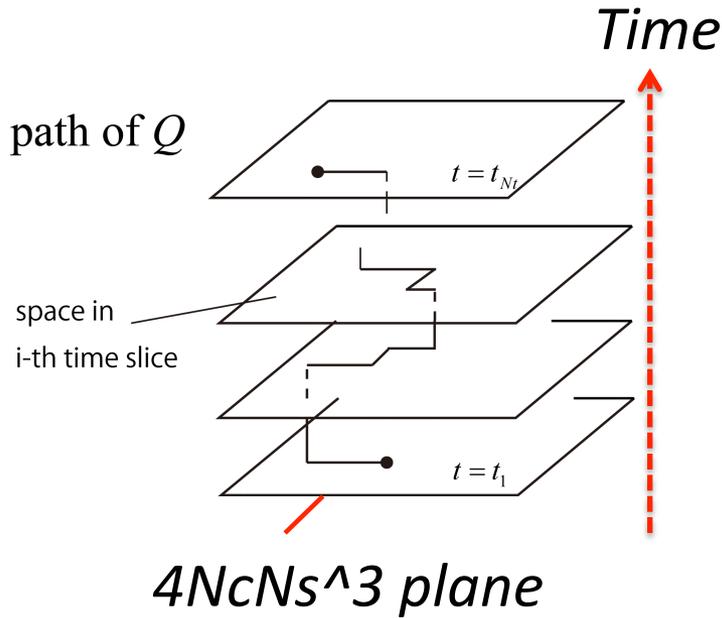


$$\det \Delta = \xi^{-N_r/2} C_0 \det(\xi + Q) \quad \xi = e^{-\mu/T}$$
$$Q = (\alpha_1^{-1} \beta_1) \cdots (\alpha_{N_t}^{-1} \beta_{N_t}) \quad C_0 = \prod_i \det \alpha_i$$

Qの固有値は有限密度領域で重要な意味を持つ

*Gibbs, PLB 172, 53 ('86). Hasenfratz & Toussaint, NPB371, 539('92). Adams, PRL92, 162002 ('04); PRD70, 045002 ('04), Borici, PTP. Suppl. 153, 335 ('04). Alexandru & Wenger, PRD83, 034502 ('11). KN&AN, PRD82,094027 ('10).*

# 物理的意味と連続極限の対応



Q :  $t=0$ から $t=Nt$ へのクォークの伝搬を記述する

$C_0$  : 空間方向の閉じたループを表す

## 連続理論での縮約公式(Adams('04))

$$\det D_A(\mu) = C e^{-\beta\mu N/2} \det[1 + e^{\beta\mu} \mathcal{U}_A(\beta)]$$

$$\mathcal{U}_A(\beta) = T \exp\left(-\int_0^\beta H_A(\tau) d\tau\right)$$

$$D_A(\mu) = \gamma_4 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + H_A(\tau) - \mu \right)$$

