

YITP-W-12-12

熱場の量子論とその応用

Thermal Quantum Field Theory and Their Applications

2012年8月22日(水) - 24日(金)

京都大学 基礎物理学研究所 パナソニック国際交流ホール

(2012年11月30日受理)

本研究会「熱場の量子論とその応用」は、熱場の理論を道具とする、さまざまな分野の研究者が集まる分野横断型研究会である。前身のモレキュール型研究会から数えて18回目の開催となり、今回も素粒子・原子核・宇宙物理から統計物理・物性物理・量子光学まで、幅広い分野の方々に参加していただいた。

BNL、CERNで行われている重イオン衝突実験をはじめ、格子QCD、トポロジカル量子現象、情報熱力学、冷却フェルミ原子など、最近話題の多種多様な講演を盛り込み、熱場の理論に関する活発な議論が行われた。活発な議論で研究会を盛り上げてくださった参加者の皆さんに感謝するとともに、基研からのサポートに対しても深く感謝したい。

世話人

浅川正之(大阪大)、阿部純義(三重大)、飯田圭(高知大)、稲垣知宏(広島大)、
江尻信司(新潟大、連絡責任者)、大西明(京大)、奥村雅彦(原子力機構)、
北澤正清(大阪大)、阪上雅昭(京大)、橘基(佐賀大)、野中千穂(名古屋大)、
峰真如(早大本庄学院)、室谷心(松本大、代表)(50音順)

基研研究会「熱場の量子論とその応用」

日程：2012年8月22-24日

場所：京都大学 基礎物理学研究所 湯川記念館 Panasonic 国際交流ホール

8月22日(水)

9:30- 9:50 受付

9:50-10:00 開会のあいさつ、連絡事項など

座長：浅川

10:00-11:00 野中千穂（名大 KMI）

高エネルギー原子核衝突実験の最新結果-国際会議 QM2012 から

11:00-11:20 飯田英明（京大理）*

古典 Yang-Mills 系におけるカラーガラス凝縮状態からの熱化過程

11:20-11:40 森田健司（京大基研）

Baryon number probability distribution in the presence of the chiral phase transition

11:40-12:00 西山陽大（京産大益川塾）

Equilibration of Scalar Fields in an Expanding System

12:00-13:00 昼食

座長：北澤

13:00-14:00 日高義将（理研）

有限温度摂動論

14:00-14:20 根本幸雄（聖マリアンナ医大）

有限密度系での plasmino と plasmaron の比較

14:20-14:40 休憩

14:40-15:00 中村真（京大理）

非平衡相転移・非平衡臨界点の AdS/CFT 対応による解析

15:00-15:20 堀田健司（北海道大理）

Creation of D9-brane-anti-D9-brane Pairs from Hagedorn Transition of Closed Strings -- Cylinder Amplitude and Sphere Amplitude

15:20-15:40 田港朝貴（九大理）

A holographic multi-baryon system by dilute gas approximation

学生講演

15:40-16:30 若手ポスターの3分講演（発表者リストは最後に）

座長：大西

16:30-18:30 若手ポスターセッション

19:00-21:00 懇親会（ほくとにて）

8月23日(木)

座長：飯田

- 9:00-10:00 丸山耕司 (大阪市立大)
情報、熱力学、そして統計力学
- 10:00-10:20 青木健一郎 (慶應大)
Shot noise レベルより小さい有限温度の表面揺らぎスペクトルの直接測定
- 10:20-10:40 溝口卓哉 (鳥羽高専)
非加法的式による 3K 黒体放射スペクトルの解析
-
- 10:40-11:00 休憩
-
- 11:00-11:20 古城徹 (Bielefeld大)
Interweaving Chiral Spirals
- 11:20-11:40 服部恒一 (延世大)
強磁場中における真空複屈折の詳細解析とその応用に向けて
- 11:40-12:00 佐藤大輔 (金沢大)
Beyond the ladder analysis of chiral and color symmetry breaking using the non-perturbative renormalization group
-
- 12:00-13:00 昼食
-
- 座長：稲垣
- 13:00-13:20 上門和彦 (京大基研)
The effects of fluctuations for QCD phase diagram with isospin chemical potential
- 13:20-13:40 李東奎 (高知大)
Quark-Hadron Phase Transition in an Extended NJL Model with Scalar-Vector Eight-Point Interaction
- 13:40-14:00 中村祐介 (早大基幹理工)
超演算子形式から見た非平衡 Thermo Field Dynamics の熱的真空の構造
- 14:00-14:20 水谷友一 (広島大情報メディア教育)
非平衡 Thermo Field Dynamics における正準量子化に基づいた Dirac 場の構築
- 14:20-14:40 一ノ瀬祥一 (静岡県立大)
カシミア効果の繰り込み群アプローチと物質中の電磁場の幾何学的取り扱い
-
- 14:40-15:00 休憩
-
- 15:00-16:00 新田宗土 (慶應大)
場の理論と物性論におけるトポロジカル量子現象
- 16:00-16:20 星野裕一 (釧路高専)
Schwinger-Dyson 方程式の頂点補正効果
-
- 16:20-18:30 ポスターセッション

8月24日(金)

座長：野中

- 9:00-10:00 金谷和至 (筑波大物理)
有限温度・有限密度格子QCD
- 10:00-10:20 中川義之 (新潟大)
ヒストグラム法で探る有限密度格子QCDの相構造
-
- 10:20-10:40 休憩
-
- 10:40-11:00 藤井宏次 (東大総文)
Complex Langevin simulation applied to a chiral model
- 11:00-11:20 佐野崇 (理研)
有限密度ランダム行列模型に対する複素ランジュバン方程式
- 11:20-11:40 柴田章博 (KEK) *
非自明なホロノミーを持つカロロン解により生成される磁氣的モノポール
- 10:40-12:00 荒木康史 (東大理)
グラフェン状の系における秩序現象と相構造
-
- 12:00-13:00 昼食

座長：橘

- 13:00-14:00 堀越宗一 (東大工)
冷却フェルミ原子の実験を通じて中性子物質を探る
-
- 14:00-14:20 休憩
-
- 14:20-14:40 小林恵太 (原研)
多軌道を持つ引力フェルミ原子気体における相分離
- 14:40-15:00 峰真如 (早大本庄学院)
Bose 凝縮体ソリトン束縛状態と輻射成分との運動量空間における干渉について
- 15:00-15:20 藤嶋浩史 (キャノン光技研)
再訪:ピタエフスキー=ストリングアの定理
-
- 15:20-15:30 ポスター賞表彰、閉会のあいさつなど

飛び入りポスター発表

永田桂太郎 (広島大)

Early onset problem in low temperature finite density QCD

学生のポスター発表	22日に3分間のスピーチ
------------------	--------------

1. 久野義人 (名工大工)
光学格子上 2 成分 Bose 粒子系の有効場の理論とその応用
2. 小澤秀敏 (名工大工)
強磁性超伝導現象を記述する格子 GL の数値シミュレーションによる研究
3. 桑原幸朗 (早大基幹理工)
一次元光学格子中の冷却 Bose 気体系に対する量子輸送方程式による緩和過程の解析
4. 高橋淳一 (早大基幹理工)
捕捉された Bose-Einstein 凝縮系における Bogoliubov de-Gennes の方法とゼロモード
5. 堀田龍一 (広島大理)
非平衡の場の理論を用いた粒子数期待値に対する相互作用からの寄与の研究
6. 福田恭平 (名大理) *
1+1 次元における相対論的粘性流体の摂動計算
7. 広野雄士 (東大理)
量子渦の非可換統計 - $S_0(N)$ 対称性を持つ Majorana フェルミオン -
8. 村瀬功一 (東大理)
重イオン衝突における相対論的揺動流体 ~因果律と記憶効果と有色雑音~
9. 山崎加奈子 (東大駒場)
PNJL 模型によるメソンガスの状態方程式
10. 谷崎佑弥 (東大理)
テンソル力のあるフェルミ液体の繰り込み群による解析
11. 益田晃太 (東大理)
強く相互作用するクォーク相を含む中性子星の状態方程式と最大質量
12. 鈴木溪 (東工大院理)
QCD 和則による有限温度クォークoniumの MEM 解析
13. 市原輝一 (京大理)
揺らぎを取り入れた強結合格子 QCD に基づく QCD 相図
14. 酒井俊太郎 (京大理)
カイラル有効模型に基づく媒質中での η' 中間子の質量変化と η' -N 相互作用について

・ポスター賞は桑原さん(早稲田大)と益田さん(東大)が受賞しました。

*原稿が未着のため、飯田英明氏(京大理)、柴田章博氏(KEK)、福田恭平氏(名大理)の報告書は掲載されていません。

高エネルギー原子核衝突実験の最新結果 国際会議 QM2012 から

野中千穂¹

名古屋大学素粒子宇宙起源研究機構、名古屋大学大学院理学研究科

2012年米国ワシントン D.C. で行われた国際会議 QM 2012 で報告された物理成果を実験結果を中心に紹介する。

1 はじめに

国際会議クォークマター 2012 (Quark Matter 2012 (QM2012)) [1] は高エネルギー重イオン衝突実験物理で最も大きな会議の一つであり、今回で23回目を迎えた。約1年から1年半ごとに開催され、年々参加人数が増加傾向にある。今回は実験、理論研究者で750人も参加者があり、基調講演が32、パラレル講演が167、ポスタープレゼンテーションにいたっては300以上という、ここ数年で最も大きな規模であった。

さて、2005年に米国ブルックヘブン国立研究所の Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) での強結合 QGP 生成が確立してから現在の主たる目的は QGP の詳細な研究となってきた。具体的には QGP の状態方程式、輸送係数が対象である。それを目的に RHIC、CERN の Large Hadron Collider (LHC) で大規模な高エネルギー重イオン衝突実験が遂行されている。様々な実験結果が報告されているが、そこから QGP の性質を知ることはそれほど簡単なことではない。困難の一つはクォークやグルーオンは直接観測できないことがあげられる。そのため、QGP をどのように観測して行くのかが大事である。様々な実験結果の包括的な理解が QGP 解明につながると考えられている。

まず現在の高エネルギー重イオン衝突実験の理解を概観する。高エネルギーで重イオン同士が衝突後、短時間で熱平衡状態に達し、流体膨張が起こる。ここで QGP からハドロン相への量子色力学 (QCD) 相転移が起こり、フリーズアウト過程を経て多くの粒子が検出器に飛び込んでくる。この重イオン衝突実験の時間と今回の QM 2012 のトピックを図 1 に示した。

今回の会議では RHIC からは PHENIX、STAR からの実験報告があった。それらは Au+Au 衝突のエネルギースキャン実験 ($\sqrt{s_{NN}} = 7.7, 19.6, 27, 39, 62, 200$ GeV)、衝突系依存性として U+U 193 GeV、Cu+Au 200 GeV 実験の結果も報告された。LHC からは、重イオン衝突実験に特化した検出器を持つ ALICE だけでなく、ATLAS、CMS と 3 つの実験グループからの Pb+Pb $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ GeV の結果が報告された。この RHIC と LHC で期待されている QGP 物理はどのようなものであろうか？ RHIC の大きな特徴はエネルギースキャンや系依存性など様々な衝突実験を行っていることである。これは QCD 相図上で有限密度方向の解析を可能にするものであり、この結果 QCD 相転移現象の詳細な理解が可能になる。一方、LHC はエネルギーフロンティアである。このエネルギー領域でのポイントは強結合 QGP が RHIC と同様に見出されるかどうかということになるであろう。例えば RHIC と LHC の生成粒子数の違いを見てみよう。文献 [2] によると $pp(p\bar{p})$ 衝突では粒子生成量は $s_{NN}^{0.11}$ で増大し、重イオン衝突では $s_{NN}^{0.15}$ で増大している。ここで s_{NN} は核子核子衝突あたりの全エネルギーである。その結果、LHC ($\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV) での重イオン衝突実験では RHIC ($\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV) と

¹e-mail address: nonaka@hken.phys.nagoya-u.ac.jp

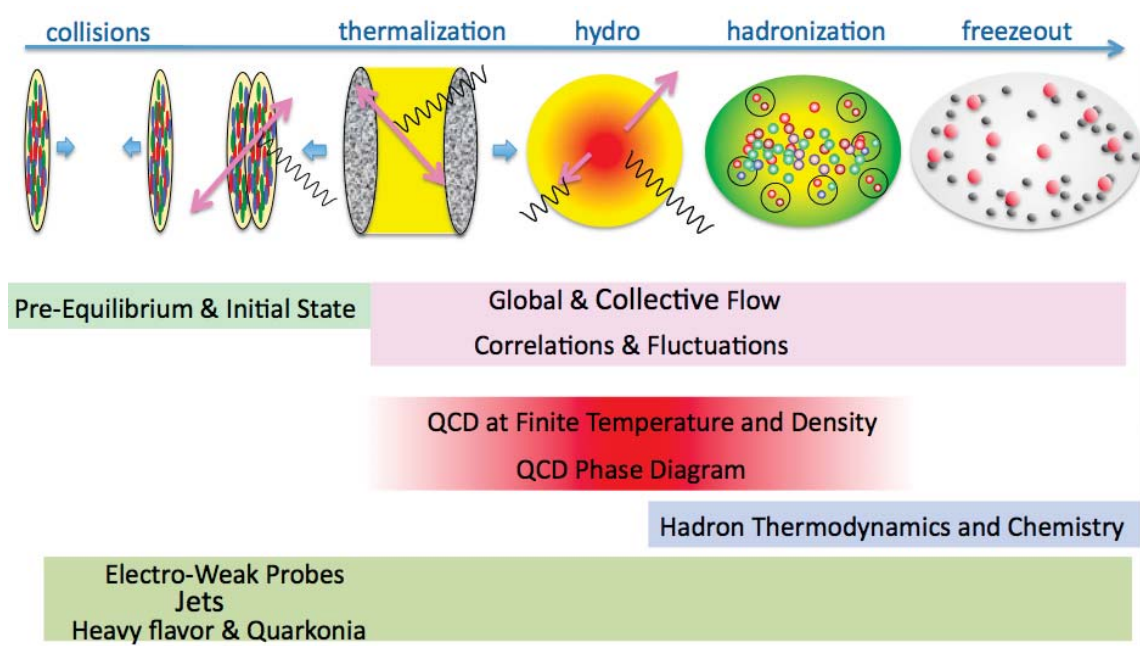


図 1: 高エネルギー重イオン衝突後の時間発展と QM 2012 で取り上げられたトピック。以上に加えて理論と実験の新しい発展に関するセッションもあった。

比べ 2 倍強の粒子生成量となっている。このような粒子生成量の圧倒的な違いからも LHC では RHIC と異なる新たな物理現象が見出されることが期待できる。

2 重イオン衝突実験の時間発展から

QGP の特徴を多角的に捉えるために様々な実験結果が数多く報告されている。これらのデータを重イオン衝突実験の時間発展の視点から整理して見ていく。

2.1 初期条件

高エネルギー重イオン衝突直後については理論的には確立していないことが数多く存在し、今まさに新たな研究成果が次々と報告されているところである。特に短時間で熱平衡に達する機構についての議論が活発である。ここで実験で確認すべき大事なことの一つは衝突後に QGP 生成に十分なエネルギー密度、温度に達したかどうかを検証することである。そのヒントになるのが光子の横運動量分布である。ここでは PHENIX [3]、ALICE [4] の結果を見てみる。両者の結果で共通であるのは低横運動量領域ではボルツマン分布に従い、高横運動量領域では横運動量のべきで記述できることが見てとれることである。そのためどちらのエネルギー領域でも低横運動量では熱平衡状態に達していると解釈することが可能である。実験で達した温度は光子の横運動量分布のボルツマン分布でのフィットによる概算することができる。それによると、PHENIX (RHIC) では $T = 221 \pm 19 \pm 19$ MeV (Au+Au $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV)、ALICE (LHC) では $T = 304 \pm 51$ MeV (Pb+Pb $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV) という値が得られている。最近の格子 QCD によると相転移温度は $T_c = 150 \sim 160$ MeV [5, 6, 7] と報告されているので、このことから RHIC、LHC で相転移が起こり QGP が生成していると考えられる。し

かしここで注意しなければいけないことは、光子は強い相互作用をしないため、この実験で見えているものは、衝突直後の初期条件からフリーズアウトまでの全時間発展の平均温度であるということである。そのため実際の初期条件ではもっと大きな温度が実現されていると考えられる。

2.2 流体膨張—ハドロン化—フリーズアウト過程

ここでは様々な興味深い物理現象が起こると考えられ、それを議論するのに必要な実験結果も豊富に存在している。粒子の集団運動（フロー）、ジェットが高温・高密度の媒質中でエネルギーを失うジェットエネルギー損失機構、熱的光子の生成といった物理現象が考えられている。系が膨張し、全体の温度が冷えてくると QGP 相からハドロン相への相転移（ハドロン化）が起こる。その過程は横運動量領域によって状態方程式（流体模型）、リコンビネーション模型、フラグメンテーション模型でそれぞれ記述できると考えられている。さらに生成したハドロンの平均自由行程が大きくなりそれ以上相互作用なくなると、ハドロンの情報が凍結し（フリーズアウト）それらが、検出器へと飛び込んでくることになる。これら一連の過程において大きな役割を果たすのが相対論的流体模型である。相対論的流体模型の RHIC で発見された強い楕円フローの説明成功、さらに Romatschke らによる相対論的粘性流体模型での楕円フローの実験解析成功 [8] 以来、相対論的流体模型は現象論的模型の中心になってきた。この QM 2012 でも講演、ポスター発表を含めて 18 もの研究成果の発表があった。ここ数年の高精度の実験結果の理解から現在高エネルギー重イオン衝突実験を記述するのに求められている模型は次のようなものである。イベントごとのゆらぎを取り入れた初期状態、(3+1)次元の相対論的粘性流体模型、そしてハドロン間の相互作用を含む現実的なフリーズアウト過程のいずれも必要とされている。流体模型の基調講演を行った Ollitrault の講演 [9] の中に相対論的流体模型の初期条件、数値計算の次元、粘性の存在、フリーズアウト過程に注目しそれぞれの過程が模型にどのように取り扱われているかの議論があった。それを見ると最近の相対論的粘性相対論的流体模型の発展は著しいが、重イオン衝突実験のそれぞれの時間発展の記述と言う観点からすると、まだまだこれからであるという印象を受ける。特にハドロン間の相互作用を取り入れることが可能になるハドロンベースのイベントジェネレーターを取り入れた模型はやっと出てきたばかりである。McGill グループ [10] がその結果を示したが、計算時間がかかるためか、統計が不十分でまだ最終結果とは言えなかった。

フローに関する実験結果の中で最近の大きな成果は方位角分布の高次調和成分の実験結果であろう。粒子生成は方位角に対して式 (1) のようにフーリエ展開することができる。

$$\frac{dN}{dyd\phi} \propto 1 + 2v_1 \cos(\phi - \Theta_1) + 2v_2 \cos 2(\phi - \Theta_2) + 2v_3 \cos 3(\phi - \Theta_3) + 2v_4 \cos 4(\phi - \Theta_4) + \dots, \quad (1)$$

ここで、 v_1 、 v_2 は以前から良く測定されていた直接フローと楕円フローである。新しいのはそれらに加えてさらに高次成分が測定され始めたことである。例えば v_3 は初期に存在するイベントごとのゆらぎに起因するということがわかってきた。従来のようなスムーズなアーモンド型をした初期条件から流体計算を行っても有限な v_3 の値は得られない。さらに、以前はマッハコーン生成の痕跡であると考えられていた粒子相関の away side に存在した 2 つの山が実は高次成分の重ね合わせで説明できることが見出された（例えば [11]）。実験解釈がこのように精度の良い実験結果と、理論からの定量的解析ともに変化していくことも重イオン衝突実験物理の面白さの一つであると思われる。同時に一つの実験結果に対してもすれば様々な定性的な解釈が提示されることが良くあるが、精度の良い定量的な解析がいかに重要であるかが、この実験解析解釈の変遷から伺える。この物理量の詳細な解析から

例えば初期の粒子分布に起因するエネルギー分布が終状態でそのように変化するかを調べることで、状態方程式、輸送係数といった QGP の詳細な特徴を知ることができると期待されている。

このようににわかに注目を集めたフローの方位角分布の高次調和成分の実験結果であるが、この実験結果の定量的な解析はとても難しい。相対論的流体模型の計算においてイベントごとの初期条件の使用の必要性、実際の実験なみの計算統計量と行った精度の良い数値計算が要求される。特に初期条件のゆらぎの存在は相対論的流体模型における正しい衝撃波の取り扱いを要請している。高エネルギー重イオン衝突実験理解に適用されている相対論的模型中のアルゴリズムは、SHASTA、KT、PPM、などである。未だに単純な差分法を使用したものも見られ、相対論的流体模型の数値解析という観点からみると残念ながら十分に吟味されているとは言えない。特に広く使用されているのは SHASTA であるが、これは約 40 年前に最初に提案された Flux-Corrected Transport (FTC) 法である。衝撃管のテスト計算をみると解析解と比較して SHASTA の結果もそれほど悪くはないが、高エネルギー重イオン衝突実験の数値計算では小さな誤差が大きな誤差へ集積すると考えられる。さらに実験結果の粘性を議論するためには数値計算の中に存在する人口粘性の影響の小さなアルゴリズムを選択することが重要である [12]。

この高次調和成分について、RHIC、LHC の双方から豊富な実験結果が報告された。ALICE ではほとんどの中心衝突度で v_2 が最も大きな値を持つが、中心衝突 (0-5 %) では v_3 が支配的であることが見出された [4]。これも v_3 の起源はイベントごとのゆらぎであることの証拠の一つであると考えられる。CMS は中心衝突 (0-2 %) では ϵ_n が $n = 2 \sim 5$ ではほとんど一致することを示した [13]。

楕円フローの振舞は横運動量域ごとに理解することができる。それは横運動量ごとに支配的な物理が異なるためである。図 2 に横運動量ごとに支配的な物理とその特徴を示した。低横運動量領域は相対論的流体模型で記述される。それぞれの粒子が流体の流れに乗って運動するために、質量が重い粒子ほど楕円フローの値が小さくなる。この振舞は「mass ordering」と呼ばれる。中横運動量領域ではリコンビネーション模型が支配的となる。ここでは個々の粒子と言うよりも、メソンかバリオンであるかでフローの振舞が決まる。すなわちクォーク数スケールリングを実験結果の中に見出すことができる。これは最近 v_3 や v_4 にも拡大されて実験解釈が行われつつある。これはまさに高エネルギー重イオン衝突後にクォークのスープできた証拠と考えられ、RHIC での強結合 QGP 生成への根拠の一つと考えられた。高横運動量領域になると今度はジェットのエネルギー損失機構が支配的な物理となる。そこでは楕円フローの振舞はパートンの媒質中との相互作用によって決まってくるので、ジェットが媒質中を通る距離によって決まってくると考えられている [14, 15]。

さて実際の実験結果はどうであろうか。特にリコンビネーションを主に実験結果を眺めてみる。LHC エネルギー領域の ALICE 実験では楕円フローのクォーク数スケールリングの様子を $\text{Pb+Pb } \sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV に対し衝突度 10-20 %、40-50 % について示した [4]。これによると、RHIC と比較すると LHC における楕円フローはクォーク数スケールリングが悪くなっていることを示唆する結果が得られた。まだ理論の詳細な解析はなされていないが、これから共鳴粒子からの寄与などを取り入れたより詳細な解析が必要と思われる。また RHIC においてもエネルギーキャン実験 ($\text{Au+Au } \sqrt{s_{NN}} = 7.7, 11.5, 19.6, 27, 39, 62.4$ GeV) の結果が報告された [16]。いずれの衝突エネルギーでも中心度が 0-8 % となっている。これをみると衝突エネルギーが 11.5 GeV よりも小さくなるとリコンビネーション模型からのずれが見出されている。特に ϕ 中間子のずれが大きい。これは ϕ 中間子のハドロン相中での散乱断面積が小さいことを反映しているのかもしれない。エネルギーキャン実験では直接フロー、 v_1 のラピディティに対する振る舞いも報告された [16]。これによると、 π 中間子の v_1 はいずれの衝突エ

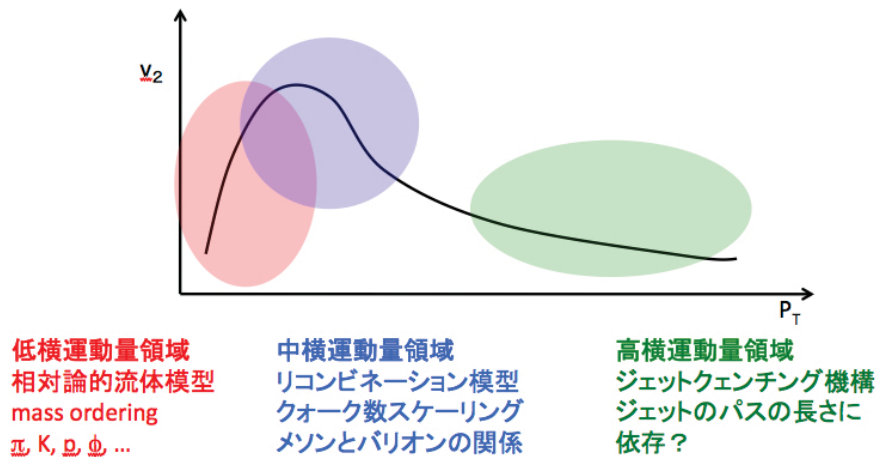


図 2: 楕円フローと各横運動量で支配的な物理。

エネルギーでも負の傾きを持っているのに対し、陽子の v_1 は 11.5 GeV と 7.7 GeV の間で傾きが負から正に変化している。このように π と陽子の v_1 の傾きの違いは AGS のような低い衝突エネルギー実験でもすでに観察されており、相対論的流体模型の適用限界を示しているものと理解できる可能性がある。

LHC では v_2 が非常に高い横運動量領域まで測定された。CMS では $P_T = 40$ GeV までの楕円フロー v_2 を衝突度 0-10 %、10-20 %、20-30 %、30-40 %、40-50 %、50-60 % について報告している [17]。それによると $P_T = 40$ GeV 付近であっても v_2 は有限であることがわかった。このような高横運動量領域における楕円フローの実験結果はジェットエネルギー抑制機構の理論確立への大きな手がかりになると期待されている。さらに楕円フローだけでなく、 v_3 、 v_4 についても測定がなされた [13]。

以上、様々な実験結果が報告されたが、理論からの定量的な解析はこれからであることは言うまでもない。

3 物理量から

さて以上は高エネルギー重イオン衝突実験の時間発展の観点から実験結果のいくつかについて述べた。ここでは物理量、ジェット、重いフレーバー、電弱プローブから実験結果を取り上げたい。

3.1 ジェット

ジェットと媒質の相互作用、ジェットの媒質中のエネルギー損失から QGP の性質の情報を得ることが可能であると期待されている。現在ジェットエネルギー損失の機構を記述するために 4 つの模型が提案されている。いずれも摂動 QCD を元に発展した模型であり、媒質の取り扱いがそれぞれの模型の特徴となっている (表 1)。難しいのは媒質との相互作用が強い相互作用によって支配されるために簡単な摂動論では取り扱いができないことである。まだ決定的な理論に達したとは言いがたく同じ媒質を用いたそれぞれのジェットエネルギー損失機構の比較 [18]、あるいは第一原理計算である格子 QCD を用いたジェットエネルギー損失の評価方法が提案されてきている [19]。そのため実験結果理解が特に大事であると考えられる。

表 1: 摂動 QCD-をベースにしたジェットエネルギー損失モデル [12]。: (E : パートンのエネルギー、 k_T : 生成したグルーオンの横運動量、 μ = 媒質から受け取る運動量、 T : 温度、 Λ = 媒質の運動量スケール、 x = 生成グルーオンの運動量割合)

Model	Assumption about the medium and kinematics	Scales	Resummation
GLV	static scattering centers (Yukawa), opacity expansion	$E \gg k_T \sim \mu, x \ll 1$	Poisson
ASW	static scattering centers, multiple soft scattering (harmonic oscillator approximation)	$E \gg k_T \sim \mu, x \ll 1$	Poisson
HT	observable matrix elements at scale Λ (thermalized or non-thermalized medium)	$E \gg k_T \gg \Lambda \sim \mu$	DGLAP
AMY	perturbative, thermal, $g \ll 1$ (asymptotically large T)	$E > T \gg gT \sim \mu$	rate equation

RHIC と LHC の双方で原子核増大因子 $R_{AA}(= 1/N_{\text{coll}} \cdot (dN_{A+A}/dP_T)/(dN_{p+p}/dP_T))$ の実験結果が報告された。この原子核増大因子はその定義からわかるようにもし $R_{AA} = 1$ であれば、その重イオン衝突実験結果は陽子陽子衝突の重ね合わせで説明できると考えられる。PHENIX からは Au+Au $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV の π^0 の R_{AA} の値 [20] が、ALICE からは Pb+Pb $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV の 荷電ハドロンの R_{AA} の両者とも正面衝突 (0-5 %) の実験結果が報告された。両者とも $P_T = 6$ GeV 付近で $R_{AA} = 0.1$ 程度と 1 からの大きなずれ (抑制) が見られ、 $P_T = 20$ GeV ($R_{AA} \sim 0.2$) までわずかな上昇が見られる。興味深いのは R_{AA} の定性的な振る舞いだけでなく、RHIC と LHC で R_{AA} の値が定量的にもほとんど同じであることであった。この実験結果をみると、ジェットエネルギー損失の機構は RHIC と LHC では差異がないように考えられる。そこで PHENIX は fractional momentum loss δP_T と呼ばれる量を用いて、両者の比較を行った [20]。 δP_T は陽子陽子衝突の横運動量分布を T_{AA} 倍したものと重イオン衝突の横運動量分布を比較し、両者の粒子生成量が同じになるときの横運動量の差を評価したものである。それによると、ALICE の $\delta P_T/P_T$ の値は全横運動量領域において RHIC よりも大きいことが示された。この物理量であれば衝突エネルギー差をより明快に知ることができると考えられる。さらに PHENIX はエネルギーキャン実験 (Au+Au $\sqrt{s_{NN}} = 200, 62.4, 39$ GeV) でも $\delta P_T/P_T$ の振る舞いを調べている。それによると正面衝突 (0-10 %) では衝突エネルギーが高いほど $\delta P_T/P_T$ の値は大きくなるが、衝突エネルギーが 39 GeV と 62.4 GeV ではほとんど差がないことが報告された [20]。

ジェットについてはCMS、ATLAS からより詳細な結果が報告された。例えば、ATLAS からは $R_{CP}(=1/N_{\text{coll}}^{\text{peripheral}}/N_{\text{coll}}^{\text{central}} \cdot (dN_{A+A}^{\text{central}}/dP_T)/(dN_{A+A}^{\text{peripheral}}/dP_T))$ のジェット半径 ($R = \sqrt{\Delta\eta^2 + \Delta\phi^2}$) 依存性が報告された [21]。 $R_{CP}^{0.3}$ 、 $R_{CP}^{0.4}$ 、 $R_{CP}^{0.5}$ をそれぞれ $R_{CP}^{0.2}$ で割ったものの P_T 依存性を見ると、 R が小さいほど $R_{CP}^R/R_{CP}^{0.2}$ の値が小さいことがわかる。これによると小さなジェット半径を持つジェットほどエネルギー抑制が起きていることがわかる。またジェットの実験結果を利用して ATLAS はジェットフラグメンテーションを各中心度に対して評価している [21]。これは直接的なジェットエネルギー損失機構を知る手がかりになると考えられる。さらに γ -jet 関連の実験結果も PHENIX[20]、CMS[22] から報告された。光子は媒質と相互作用をしないと考えられるため、 γ -jet 関連の実験結果はジェットエネルギー抑制のよりクリアな指標を与えると期待できる。PHENIX はジェットの周辺の角度依存性について調べ、大きなエネルギー損失を受けた粒子はジェットのまわりにより広い角度で分布していることを見出した。これは CMS が 2011 年のクォークマターで発表したダイジェットの運動量バランスの実験結果と一致している [22]。

3.2 重いフレーバー、クォークニア

重いフレーバーは重イオン衝突実験では主としてグルーオン融合過程によって生成され、そのため初期のグルーオン密度や分布の手がかりになると考えられている。さらに RHIC や LHC のような高エネルギー重イオン衝突実験では生成した重いフレーバー（の一部）が熱平衡状態に達すると考えられ、重いフレーバーと媒質との相互作用から、媒質の輸送係数などの情報が得られると考えられる。ただし、重いフレーバーの媒質中におけるエネルギー損失機構はいくつか提案されている (gluon bremsstrahlung radiation、 collisional energy loss、 collision dissociation など) が、まだ議論の渦中にある。さらに重いフレーバーでは冷たい原子核効果 (cold nuclear effect: gluon shadowing、 カラーガラス凝縮など) が無視できない。また RHIC では重いフレーバーの再結合 (regeneration) の重要性も指摘された。QGP 生成のわかりやすいシグナルとして提案され広く受け入れられた J/Ψ 抑制であるが、実際の実験結果理解はそれほど単純には行かないことがわかってきた。

まず RHIC と LHC で原子核増大因子 (R_{AA}) の N_{part} 依存性を比較してみる [23]。すると LHC (Pb+Pb $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV) の R_{AA} が RHIC よりも大きな値を持つことがわかった。これは LHC の方が衝突エネルギーが高いので重いフレーバーが多く生成しその結果再結合がより多く起こっていることを示唆していると考えられている。RHIC における J/Ψ の楕円フローの振る舞いは理解することが難しい実験結果の一つである。STAR (RHIC) は J/Ψ の楕円フローの横運動量依存性を示した。それによると J/Ψ の楕円フローは $P_T \sim 7$ GeV までほとんど 0 であることがわかった [24]。これはオープンチャーム D の v_2 は有限でありリコンビネーションモデルの解析から部分的な熱平衡状態が実現していること、 J/Ψ の R_{AA} の振る舞いから再結合を取り入れる必要があること、などを考えると $v_2 \sim 0$ であることを理解するのは難しい。一方 LHC における J/Ψ の楕円フローは ALICE によって有限であることが示された [4]。これらを統一的に理解していくことは理論におけるチャレンジの一つであると考えられる。

さらにボトムに関する実験結果も報告された。今回の QM 2012 での大きな驚きの一つが、ボトムの R_{AA} がチャームよりもより多く抑制されることが PHENIX により報告された [25] ことである。PHENIX は新しく導入された VTX 検出器によってボトムとチャームの寄与を分離することに成功した。しかしこの衝撃的な実験結果は従来多くの理論による重いフレーバーのエネルギー損失機構から

の予想とはまったく異なるものであった。さらなる実験精度の向上や理論の発展が必要である。

3.3 電弱プローブ

強い相互作用をせず媒質をそのまま透過すると考えられる光子やレプトン対は重イオン衝突実験の全過程を写し出す物理量として多くの情報を含んでいることが期待される。PHENIX によって報告された直接光子の楕円フロー v_2 の横運動量依存性も現在まだ理論からの説明がなされていない物理量の一つである。PHENIX で測定された光子の v_2 は $P_T < 4$ GeV で 0.05 ~ 0.1 程度の値をもつ [26]。これは例えば相対論的流体モデルによる単純な計算はうまくいかないことがわかってきた。 P_T が 4 GeV よりも大きなところではほとんど 0 となっている。

さらにレプトン対の実験結果も充実してきている。レプトン対の不変質量分布は、有限温度・密度中のハドロンの性質を知る格好の手段であると考えられている。たとえば、PHENIX からは ρ 中間子の質量付近でバックグラウンドからの増大が観測されている [26]。この増大が ρ 中間子の質量変化からくるのか、あるいは崩壊幅の媒質中の変化によるものなのか、まだ結論には到達していないと考えられている。すでに様々な理論計算は存在するが、SPS、RHIC、LHC を統一的に記述する現実的な理論計算はまだこれからであると考えられる。このようにジェット、重いフレーバー、電弱プローブの現実的な評価は重イオン衝突実験を記述するダイナミカルなモデルの存在があつて初めて可能になるものであり、これからの大きな発展が見込まれる。

4 まとめ

今年行われた 1 週間にもわたった大規模な国際会議、QM 2012 のごく一部について実験結果を中心にまとめた。このように QGP 状態の解明をめざし、大規模で精密な実験が世界的規模で遂行されている。そしてそこから報告された数多くの実験結果を多角的に研究することで QGP の統一的な知見が得られつつある。ここでは主として実験結果について述べたが、QGP 状態の定量的な解明には理論からの理解が不可欠であり、それに必要なモデルの開発、実験解析が続々と行われている。次回のクォークマターは 2014 年、ドイツ GSI で行われる。(さらに 2015 年は日本での開催が予定されている!) それまでには今回の実験結果理解によって、QGP 状態の詳細が明らかになっているであろう。私自身は QM 2014 での新しい実験結果を楽しみに、それまでには現実的な現象論的モデルを完成させ新たな実験理解に対し準備万端で望むことを目標にしている。

参考文献

- [1] <http://qm2012.bnl.gov> : ここで述べる実験結果はここから全て参照可能。
- [2] Babelyev *et al.* [ALICE Collaboration], Phys. Rev. Lett. **105**, 252301 (2010) [arXiv:1011.3916 [nucl-ex]].
- [3] A. Adare *et al.* [PHENIX Collaboration], Phys. Rev. Lett. **104**, 132301 (2010) [arXiv:0804.4168 [nucl-ex]].

- [4] “*Overview of recent ALICE results*”, talk by K. Safarik at QM2012.
- [5] S. Borsanyi *et al.*, [arXiv:1007.2580 [hep-lat]].
- [6] A. Bazavov *et al.*, arXiv:1111.1710 [hep-lat].
- [7] T. Umeda *et al.* [WHOT-QCD Collaboration], PoS LATTICE **2010** (2010), 218.
- [8] P. Romatschke and U. Romatschke, Phys. Rev. Lett. **99**, 172301 (2007).
- [9] “*Hydro Overview*”, talk by J-Y. Ollitrault at QM2012.
- [10] “*E-by-E MUSIC Afterburner*”, talk by S. Jeon at QM2012.
- [11] S. Mohapatra for the ATLAS Collaboration, [arXiv:1109.6721 [nucl-ex]].
- [12] C. Nonaka and M. Asakawa, arXiv:1204.4795 [nucl-th].
- [13] “*Highlight from CMS*”, talk by G. Roland at QM2012.
- [14] *First Three Years of Operation of RHIC*, Nucl. Phys. **A757**,1 (2005).
- [15] *Quark Gluon Plasma. New discoveries at RHIC: Case for the Strongly Interacting Quark-Gluon Plasma.*, Nucl. Phys. **A750**,1 (2005).
- [16] “*STAR Results from RHIC Beam Energy Scan-I*”, talk by L. Kumar at QM2012.
- [17] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], Phys. Rev. Lett. **109**, 022301 (2012) [arXiv:1204.1850 [nucl-ex]].
- [18] S. A. Bass, C. Gale, A. Majumder, C. Nonaka, G. Y. Qin, T. Renk and J. Ruppert, Phys. Rev. **C79**, 024901 (2009).
- [19] A. Majumder, arXiv:1202.5295 [nucl-th].
- [20] “*PHENIX Highlights*”, talk by T. Sakaguchi at QM2012.
- [21] “*Jets in ATLAS*”, talk by M. Spousta at QM2012.
- [22] “*Overview of results on jets from the CMS Collaboration*”, talk by G. Veres at QM2012.
- [23] “*ALICE results on quarkonia*”, talk by E. Scapparini at QM2012.
- [24] “*Heavy Flavor Results from STAR*”, talk by W. Xie at QM2012.
- [25] “*Heavy Flavor in PHENIX*”, talk by M. Rosati at QM2012.
- [26] “*PHENIX Low-mass Dileptons and Photons*”, talk by I. Tserruya at QM2012.

Baryon number probability distribution in the presence of the chiral phase transition

森田健司¹, V. Skokov², B. Friman³, K. Redlich⁴,
京大基研¹, BNL², GSI³, University of Wroclaw⁴

概要

保存チャージのゆらぎを確率分布の観点から議論する。特に、カイラル相転移がある場合の分布の形に着目し、確率分布関数が熱力学ポテンシャルの特異性と結びついていることを示す。

1 カイラル相転移とバリオン数ゆらぎ

RHIC や LHC における高エネルギー重イオン衝突において、バリオン数や荷電粒子数のゆらぎから相転移の兆候を探る試みがなされている。とくに、RHIC の衝突エネルギー走査実験では、有限バリオン数化学ポテンシャルにおける QCD 臨界点の発見が期待されているが、その測定量として高次のキュムラントが提案されており、高次に行けば行くほど、系の臨界性に敏感であることが期待されている [1, 2]。このような保存量の揺らぎは、格子 QCD や、NJL 模型などのカイラル有効模型では、

$$c_n(T, \mu) \equiv \frac{\partial^n [p(T, \mu)/T^4]}{\partial (\mu/T)^n}, \quad (1)$$

のように、圧力を化学ポテンシャルで複数回微分することで求められ、具体的な振る舞いが調べられている。とりわけ興味深いのは、物理的クォーク質量におけるクロスオーバー転移であっても、2 フレーバーのカイラル極限における 2 次相転移の振る舞いの名残がみられることであり、 $O(4)$ 対称性に基づく議論が可能になる。もし粒子数揺らぎが、フリーズアウト時点での温度と化学ポテンシャルにおける熱力学で決定されるとすれば、フリーズアウト温度と(擬)相転移温度が非常に近いことから、揺らぎから QCD 相転移を検証できる可能性がある [3, 4]。

実験で測定されるのは、その母関数となる確率分布関数 $P(N)$ であり、上記のキュムラントは、そのモーメントから求めることができる。2010 年に STAR グループによって正味の陽子数のゆらぎデータが報告されているが [5]、ハドロングスの結果 (Skellam 分布) から有意なずれがみられている [6]。本研究の目的は、この確率分布関数に対する相転移の影響を調べることである。

2 確率分布関数と相構造

大分配関数を \mathcal{Z} 、正準分配関数を Z で表すと、大正準集団における粒子数の確率分布は、

$$P(N; T, \mu, V) = \frac{Z(T, V, N)\lambda^N}{\mathcal{Z}(T, V, \mu)}, \quad (2)$$

で与えられる。右辺で粒子数について和をとると 1 になることからわかるとおり、 \mathcal{Z} は規格化の役割を果たしており、確率分布の振る舞いを決めるのは正準分配関数 Z である。相対論的な系の場合、対称性から $Z(N)$ は N の偶関数であるが、化学ポテンシャルが有限の値をもつときの振る舞いは、フガシティー因子 $\lambda^N = e^{\beta\mu N}$ で支配され、粒子数が大きい部分の分布を増幅し、分布関数 $P(N)$ に N 非対称性を与える。大分配関数が与えられている場合、正準分配関数はそのローラン展開の展開係数で与えられ、

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\lambda \frac{\mathcal{Z}(T, V, \lambda)}{\lambda^{N+1}}, \quad (3)$$

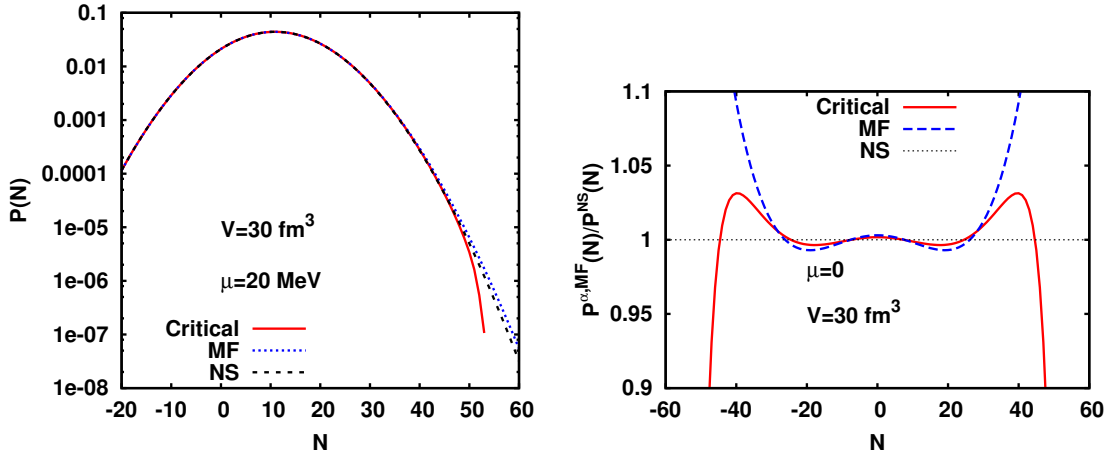


図 1: 左: $\mu = 20\text{MeV}$ での確率分布の比較。右: 非特異 (NS) な場合との比

となるが、 Z が特異性を持つ場合は、積分路 C のとり方に気をつける必要がある。しかし、複素 λ 平面の単位円上 $|\lambda| = 1$ に特異点がない場合は、

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\theta N} Z(T, V, \theta). \quad (4)$$

と虚数化学ポテンシャル $\theta = \mu_I/T$ に関する 1 周期の積分に帰着し、この表式は格子計算で用いられている。ここでは、揺らぎの相転移での特異性との関連をみるために、大分配関数を $Z = e^{-\beta\Omega}$ とし、熱力学ポテンシャル Ω が特異性を持つ模型で正準分配関数を計算する。

熱力学ポテンシャルを与えるモデルとして、以下のような秩序変数の 4 次までとったランダウ有効ポテンシャルを考える。

$$U(T, \mu; \sigma) = U_{\text{bg}} + \frac{1}{2}a(T, \mu)\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^4. \quad (5)$$