# 固有値の対称性とギャップ

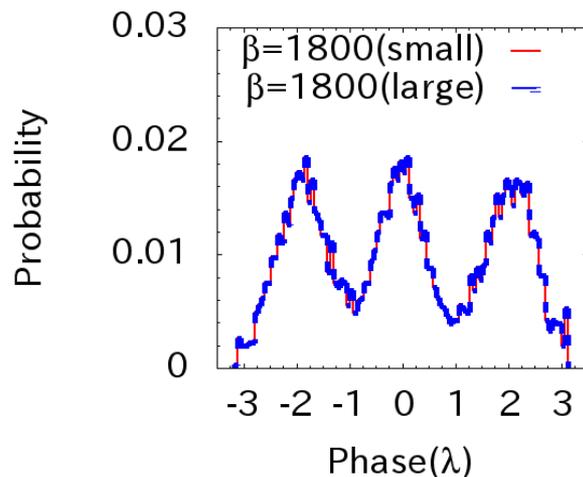
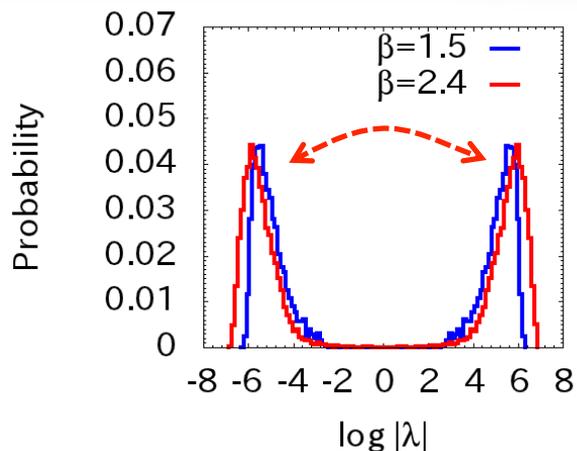
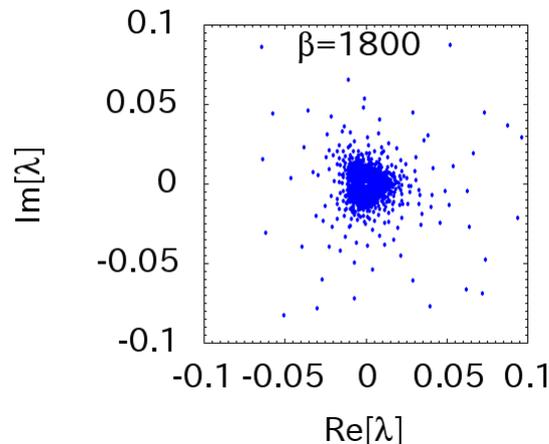
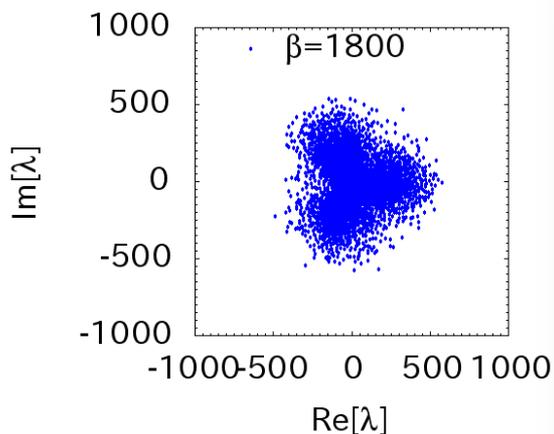
$$(\det \Delta(\mu))^* = \det \Delta(\mu^*) \quad \lambda \leftrightarrow \frac{1}{\lambda^*}$$

clover-Wilson + RG-gauge(Nf=2)