U_{bg} は非特異的な部分であり、虚数化学ポテンシャルについて周期的になるように $U_{\text{bg}} = 2d \cosh(\mu/T)$ と取る。この有効ポテンシャルの極小値は $\sigma^2 = 0$ と $\sigma^2 = -a(T, \mu)$ であり、 $a(T, \mu) = 0$ が臨界線を与える。この結果を (5) に代入すれば、熱力学ポテンシャルは $\Omega = -VT^4(U_{\text{bg}} - \frac{1}{4}a^2)$ となる。この表式は平均場近似に対応し、適当なスケール関数 $a(T, \mu)$ をとると、3 次以上の高次揺らぎは転移点では不連続となる。しかし、臨界揺らぎによって、熱力学ポテンシャルは $|a| \rightarrow 0$ では $\Omega \sim |a|^{2-\alpha}$ という振る舞いを持つことが知られており、比熱の臨界指数 α は 3 次元 $O(4)$ モデルでは -0.21 程度である。そこで、ここでは臨界指数を手で導入し、

$$\Omega_0 \equiv \Omega(T > T_c(\mu), \mu) = -VT^4 U_{\text{bg}}, \quad (6)$$

$$\Omega_1 \equiv \Omega(T \leq T_c(\mu), \mu) = -VT^4 \left[U_{\text{bg}} - \frac{1}{4}|a(T, \mu)|^{2-\alpha} \right]. \quad (7)$$

と取ることとする。このようにとると、3 次以上のキュムラントは有限化学ポテンシャル臨界線上で負の発散を持つ¹。最後にスケール関数は、同様に周期性を満たすように $a(T, \mu) = -\left[3 - \frac{T}{T_c} - 2 \cosh(\mu/T)\right]$ ととるが、 $\mu \ll T$ ではよく用いられる形 $a(T, \mu) = A(T - T_c) + B\mu^2$ ($A, B > 0$) に帰着し、キュムラントの振る舞いも変わらない。

詳細は論文 [7] に譲るが、この熱力学ポテンシャルを式 (4) に代入し、得られた確率分布関数の結果を図 2 に示す。温度は $\mu = 0$ での相転移温度 $T_c = 150\text{MeV}$ (フリーパラメータ) よりわずかに低めの $T/T_c = 0.98$ とした。“NS” は Ω_0 を代入した場合、“MF” は $\alpha = 0$ とした場合、“Critical” は $\alpha = -0.21$ とした場合に対応する。“NS” と “MF” は解析的に求めることができ、“Critical” は数値積分によって求めた。図 2 の左では、 N が大きい部分での違いが明確になるように $\mu = 20 \text{ MeV}$ としているが、確率が急激に減少していることが見て取

¹ ゼロ化学ポテンシャルでは 6 次以降に発散が現れる

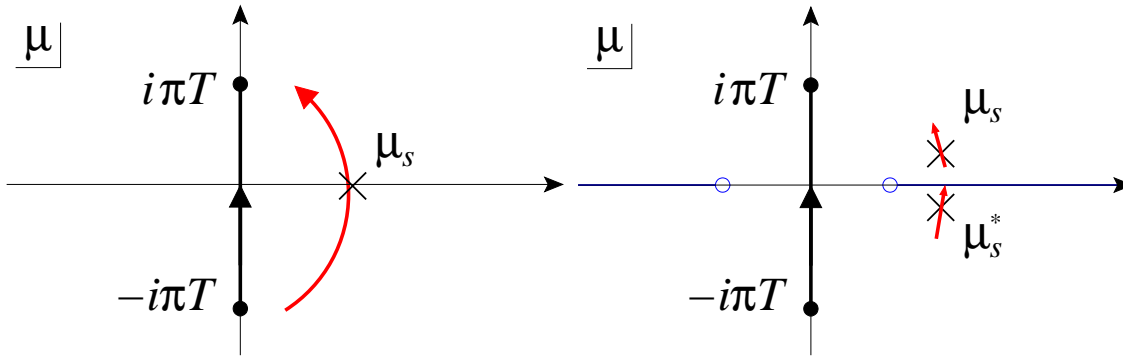


図 2: 複素 μ 平面における熱力学ポテンシャルの分岐点 (青丸) と鞍点 μ_s (\times 印)。左: NS および MF。右: Critical かつ $N > N_c$ の場合。黒の実線は元の積分路 [式 (4)] を示し、赤で書かれた矢印は鞍点法における最速降下曲線を示す。

れる。さらに、図 2 右では非特異な場合のとの比を取っているが、分布のピーク $N = 0$ 付近での定性的傾向は平均場近似と臨界揺らぎがある場合であまり差がないのに対して、 $N = 30$ 付近から傾向の違いが明白になる。

このような分布関数の変化を引き起こしているものを同定するために、解析的なアプローチを考えよう。体積 V が大きい極限で式 (3) に鞍点法を適用する。ここで注意が必要なのは、 α が -0.21 という値を持つことに寄って、複素 λ 平面に分岐点とそこからのびる分枝が存在する。このような構造はカイラル模型一般に見られる [8]。鞍点は

$$f(\mu) = 2d \cosh(\mu/T) + \frac{1}{4} |a(T, \mu)|^{2-\alpha} - \frac{N\mu}{VT^4}. \quad (8)$$

とした場合、 $f'(\mu_s) = 0$ で定義される。 λ 平面から μ 平面に書きなおした場合、分枝の位置と鞍点の位置の関係は図 2 に示したとおりになる。まず、“NS” の場合と“MF” では分岐点が存在せず²、鞍点は実軸上に存在する。しかし、分岐点が存在する場合、鞍点は分枝のすぐ上と、その複素共役の 2 つになり、積分はその和で与えられるので、

$$Z(T, V, N) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi VT^5 |f''(\mu_s)|}} e^{VT^3 \text{Re}[f(\mu_s)]} \cos(VT^3 \text{Im}[f(\mu_s)]). \quad (9)$$

と \cos 項が現れる。この項は図 2 で見られるような振る舞いを与えるが、最速降下曲線は分枝に向かっているため、積分の寄与は鞍点だけでは書けない可能性があり、実際 (9) の結果は数値積分の結果とは定量的に一致しない。しかし、定性的傾向は、この鞍点の存在から説明できる。実際、数値計算の結果、確率分布が負になる領域が現れ、これは熱力学極限を取った熱力学ポテンシャルを出発点にしていることによる artifact であるが、この振る舞いも上記漸近形で説明できる。

3 確率分布関数から求めたキュムラント

確率分布関数が与えられれば、モーメント $\langle N^n \rangle = \sum_N N^n P(N)$ と中心モーメント $\delta N = N - \langle N \rangle$ を用いて、4 次までのキュムラントを以下のように表すことができる。

$$c_2(T, \mu) = \frac{1}{VT^3} \langle (\delta N)^2 \rangle \quad (10)$$

$$c_3(T, \mu) = \frac{1}{VT^3} \langle (\delta N)^3 \rangle \quad (11)$$

$$c_4(T, \mu) = \frac{1}{VT^3} [\langle (\delta N)^4 \rangle - 3\langle (\delta N)^2 \rangle^2] \quad (12)$$

特に、3 次・4 次のキュムラントは $\alpha < 0$ の場合 2 次相転移点では発散する。前節で求めた確率分布関数からキュムラントを計算し、式 (1) から計算したキュムラントと比較したものが図 3 である。ここで、式 (4) の振

²一般には平均場近似のもとでも分岐点と分枝は存在しうる

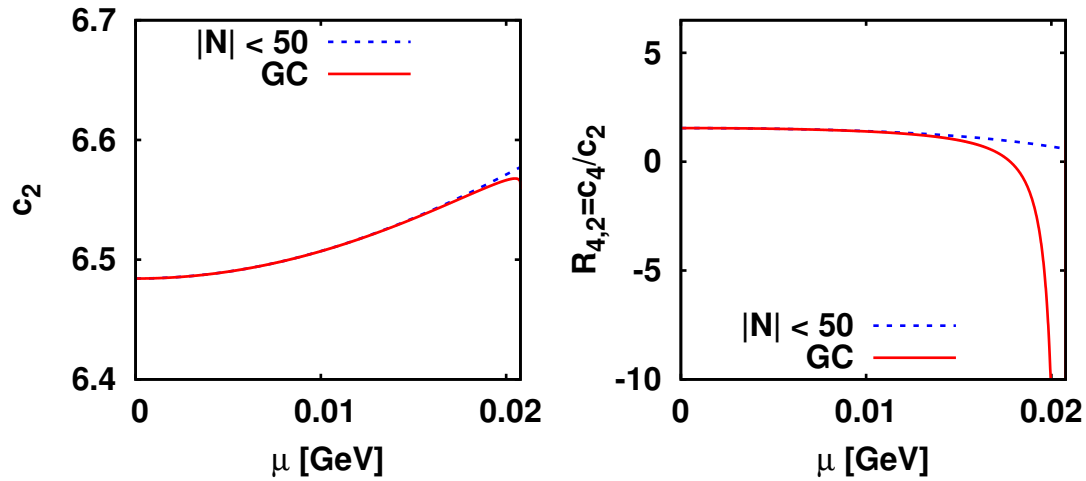


図 3: 2 次のキュムラント (左) と 4 次と 2 次の比 (右)。赤 (実線) は式 (1) から計算した熱力学極限、青 (点線) は確率分布関数から構成したもの

動積分は $V = 30\text{fm}^3$ では $|N| > 60$ で収束が得られなかったため、キュムラントの計算には数値的に確定した部分だけを用いている。図に見られるように、2 次のキュムラントはほぼ両者の一致が見られるが、4 次と 2 次の比では、臨界線上での発散する振る舞いは再現できておらず、より大きな体積の極限と、同時により大きな N での確率分布関数が必要であることを示唆している。

本研究では、ランダウ理論をベースに熱力学ポテンシャルから得られる保存チャージの確率分布関数を議論し、正準分配関数と解析性の関係に焦点を当てた。より現実に即した解析を行うには、臨界指数 α を与えられるような枠組みでの計算が必須であり、また体積の変化に対する系統的な解析を通じて、確率分布関数から得られるキュムラントの振る舞いを調べてなくてはならない。現在クォークメソン模型と汎関数繰り込み群による解析を進めている。

本研究は京都大学クォーク・ハドロン科学国際共同研究プログラム (YIPQS) の補助を受けています。

参考文献

- [1] M. Stephanov, K. Rajagopal, E. Shuryak, Phys. Rev. D **60** (1999) 114028.
- [2] M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 032301.
- [3] F. Karsch, K. Redlich, Phys. Lett. B **695** (2011) 136.
- [4] B. Friman, F. Karsch, K. Redlich, V. Skokov, Eur. Phys. J. C **71** (2011) 1694.
- [5] M. M. Aggarwal, et al., Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 022302.
- [6] P. Braun-Munzinger, B. Friman, F. Karsch, K. Redlich, V. Skokov, Nucl. Phys. **A880** (2012) 48.
- [7] K. Morita, V. Skokov, B. Friman, K. Redlich, in preparation.
- [8] V. Skokov, K. Morita, B. Friman, Phys. Rev. D **83** (2011) 071502(R).

Equilibration of Scaler Fields in an Expanding System

Akihiro Nishiyama¹ and Yoshitaka Hatta²

¹*Maskawa Institute for Science and Culture, Kyoto Sangyo University, Kyoto 603-8555, Japan,*

²*Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan*

September 28, 2012

Abstract

We present numerical analyses of nonequilibrium field theoretical approach of $O(N)$ scaler model with longitudinal expansion in 2+1 dimensions. We include Next-to-Leading Order of $1/N$ expansion as self energy in the presence of background classical field. We compare quantum dynamics and classical statistical approximation. Then we see the difference of two approaches in final distribution functions in strongly coupled regimes, where Boltzmann tail of distribution function is given only in quantum dynamics.

1 Introduction

Recently experiments have been done to create and study Quark-Gluon Plasma (QGP) by colliding two nuclei at center-of-energy 200GeV at RHIC and 2.76TeV at LHC. For produced QGP nearly ideal hydrodynamics succeeds in describing dynamics after thermalization of Glasma, for which initial condition is given by classical longitudinal color electric and magnetic fields with vacuum quantum fluctuations. Its success is based on early thermalization of Glasma $t_{\text{eq}} = 0.6\text{-}1.0\text{fm}/c$ [1]. This time scale is comparable with the formation time of partons [2]. Then normal parton picture might fail to describe thermalization of Glasma, where parton picture estimates 2-3 fm/c[3]. Hence it is necessary to adopt dynamics beyond parton picture. Furthermore other instability or classical statistical approaches do not describe late-time Bose-Einstein distribution. Thus we should adopt approaches which describe late time true thermalization. As a candidate of approaches that are beyond the parton picture and describe late time Bose-Einstein distribution, we adopt nonequilibrium quantum field theoretical approach, which is represented by Kadanoff-Baym(KB) equation [4] with equation of motion of classical fields.

One of the merits of solving these equation is that field-particle conversion occurs. If particles are produced from classical fields, they collide each other, so that late time Bose-Einstein distribution is realized. The other merit is presence of the spectral function with finite decay width, which induces rapid change of distribution function due to 2-to-2 collisions compared with semi-classical Boltzmann equation. They might play a significant role in describing early thermalization of gluons [5].

Section 2 is devoted to introduction of time evolution equation for classical fields and quantum fluctuations. In Sec. 3 we give numerical results. We summarize our work in Sec. 4.

2 Time evolution equation

In this section we write down KB equation and time evolution equation of classical fields. First we start with action of scalar $O(N)$ model,

$$S = \int d^{d+1}x \left[\frac{1}{2} \partial \phi_a \partial \phi_a - \frac{1}{2} m^2 \phi_a \phi_a - \frac{\lambda}{24N} (\phi_a \phi_a)^2 \right], \quad (1)$$

where particle components a runs over $1, \dots, N$ and d represents the spatial dimension. The merit of adopting this model is to cover all time evolution of instability by use of $1/N$ expansion. Then the equations of motion of classical fields $\bar{\phi}_a \equiv \langle \phi_a \rangle = \bar{\phi} \delta_{a1}$ and quantum fluctuations $F_{ab}(x, y) \equiv \frac{1}{2} \langle \{\tilde{\phi}_a(x), \tilde{\phi}_b(y)\} \rangle$ $\rho_{ab}(x, y) \equiv \langle [\tilde{\phi}_a(x), \tilde{\phi}_b(y)] \rangle$ (that are Fourier transformed), where $\tilde{\phi}_a = \phi_a - \bar{\phi}_a$, are given by

$$\left[\partial_\tau^2 + \frac{1}{\tau} \partial_\tau + m^2 + \frac{\lambda}{6N} \left(\bar{\phi}(\tau)^2 + F_{11}(\tau, \tau) + \sum_{b \neq 1} F_{bb}(\tau, \tau) \right) \right] \bar{\phi}(\tau) = - \int_{\tau_0}^{\tau} \tau' d\tau' \Sigma_{11}^\rho(\tau, \tau') \bar{\phi}(\tau'), \quad (2)$$

$$G_0^{-1} F(\tau, \tau', p) = - \int_{\tau_0}^{\tau} \tau'' d\tau'' \Sigma^\rho(\tau, \tau'', p) F(\tau, \tau', p) + \int_{\tau_0}^{\tau'} \tau'' d\tau'' \Sigma^F(\tau, \tau'', p) \rho(\tau'', \tau', p), \quad (3)$$

$$G_0^{-1} \rho(\tau, \tau', p) = - \int_{\tau'}^{\tau} \tau'' d\tau'' \Sigma^\rho(\tau, \tau'', p) \rho(\tau, \tau', p), \quad (4)$$

$$G_0^{-1} \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p_\eta^2}{\tau^2} + p_T^2 \right] \delta_{ab} + M_{ab}^2(\bar{\phi})$$

Here we adopt proper time $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$, rapidity $\eta = \tanh^{-1} \frac{z}{t}$ and its Fourier transformed p_η to treat longitudinal expansion (we adopt spatial homogeneity) and set initial time τ_0 , local mass shift $M_{ab}(\bar{\phi})$ and Next-to-Leading Order self-energy $\Sigma^{F,\rho}$ of $1/N$ expansion which contains 2-to-2 collisions non-perturbatively.

As an initial condition, we set $\bar{\phi}_a(\tau_0) = \sqrt{\frac{6N}{\lambda}} \sigma \delta_{a1}$ with vacuum quantum fluctuations for F and ρ . Numerical simulations are done in 2+1 dimensions for strongly coupled $\lambda = 10$ regimes in an expanding system. Then we compare quantum dynamics and classical statistical approximation which omit $\rho\rho$ terms in self-energy [5, 6, 7].

3 Numerical analyses in 2+1 dimension

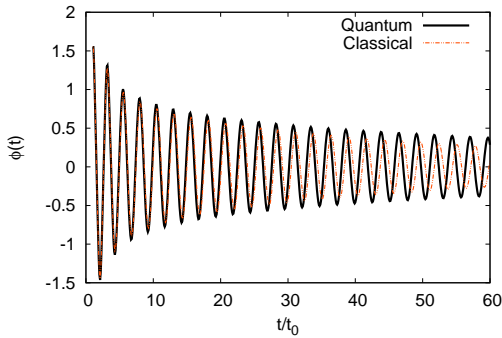


Figure 1: Time evolution of the classical field $\bar{\phi}$ for quantum (black solid line) and classical statistical approximation (red dashed line).

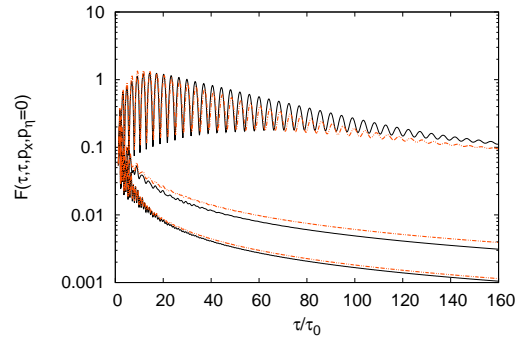


Figure 2: Time evolution of $F_{11}(\tau, \tau, p_\eta = 0, p_T = 0, \pi\sigma/8, \pi\sigma/4)$ for quantum (black solid line) and classical statistical approximation (red dashed line).

In this section we show time evolution of classical field $\bar{\phi}(\tau)$ (Fig. 1) and statistical functions $F_{11}(\tau, \tau, p)$ (Fig. 2). In Fig.1 classical fields damps (due to $\frac{\partial \tau}{\tau} \bar{\phi}$ term in Eq. (2)) with oscillation.

Then field particle conversion occurs, which means that particle production occurs due to decay of classical fields. Time evolution of F in Fig.2 shows this particle production, where F changes from $O(1)$ to $O(1/\lambda)$. Finally we present the distribution function n_p (Fig. 3) by use of functional fit $F = \frac{C}{\tau\sqrt{m_{\text{eff}}^2 + p_T^2}} (n_p + \frac{1}{2})$ where C and m_{eff} are fitting parameter. In quantum dynamics the distribution function is Bose-Einstein type and shows Boltzmann tail ($n_p = \frac{1}{e^{p_T/T} - 1}$ with temperature T), while it gives power law $n_p = \frac{T}{p_T} - \frac{1}{2}$ in classical statistical approximation. In classical approach true thermalization is not realized.

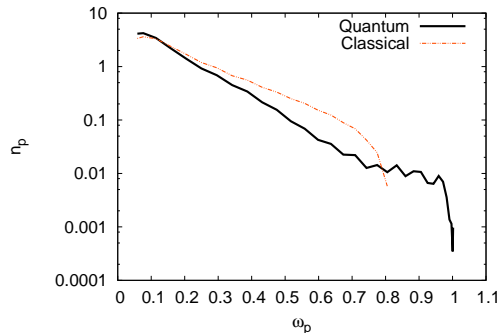


Figure 3: Number distribution function n_p at late time $\tau/\tau_0 = 150$.

4 Summary

In this work we have solved the Kadanoff-Baym equation and time evolution equation of classical fields for $O(N)$ scalar model in a spatially homogeneous expanding system in 2+1 dimensions. We have included NLO nonlocal self-energy representing 2-to-2 by use of $1/N$ expansion which covers all time evolution of instability of F from $O(1)$ to $O(1/\lambda)$. In strongly coupled regimes $\lambda = 10$, while quantum dynamics shows Bose-Einstein distribution, classical statistical approximation gives power law behavior in distribution function, which is not true thermalization. Thus we need quantum dynamics in order to realize the Bose-Einstein distribution.

References

- [1] U. W. Heinz and P. F. Kolb, Nucl. Phys. **A702** (2002), 269; U. W. Heinz, AIP Conf. Proc. **739** (2005), 163.
- [2] B. Muller and A. Schafer, Phys. Rev. C **73** (2006) 054905 [arXiv:hep-ph/0512100].
- [3] R. Baier, A. H. Mueller, D. Schiff and D. T. Son, Phys. Lett. B **502** (2001) 51 [arXiv:hep-ph/0009237].
- [4] L.P. Kadanoff and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics* (Benjamin, New York, 1962); G. Baym, Phys. Rev. **127** (1962) 1391.
- [5] Y. Hatta and A. Nishiyama, Phys. Rev. D in press.
- [6] J. Berges, S. Scheffler and D. Sexty, Phys. Rev. D **77**, 034504 (2008) [arXiv:0712.3514 [hep-ph]].
- [7] T. Epelbaum and F. Gelis, Nucl. Phys. A **872**, 210 (2011) [arXiv:1107.0668 [hep-ph]].

有限温度摂動論

日高 義将 (理研)

概要

本講演の中から特に非相対論的な系での南部-Goldstone の定理について議論する．非相対論的な系で自発的対称性の破れが起きた時，南部-Goldstone ボソンがいくつ現れるかという問題は 2012 年まで未解決の問題だった．本稿では森の射影演算子法を用いて非相対論的な系での南部-Goldstone の数え方のルールを導出する．

1 導入

対称性とその自発的破れは，多体系の物理の重要で基本的な概念である．連続対称性が自発的に破れた場合には，南部-Goldstone (NG) モードと呼ばれるゼロモードが現れることが知られている [1, 2, 3]．例えば，ハドロ物理における中間子，強磁性体におけるスピン波，格子結晶中のフォノンがそれにあたる．しかしながら自発的対称性が破れた場合にいくつ NG モードが現れるかという問いは Lorentz 対称性がない場合には最近まで未解決問題だった [4]．Lorentz 対称性が存在する場合は 60 年代に破れた対称性の数が NG モードの数に一致し，その分散関係は線形となることが示された [1, 2, 3]．一方，Lorentz 対称性がない場合は，NG モードの数は必ずしも破れた対称性の数に一致せず，分散関係は非線形になっても良い．70 年代に Nielsen と Chadha (NC)[5] はエネルギーが運動量の奇数べきのものを type-I NG モード，偶数べきのものを type-II NG モードと分類した．また，彼らは type-I NG モードの数の 2 倍と type-II NG モードの数を足したものは，破れた対称性の数以上になるという不等式を導いた．強磁性体や Kon 凝縮相のように type-II NG モードが現れる知られている例ではすべて等号が成り立っている [6, 7]．90 年代に入ると電荷密度 Q_a が期待値を持つ場合に type-II の分散関係を持つ NG モードが現れることが有効理論を用いて Leutwyler によって明らかになり [8]，さらに 2000 年代に入り Schafer 等によって電荷密度の期待値そのものより $[Q_a, Q_b]$ の期待値が重要な役割を担い， $[Q_a, Q_b]$ の期待値が消える場合には NG mode の数は破れた対称性の数に等しいことが示された [7]．2011 年にこの定理は，渡辺-Brauner によって以下の不等式に拡張された [9, 10]:

$$N_{BS} - N_{NG} \leq \frac{1}{2} \text{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle. \quad (1)$$

また，彼らはこの不等式は常に等式が成り立つことを予想した．

本稿では，(1) 式の等号が成り立つ事を示す．また Nielsen-Chadha とは異なる type-I と type-II NG の定義を $\langle [Q_a, Q_b] \rangle$ を用いて与える．Type-II NG モードの数は $\text{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle / 2$ に等しく NC 不等式の等式が成り立つことも示す [11]．ゼロ温度の場合には低エネルギーの有効理論を用いた方法でも同じ結果が得られている [12]．

この目的のために，我々は森の射影演算子法 [13] を非相対論的な系に適用する．この方法で NG モードについての Hamilton (有限温度の場合は Lagevin) 方程式が導出される．ハミルトニアン形式の NG モードについては模型を用いて [14] で議論されている．我々は同様の議論を模型によらず非摂動的な方法で行なう．

以下では，並進対称性が自発的に破れていない場合を考える．また自発的に破れた対称性の保存電荷密度が

$$n_a(t, \mathbf{x}) = e^{-iP \cdot x} n_a(0, \mathbf{0}) e^{iP \cdot x} \quad (2)$$

と書ける場合に問題を限る．ここで P_μ は時空間の並進の演算子を表す．

2 森の射影演算子法

ここで森の射影演算子法を簡単に紹介する [13] . この方法は低エネルギー励起を議論する上で強力であつ、非相対論的な場合の南部-Goldstone の定理を証明するのに重要な役割を担う . 詳細な導出は [15, 16, 17, 18] を参照せよ .

まず、遅いモードに対応した演算子の組み $\{A_n(t, \mathbf{x})\}$ を考えよう . これは後で NG 場と破れた保存電荷密度に取る . ある演算子 \mathcal{O} の熱平均を $\langle \mathcal{O} \rangle \equiv \text{tr} \rho_{\text{eq}} \mathcal{O}$ と定義する . ここで ρ_{eq} はカノニカルアンサンブルの密度演算子で

$$\rho_{\text{eq}} \equiv \frac{e^{-\beta H}}{\text{tr} e^{-\beta H}} \quad (3)$$

である . H はハミルトニアン , $\beta = 1/T$ は逆温度である . グランドカノニカルアンサンブルを考えたい場合は , 化学ポテンシャル μ 及び保存電荷 N を導入し , H を $H - \mu N$ に置き換えればよい .

次に内積を導入しよう . ある演算子 \mathcal{O}_1 と \mathcal{O}_2 に対し ,

$$(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \equiv \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau \langle e^{\tau H} \mathcal{O}_1 e^{-\tau H} \mathcal{O}_2^\dagger \rangle \quad (4)$$

と定義する . これは内積の性質 , 正定値性 $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_1) \geq 0$ と Hermite 対称性 $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = (\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)^*$ を満たす . この内積を使って以下の計量を定義しよう :

$$g_{nm}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv (A_n(0, \mathbf{x}), A_m(0, \mathbf{y})) . \quad (5)$$

また $g_{nm}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ の逆 $g^{ml}(\mathbf{y} - \mathbf{z})$ を

$$\int d^3 y g_{nm}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g^{ml}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \delta_n^l \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \quad (6)$$

を満たすように定義する . ここで同じ添字が上付きと下付きに現れた場合に和を取る規則を用いた . 上付きの演算子を

$$A^n(t, \mathbf{x}) \equiv \int d^3 y g^{nm}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) A_m(t, \mathbf{y}) \quad (7)$$

と定義する . $g_{nm}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ は A_n の 2 点関数の形で表されており , また $g^{ml}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ は有効作用 $\beta \Gamma(A_n)$ の A_n に関する 2 階汎関数微分になる :

$$g^{ml}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\delta^2 \beta \Gamma(A_n)}{\delta A_l(\mathbf{y}) \delta A_m^\dagger(\mathbf{x})} . \quad (8)$$

ここで有効作用は生成母関数 $W(J^n)$ の Legendre 変換で与えられる :

$$\Gamma(A_n) = W(J^n) - \int d^3 x J^m(\mathbf{x}) \frac{\delta W(J^n)}{\delta J^m(\mathbf{x})} , \quad (9)$$

及び ,

$$e^{-\beta W(J^n)} = \text{tr} \exp \left[-\beta H + \int d^3 x A_n(0, \mathbf{x}) J^n(\mathbf{x}) \right] . \quad (10)$$

ここで自由度を遅い変数とその他に分解するために , 射影演算子 P を導入する . これは演算子 B に作用すると

$$PB(t, \mathbf{x}) \equiv \int d^3 y A_n(0, \mathbf{x}) (B(t, \mathbf{y}), A^n(0, \mathbf{x})) \quad (11)$$

となるように定義する．便利のため $Q \equiv 1 - P$ も定義しておく．これらは射影演算子の性質 $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, 及び $QP = PQ = 0$ を満たす．

紙面の都合上導出は参考文献 [13, 15, 16, 17, 18] にゆずり, 森の射影演算子法による遅い変数に対する拡張された Langevin 方程式を以下に与える [13]:

$$\begin{aligned} \partial_t A_n(t, \mathbf{x}) = & \int d^3 y i\Omega_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{y}) A_m(t, \mathbf{y}) \\ & - \int_0^\infty ds \int d^3 y K_n^m(t - s, \mathbf{x} - \mathbf{y}) A_m(s, \mathbf{y}) + R_n(t, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $i\Omega_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ は可逆な項, $K_n^m(t - s, \mathbf{x} - \mathbf{y})$ は記憶関数, $R_n(t, \mathbf{x})$ はノイズ項を表し, 以下のように定義される:

$$i\Omega_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv (i\mathcal{L}A_n(0, \mathbf{x}), A^m(0, \mathbf{y})) = -\frac{i}{\beta} \langle [A_n(0, \mathbf{x}), A^{m\dagger}(0, \mathbf{y})] \rangle, \quad (13)$$

$$K_n^m(t - s, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv -\theta(t - s)(i\mathcal{L}R_n(t, \mathbf{x}), A^m(s, \mathbf{y})), \quad (14)$$

$$R_n(t, \mathbf{x}) \equiv e^{itQ\mathcal{L}} Q i\mathcal{L}A_n(0, \mathbf{x}). \quad (15)$$

ここで \mathcal{L} は Liouville 演算子 $\mathcal{L}\mathcal{O} \equiv [H, \mathcal{O}]$, $\theta(t)$ は階段関数である．この方程式は演算子に関する恒等式である．つまり (12) 式は Liouville 方程式 $\partial_t A_n = i\mathcal{L}A_n$ に等価である．また, ノイズ項は $A_m(0, \mathbf{x})$ に $(A_m(0, \mathbf{x}), R_n(t, \mathbf{y})) = 0$ となるように構成されている．この性質は $(A_n(t, \mathbf{x}), A_m(0, \mathbf{y}))$ のような 2 点関数を考える場合には, ノイズの項を落として良いことを意味する．従って A_n の分散関係を求める際には, $i\Omega_n^m(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ と $K_n^m(t, \mathbf{x} - \mathbf{y})$ の性質が分かれば良い．運動量空間でこの方程式は, 行列の記法を用いて

$$\partial_t A(t, \mathbf{k}) = i\Omega(\mathbf{k})A(t, \mathbf{k}) - \int ds K(t - s, \mathbf{k})A(s, \mathbf{k}) + R(t, \mathbf{k}) \quad (16)$$

と書くことができる．この方程式が我々の解析の出発点となる．

3 南部-Goldstone の定理

有効作用に対する南部-Goldstone の定理から始めよう [3]．まず保存電荷

$$Q_a = \int d^3 x n_a(t, \mathbf{x}) \quad (17)$$

の組みを考える．これらはハミルトニアンと可換である: $[Q_a, H] = 0$ ．対称性が自発的に破れた時,

$$-i\langle [Q_a, \phi_i(t, \mathbf{x})] \rangle \equiv [M_{n\phi}]_{ai} \quad (18)$$

でかつ $\det M_{n\phi} \neq 0$ を満たすある行列 $M_{n\phi}$ が存在する．ここで i と a は 1 から破れた対称性の数 N_{BS} まで走るものとする．また, この節では $\phi_i(x)$ は保存電荷密度ではないと仮定する．また一般性を失うことなく ϕ_i を実にするものとする．

ここで, $A_n = (\Phi_i, N_a)$ として有効ポテンシャル $\mathcal{V}(\Phi_i, N_a) \equiv \Gamma(A_n)/V$ を考よう．ここで V は空間の次元, Φ_i は NG 場を含む場の組み, N_a は破れた保存電荷を含む組みとする．NG 場を ϕ_i , その他を φ_j として $\Phi = (\phi_i, \varphi_j)$ と書く．同様に, 自発的に破れた保存電荷密度を n_a , その他を n'_b として $N = (n_a, n'_b)$ と書く．

有効作用は，以下の無限小変換に対して不変である：

$$\delta\Phi_i = -i\epsilon^a \langle [Q_a, \Phi_i] \rangle \equiv \epsilon^a [M_{N\Phi}]_{ai}, \quad (19)$$

$$\delta N_b = -i\epsilon^a \langle [Q_a, N_b] \rangle \equiv \epsilon^a [M_{NN}]_{ab}. \quad (20)$$

つまり，

$$[M_{N\Phi}]_{ai} \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta\Phi_i} + [M_{NN}]_{ac} \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta N_c} = 0 \quad (21)$$

が成り立つ．これは有効作用の恒等式である．もし Φ_i と N_a が Lie 群の線形表現に属しているならこれらは $[M_{N\Phi}]_{ai} = -i[T_a\Phi]_i$ 及び $[M_{NN}]_{ac} = f_{ab}{}^c N_c$ となる．ここで， T_a と $f_{ab}{}^c$ はそれぞれ生成子と構造定数である．(21) 式を Φ_i または N_a に関して汎関数微分すると

$$\frac{\delta[M_{N\Phi}]_{ai}}{\delta\Phi_j} \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta\Phi_i} + [M_{N\Phi}]_{ai} \frac{\delta^2\mathcal{V}}{\delta\Phi_i\delta\Phi_j} + [M_{NN}]_{ac} \frac{\delta^2\mathcal{V}}{\delta N_c\delta\Phi_j} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\delta[M_{NN}]_{ac}}{\delta N_b} \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta N_c} + [M_{N\Phi}]_{ai} \frac{\delta^2\mathcal{V}}{\delta\Phi_i\delta N_b} + [M_{NN}]_{ac} \frac{\delta^2\mathcal{V}}{\delta N_c\delta N_b} = 0 \quad (23)$$

が得られる．停留点で (22) と (23) 式の第一項は落ちて NG 場と破れた保存電荷に関する項のみが残る．この時 (22) と (23) 式は行列表記を用いて

$$M_{n\phi}\mathcal{V}^{\phi\phi} + M_{nn}\mathcal{V}^{n\phi} = 0, \quad (24)$$

$$M_{n\phi}\mathcal{V}^{\phi n} + M_{nn}\mathcal{V}^{nn} = 0 \quad (25)$$

となる．ここで $\alpha, \beta = (\phi_i, n_a)$ として $\mathcal{V}^{\alpha\beta} \equiv \delta^2\mathcal{V}/(\delta\alpha\delta\beta)$ という表記を用いた．従って $(\phi_i^{(b)}, n_a^{(b)}) = ([M_{\phi n}]_{ib}, [M_{nn}]_{ab})$ は $\mathcal{V}^{\alpha\beta}$ のゼロ固有値を持つ固有ベクトルと見ることが出来る．この独立な固有ベクトルの数は破れた対称性の数に等しい．Lorentz 対称性がある場合は，Lorentz スカラーでない M_{nn} は消え， $k_\mu = 0$ での伝播関数の逆 $\mathcal{V}^{\phi\phi}$ は (24) 式より消える．これは $k^2 = 0$ に極を持つことを意味する．この NG モードの数は独立な固有ベクトルの数，つまり破れた対称性の数に等しい．また分散関係は Lorentz 対称性から線形 $\omega = |k|$ となる．これが Lorentz 不変性がある場合の NG モードの定理である．しかしながら Lorentz 不変でない場合は，NG モードの数と破れた対称性の数は必ずしも一致しない．NG モードの数え方の一般的なルールを導出するために，一般化された Langevin 方程式 [(12) 式] の演算子を $A_n(x) = (\tilde{\phi}_i(x), \tilde{n}_a(x))$ に選ぼう．ここで $\tilde{\phi}_i(x) \equiv \phi_i(x) - \langle \phi_i(x) \rangle$ および $\tilde{n}_a(x) \equiv n_a(x) - \langle n_a(x) \rangle$ である．ここで系に他のゼロモードは存在しないものとする．もしそうでない場合は，そのモードに対応した演算子を遅い変数として A_n に加える必要がある．

さて，ここで記憶関数のラプラス変換 $K(z, k)$ を考えよう．今低エネルギー励起に興味があるので， $z \rightarrow 0$ と $k \rightarrow 0$ の極限を考える．保存則から $\mathcal{L}\tilde{n}^a(z, k) = -k \cdot j^a(z, k)$ なので $K_{nm}(z, k) \sim k^2$ ， $K_{n\phi}(z, k) \sim k$ となり $k = 0$ で消える．ここで， $j^a(z, k)$ は流れの演算子である．唯一， $K_{\phi\phi}(z, k)$ が $k = 0$ で生き残る可能性がある． $K_{\phi\phi}(z, 0)$ はテーラー展開可能であると仮定して

$$\beta K_{\phi\phi}(z, 0) = \delta M_{\phi\phi} + L_{\phi\phi} + z\delta Z_{\phi\phi} + \mathcal{O}(z^2) \quad (26)$$

と展開できる¹．右辺の第一項 $\delta M_{\phi\phi}$ は $M_{\phi\phi}$ の補正を与える項である．第 2 項 $L_{\phi\phi}$ は散逸を記述する項で Onsager 係数または輸送係数と呼ばれる量である．これらは

¹臨界点， A_n 以外にゼロモードが存在する場合や低次元系ではテーラー展開できない事がある．

実で, $\delta M_{\phi\phi}^T = -\delta M_{\phi\phi}$ 及び $L_{\phi\phi}^T = L_{\phi\phi}$ を満たす. $L_{\phi\phi}$ はスペクトル関数のゼロ運動量での値に関係しゼロ温度では通常消える量である. $M_{\phi\phi}(\mathbf{k})$ と $K_{\phi\phi}(z, \mathbf{k})$ は $M_{\phi\phi}(\mathbf{k}) - K_{\phi\phi}(z, \mathbf{k})$ の形で方程式に現れるので, $\delta M_{\phi\phi}$ は $M_{\phi\phi} \rightarrow M_{\phi\phi} - \delta M_{\phi\phi}$ として繰り込むことによって $K_{\phi\phi}(z, \mathbf{k})$ から消去することができる. 第三項目 $\delta Z_{\phi\phi}$ は波動関数の補正を表す. 以下では, $\delta Z_{\phi\phi}$ を落として計算する. これは後で正当化する. また, $L_{\phi\phi} = 0$ となるゼロ温度の場合を考える. この時, 運動方程式は

$$\partial_0 \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(t, \mathbf{k}) \\ \tilde{n}(t, \mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\Omega_\phi^\phi(\mathbf{k}) & i\Omega_\phi^n(\mathbf{k}) \\ i\Omega_n^\phi(\mathbf{k}) & i\Omega_n^n(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(t, \mathbf{k}) \\ \tilde{n}(t, \mathbf{k}) \end{pmatrix} \quad (27)$$

となる. ここで,

$$i\Omega_\phi^\phi(\mathbf{k}) \equiv M_{\phi\phi}(\mathbf{k})\Gamma^{\phi\phi}(\mathbf{k}) + M_{\phi n}(\mathbf{k})\Gamma^{n\phi}(\mathbf{k}), \quad (28)$$

$$i\Omega_\phi^n(\mathbf{k}) \equiv M_{\phi\phi}(\mathbf{k})\Gamma^{\phi n}(\mathbf{k}) + M_{\phi n}(\mathbf{k})\Gamma^{nn}(\mathbf{k}), \quad (29)$$

$$i\Omega_n^\phi(\mathbf{k}) \equiv M_{n\phi}(\mathbf{k})\Gamma^{\phi\phi}(\mathbf{k}) + M_{nn}(\mathbf{k})\Gamma^{n\phi}(\mathbf{k}), \quad (30)$$

$$i\Omega_n^n(\mathbf{k}) \equiv M_{n\phi}(\mathbf{k})\Gamma^{\phi n}(\mathbf{k}) + M_{nn}(\mathbf{k})\Gamma^{nn}(\mathbf{k}) \quad (31)$$

とした. $M_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ と $\Gamma^{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ は $-i\langle[\alpha(0, \mathbf{x}), \beta(0, \mathbf{0})]\rangle$ と $\delta^2\Gamma/(\delta\alpha(\mathbf{x})\delta\beta(\mathbf{0}))$ の Fourier 変換したもので, $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ でそれぞれ $M_{\alpha\beta}$ と $\mathcal{V}^{\alpha\beta}$ に一致する. (27) 式は Hamilton 方程式の形をしており, $M_{\alpha\beta}$ は α と β の Poisson 括弧, Γ の場の 2 次の項はハミルトニアンとみなすことができる. $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ で, $i\Omega_n^\phi(\mathbf{0})$ と $i\Omega_n^n(\mathbf{0})$ は (24) と (25) 式から消える. これは電荷保存則 $dQ_a/dt = 0$ と等価である. また, (24) と (25) 式より

$$i\Omega_n^n(\mathbf{0}) = F^{-1} \equiv (M_{\phi n} - M_{\phi\phi}(M_{n\phi})^{-1}M_{nn})\mathcal{V}^{nn}, \quad (32)$$

$$i\Omega_\phi^\phi(\mathbf{0}) = -F^{-1}G \quad (33)$$

を得る. ここで $G = M_{nn}M_{\phi n}^{-1}$, F は場のくりこみ定数を除いて NG モードの崩壊定数 (行列) とみなせる. 最終的に運動方程式は $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ で,

$$\partial_0 \tilde{\phi}(t, \mathbf{0}) = -F^{-1}G\tilde{\phi}(t, \mathbf{0}) + F^{-1}\tilde{n}(t, \mathbf{0}), \quad (34)$$

$$\partial_0 \tilde{n}(t, \mathbf{0}) = 0 \quad (35)$$

となる. (34) 式に ∂_0 を作用させることで

$$\partial_0^2 \tilde{\phi}(t, \mathbf{0}) = -F^{-1}G\partial_0 \tilde{\phi}(t, \mathbf{0}) \quad (36)$$

を得る. もし $\det F^{-1} = 0$ なら, 保存電荷 (34) 式と結合しない NG 場が存在することになる. そのようなモードは偶発的で NG モードとみなすことはできない. 従って $\det F^{-1} = 0$ の場合は以下では考えない事とする. $F^{-1}G$ の固有値は M_{nn} の反対称性から純虚数のペア $\pm i\lambda_n$ (λ_n は実) を持つ. このペアの数 $\text{rank}(F^{-1}G)/2 = \text{rank}(M_{nn})/2$ は, 質量が有限のモードの数に等しく, 他のモードは質量ゼロモードとなる. 従って,

$$N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2} \text{rank}(M_{nn}) \quad (37)$$

を満たす. (37) 式は渡辺-Brauner 予想に他ならない.

次に, NG モードを分類しよう. $G\tilde{\phi}_I = 0$ を満たすものを type-I NG 場と定義し, $\tilde{\phi}_I$ に独立な場を type-II NG 場 $\tilde{\phi}_{II}$ とする. 明らかに type-I NG 場の数 $N_{\text{type-I}}$ は, $N_{\text{BS}} - \text{rank}(M_{nn})$ に等しい. これは, $\partial_0^2 \tilde{\phi}_I = 0$ に従うのでゼロモードである. 一方 type-II NG モードは $\text{rank}(M_{nn})/2 \equiv N_{\text{type-II}}$ に等しい. $N_{\text{NG}} = N_{\text{type-I}} + N_{\text{type-II}}$ と (37) 式より,

$$N_{\text{BS}} = N_{\text{type-I}} + 2N_{\text{type-II}} \quad (38)$$

が従う．これは NC 不等式の等号に対応する [5] ．

ここで波動関数の補正項 $\delta Z_{\phi\phi}$ の効果について考察し NG モードの数え方のルールには影響が無いことを確認しておこう． $\delta Z_{\phi\phi}$ による補正は ∂_0^2 に $(1+\delta Z_{\phi\phi}G^T\mathcal{V}^{nn}G)\partial_0^2$ として与えられる．type-I NG については，この補正は $G\phi_I = 0$ のため効かない．一方 type-II NG モードについては，2 階微分は高次の寄与になる．従って波動関数の補正項は NG モードの数え方のルールを変更しないことがわかる．

4 陽な対称性の破れと質量公式

ここで陽な対称性の破れがあるときの NG モードの質量について考察しておこう．ここでは陽な対称性の破れの項が $\delta V = \Phi_i h^i$ の形を持つ特別な場合に問題を限る．この場合陽な破れの効果は，(22) 式から以下のように与えられる：

$$[i\Omega_n^\phi(\mathbf{0})]_{ai} = \frac{\delta[M_n\Phi]_{aj}}{\delta\Phi_i} h^j. \quad (39)$$

ここで $\delta\mathcal{V}/\delta\Phi_i = -h^i$ を用いた．従って運動方程式は

$$\partial_0^2 \tilde{\phi}(t, \mathbf{0}) = -F^{-1}G\partial_0 \tilde{\phi}(t, \mathbf{0}) + F^{-1}i\Omega_n^\phi(\mathbf{0})\tilde{\phi}(t, \mathbf{0}) \quad (40)$$

となる．一般の陽な破れの項に対してはこの方程式の解は複雑である．ここでは簡単な場合を考えてみよう．陽な対称性の破れの項は，type-I と type-II 場を混ぜないような場合を考える．つまり， $F^{-1}i\Omega_n^\phi(\mathbf{0}) = [F^{-1}i\Omega_n^\phi]_{\text{type-I}} \oplus [F^{-1}i\Omega_n^\phi]_{\text{type-II}}$ となる場合を考える．この時 $\tilde{\phi}_I$ の運動方程式は，

$$\partial_0^2 \tilde{\phi}_I(t, \mathbf{0}) = [F^{-1}i\Omega_n^\phi]_{\text{type-I}} \tilde{\phi}_I(t, \mathbf{0}) \quad (41)$$

となる．従って，type-I NG modes についての質量行列は

$$m_{\text{type-I}}^2 = -[F^{-1}i\Omega_n^\phi]_{\text{type-I}} = \mathcal{O}(h) \quad (42)$$

となる．これは一般化された Gell-mann–Oakes–Renner 関係式 [19, 20] に他ならない．一方， $\tilde{\phi}_{\text{II}}$ についての運動方程式は，

$$F^{-1}G\partial_0 \tilde{\phi}_{\text{II}}(t, \mathbf{0}) = i[F^{-1}i\Omega_n^\phi]_{\text{type-II}} \tilde{\phi}_{\text{II}}(t, \mathbf{0}) \quad (43)$$