Volume :  $8^3 \times 4$ ,  $8^4$ ,  $10^3 \times 4$

quark mass :  $m_{ps}/m_V \sim 0.8, 0.6$

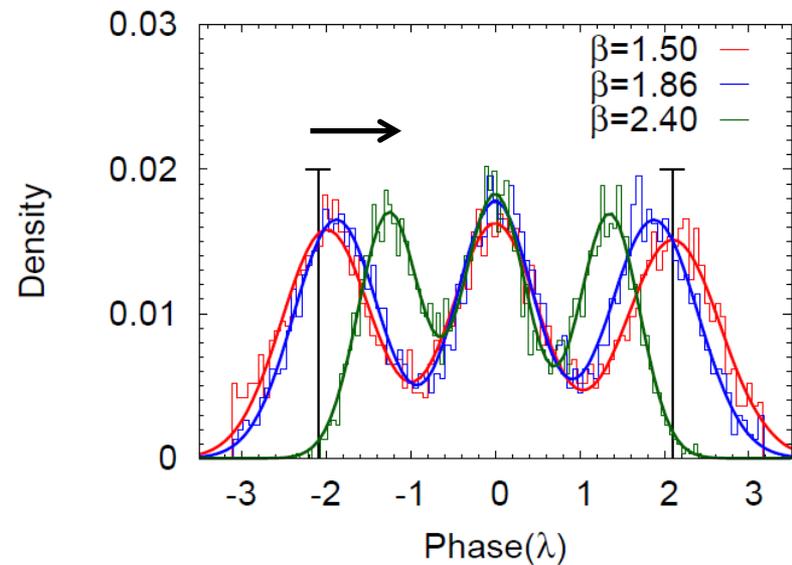
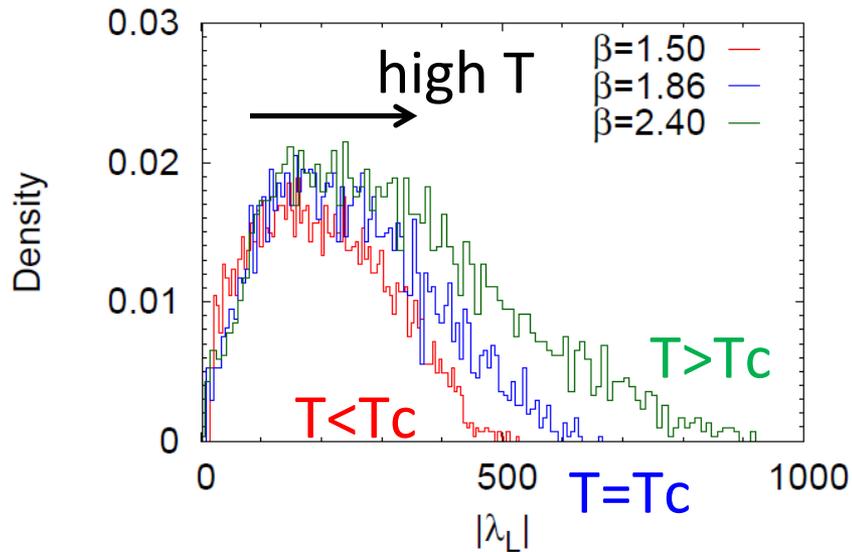
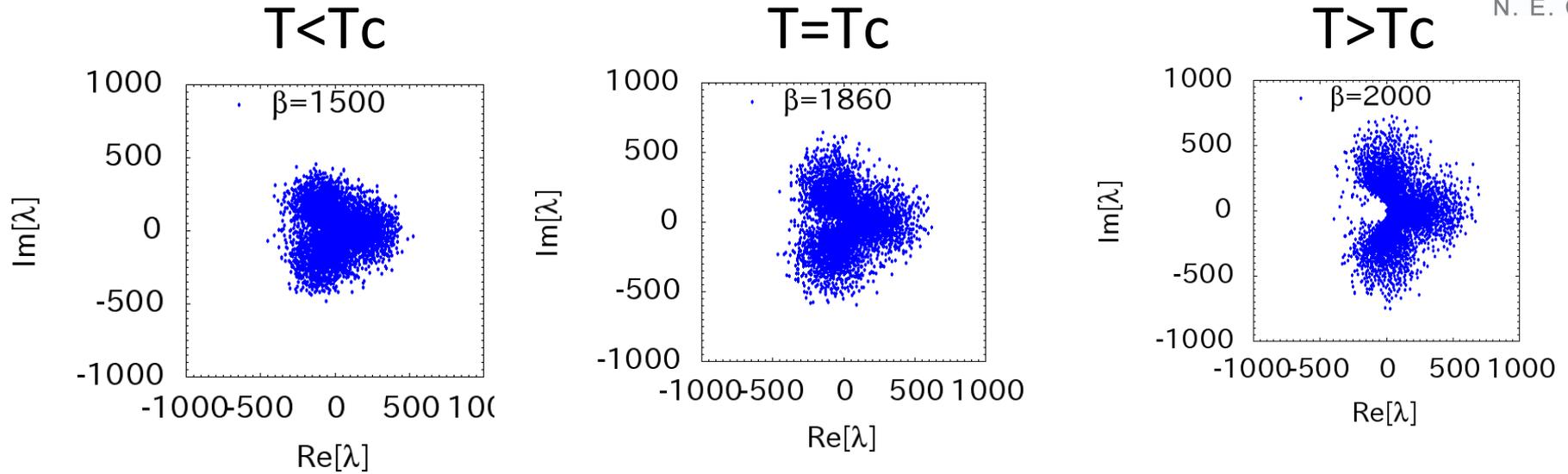
Configurations : HMC at  $m_\mu=0$