となる．ここで h の高次項になる $\partial_0^2 \tilde{\phi}_{\text{II}}(t, \mathbf{0})$ の項を落とした．(43) 式の中で $\partial_0 \sim h$ なので，質量行列は

$$m_{\text{type-II}}^2 = \mathcal{O}(h^2) \quad (44)$$

となる．従って type-I と type-II の NG モードは異なる h のオーダーを持つことがわかる．Type-I 及び type-II NG モードの質量の 2 乗がそれぞれ h 及び h^2 となる．また type-I 及び type-II NG モードの質量行列のオーダーはモード間の相互作用がある場合にも変わらない．有限運動量依存性は $h \sim k^2$ に対応し，これは type-I NG モードの分散関係が $\omega \sim |k|$ ，type-II NG モードの分散関係が $\omega \sim k^2$ となることに対応する．この場合 type-I と type-II の分類は Nielsen-Chadha のものと同じとなる．

5 まとめ

ここでは非相対論的な場合の NG モードの数え方のルール [(37), (38) 式] を導いた．この方法は模型によらず一般的に成り立つ．模型の詳細は期待値や場の交換関係及び有効作用の 2 階汎関数微分に反映する．ここでは $\det\langle[Q_a, \phi_i]\rangle \neq 0$ と ϕ_i は保存電荷密度ではないと仮定した．もし，保存電荷で $\langle[Q'_a, Q'_b]\rangle \neq 0$ を満たし，すべての ϕ_i と $Q_b (\neq Q'_a)$ に対して $\langle[Q'_a, \phi_i]\rangle = \langle[Q'_a, Q_b]\rangle = 0$ となる Q'_a が存在する時， Q'_a も type-II NG 場になる²．これは本稿の議論をそのまま拡張する事で導くことができる．これらのモードの数は， $\text{rank}[Q'_a, Q'_b]/2$ に等しく，(37) と (38) 式は変更を受けない．

本稿ではゼロ温度の場合について議論したが，有限温度の場合には $M_{\phi\phi}$ を $M_{\phi\phi} + L_{\phi\phi}$ に置き換える事によって同様に NG モードの数え方のルールを構成される．

参考文献

- [1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1.,” *Phys.Rev.* **122** (1961) 345–358.
- [2] J. Goldstone, “Field Theories with Superconductor Solutions,” *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154–164.
- [3] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, “Broken Symmetries,” *Phys. Rev.* **127** (1962) 965–970.
- [4] T. Brauner, “Spontaneous Symmetry Breaking and Nambu-Goldstone Bosons in Quantum Many-Body Systems,” *Symmetry* **2** (2010) 609–657, arXiv:1001.5212 [hep-th].
- [5] H. B. Nielsen and S. Chadha, “On How to Count Goldstone Bosons,” *Nucl.Phys.* **B105** (1976) 445.
- [6] V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, “Spontaneous symmetry breaking with abnormal number of Nambu-Goldstone bosons and kaon condensate,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 111601, arXiv:hep-ph/0108178.
- [7] T. Schafer, D. T. Son, M. A. Stephanov, D. Toublan, and J. J. M. Verbaarschot, “Kaon condensation and Goldstone’s theorem,” *Phys. Lett.* **B522** (2001) 67–75, arXiv:hep-ph/0108210.
- [8] H. Leutwyler, “Nonrelativistic effective Lagrangians,” *Phys.Rev.* **D49** (1994) 3033–3043, arXiv:hep-ph/9311264 [hep-ph].
- [9] H. Watanabe and T. Brauner, “On the number of Nambu-Goldstone bosons and its relation to charge densities,” *Phys. Rev.* **D84** (2011) 125013, arXiv:1109.6327 [hep-ph].
- [10] H. Watanabe and T. Brauner, “Spontaneous breaking of continuous translational invariance,” *Phys.Rev.* **D85** (2012) 085010, arXiv:1112.3890 [cond-mat.stat-mech].
- [11] Y. Hidaka, “Counting rule for Nambu-Goldstone modes in nonrelativistic systems,” arXiv:1203.1494 [hep-th].

²よく知られた例は，Heisenberg 模型である．そこではスピンの場は保存電荷に対応し，保存電荷でない NG 場は存在しない

- [12] H. Watanabe and H. Murayama, “Unified Description of Nambu-Goldstone Bosons without Lorentz Invariance,” *Phys.Rev.Lett.* **108** (2012) 251602, [arXiv:1203.0609 \[hep-th\]](#).
- [13] H. Mori, “Transport, collective motion, and brownian motion,” *Prog. Theor. Phys.* **33** no. 3, (1965) 423–455.
- [14] Y. Nambu, “Spontaneous breaking of lie and current algebras,” *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 7–17.
- [15] S. Nordholm and R. Zwanzig, “A systematic derivation of exact generalized brownian motion theory,” *Journal of Statistical Physics* **13** (1975) 347–371.
- [16] R. Zwanzig, *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Oxford University Press, 2001.
- [17] J. Rau and B. Muller, “From reversible quantum microdynamics to irreversible quantum transport,” *Phys.Rept.* **272** (1996) 1–59, [arXiv:nucl-th/9505009 \[nucl-th\]](#).
- [18] U. Balucani, M. H. Lee, and V. Tognetti, “Dynamical correlations,” *Physics Reports* **373** no. 6, (2003) 409 – 492.
- [19] D. Son and M. A. Stephanov, “Pion propagation near the QCD chiral phase transition,” *Phys.Rev.Lett.* **88** (2002) 202302, [arXiv:hep-ph/0111100 \[hep-ph\]](#).
- [20] D. Son and M. A. Stephanov, “Real time pion propagation in finite temperature QCD,” *Phys.Rev.* **D66** (2002) 076011, [arXiv:hep-ph/0204226 \[hep-ph\]](#).

有限密度における plasmaron と plasmino の比較

根本幸雄 (聖マリアンナ医大)

plasmaron と plasmino はともに有限温度や有限密度の媒質中で出現するフェルミオン型励起モードである。理論的には plasmaron は零温度における電子気体において、電子とプラズモンとの相互作用の結果、電子の空孔スペクトル中に初めて見いだされた [1]。一方 plasmino は有限温度の相対論的場の量子論に基づき、フェルミオンとゲージボソンとの相互作用によって生ずることが最初に指摘されたが [2]、その後有限密度においても plasmino が現れることが明らかになった。ゲージ理論における plasmino は (QED でも QCD でも) 高温極限ないし高密度極限ではゲージ不変にその存在が証明できるが、それ以外の温度密度では未解明である。しかし、ゲージ理論以外のシステムにおいても、一般的に媒質中でフェルミオンがボソンと結合すれば、ある条件のもとで plasmino が出現することが知られている。plasmaron と plasmino はともにボソンとの相互作用の結果現れる励起モードであることから、その類似性が指摘されていたが [3]、具体的に両者の共通点、相違点を追究したものはこれまでになかった。

一方、最近 n -ドープしたグラフェンの電子スペクトルに plasmaron と同定できるようなモードが角度分解光電子分光の実験により発見され、史上初めて plasmaron が直接観測された可能性があり注目を集めている [4]。ドープしていないグラフェン中の π 軌道の電子スペクトルは低エネルギー部で零質量ディラック粒子型の分散関係を持つ。それが有限化学ポテンシャル中で plasmaron といえる励起が現れたということは、理論的にはむしろ相対論的場の量子論で議論されている plasmino と同定できるものではないだろうかと考えられる。そこで、本研究ではこれまで別々の分野で議論されてきた plasmaron と plasmino に注目し、両者の出現機構を調べて共通点と相違点を明らかにし、グラフェンで発見された励起モードが果たしてどちらと考えるのがより適切なのかを議論したい。以下ではすべて温度ゼロの場合の評価をおこなっている。

plasmaron はもともと電子と RPA 誘電関数との 1 ループ型相互作用の解析から発見されたが [1]、plasmaron 出現の本質は電子とプラズモンとの相互作用である。RPA において 1 粒子-1 空孔励起を無視したプラズモン極近似を用いて電子のスペクトル関数を求めると図 1 左のようになる。図から明らかなように、フェルミ運動量以下で明瞭な 2 ピーク構造が見られる。ひとつのピークはフェルミ運動量以上でも続く準粒子としての電子スペクトルであり、他方のピークはフェルミ運動量以上で急速に減少する plasmaron のスペクトルである。このような 2 ピーク構造は電子の自己エネルギー虚部に注目すると理解しやすい。今の場合、自己エネルギー虚部は電子とプラズモンとの結合状態密度に対応する量である。図 1 右より、虚部は $\omega/E_F = -3$ 付近で大きな絶対値 (正確には発散) をもつことがわかる。運動学的な考察から、これは空孔状態とプラズモンが強く結合して実空孔状態が形成される過程をあらわしている。すなわち空孔とプラズモンとが共鳴状態のような状況になっており、それによって特徴的な 2 ピークのスペクトル構造になっている。結合状態密度の発散は van Hove 特異点と呼ばれ、結合する 2 状態の分散関係の傾きが等しいときに起こることが知られている。今の場合運動量ゼロで電子もプラズモンも分散関係の傾きが 0 になっており、第一種 van Hove 特異点の形成の原因になっているが、さらに相互作用頂点がクーロン型であることも重要である。3 次元では運動量積分の測度から運動量の 2 次の因子が出るため、エネルギー分母が 0 になっても状態密度自体の発散は抑えられ

る可能性があるのだが、この模型ではクーロン相互作用の赤外特異性によって積分測度の因子が相殺され、結果として状態密度の発散を引き起こしている。

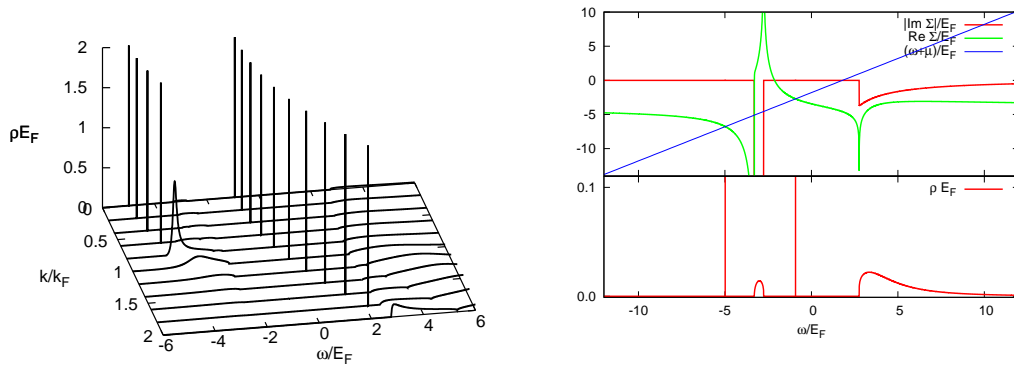


Figure 1: プラズモン極近似における電子気体の電子スペクトル関数 (左図) と、ゼロ運動量における電子自己エネルギー (右図上段) および対応するスペクトル関数 (右図下段)。いずれも密度パラメータ $r_s = 6$ の場合。

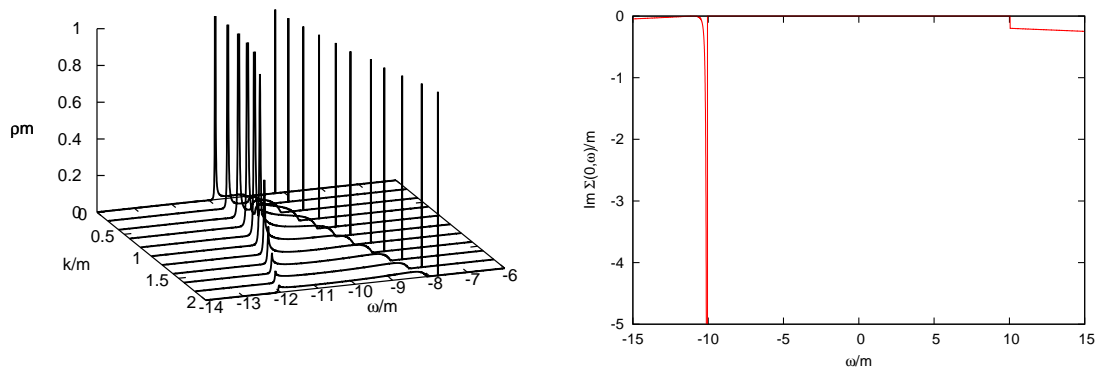


Figure 2: 湯川模型におけるフェルミオンスペクトル関数 (左図) と対応する運動量ゼロにおける自己エネルギー虚部 (右図)。湯川結合定数 $g = 1$ および $\mu/m_{\text{boson}} = 10$ の場合。

次に plasmino の出現機構をみる。ゼロ質量フェルミオンと有限質量ボソンとが湯川型相互作用する模型を用いて、1ループレベルでフェルミオン自己エネルギーを評価し、スペクトル関数を求めたものが図 2 左である。plasmino のピークは plasmaron のピークと同様に、フェルミ運動量以下で現れる。このスペクトル関数に対応するフェルミオン自己エネルギーの虚部 (図 2 右) から、plasmaron の場合と同様に自己エネルギー虚部が大きい値をもつところがあるが、ゼロ質量フェルミオンと有限質量ボソンとでは分散関係の傾きが同じなる点は (運動量無限大を除いて) 存在しないため、発散はしていない。虚部の

ピークは運動量が大きくなって徐々に傾きが一致していく途上にあるなかで形成されたものである。取り得る運動量の上限は化学ポテンシャルの値によって決まっている。この模型と上記電子気体との違いは相対論的であるか否かであることと、相互作用頂点がクーロン型か湯川型かである。前者は反粒子の自由度とフェルミオンの分散関係が大きな違いとなってくるが、粒子側のスペクトルを比較する限り反粒子の影響は無視できる。その一方でフェルミオン分散関係の違いは重要で、上記の通りゼロ運動量ではボソンと傾きが一致しなくなる。相互作用頂点の違いは赤外領域では大きいですが、今の場合ゼロ運動量でエネルギー分母は0ではなく、むしろ紫外領域でエネルギー分母が小さくなるため、plasminoの形成には重要ではない。すなわち、空孔とボソンとの結合によって plasmino が形成されるという点では plasmaron と同じであるが、plasmaron にみられるような van Hove 特異点の形成はなされていない、ということになる。化学ポテンシャルを大きくしていくと、フェルミオンの取り得る運動量が大きくなり、次第に分散関係の傾きが等しくなっていくため、虚部のピークが大きくなってゆく。高密度極限では運動量が無限大まで取り得るため傾きが完全に一致し、結合状態密度の発散(第二種 van Hove 特異点)が起こる。これが hard dense loop 近似で得られるふるまいである。

以上より、plasmaron と plasmino はどちらも媒質中で空孔とボソン型励起との結合状態密度が大きくなることで生ずる励起モードであるという点では一致した性質をもつ。そして恐らくこれが plasmaron と plasmino の性質の本質であり、その意味で両者は同じタイプの励起を表していると考えてよさそうである。3次元電子気体と湯川模型との比較では、状態密度が大きくなる領域が赤外か紫外かの違いがあるが、これはフェルミオンの分散関係の違いに起因している。もし湯川模型においても有限質量フェルミオンを採用すれば、湯川模型でもゼロ運動量でフェルミオンとボソンの分散関係の傾きが一致することになるが、電子気体模型と異なり、運動量積分の測度から生ずる因子が残るためにゼロ運動量で結合状態密度の発散は起こらない。こうした違いは plasmaron と plasmino の違いというよりは、採用した模型の性質の違いとみるべきであろう。実際、同じ模型でもグラフェンの有効模型のような空間2次元の場合には、プラズモンの分散関係が3次元の場合と大きく異なるため、結合状態密度の大きくなる運動量領域が3次元の場合と変わってくる。それでもやはり plasmaron と呼ばれる [4]。

従って、グラフェンにおける plasmaron と思われるスペクトル [4] は、もしそれが本当に plasmaron であるならば、同時に plasmino の観測と捉えることができ、高エネルギー物理学の分野にもインパクトを与える発見であるといえる。

References

- [1] B. I. Lundqvist, Phys. Kondens. Mat. **6**, 193 (1967); **6**, 206 (1967); **7**, 117 (1968); **9**, 236 (1969)
- [2] V. V. Klimov, Sov. J. Nucl. Phys. **33**, 934 (1981)
- [3] J. -P. Blaizot and J. -Y. Ollitrault, Phys. Rev. D **48**, 1390 (1993)
- [4] A. Bostwick *et al.*, Science **328**, 999 (2010)

非平衡相転移・非平衡臨界点の AdS/CFT 対応による解析¹

京都大学大学院理学研究科 中村 真

E-mail: nakamura@ruby.scphys.kyoto-u.ac.jp

Introduction

非平衡統計物理学は現代物理学のフロンティアの一つである。特に、平衡から離れた線形応答領域を超えた系の記述に関しては、まだ未知の部分が多い。本研究では、保存電荷の非線形伝導という非平衡物理学の問題に AdS/CFT 対応を応用し、非平衡系のみで観測される非平衡相転移および非平衡臨界点で、新しいタイプのを発見した [1]。本稿では結果の概要を報告する。

AdS/CFT 対応とは、あるクラスの強結合量子ゲージ理論を古典重力理論にマップする枠組みである。この対応を用いると、ゲージ理論側の非摂動的解析を重力理論を用いて行うことが可能となり、QCD や物性系への応用に向けた研究がなされている。特に、物性物理学への応用上注目すべき点は、多自由度系の扱いが簡略化され得る点であろう。AdS/CFT 対応を用いてゲージ粒子の多自由度系を重力理論にマップすると、巨視的物理量の従う関係式が、重力理論の古典力学の結果として容易に得られる場合がある。また重力理論という異なる描像に移ることで、統計系に対する新たな視点が得られる場合もある。本研究では、このような AdS/CFT 対応の特徴を、平衡から離れたゲージ粒子系の解析に応用する。

非平衡系は大きく二つに分類することが出来る。一つは時間に依存する系であり、もう一つは非平衡だが時間には依存しない非平衡定常系である。扱いやすさの観点から、ここでは非平衡定常系の物理学について考える。非平衡定常系の代表的な例としては、電場と平行な方向に定常電流の流れる系（例えばヒーターなど）がある。ここではこの系を「着目系」と呼ぶ。着目系では定常電流により絶えず熱が生成されており、非平衡にドライブされている。このままでは着目系を定常に保つことはできないが、熱生成と同じ割合で熱を外部環境（熱浴）に逃がすことで熱の収支をバランスさせると、マクロ変数が時間変化しない非平衡定常状態を実現することができる。熱浴の自由度、つまり熱浴の比熱は十分大きくとり、着目系からの熱流入に関わらず熱浴の温度は一定値を保つものとする。

このようにして実現される電流駆動型の非平衡定常系において、着目系にかかる電場 (E) の値を電流密度 (J) の関数として調べた場合、どのような振る舞いが見られるだろうか。 J や E が十分微小な領域では、電気伝導度 ($\sigma = J/E$) は E や J によらない定数であり、線形応答理論により記述される。しかし、線形応答領域を超えると σ は定数ではなくなり、系によっては非常に豊かな振る舞いをする。本研究では、下記で述べるゲージ理論系について、保存電荷の非線形電気伝導度の振る舞いを解析し、着目系が示す非平衡相転移について AdS/CFT 対応を用いて調べた。

微視的理論

ここでは、AdS/CFT 対応の成立が詳細に調べられている「3+1 次元強結合 large- N_c $SU(N_c)$ $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論に $\mathcal{N} = 2$ ハイパー多重項を加えた理論の強結合極限」(この系は非閉じ込め相にある) を扱うことにする。大雑把には、「 $\mathcal{N} = 4$ 超対称ゲージ理論」の部分は QCD のグルーオン自由度に、「 $\mathcal{N} = 2$ ハイパー多重項」はクォーク・反クォークの自由度に対応する。さらに物性系とのアナロジーを用いれば、この「グルーオン」は物性系のフォノンに、「クォーク・反

¹本研究は科学研究費・挑戦的萌芽研究「AdS/CFT 対応による非平衡定常物理学への新アプローチ」(課題番号 23654132、研究代表者：中村真)および科学研究費・新学術領域研究「多彩なフレーバーで探る新しいハドロン存在形態の包括的研究」(領域番号 2104、研究代表者：飯嶋 徹)の補助を受けて行われた。

クォーク」は物性系における電子と正孔に例えることができる。ここで考える「電流」は、系の保存電荷であるクォーク電荷の電流であり、「電場」とはクォーク電荷に作用する外力である。

この系での着目系はクォーク系 ($N = 2$ ハイパー多重項のなす部分系) であり、グルーオン系 ($N = 4$ 超対称ゲージ理論のなす部分系) は熱浴の役割を果たす。なぜならば、非閉じ込め相ではグルーオン系の自由度がクォーク系の自由度の $O(N_c)$ 倍となるため、large- N_c の極限で、グルーオン系の自由度はクォーク系のそれを凌駕し、グルーオン系の比熱は無量大であるとして良い。このためグルーオン系はクォーク系に対する良い熱浴として振る舞い、電流が生成する熱を吸収する。この理論は AdS/CFT 対応を用いて保存電荷 (ここではクォーク電荷) の非線形伝導度が計算可能な、最も単純な理論の一つである。

このような超対称ゲージ理論のクォーク電荷の伝導を調べることは、現実的ではないと感じる読者もおられるかも知れない。しかし、必ずしもそうではないと筆者は考えている。本研究で問題としているのは、「熱浴と相互作用した、強相関する荷電粒子の多体系」が示す巨視的な非線形・非平衡現象であり、伝導度の値などの具体的な物性値の計算が目的ではない。むしろ、系の微視的な詳細によらず成立する統計的な振る舞いを、非平衡定常系において見出すのが目的である。系の微視的な詳細によらず、広い範囲の系において共通に成立することが期待できる現象の一つに相転移現象がある。そのためここでは非平衡系の相転移に主眼をおく。

このような考えのもと、本研究では、この理論のクォーク電荷に作用する外部電場を E 、クォーク電荷の電流密度を J として、この系が示す電気伝導度 σ の振る舞いを非線形領域において調べた。なお、単位系としては自然単位系を用い、計算に現れる係数を単純化するために、理論の 't Hooft 結合は、 $(2\pi)^2/2$ 、 $N_c = 40$ 、また current quark 質量は 1 とした。これらの具体的な値は便宜上の選択であり、結果として着目するのは以下で見られる相転移の振る舞いと臨界現象である。

結果と展望

図 1 は得られた J - E 曲線と、その熱浴の温度 T への依存性の例を示す。ここで、非平衡系であるため着目系に温度の概念があるかどうかは問わず、「温度」とは熱浴の温度を指すことにする。 $T < T_c$ では、微分伝導度 $\partial J/\partial E$ が負の領域から正の領域へとスムーズに変化するクロスオーバー (A) となっているが、 $T > T_c$ では J の増大により微分伝導度の値 (および符号) が C、D において不連続な飛びを示す。ここでは電気伝導度 $\sigma = J/E$ も不連続に変化する。また $T = T_c$ では σ は連続的に変化するが、微分伝導度は B において低電流密度側で発散し、不連続な振る舞いを示す。いずれも $J \cdot E > 0$ の非平衡状態で見られる現象であり、 $T = T_c$ の B での振る舞いを非平衡二次相転移 (転移が見られる点を非平衡臨界点)、 $T > T_c$ での C、D での振る舞いを非平衡一次相転移と呼ぶことにする。転移点は、重力側の古典 Hamiltonian の大小により決定した [1]。

図 2 はこれらの非平衡相転移に関連する相図である。NDC は負の微分伝導度、PDC は正の微分伝導度の領域を表す。実線は非平衡一次相転移を表し、実線の端点に非平衡臨界点 (CP) が位置している。横軸は密度等の平衡系の物理量ではなく、非平衡系で本質的な電流密度となっていることに注意されたい。

また、非平衡臨界点で見られる臨界現象の例を図 3 および図 4 で示す。図 2 の相図は、非平衡系のものである点を除けば、相構造は平衡系の気体・液体相転移や金属・絶縁体間の Mott 転移に類似している。そこでこれらの平衡相転移の場合を参考に、我々の非平衡相転移における臨界指数を以下のように定義する：

$$\sigma_{\text{PDC}} - \sigma_{\text{NDC}} \propto |T - T_c|^\beta, \quad (\sigma - \sigma_c)|_{T=T_c} \propto |J - J_c|^{1/\tilde{\delta}} \quad (\text{for } J > J_c). \quad (1)$$

ここで β の定義式の左辺は一次相転移線上に沿った伝導度の飛びを表し、 $\tilde{\delta}$ の定義式は $T = T_c$ の線上で、臨界点を与える電流密度 $J = J_c$ に向かって $J > J_c$ 側から近づいた際の伝導度の振る舞

い(ただし、臨界点での電気伝導度を σ_c とする)を表現している。これらは平衡相転移の場合の臨界指数 β 、 δ に類似しているが、特にここでの $\tilde{\delta}$ は電流密度という本質的に非平衡系の物理量を用いて定義されている。図3および図4ではいずれも数値誤差の範囲でスケージングが確認でき、臨界現象の存在を示している。

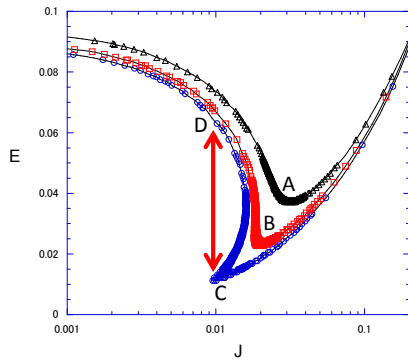


図1: J - E 特性。三角: $T = 0.34337 < T_c$ 、四角: $T = 0.34365 \equiv T_c$ 、丸: $T = 0.34379 > T_c$ 。

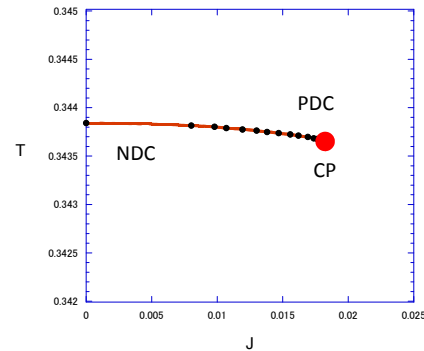


図2: 非平衡相転移の相図。

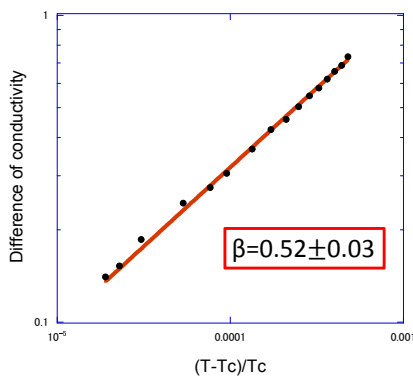


図3: 臨界指数 β 。

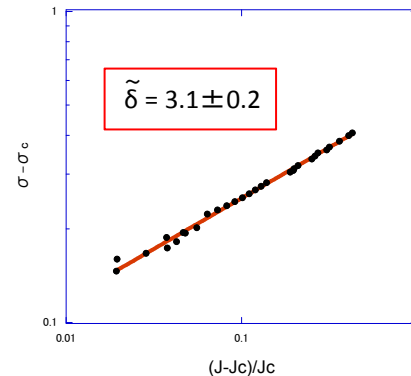


図4: 臨界指数 $\tilde{\delta}$ 。

非平衡相転移・非平衡臨界点そのものは以前から知られていたが、ここで見られたような電流密度をコントロールパラメータとする電流駆動型での非平衡相転移・非平衡臨界点は筆者が調べた範囲では理論的にも実験的にも知られていない。このように AdS/CFT 対応は、平衡から離れた多自由度系の巨視的な振る舞いについて、少なくとも計算可能な枠組みの例を提供し、未知の領域における新奇現象の理論的探索を可能にする。この枠組みを利用することで、従来手法とは異なる新しい視点からの非平衡物理学の研究が可能となることが期待される。なお、紙数の都合で計算手法やフォーマリズムの詳細を述べる事が出来なかった。詳細は文献 [1] や、そこで引用されている文献を参考にして頂きたいが、この記事を読まれて興味を持たれた方々は遠慮なくコンタクト頂ければ幸いです。

参考文献：

- [1] S. Nakamura, “Nonequilibrium Phase Transitions and a Nonequilibrium Critical Point from Anti-de Sitter Space and Conformal Field Theory Correspondence,” Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 120602, arXiv:1204.1971 [hep-th].

Creation of D9-brane– $\overline{\text{D9}}$ -brane Pairs from Hagedorn Transition of Closed Strings \sim Cylinder Amplitude and Sphere Amplitude

Department of Physics, Hokkaido University Kenji Hotta

E-mail: khotta@particle.sci.hokudai.ac.jp

The Hagedorn transition of closed strings has been proposed as a phase transition via condensation of this winding tachyon. On the other hand, we have previously shown that a phase transition occurs near the Hagedorn temperature and D9-brane– $\overline{\text{D9}}$ -brane pairs become stable. We present a conjecture that *D9-brane–anti-D9-brane pairs are created by the Hagedorn transition of closed strings*. We show some circumstantial evidences for this conjecture.

1 Hagedorn Transition of Closed Strings

It is well known that perturbative string gas has a characteristic temperature called the Hagedorn temperature. We can compute the one-loop free energy of strings by using path integral in Matsubara method. The one-loop free energy of strings diverges above this temperature. With respect to closed strings, it has been said that the Hagedorn temperature is associated with a phase transition, in analogy to the deconfining transition in QCD. This is because we can reach the Hagedorn temperature by supplying finite energy in the closed string case.

One explanation for this divergence is that a ‘winding mode’ in the Euclidean time direction becomes tachyonic above the Hagedorn temperature. Atick and Witten have proposed the Hagedorn transition of closed strings via condensation of this winding tachyon [1]. They advocate that the Hagedorn temperature is not really a limiting temperature but rather is associated with a phase transition. Atick and Witten argued further from the worldsheet point of view. At low temperature, sphere worldsheet does not contribute to the free energy, since it cannot wrap the compactified Euclidean time. But if we consider the condensation of winding tachyon above the Hagedorn temperature, the sphere worldsheet is no longer simply connected and it contributes to the free energy above the Hagedorn temperature. This is because the insertion of the winding tachyon vertex operator means the creation of a tiny hole in the worldsheet which wraps around the compactified Euclidean time, and the condensation of winding tachyon induces an infinite number of tiny holes in the worldsheet. It should be noted that this mode appears only in Matsubara formalism. We cannot identify which modes condensate to what extent in Lorentzian time when this winding tachyon condensate in the Euclidean time.

Significant effort has been devoted to find out the stable minimum of the potential of this winding tachyon. But we have not succeeded in finding it out so far. It is difficult to compute the potential of closed string tachyon because this potential has to be calculated by closed string field theory and this theory has not been well-established.

2 Brane–anti-brane Pairs at Finite Temperature

We have previously discussed the behavior of brane-antibrane pairs at finite temperature in the constant tachyon background [2]. At zero temperature, the spectrum of open strings on these unstable branes contains a tachyon field T . In the brane–antibrane configuration, we have $T = 0$, and the potential of this tachyon field has a local maximum at $T = 0$. The tachyon potential has a non-trivial minimum, which is called closed string vacuum, and the tachyon falls into it at zero temperature. Sen conjectured that the potential height of the tachyon potential exactly cancels the tension of the original brane-antibrane pairs [3]. This implies that these unstable brane systems disappear at the end of the tachyon condensation.

Although brane-antibrane pairs are unstable at zero temperature, there are the cases that they become stable at finite temperature. We have calculated the finite temperature effective potential of open strings on these branes based on boundary string field theory. For the D9-brane– $\overline{\text{D9}}$ -brane pairs, a phase transition occurs at slightly below the Hagedorn temperature and the D9-brane– $\overline{\text{D9}}$ -brane pairs become stable above this temperature. On the other hand, for the Dp -brane– \overline{Dp} -brane pairs with $p \leq 8$, such a phase transition does not occur. We thus concluded that not a lower dimensional brane-antibrane pairs but D9-brane– $\overline{\text{D9}}$ -brane pairs are created near the Hagedorn temperature. Let us call this phase transition brane-antibrane pair creation transition.

3 Creation of D9-brane– $\overline{\text{D9}}$ -brane Pairs from Hagedorn Transition of Closed Strings

Let us consider the relationship between above two phase transitions. Atick and Witten argued about the meaning of the condensation of the winding tachyon [1]. The insertion of the winding tachyon vertex operator corresponds to the creation of a tiny hole in the worldsheet which wraps around the compactified Euclidean time. But what is the hole of closed string worldsheet? Let us try to think about it from a different point of view. Since the boundaries of holes wind around the Euclidean time direction, taking a time slice of a sphere worldsheet with some winding tachyon insertion, we obtain open strings. Therefore, this worldsheet represents open strings propagating in the Euclidean time direction. Then we can identify the boundary of a hole created by winding tachyon vertex operator with a boundary of an open string on a D9-brane– $\overline{\text{D9}}$ -brane pair, and the insertion of winding tachyon vertex operator means the insertion of the boundary of open strings in the tiny hole limit, which wraps the compactified Euclidean time once. If we enlarge the size of this hole, we can describe open strings with arbitrary boundary. Therefore, we present a following conjecture :

D9-brane– $\overline{\text{D9}}$ -brane pairs are created by the Hagedorn transition of closed strings.

That is, above two phase transitions are two aspects of one phase transition. In the sense that $T = 0$ is the perturbative vacuum of open strings, this is a phase transition from closed string vacuum to open string vacuum. In other words, the stable minimum of the Hagedorn transition is the open string vacuum.

Here we describe some circumstantial evidences for this conjecture. First, if we consider the thermodynamic balance on D9-brane– $\overline{\text{D9}}$ -brane pairs, we can show that energy flows from closed strings to open strings and open strings dominate the total energy. This is because we can reach the Hagedorn temperature for closed strings by supplying finite energy, while we need infinite energy to reach the Hagedorn temperature for open strings on these branes.

Secondly, we show that, in the Matsubara formalism, some types of amplitude of open strings approaches to closed string ones if we take an appropriate limit. The cylinder amplitude of open strings close to the closed string vacuum has the form of the propagator of winding tachyon. The sphere amplitude for two winding tachyons vanishes, and the cylinder amplitude also vanishes if we take the closed string vacuum limit together with the Hagedorn temperature limit under appropriate condition. In these limits, the cylinder amplitude with a single massless boson insertion approaches to the sphere amplitude with two winding tachyons and a single massless boson insertion. We also show that the cylinder amplitude with two winding tachyons insertion approaches to the sphere amplitude with four winding tachyons insertion. We are now investigating whether the cylinder amplitude with $2n$ winding tachyons insertion approaches to the sphere amplitude with $(2n + 2)$ winding tachyons insertion. These are examples that we can identify the open string amplitude in the closed string vacuum limit with the closed string sphere amplitude with some winding tachyons insertion. It seems reasonable to conclude that we can identify the winding tachyon as the closed string vacuum limit of the boundary of an open string, which winds once around the compactified Euclidean time.

Thirdly, we show that the potential energy at the open string vacuum decreases limitlessly as the temperature approaches to the Hagedorn temperature. From this we may say that the open string vacuum becomes the global minimum in entire space of the open string tachyon field near the Hagedorn temperature. This is the property that the stable minimum of the Hagedorn transition is expected to have.

References

- [1] J. J. Atick and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B310** 291 (1988).
- [2] K. Hotta, *JHEP* **0212** (2002) 072, hep-th/0212063; *JHEP* **0309** (2003) 002, hep-th/0303236; *Prog. Theor. Phys.* **112** (2004) 653, hep-th/0403078.
- [3] A. Sen, “Tachyon Condensation on the Brane Antibrane System,” *JHEP* **9808** (1998) 012, hep-th/9805170.

A holographic multi-baryon system by dilute gas approximation

九州大学 理学府 素粒子理論研究室 田港 朝貴
E-mail: taminato@higgs.phys.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

有限密度系での QCD の振る舞いは、閉じ込め/非閉じ込め相転移やカイラル対称性の回復といった高温領域で示唆される相転移のみならず、バリオンの気/液相転移やカラー超伝導相といった多彩な相構造を持つ事が期待されている。しかしその一方で、有限密度系を格子 QCD を用いて第一原理的に解析しようとした場合、いわゆる符号問題のためその実行が非常に困難であり、有限密度における QCD 相構造の詳細は未だ謎に包まれている。

近年、超弦理論で予想されている AdS/CFT 対応あるいはゲージ/重力対応により、ある種の強結合ゲージ理論の微視的な振る舞いを重力理論や超弦理論の解析力学に置き換えて解析する事が可能となり、ハドロン物理や物性物理などへの応用が数多くなされている。

酒井-杉本模型 [1] は、ある空間 1 方向が S^1 コンパクト化している N_c 枚重なった D4 ブレーン*によって与えられる曲がった背景時空上に、 N_f 枚重なった D8/反 D8 ブレーンを埋め込む事で構成される、ゲージ/重力対応の一つの模型である。酒井-杉本模型は QCD の低エネルギー領域におけるカラーの閉じ込めとカイラル対称性の自発的破れを実現しており、さらに、メソンの質量を 2 個のパラメタを与える事で準定量的に導く事が出来る。このように酒井-杉本模型を用いる事により、カラーの数がラージ N_c と実際の QCD とは異なるにも関わらず、数多くのハドロンの非摂動的振る舞いが D ブレーンの有効作用の運動方程式を解く事で与えられる。

さらに、酒井-杉本模型は有限温度系や有限密度系への拡張も可能である。特に、有限温度系への拡張による解析では、QGP の物理やクォークの閉じ込め/非閉じ込め相転移、カイラル対称性、meson melting などが議論されている。ところがその一方で、有限密度系への十分満足のいく拡張は未だ成されていないようである。

本稿では、ゲージ/重力対応の観点から、有限密度 QCD に対する一つの模型を提案する。我々は、インスタントンの dilute gas 近似という一種の平均場近似を行う事でバリオン数密度を導入する。以下では、この dilute gas 近似模型を紹介し、模型が定性的に有効である事をハドロン相内で示唆されるバリオンの気/液相転移を見る事で確かめたいと思う。

2 Dilute gas 近似を用いた有限密度ホログラフィック QCD

酒井杉本模型では主に、 N_c 枚重なった D4 ブレーン解が作る背景時空上に埋め込んだ N_f 枚 D8/ $\overline{\text{D8}}$ ブレーンのダイナミクスを解析する。D8/ $\overline{\text{D8}}$ ブレーンの induced metric は次のように与えられる[†]。

$$ds_8^2 = \frac{\lambda_s^2}{3} \left(\frac{4}{9} k^{1/2} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \frac{4}{9} k^{-5/6} \left(1 + k^{1/3} z^2 \tau'(z)^2 \right) dz^2 + k^{1/6} d\Omega_4^2 \right) \quad (1)$$

*Dp ブレーンとは、超弦理論の枠組みにおける p 次元空間に広がったオブジェクトであり、 N 枚重なった Dp ブレーン上では $U(N)$ の $p+1$ 次元時空のゲージ理論が成り立つ事が知られている。

[†]係数の notation については文献 [2] を参照。

ここで、 $k = 1 + z^2$ 。 $\tau(z)$ は D8 ブレーンが余剰次元 z に沿ってどのような埋め込み方をするかを表す profile function であり、一般には D8 ブレーンの有効作用である Dirac-Born-Infeld (DBI) 作用に induced metric を代入し、その運動方程式を解く必要がある。また、 τ は S^1 コンパクト化された空間方向であり、今の notation では周期 2π を持つ。

さて、バリオン数密度を導入するにはソースである化学ポテンシャルを理論に取り入れる必要がある。 $N_f = 2$ の場合、D8 ブレーンは $U(2) = U(1) \times SU(2)$ のゲージ場を含む。ゲージ/重力対応の辞書によると、 $U(1)$ ゲージ場 A_0 は化学ポテンシャル μ とバリオン数密度の期待値 \bar{n} を次のような形で与える [3];

$$A_0(z) = \mu + \frac{\bar{n}}{z} + \dots, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2)$$

一方、 $SU(2)$ ゲージ場の定常なインスタントン解はバリオンに対応する。このインスタントン解の場の強さ F_{mn} を

$$F_{ij} = Q(\xi^m, \rho) \epsilon_{ija} \tau^a, \quad (3)$$

$$F_{zi} = Q(\xi^m, \rho) \tau^i \quad (4)$$

とおく [4]。ここで $i, j = 1, 2, 3$ であり、 $\xi^m (m, n = 1, 2, 3, z)$ はインスタントンの位置、 ρ はインスタントンサイズ、 τ^a はパウリ行列である。酒井-杉本模型では、Chern-Simons 項がバリオン数密度のソース項に対応する [5];

$$S_{CS} \propto \int d^4x dz A_0 \text{Tr}(F_{mn} F_{pq}) \quad (5)$$

あとは、D8 ブレーンの有効作用である DBI 作用と CS 項から $\tau(z)$ 、 $A_0(z)$ 、 F_{mn} に関する運動方程式を解けばいい。しかし、曲がった時空におけるインスタントン解を求めるのは非常に難しい。そこで、我々は [2] で議論されている平坦な時空に近似したときに得られるインスタントン解を試行関数として用いる事にする;

$$Q(\xi^m, \rho) = \frac{2\rho^2}{((\xi^m - x^m)^2 + \rho^2)^2}. \quad (6)$$

この関数は元の運動方程式の解ではないが、ここでは作用を最小にさせる ρ を与える事で近似的な解であるとみなす。また、バリオン数密度を導入するため、次のように N_I 個のインスタントンを平均場近似で与える;

$$Q^2 = \sum_i^{N_I} \frac{4\rho^4}{((\xi_i^m - x^m)^2 + \rho^2)^4} \quad (7)$$

ここで、このインスタントンが $z = 0$ かつ 3 次元空間上で無数に薄くかつお互いに独立して存在している (dilute gas 近似と呼ぶ) と仮定する事で、インスタントンの位置依存性が近似的に無視できる事が期待される。すると、次のような作用が与えられる。

$$S = S_{DBI} + S_{CS} = -2\kappa V_3 \int dt dz L, \quad (8)$$

$$L = k^{5/6} \sqrt{k^{-1/3} - \frac{9}{4} (2\pi\alpha')^2 A_0'(z)^2} \left(1 + \frac{27}{8} n q^2 (k^{-1} + k^{1/3}) \right) - \frac{3N_c}{4\pi^2 (2\pi\alpha')^2 \kappa} A_0(z) n q^2 \quad (9)$$

ここで、 V_3 は 3 次元空間の体積であり、 n は V_3 あたりのインスタントンの密度を表す;

$$n = \frac{N_I}{V_3}, \quad q^2 = \frac{\pi^2}{2} \frac{\rho^4}{(z^2 + \rho^2)^{5/2}}. \quad (10)$$

3 結果: 化学ポテンシャルとバリオン数密度の関係

次に、各 μ に対する $\tau(z)$ と $A_0(z)$ についての運動方程式を解き、(2) からバリオン数密度の期待値を読み取る。その詳細は省くが、運動方程式の解から Fig. 1 が得られる。これは真空からバリオン生成相への1次相転移を示しており、ハドロン相内で示唆されるバリオンの気/液相転移に対応するものであると考えられる。この振る舞いは [5] のモデルでは得られていない。

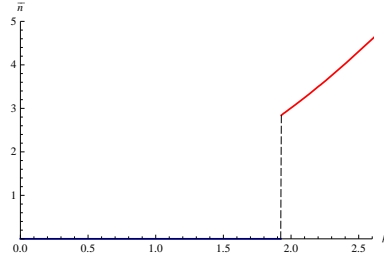


Fig. 1: 化学ポテンシャル μ とバリオン数密度 \bar{n} の関係

4 まとめと今後の課題・展望

本稿では、酒井-杉本模型にインスタントンの dilute gas 近似を用いることで有限密度系への拡張を行なった。すると、バリオンの気/液相転移に対応する1次相転移が示された。しかし、dilute gas 近似の妥当性や、何故1次相転移が起こったのか、という点についての答えは明確にはわかっておらず、今後明らかにしていきたいと考えている。

この模型を用いた展望としては、インスタントンのサイズをバリオンの大きさと見なした時に、その化学ポテンシャル依存性を調べることで、有限密度における閉じ込め/非閉じ込め相転移や Quarkyonic 相への相転移などを議論できれば面白いと考えている。また、この模型を有限温度系へ拡張し、カイラル相転移などを調べるのも興味深い。

参考文献

- [1] T. Sakai and S. Sugimoto, “Low energy hadron physics in holographic QCD,” Prog. Theor. Phys. **113**, 843 (2005) [hep-th/0412141].
- [2] H. Hata, T. Sakai, S. Sugimoto and S. Yamato, “Baryons from instantons in holographic QCD,” Prog. Theor. Phys. **117**, 1157 (2007) [hep-th/0701280 [HEP-TH]].
- [3] N. Horigome and Y. Tanii, “Holographic chiral phase transition with chemical potential,” JHEP **0701**, 072 (2007) [hep-th/0608198].
- [4] インスタントンを用いた解析は次の論文でも議論されている: M. Rozali, H. -H. Shieh, M. Van Raamsdonk and J. Wu, “Cold Nuclear Matter In Holographic QCD,” JHEP **0801**, 053 (2008) [arXiv:0708.1322 [hep-th]].
- [5] O. Bergman, G. Lifschytz and M. Lippert, “Holographic Nuclear Physics,” JHEP **0711**, 056 (2007) [arXiv:0708.0326 [hep-th]].