# 分布の温度(スケール a)依存性



N. E. C. O.



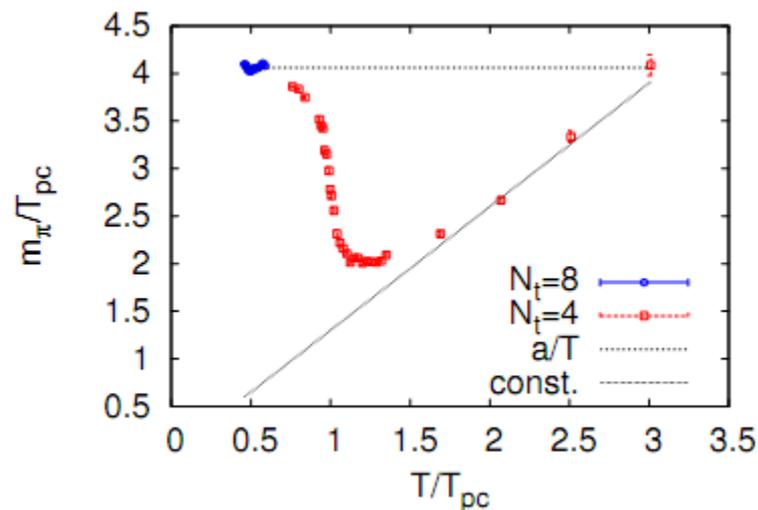
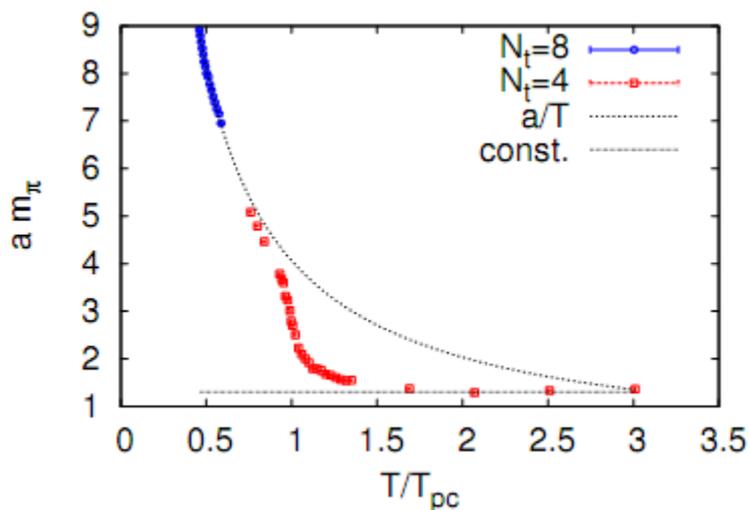
# ギャップとパイオン質量の関係

$$am_\pi = -\frac{1}{Nt} \ln \max_{|\lambda_n| < 1} |\lambda_n|^2$$

Gibbs('86). Eigenvalues and  $m_{\pi}$

Fodor, Szabo, Toth ('06). Eigenvalues and hadron spectrum

Left :  $m_{\pi}/T$ . Right :  $m_{\pi}/T_{pc}$

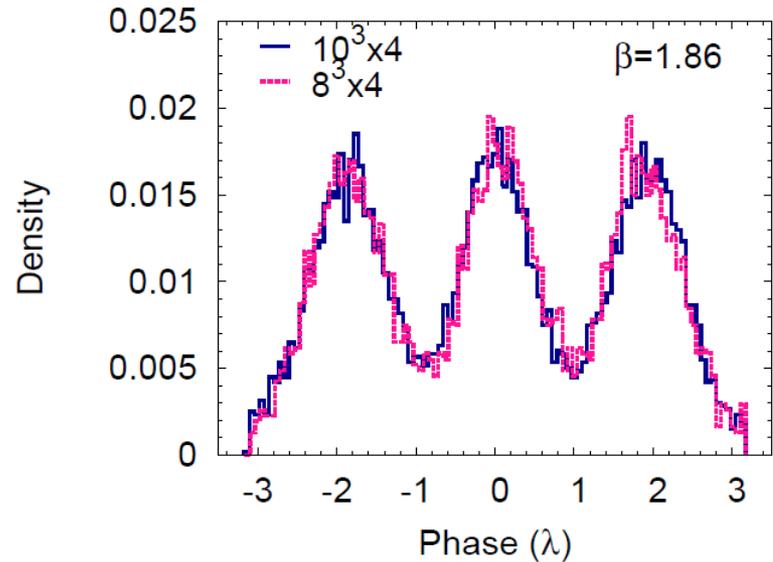
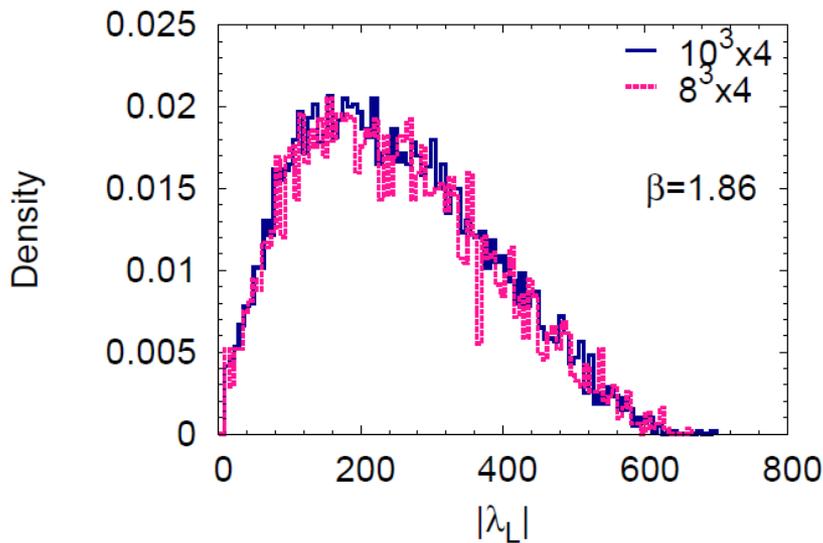