情報、熱力学、そして統計力学*

丸山 耕司
大阪市立大学大学院理学研究科

I. 悪魔のパラドックス

物理と情報の結びつきに関する議論の歴史は長い。20世紀半ばに Shannon により情報理論が数学的厳密さを伴って生まれる以前にも、陰に陽に情報は物理の中に顔を出してきた。本稿でレビューする Maxwell の悪魔のパラドックスをめぐる論争でも、早い段階から観測（という情報取得）行為の物理的効果についての認識があったし、量子力学の基礎に関連した Einstein-Podolsky-Rosen(EPR) パラドックスのように、情報が超光速で伝達されて物理的状态に影響を与えることの是非が議論されることもあった。しかし、「情報」という言葉のもつ漠としたイメージや、「悪魔」のような比喩が先行した印象もあり、物理と情報の関わりという話題については様々な誤解も多い。それどころか、専門を同じくする研究者間でもニュアンスの食い違いにより不毛な議論に陥ることさえある。本稿では、そういった誤解のタネをできるだけつづしながら、Maxwell の悪魔のパラドックスとその解決への道筋を中心として情報と物理、特に熱力学、そして統計力学との関わりあいを紹介したい。

まず、情報の基本的な定量化法を復習しておこう。ごく単純に言って、情報とはそれを知ることに意味や価値のあること、驚きのあること、である。そして、その価値や驚きが大きい（出現確率が低い）ほど、情報の量も大きいと考える。すると、情報量は、その情報が現れる確率の単調減少（連続）関数と見てよさそうだ。さらに、情報量は加法的、つまり、 A, B というふたつの独立な（相関のない）情報をもたらされたときの全情報量は、それぞれの情報量の和であるはずだ。情報量を I で表せば、 $I(A, B) = I(A) + I(B)$ となる。一方、独立な事象の確率は、 $p(A, B) = p(A)p(B)$ であるので、 I の関数形としてふさわしいものとして \log があることがすぐに分かる（実際、これが上の要請下の唯一の関数形である）。そこで、確率 p で現れる情報のもつ情報量は、 $I = -\log_2 p$ と定義する。対数の底の 2 は、定数係数分の不定性をなくしつつ、もっとも基本的な二値情報を基準とするためである。

さて、ある確率変数 X をひとつずつ独立に生成する情報源 \mathcal{X} を考える。確率変数 X が有限個の $x_i (i \in \{1, 2, \dots, N\})$ からなり、各々の x_i が現れる確率が常に p_i で表されると、各 x_i がもつ情報量 $-\log p_i$ の平均

$$H(X) := -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \quad (1)$$

を、この情報源のもつ (Shannon) エントロピーとよぶことにする。単位はビットである。これを $H(p_i)$ とか $H(\{p_i\})$ などと表記することもある。ここで、ある j について $p_j = 0$ となる場合は、 $0 \log 0$ が現れるが、これは極限の値を採用

してゼロと定義する。二値情報の場合、どちらかの確率が 1 でもう片方が 0 の場合は $H = 0$ 、どちらの現れる確率も $1/2$ の場合は $H = 1$ となって最大値をとる。エントロピー H が大きいほど、次に現れる情報についての不確定さが大きく、その情報を得たときの価値が高いことになる。そして、Shannon エントロピーは、確率 $\{p_i\}$ だけで特徴づけられる量である。

さて、話を物理に戻し、Maxwell の悪魔のパラドックス [1] を吟味していこう。情報が論じられる物理の話題の中でも、このパラドックスはその解決に定量的な意味での情報の概念が必要だったという意味で、情報の果たす役割の明確さが際立つものである。19 世紀半ば、J. C. Maxwell は、もし個々の気体分子の状態を観測できる存在 (悪魔) がいれば、温度一定の気体を高温部と低温部に分離することができ、熱力学第 2 法則が破られる可能性を示した。何らかの (人為的) 操作が許されるなら、第 2 法則は破られてもよいのだろうか。

この有名なパラドックスを、初めて情報 (量) と関連づけてとらえて解決を試みたのは、20 世紀初めの Szilard (“シラード”が近い発音らしい) である。彼は、図 1 のような、分子がひとつだけからなる“気体”の入った体積 V の箱を考えた。初め、図で (a) の状態では分子が箱の中のどこをどう運動しているかは分からない。ここで、薄い壁をさつと挿入し、箱の体積を二等分する。観測者 (= 悪魔) は、分子の運動状態を変えることなく、分子が壁の右側にあるか左側にあるかだけを測定する (図 1(b))。ここでは右側にあったとしよう。観測者は挿入した壁の右側におもりを結びつけ、箱を温度 T の熱浴に接触させ、この一分子気体を体積 V まで等温膨張させる。この膨張過程 (図 1(b) \rightarrow (c) \rightarrow (d)) で、気体は熱浴から熱量 Q を受け取り、おもりに対し、

$$W = kT \int_{\frac{V}{2}}^V V^{-1} dV = kT \ln 2 \quad (2)$$

だけの仕事を行う (k は Boltzmann 定数)。等温過程であるから、 $W = Q$ である。気体は再び体積 V を占める状態になるわけだから、もとの状態 (図 1(a)) に戻った、つまり熱機関としてサイクルが閉じたことになる。ところが、この熱機関は熱浴からの熱量 Q を力学的仕事 W に 100% の効率で変換しており、明らかに熱力学第 2 法則を破っている。(熱力学的な) エントロピー収支で見れば、エンジンは完全に元の状態に戻るから変化なし、熱浴は熱 Q をエンジンに与えているので $Q/T = k \ln 2$ だけ下がっている。これが Szilard エンジンによる Maxwell の悪魔の表現である。

第 2 法則が破られないために必要であろう仕事 W の消費理由 (エントロピー $k \ln 2$ の増加理由) について、Szilard は図 1(b) での情報取得 (観測) にあると考えた。そして、 $k \ln 2$ というエントロピー変化量をこの情報取得に関連した基本的量であるとした [2]。定数係数は別として、これはまさに先に導入した 1 ビットの情報量に対応する量であ

* 「数理学」 Vol.50-3, pp.28-34, サイエンス社, 2012. に掲載の記事に大幅に加筆・修正したもの。

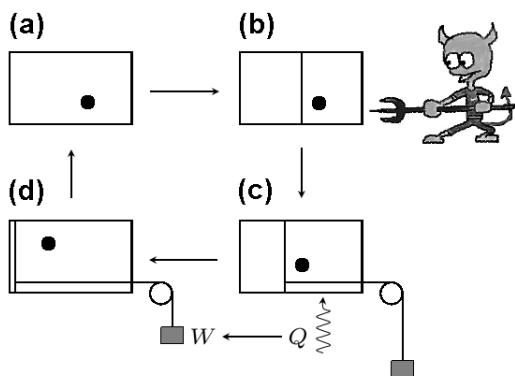


FIG. 1: Szilard が考案した一分子気体エンジンによる思考実験. 分子の位置情報を得ることにより, 熱力学第 2 法則を破る (ようにみえる).

る. その意味づけの正確さはともかく, Shannon による情報理論確立の 20 余年も前の, 物理の中での情報の役割がはっきりと認識された最初の例だろう. 意味付けの点で注意すべきは, Shannon エントロピーが確率のみで定義されたのに対し, 熱力学で現れるエントロピーには確率の概念が直接関わらないことである. (統計力学では当然事情は異なる.)

悪魔のパラドックスの解決に関しては, この後もしばらくは観測がエントロピーを増やす主犯だと信じられたようだ. その大きな拠り所となったのは, Brillouin が Szilard のアイデアをベースに試みた, 観測によって生じるエントロピー変化量の計算である. 具体的には, 分子運動の観測に光を用いた場合を考え, 分子による光の散乱によって生じる系のエントロピー変化を計算し, これがパラドックス中のエントロピー減少を補うのに十分な量であることを示したのだ [3]. ところが, これでもまだ悪魔はしたたかに生きていた. 観測に伴うエントロピー増加は原理的にいくらでも小さくできることが, 後に示されることになる.

II. LANDAUER の原理

IBM の Landauer は, 「計算」を実行する上での究極のエネルギー効率を研究する中で, 情報処理の物理的側面を真っ向からとらえた. キーとなる事実は, すべての情報は何かの物理的実体を媒体として保持・伝達され, すべての情報処理はそれらに直接 (物理的に) 働きかけることで実行される, ということである. であれば, すべての情報処理は媒体に物理的に働きかけて状態を変化させる, 物理的な過程に対応しているはずである.

ある情報処理を, 入力 x に対して $y = f(x)$ を出力する写像 f として表そう. この写像 f が単射である場合, つまり入力 x と出力 y が 1 対 1 に対応する場合 (例えば, NOT ゲート=ビット反転処理) は, 逆写像 f^{-1} によって出力 y から元の入力 $x = f^{-1}(y)$ を一意に得ることができる. 言い換えれば, ある情報処理が単射写像であるときは, その処理は “可逆” である. 上で述べた対応関係を考えると, 可逆な情報処理は可逆な物理過程で実行可能であることになり, 原理的にはエントロピー増加, 散逸のない過程で遂

行可能となる.

では, 入力と出力が 1 対 1 に対応しない情報処理を考えよう. 2 ビットの入力から 1 ビットの出力を得る処理 (AND や OR など) はすべてこれに相当するが, 1 ビット処理でも, 0 か 1 にかかわらず出力を 0 にしてしまうような処理は 2 対 1 の対応であり, 単射ではない. これを情報の消去とよぶ. 情報処理を担う物理系 (レジスタ, あるいはメモリー) について考えると, 消去によって許される自由度が減り, エントロピーが減少, その結果, 自由エネルギーが増大する. これは, 正のエネルギーの消費が必要であること, その分は環境に散逸してしまうことを意味する. 1 ビットの情報消去の場合は, エネルギー散逸量は $kT \ln 2$ (エントロピー $k \ln 2$) となる. Landauer はこれを一般化し, 不可逆な情報処理はすべて物理的には散逸を伴うと主張した (Landauer の消去原理 [4]). 逆に, 可逆な処理だけで全体の情報処理を構成することができれば, (理想的には) 散逸ゼロで計算が実行できる. 図 2 に一分子気体でメモリーをモデル化したときの具体的な消去プロセスの例を示す. “0” と “1” を分ける壁を引き抜いたときに気体のエントロピーが増大し (非可逆過程), これが標準状態 “0” への等温圧縮の際に熱浴へと散逸する.

Landauer の原理に対しては反論も根強くある. たとえば, 情報を消去するのに, メモリーがすでに標準状態 (例えば図 2 の “0”) にあることが分かっていたらそのまま何もせず, “1” の状態にあれば該当する体積 $V/2$ をゆっくり左側 (“0” 側) ヘスライドさせればいいではないか, というものなどだ [5]. 体積一定の領域をスライドさせるのに仕事は必要ない. しかし, この方法だとメモリー状態の観測結果に依存した操作の履歴が外部に残ってしまう. 正味の結果として, 情報が消去されたことにならないのだ. したがって, メモリー状態によらず, 図 2 のように, 常に同じ手順で標準状態 “0” へ戻さなければならない. また, 図 2 のような消去過程は, 逆にたどることで元のエントロピーをもつ状態に戻すことができる, したがって非可逆な情報処理が可逆な物理過程で実現されたことになる, という批判もある [6]. だが, 物理系が保持していた元の情報

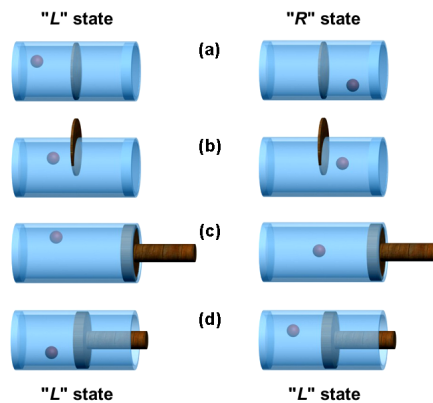


FIG. 2: 情報消去の熱力学的過程. 一分子気体でメモリーをモデル化し, 分子の位置 (左 “0” か右 “1” か) で記録された二値情報を消去するには, まず中央の壁を取り払い, 右側から気体を等温圧縮して体積を半分にし, 標準状態 “0” にする.

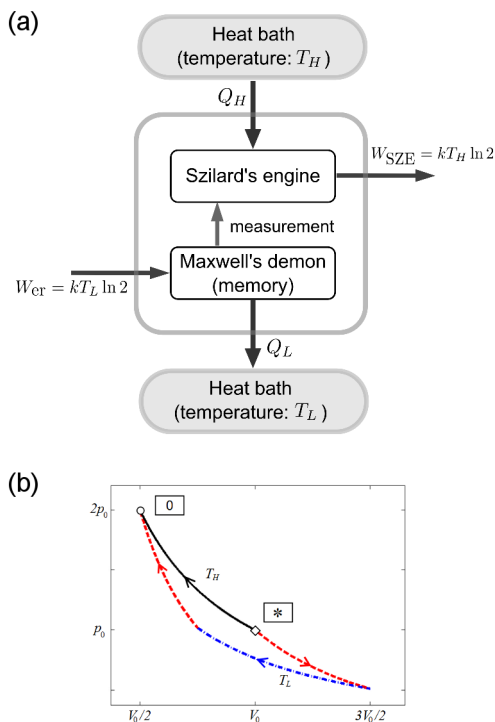


FIG. 3: 温度の異なるふたつの熱浴を用いた場合の Szilard エンジンとメモリー (悪魔). (a) はエネルギーの出入りを示した概念図. Szilard エンジンは $W_{SZE} = kT_H \ln 2$ の仕事を外界に対して行い, 情報消去には $W_{er} = kT_L \ln 2$ の仕事が必要である. Szilard エンジンとメモリーを合成した系 (灰色の線で囲んだ部分) は, 実質的に Carnot エンジンとして機能する. (b) はメモリーの p - V ダイアグラム. ‘0’ 印で示した点は中央の壁を取り払った状態 (図 2(c) に対応), ‘0’ が標準状態. 黒の実線がエンジンと同じ温度の熱浴を用いたときの消去過程, 赤 (断熱過程) と青 (等温過程) の曲線からなる過程が温度 $T_L (< T_H)$ の熱浴を用いた情報消去のうちもっとエントロピー上昇の小さい (=ゼロ) もの.

は復元できないので, 情報処理という文脈でこれを可逆な物理過程とよぶのは無理がある.

ところで, ときどき受ける質問に, 上記のシナリオでは Szilard エンジンも Maxwell 悪魔のメモリーも同じ温度の熱浴を使っているが, これを異なるものにしたらどうなるか, というものがある. この質問の背後には, メモリーの情報消去を低い温度で行えば, その分必要な仕事も減るのでは? というもっともな動機がある (と思う). Szilard エンジン用の熱浴とメモリー用の熱浴の温度をそれぞれ T_H, T_L とすると, Szilard エンジンから得られる仕事は $kT_H \ln 2$, メモリーの情報消去に費やす仕事は $kT_L \ln 2$ となって, 正味の (外への) 仕事量は $k \ln 2 (T_H - T_L) > 0$ となる (図 3). 観測結果を利用して正の仕事を取り出すという悪魔の目的は達せられるかに見えるが, ふたつの熱浴でのエントロピー変化量は打ち消し合って, (最小で) ゼロになり, 実際何もおかしいことは起こっていない. 図 3 で明らかのように, Szilard エンジンとメモリーの間には観測以外の直接の相互作用はないが, 両者を合わせた系の機能は効率

$\eta = 1 - T_L/T_H$ のカルノーエンジンと等価になる.

さて, 同じく IBM の Bennett は Landauer の考察からもう一步踏み込んで, 観測による情報取得は原理的には可逆な物理過程で実現可能であることを示した [7]. これにより, Szilard エンジンで記述した Maxwell の悪魔のパラドックスにおいて, 本質的に散逸を伴うのは悪魔による観測行為ではなく, 悪魔の頭の中の記憶を消去する過程であることが確定することになる. サイクルを閉じて初期状態に戻さなければならないものの中には, 物理的実体である悪魔の頭 (メモリー) も含まれるからだ. そして, 消去に必要なエネルギー消費がエンジンから得られるエネルギーを相殺するので, パラドックスは解決する.

ところで, ここに述べた論理展開だけだと, 単射でない情報処理に物理的散逸が伴う理由は熱力学第 2 法則そのものであり, その帰結として第 2 法則が破られないのは当然である. しかし, 1 ビットの情報消去には少なくとも $k \ln 2$ のエントロピー増加が必要なこと自体は, 第 2 法則を用いなくても導くことができる. 興味ある読者は文献 [8] やレビュー論文 [9] 等を参照されたい.

III. 一般の確率分布の場合

ここまで, ‘0’ と ‘1’ の確率が共に $1/2$ の場合の情報消去についてみてきた. より一般に, それぞれの確率が p と $1-p$ の場合のエントロピー散逸量はどうか. $p = 1/2$ の場合が $k \ln 2$ で, $p = 0$ (or 1) の場合が 0 になるわけだし, 情報量と熱力学的エントロピーの生成量が等しくなる (だろう) というのが Landauer の原理のココロであったから, ナイーブに考えてこれは $k \ln 2 \cdot H(p)$ になるであろうと予想がつく. 実際, これは正しいのだが, 悪魔のパラドックス解決のときと同様, 第 2 法則を使ってこれを示すのは (情報と熱力学のエントロピーの等価性を示すという動機のもとでは) よろしくない. そもそも, 「第 2 法則が破られるのでは?」「破られないためにはどこで余計なエントロピーが発生するのか?」というパラドックスであるから, その解決に第 2 法則を用いてしまっただけでは本末転倒である. したがって, $k \ln 2 \cdot H(p)$ が下限だと主張するには若干の注意を要する.

図 4 のように, メモリー用シリンダーの左側 (‘0’ 側) に pN 個, 右側 (‘1’ 側) に $(1-p)N$ 個の分子が入った状態からスタートし, すべての粒子が左側に押し込まれた状態へ到達するとき, 外部からなすべき仕事の最小値は $kT \ln 2 \cdot H(p)$ となる. この値は, 図 4(a) の状態の自由エネルギーと最後の (c) から (d) への圧縮に要する仕事量の差し引きで得られる. ところで, 系が外部に対してなすことのできる仕事が (準静的) 等温変化のとき最大値をとり, これを (Helmholtz の) 自由エネルギーと定義するのであった [10]. そして, 等温変化のときに最大値をとる理由は, 実質的に第 2 法則にあった. つまり, 図 4 の過程や自由エネルギーの計算をもって, $H(p)$ ビットの情報を消去するのに必要なエネルギーは $kT \ln 2 \cdot H(p)$ 以上であると言うには第 2 法則が必要である.

ここでは, ふたつのエントロピーの等価性をもとの悪魔のパラドックス解決の精神から主張したい. そこで熱力学第 2 法則を陽に使わずに, Szilard エンジンで得られる仕事とメモリーの情報消去に必要な仕事 (最適な場合に) 打ち消しあうことを示したい. そのためには, 問題を 1 ビットの

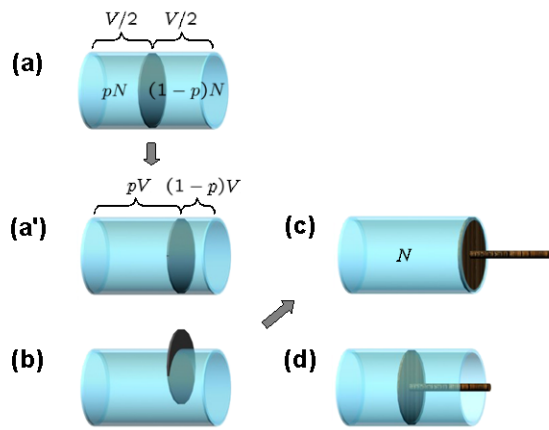
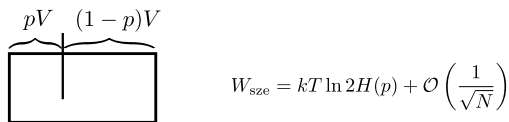


FIG. 4: $p \neq 1/2$ のときの準静的等温操作による情報消去. (a) から (a') への等温膨張により外部に対して気体に仕事をさせ、消去に必要な全仕事量を最小化する.

Szilard's engine



Demon's memory

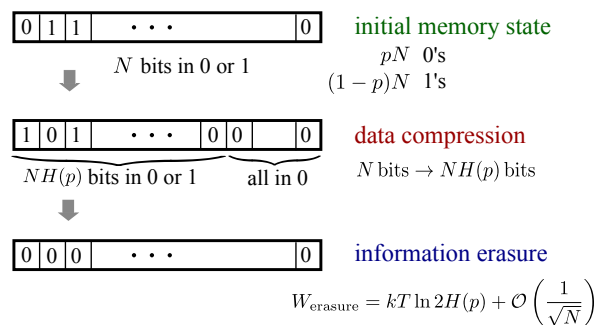


FIG. 5: データ圧縮を用いた情報消去. N ビット長のデータ列 ($p \neq 1/2$) を $NH(p)$ ビット長の 0 と 1 の数が等しいデータ列に変換、それを消去する.

情報消去に情報論的に帰着させればよい. $p = 1/2$ の確率分布 ($H(p) = 1$) の情報消去に必要な仕事についてはこれまでの議論の結果を認め、 $kT \ln 2$ であるとする. 1 ビットのシナリオに情報論的に帰着するには、Shannon によるエラーのない場合の符号化定理の結果であるデータ圧縮を用いる. こうすることで、情報論的 (Shannon) エントロピーを熱力学を通して操作論的に定義することが可能になり、より物理的な見通しがよくなるメリットもある [11].

図 5 に消去作業の概観を示した. $\{p, 1-p\}$ の確率分布は、Szilard エンジンで壁を入れる位置を中央ではなく、体積を p 対 $1-p$ に分けるところに挿入すれば得られる. 壁を入れたあとに分子位置を観測して (熱浴から) 取り出せる仕

事は、 $-kT \ln 2(p \ln p + (1-p) \ln(1-p)) = kT \ln 2 \cdot H(p)$ である. メモリーに記録されたデータの消去は以下のように行う. 十分に大きい N を考え、 N 個の二値データからなるデータ列をとる. ここに含まれる情報量は $NH(p)$ ビットであるから、これは 0 と 1 がそれぞれ $p = 1/2$ で現れる $NH(p)$ 個からなるデータ列がもつ情報量と同じだ. Shannon の符号化定理は、そのようなデータ列の圧縮が可能であり、($N \rightarrow \infty$ で) 最適な圧縮率が $H(p)$ で与えられることを保証するものである [12].

$NH(p)$ 個のビット列へ圧縮したあと情報消去を行えば、トータルで $NkT \ln 2 \cdot H(p)$ の仕事が少なくとも必要となる (残りの $N(1-H(p))$ 個のビットには圧縮後は情報を持たせないで、その部分には消去は必要ない). データ圧縮自体は与えられたビット列から別のビット列への一意の変換であるので、メモリー内の各ビットの状態空間体積に変化はなく、熱力学的な散逸もない. したがって、もとのデータ列の 1 ビット (1 レジスター) あたりの必要仕事量は、(期待通り) $kT \ln 2 \cdot H(p)$ となって、Szilard エンジンから得られる仕事と釣り合う. 第 2 法則に依拠した自由エネルギーの最適性を用いる代わりに、Shannon の符号化定理によって数学的にその最適性が保証されたデータ圧縮を通して、ふたつのエントロピーの等価性をより一般的に裏付けることができる.

IV. 実験的検証について

Landauer の原理は、 $kT \ln 2$ の値の小ささ ($T = 300\text{K}$ で約 2.87×10^{-21} [J]) もあって、長らく実験的な検証は困難であった. ある値以下のエネルギー消費での処理は実行できないという命題は、逆の命題よりも実証しづらいこともあっただろう. しかし、実験技術の進歩により、ようやく 1 ビットの物理が検証できるようになってきた. まず、全体に傾斜のついた正弦波型のポテンシャルに束縛された微粒子を観測して、得られた位置情報を自由エネルギーに変換する操作 (Szilard エンジンに対応する) が日本のグループによって達成された [13]. そして、今年 (2012 年)、ついに 1 ビット情報を消去する際に散逸する熱量を測定、Landauer の原理を直接確認したという論文が発表された [14] ので、ここに簡単に内容を紹介したい.