- 相関関数で求めたパイオン質量とほぼ一致

# 体積依存性



Histograms :  $|ev|$  (Left),  $\arg(ev)$  (Right)  
blue :  $10^3 \times 4$ , red :  $8^3 \times 4$



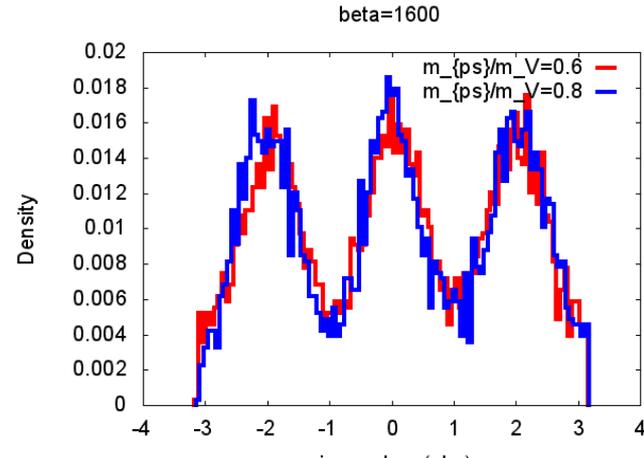
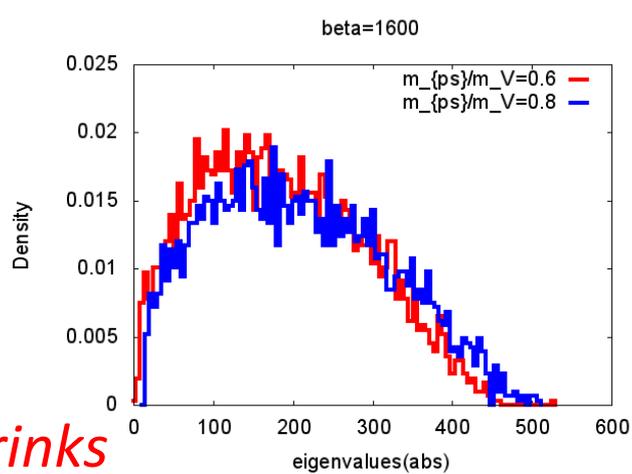
- *The small  $V$ -dependence suggests long distance propagations are small*
- *Further investigation for small quark mass is important*

# クォーク質量依存性

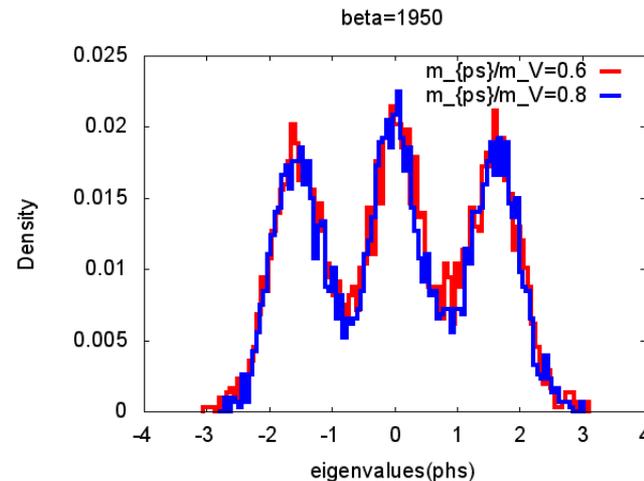
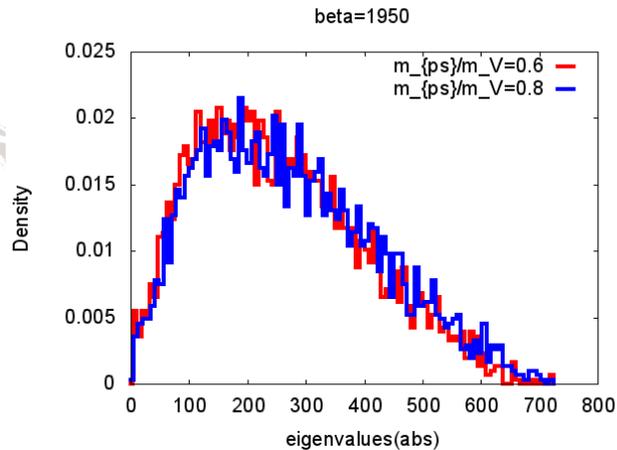
$m_{ps} / m_V = 0.6$  (red),  $0.8$  (blue)

Histograms :  $|ev|$  (Left),  $arg(ev)$  (Right)

confinement (top), deconfinement(bottom)



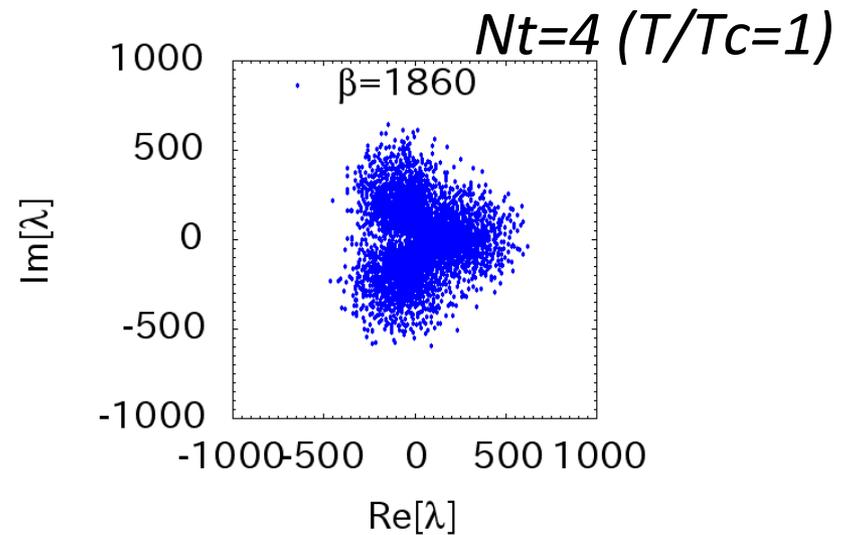
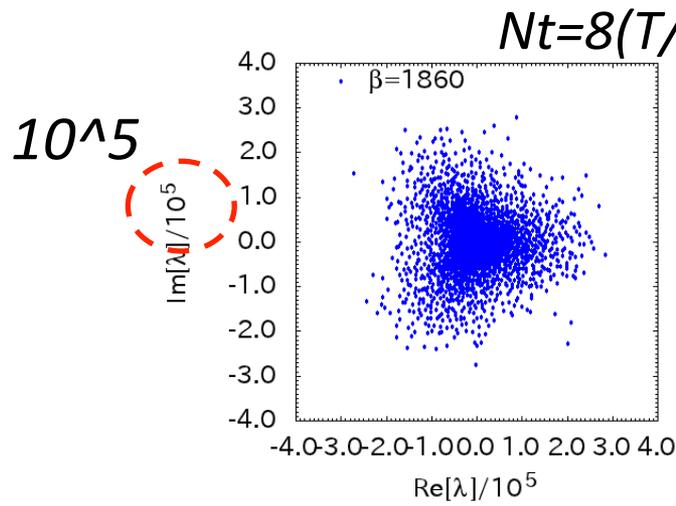
Gap shrinks



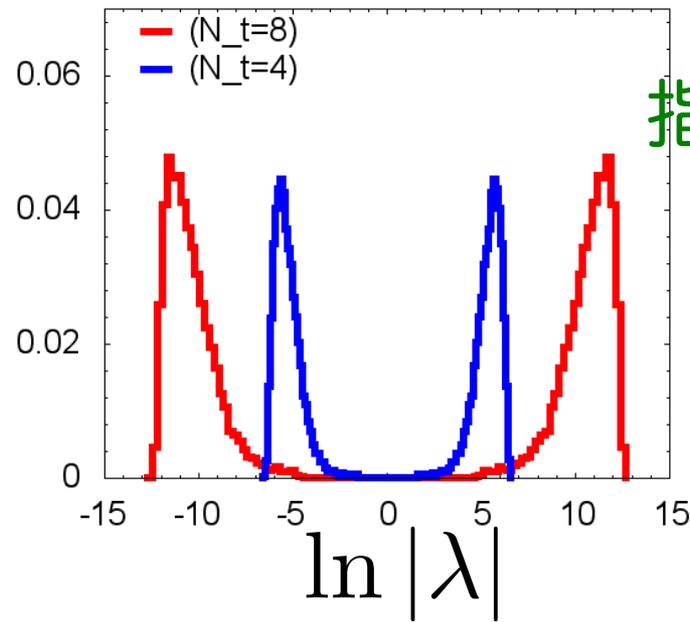
# 温度( $Nt$ ) dependence



N. E. C. O.



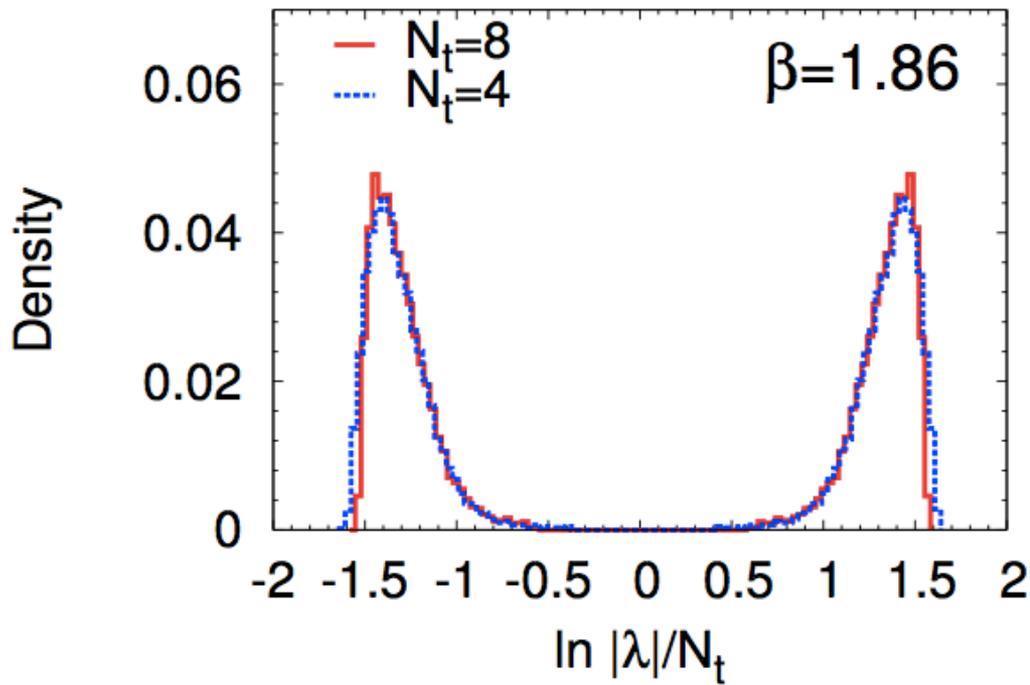
分布確率



指数的な $Nt$ 依存性

# *Nt-scaling law*

## *Histogram vs $(\ln |\lambda|)/N_t$*



$$|\lambda| = l^{N_t}$$



# Nt-scalingは物理的か？ 大きいNtでも成り立つか？

- *Structure of the reduced matrix*  $Q \sim A_1 A_2 \cdots A_{N_t}$   
 $A_i = \bar{A} + \delta A_i$ 
  - *In equilibrium,  $\langle \bar{A} \rangle > \delta A$*   $Q \sim \bar{A}^{N_t} + O(\delta A)$

- *Similarity of Q and Polyakov line*  $P \sim e^{-F/T}$

$$Q = \cdots U_4(t_1) \cdots U_4(t_2) \cdots U_4(t_{N_t})$$

- 連続理論との対応
- 

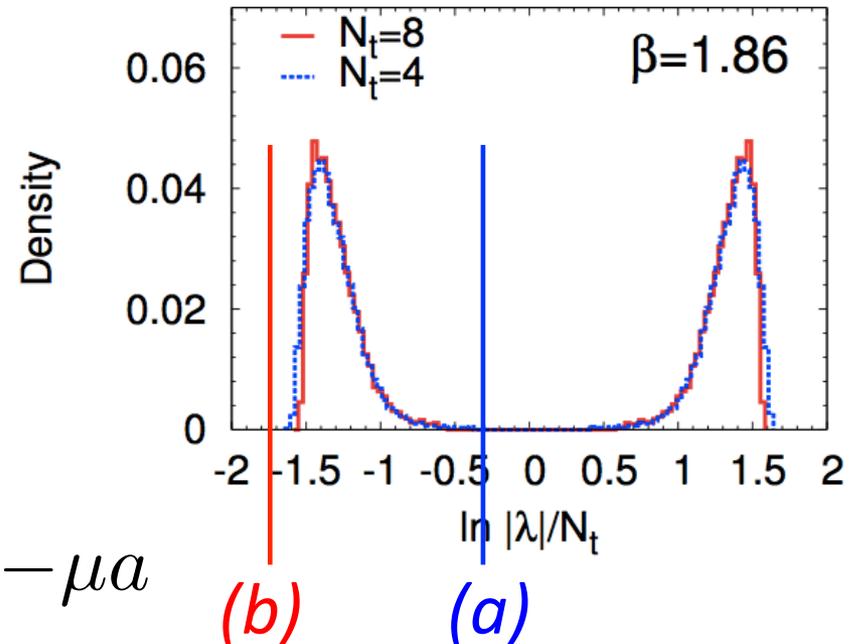
# T=0 (large $N_t$ ) limit

- ✓  $N_t$ スケールリング則から低温極限で大小の固有値が分離することが予想される

$$\det \Delta(\mu) = C_0 \xi^{-N_r/2} \prod_{n=1}^{N_r/2} (l_n^{-N_t} e^{i\theta_n} + e^{-\mu/T}) \prod_{n=1}^{N_r/2} (l_n^{+N_t} e^{i\theta_n} + e^{-\mu/T})$$

a. small  $\mu$

b. large  $\mu$



$$(\ln e^{-\mu/T}) / N_t = -\mu a$$

# Low- $T$ limit



*a. small  $\mu$*

$$\det \Delta(\mu) = C_0 \prod_{i=1}^{N_r/2} \lambda_n^L \quad \langle n \rangle = 0$$

*b. large  $\mu$*

$$\begin{aligned} \det \Delta(\mu) &= C_0 \xi^{-N_r/2} \det Q \\ &= e^{2N_c N_s^3 \mu / T} \prod_{i=1}^{N_t} \det(B_i r_+ - 2\kappa r_-) \quad \langle n \rangle = 2N_c N_f \end{aligned}$$

✓ small  $\mu$ での零密度状態と large  $\mu$ での全準位占有状態に対応

✓ どちらのケースも符号問題なし

# 低温極限の意味とearly onset



固有値のparametrizationと数密度演算子

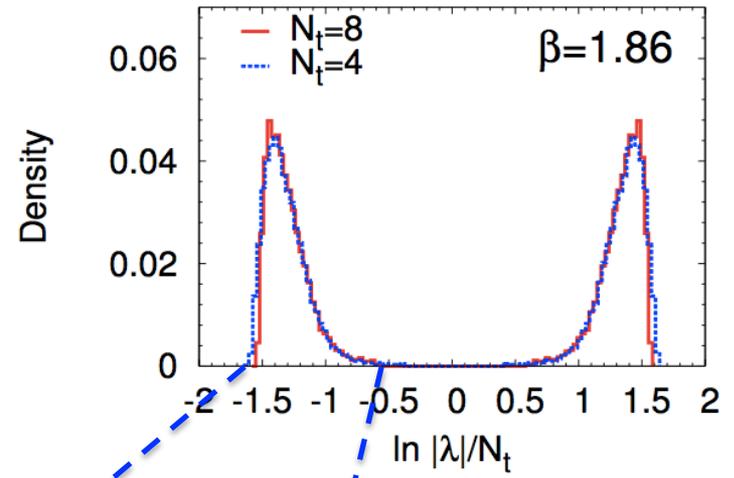
$$\lambda_n = e^{-\epsilon_n/T+i\theta} \quad \ln |\lambda_n|/N_t = -\epsilon_n a$$

$$\hat{n} = \int_{|\lambda|<1} d\lambda \rho(\lambda) \left( \frac{1}{1 + e^{(\epsilon-\mu)/T-i\theta}} - \frac{1}{1 + e^{(\epsilon+\mu)/T+i\theta}} \right)$$

ギャップとパイオン質量の関係から

$$\hat{n} = 0 \quad \text{for}$$

$$\mu < \epsilon_{min} = m_\pi/2$$



*max. energy min. energy ~ mpi / 2*

# まとめ



- early onsetの問題はクォーク化学ポテンシャルがクォークの最低励起エネルギーを越えることで生じる。
- ある意味自明な結論。しかし、 $m\pi/2 < \mu < mN/3$  においてバリオン数を零に押さえるメカニズムが非自明である。
- 最近、熱力学極限の重要性がIpsen&Splittorffによって指摘されており、今後格子計算でも検証する必要がある。