二値情報を記録するメモリーとしては、光ピンセット (optical tweezer) を用いて実効的に二重井戸構造の束縛ポテンシャル $U(x)$ を作り、そこにシリカの微小ビーズをトラップすることで実現させた. 光ピンセットとは、レンズで極小領域に強く集光したレーザーの強度分布により微小物体を捕捉する技術である [23].

当初、ふたつのポテンシャル井戸間の障壁の高さは十分高く、ビーズの位置により、バイナリー情報 ('0' か '1' か) を記録する. この情報を消去するには、レーザー光による束縛ポテンシャルを変化させて障壁の高さを低くし、全体に傾斜をつけて片方 (例えば '0' 側) だけがビーズを束縛できるようにする. 再び元の二重井戸ポテンシャルに戻せば、ビーズの初期位置によらず '0' にリセットされた状態となり、情報消去が完了する.

Bérut らは、ポテンシャル全体に傾斜をつける時間 τ を変化させて、上記プロセス終了時の消去の成功確率と、散逸される熱量との関連を調べた. 熱量は、高速カメラで観

測したビーズの位置 $x(t)$ を用いて,

$$Q = - \int_0^{\tau_{\text{cycle}}} dt \dot{x}(t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}$$

で求めた. ここで τ_{cycle} は一連の消去プロセスに要する時間である. その結果, τ を長くするほど Q の平均 $\langle Q \rangle$ は Landauer 限界である $kT \ln 2$ に漸近していくことが確認された. τ が長いほど最終的なビーズの位置が '0' 側に落ち着く確率が高くなることも観測しており, 情報消去作業が成功するときの熱の散逸量の下限が $kT \ln 2$ であることの有力な (状況) 証拠となる.

V. 量子系に記録された情報

今度は量子系を (古典) 情報の記録・処理媒体として考えよう. 量子系に情報を記録する (エンコードする) とは, 情報 (アルファベット) $\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ を, 量子状態 $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$ にそれぞれ対応させることである. 各 ρ_n は量子状態を記述する密度演算子である. 各々の情報 i_n が現れる確率を p_n とし, 量子状態 ρ_n が確率 p_n で現れる系を, $\{p_n, \rho_n\}$ と表記しよう. 情報の受け手にとっては, 観測する前には受け取った量子状態がどの情報に対応するかわからないから, どれも ρ_n を "平均" した量子状態

$$\rho = \sum_{i=1}^N p_i \rho_i \quad (3)$$

にあると考えることができる.

状態 $\{p_n, \rho_n\}$ に載せられた情報を消去するには, どれだけのエントロピー増加が必要であろうか. 分子の位置で情報を記録した場合と異なり, この場合は壁を抜いて自然に非可逆な過程を起こさせるようなことができない上, 等温圧縮のような熱力学的過程をそのまま考えることも無理がある. そこで, ρ_i を, ある温度 T の熱浴との接触により, (温度 T で) 熱平衡状態 $\omega = e^{-\beta H}/Z$ にしてしまうときの全系のエントロピー変化を計算する. H は熱浴とメモリーの各構成粒子を記述するハミルトニアン, $\beta = (kT)^{-1}$, Z は分配関数である. まず結果だけを示すと, エントロピー変化は, 次式

$$S(\rho) := -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho) \quad (4)$$

で定義された **von Neumann エントロピー** を用いて

$$k \ln 2 \left(S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i) \right) \quad (5)$$

と表される. 式 (5) を $k \ln 2$ の後のカッコ内の量はしばしば $\chi(\rho)$ と表記される. 各 ρ_i が互いに直交, つまり $i \neq j$ に対して $\text{Tr}[\rho_i \rho_j] = 0$ となるときは, $\chi(\rho) = H(p_i)$ となる [24]. 互いに直交する ρ_i はすべて確率 1 で区別可能であるから, これは上述の古典的な状況に対応し, 消去によるエントロピー増加は Shannon エントロピー $H(p_i)$ に $k \ln 2$ をかけたものになる.

量子状態 $\{p_i, \rho_i\}$ にエンコードされた情報を消去する方が, 同じ確率分布を持つ古典的状态にエンコードされた情

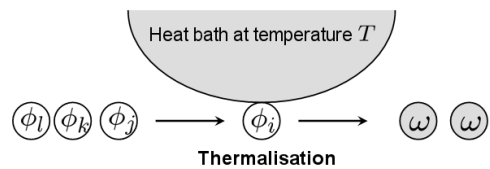


FIG. 6: 熱浴との相互作用による情報の消去.

報を消去するよりも, エントロピー増加が小さい. つまり, ρ には $H(p_i)$ ビットよりも小さい情報量しか持たせられない. これは, 異なる i と j に対して ρ_i と ρ_j が直交しない場合, それらを観測によって完全には区別できないという重要な事実による. 区別できない \rightarrow 観測しても得られる情報が少ない \rightarrow エントロピーが小さい, となるわけである.

では, Lubkin の流儀 [15] にしたがって式 (5) を導いてみよう. 上述したように, 量子 '気体' を操る代わりに, 温度 T の十分に大きい熱浴と情報を保持したメモリー系を相互作用させ, メモリーの状態を熱浴の状態と同じにしてしまうことで情報を消去する (図 6). このままでは最終的なメモリー状態が混合状態 ω となり, Landauer 流に消去を定義したときのような, きれいにリセットされた (純粋) 状態にならない. しかし, 温度 T を十分に低くすれば, $\omega = e^{-E_0/kT}|0\rangle\langle 0| + e^{-E_1/kT}|1\rangle\langle 1| + \dots$ のうちのもっともエネルギーの低い基底状態 $|0\rangle\langle 0|$ の項が他と比べて圧倒的に大きくなり, 純粋状態とみなせる.

全系のエントロピー変化は, メモリーと熱浴のエントロピー変化の和 $\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{memory}} + \Delta S_{\text{bath}}$ である. メモリーのエントロピーは, 初めの状態が ρ_i とすれば,

$$\Delta S_{\text{memory}}^{(i)} = k \ln 2 (S(\omega) - S(\rho_i)) \quad (6)$$

だけ変化する. 熱浴のエントロピー変化は, 熱浴とメモリーとの間でやりとりするエネルギーを温度で割ればよい:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{bath}} &= \frac{\Delta Q_{\text{bath}}}{T} = -\frac{\Delta Q_{\text{memory}}}{T} \\ &= -\frac{\text{Tr}(\omega H) - \text{Tr}(\rho_i H)}{T} \\ &= k \text{Tr}[(\omega - \rho_i) \ln(Z\omega)] \\ &= -k \ln 2 [S(\omega) + \text{Tr}(\rho_i \log_2 \omega)]. \end{aligned} \quad (7)$$

2 行目から 3 行目への変形では, $H = -kT \ln(Z\omega)$ を使った. 式 (6) と式 (7) より, (von Neumann エントロピーと熱力学的エントロピーの間の変換係数 $k \ln 2$ は 1 として)

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{total}} &= \sum_i p_i \Delta S_{\text{memory}}^{(i)} + \Delta S_{\text{bath}} \\ &= -\sum_i p_i S(\rho_i) - \text{Tr}[\rho \log_2 \omega] \\ &\geq S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i) \end{aligned} \quad (8)$$

最後の不等号は (量子) 相対エントロピーの非負性 $S(\rho|\omega) = -S(\rho) - \text{Tr}[\rho \log_2 \omega] \geq 0$ による.

ところで、von Neumann エントロピーの表式 (4) は、Shannon による情報理論的エントロピーの式 (1) によく似ているが、(4) の定義の動機は熱力学であって、情報理論ではない。Von Neumann は、直交する量子状態をもつ気体分子を異なる種類の分子とみなしたときの、混合気体のもつエントロピーが熱力学的エントロピーと等しくなるように量子系のエントロピー (4) を定義した。Shannon に式 (1) を「エントロピー」とよぶよう提案したのは von Neumann だったそうである。

VI. 最後に

Maxwell の悪魔のパラドックスは、情報と物理が密接に関係していることを示してくれた。Landauer の原理、情報消去過程を通して、情報論的エントロピーと熱力学エントロピーの同一視が正当化される。その結果、様々な物理現象を情報の視点から眺めたり、また逆のこともできるようになる。量子状態を情報キャリアとしたときの、(量子) データ圧縮の圧縮率や、系にエンコードできる (古典) 情報量の限界 (accessible information, あるいは Holevo 限界) なども、情報の消去の視点でとらえると定量的な正当化が簡潔に得られる [9]。

ここでは Shannon の符号化定理に基づいたデータ圧縮を用いて、ふたつのエントロピーの同一性をより強固にする議論も紹介した。こうして、確率分布のみで抽象的に定義された Shannon エントロピーも、熱力学を通して操作論的に理解することができる。また、さらに一歩進んで、統

計力学の中での情報 (情報論的な意味での) 位置づけにも踏み込む試みもある。最大エントロピー原理 [16] によれば、情報エントロピーから Boltzmann 分布を求めることは可能なものの、情報理論的および物理的エントロピーの間の普遍的な関連ははっきりしていなかった。そこで、情報消去の物理を頭を含むモデルを考えることで、たとえば Boltzmann 分布の表式を操作的に得られるようになることなどが分かっている [17]。

さらに、本稿では触れなかったが、熱力学の幅広い適用可能性も非常に興味深い。一見、熱力学とは関係のない領域においても、背後には熱力学 (第 2 法則) の見えざる手が及んでいるのが見えることがある。たとえば、孤立系のエントロピーが自然に減少することはないという要請から、量子力学における時間発展のユニタリー性を「導く」ことができる [18] [25]。また、ブラックホールの表面積とそのエントロピーとの同一視 [19, 20] などから、ブラックホール熱力学が構成される。熱力学ではエントロピーを体積やエネルギーの関数として表すことで状態方程式が得られる。そこで、causal horizon の面積とエントロピーの等価性を前提とし、そこから重力場に関する Einstein 方程式を (状態方程式として) 導出する研究もある [21]。関連して、Bekenstein のものアイデアのように情報欠損と時空のエントロピーの関係を直接調べ、時空の熱力学の定式化を目指す試みも最近報告されている [22]。

量子情報理論や量子力学基礎論での情報の根源的役割も、その研究は緒についたばかりだ。今後、情報と物理の織り成す鮮やかな世界がますます明らかになっていくことだろう。

-
- [1] H. S. Leff and A. F. Rex, *Maxwell's Demon 2* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2003).
- [2] L. Szilard, *Z. Phys.* **53**, 840 (1929). 文献 [1] に英訳が収録されている。
- [3] L. Brillouin, *J. Appl. Phys.* **22**, 334 (1951). 文献 [1] に収録。
- [4] R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.* **5**, 183 (1961). 文献 [1] に収録。
- [5] J. D. Norton, *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **36**, 375 (2005).
- [6] O. J. E. Maroney, *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **36**, 355 (2005).
- [7] C. H. Bennett, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 905 (1982); *IBM J. Res. Dev.* **32**, 16 (1988). 共に文献 [1] に収録。
- [8] K. Shizume, *Phys. Rev. E* **52**, 3495 (1995); B. Piechocinska, *Phys. Rev. A* **61**, 062314 (2000).
- [9] K. Maruyama, F. Nori, and V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1 (2009).
- [10] 田崎清明, 熱力学—現代的な視点から, 培風館 (2000).
- [11] A. Hosoya, K. Maruyama, and Y. Shikano, *Phys. Rev. E* **84**, 061117 (2011).
- [12] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1991.
- [13] S. Toyabe, T. Sagawa, M. Ueda, E. Muneyuki, and M. Sano, *Nature Phys.* **6**, 988 (2010).
- [14] A. Bérut, A. Arakelyan, A. Petrosyan, S. Ciliberto, R. Dillenschneider, and E. Lutz, *Nature* **483**, 187 (2012).
- [15] E. Lubkin, *Int. J. Theor. Phys.* **26**, 523 (1987).
- [16] E. T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106**, 620 (1957).
- [17] A. Hosoya, K. Maruyama, and Y. Shikano, in preparation.
- [18] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
- [19] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973); *ibid* **9**, 3292 (1974).
- [20] S. W. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974).
- [21] T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1260 (1995).
- [22] Y. Yokokura, e-print arXiv: 1106.3149, to appear in *Int. J. Mod. Phys.*, and also through private communication.
- [23] 古典的には、微小物体中表面を通過する際に光が屈折し、その反作用として微小物体が力を受ける、と説明される。光の強度分布があることにより、物体をビーム中心へ束縛するような力が働く。
- [24] 証明は、たとえば、文献 M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000). 中の Theorem 11.8.
- [25] 「導く」というのは言い過ぎで、謙虚に「時間発展がユニタリーだとすれば第 2 法則と矛盾しない」という程度が適当だろう。第 2 法則だけで、量子状態 (密度演算子) が Hilbert 空間上の正定値エルミート演算子であることなどが得られるわけでは到底ない。

Direct observations of thermal fluctuations below shot noise levels

Kenichiro Aoki and Takahisa Mitsui

*Research and Education Center for Natural Sciences and Hiyoshi Dept. of Physics,
Keio University, Yokohama 223-8521, Japan*

We explain a general method for obtaining measurements below shot noise levels. We apply this to surface thermal fluctuations to obtain their spectra to previous unseen precision. The physics behind the spectra and the broad applicability of the noise reduction method is discussed.

Thermal fluctuation phenomena are truly ubiquitous — for instance, all surfaces we observe, solid, liquid or otherwise fluctuate thermally. In this note, we describe some direct quantitative measurements of these fluctuations occurring in common place materials at room temperatures, to precision unachieved up to now. In doing so, we can test our theoretical understanding of the basic physics principles and properties of materials observed through thermal fluctuations to hitherto untested precision. More importantly, by exploring new territory, we can search for new physics phenomena. These thermal fluctuations are at atomic scale and one obstacle that needs to be overcome to achieve such precision is the prevalence of noise from various sources. We describe a new method for achieving measurements at previously unseen low noise levels below. For such measurements, light scattering methods are most commonly used, in which shot noise arising in photoconversion is unavoidable. Shot noise is a fluctuation in the photocurrent spectrum of the form $\langle(\Delta I)^2\rangle = 2eI \Delta f$, where e, I, f are the electron charge, current and the frequency. Shot noise can be a limiting factor for measurements that require high precision, such as the attempts to measure gravitational waves. Previous efforts to reduce shot noise using squeezed states of light have achieved reductions by around a factor of two[1, 2].

Let us briefly outline the principle underlying the noise reduction we employ[3, 4]: In any measurement, $D_1 = S + N_1$, signal S is accompanied by some noise N_1 . The spectrum obtained from this measurement is $\langle|\tilde{D}_1|^2\rangle = \langle|\tilde{S}|^2\rangle + \langle|\tilde{N}_1|^2\rangle$, where tildes denote the Fourier transform. If S has no known periodicity, there is no way to separate out the signal from the noise, even in principle. However, if we make another measurement D_2 of the same signal, uncorrelated noise can be statistically reduced in the correlation $\langle\tilde{D}_1\tilde{D}_2\rangle \rightarrow \langle|\tilde{S}|^2\rangle$. The relative error here is $\sim 1/\mathcal{N}$, \mathcal{N} being the number of averagings. This simple principle is *not* limited to optical measurements, surface fluctuations nor to shot noise. Any uncorrelated noise including shot noise, amplitude modulation noise, amplification noise and so on, are reduced in this approach. In practice, we obtain a factor of 10^{-3} reduction from the shot noise level. The limitations are that we need to arrange the measurements so that the unwanted noise is uncorrelated in them and that the signal needs to be stable enough for the averagings to be effective.

We first discuss liquid surface thermal fluctuations, sometimes called 'ripples'. Liquid surface fluctuations have been predicted [5] and have been experimentally observed some time ago[6, 7]. The fluctuation spectrum of simple liquid surfaces have been derived from hydrodynamical considerations[8, 9]. The spectrum has qualitatively different behavior for liquids with weak and strong dissipation. Any simple liquid has strong dissipation and is highly viscous at high frequencies, which is intuitively natural. For liquids with low dissipation, there is a peak in the dispersion relation, leading to a well defined wave. For liquids with high dissipation, no such peak nor simple wave behavior exists, precluding the application of traditional observation methods, which use the waves effectively as gratings. We study these phenomena mainly for the following reasons: First, these basic physics phenomena are of interest on their own. Second, since the fluctuation spectrum has been derived previously, we can confirm that our measurement method is effective at sub-shot noise levels and furthermore, we can explore the limitations of the traditional hydrodynamical approach.

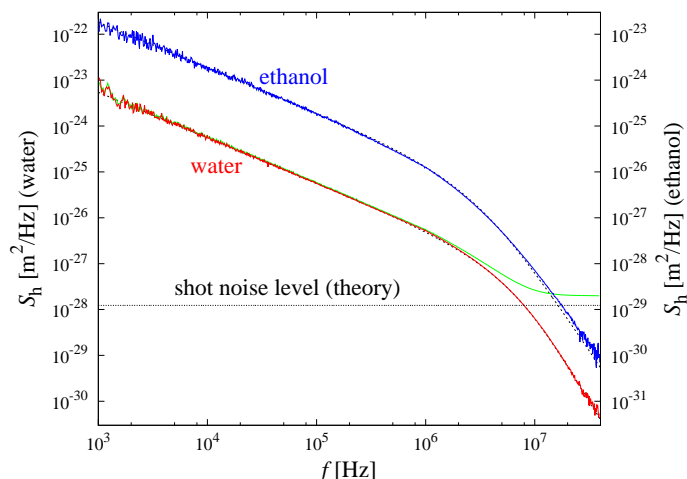


Figure 1: Experimentally observed surface height fluctuation spectra for water (red) and ethanol (blue). Respective theoretical spectra are also shown (black dashed), which agree well with the experimental results so as to be almost invisible. For comparison, observed data for a single differential detection, $\langle |\tilde{D}_1|^2 \rangle$ is shown for water (green). This is clearly dominated at higher frequencies by the shot noise, whose theoretical value is indicated (black, dotted).

In Fig. 1, direct measurements of the fluctuation spectra of water and ethanol are shown. We obtained these measurements by applying the noise reduction method explained above to the classic Michelson interferometry[10]. In the measurements, we use the coherent state of light and *not* squeezed states. A single light source is used and the noise in the multiple measurements are uncorrelated due to the quantum property of light. The observed shot noise level agrees with theory and our measurement can be seen to go down three orders of magnitude below it. The theoretical spectra are seen to agree

with the measured spectra to a high degree, for these liquids.

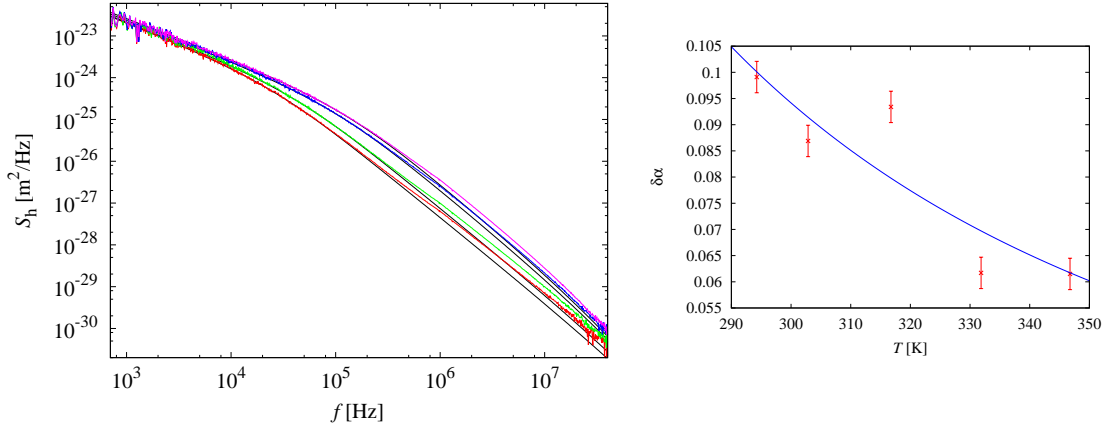


Figure 2: (Left) Observed surface fluctuation spectra for oil at various temperatures, $T=294$ (red), 303 (green), 332 (blue), 347 (magenta) [K] with their theoretical predictions (black dashed). Fluctuations are larger at higher temperatures. (Right) Temperature dependence of the deviation from theory of the high frequency fall off $f^{-\alpha}$ ($f \gtrsim 1$ MHz).

In Fig. 2, the surface fluctuation spectra of oil are shown for various temperatures. Oil is highly viscous and its spectrum differs from that of water and ethanol qualitatively. In particular, the fall off at high frequencies seen here are $\sim f^{-2}$ for oil, in contrast to $\sim f^{-4}$ for water and ethanol. Unlike the case of water, experimental spectra of oil surface fluctuations visibly differ from the theoretical spectra obtained solely from hydrodynamical considerations. These deviations are larger at lower temperatures and are likely caused by the more ‘complex’ nature of the fluid.

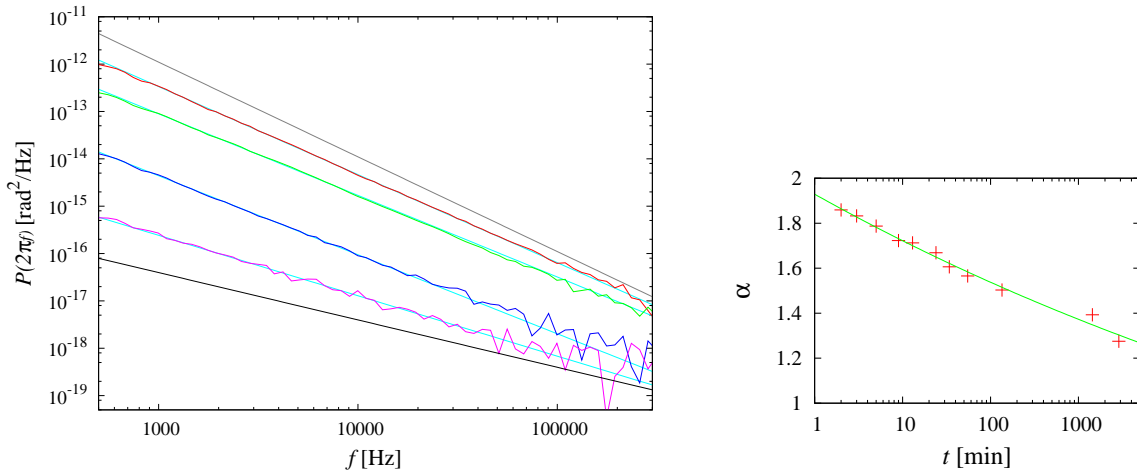


Figure 3: (Left) Epoxy adhesive surface fluctuations 2 (red), 9 (green), 24 (blue) minutes and 2 days (magenta) after application, together with fits to them to functions of the form $\text{const.} \times f^{-\alpha}$ (thin lines, cyan), which work quite well. As a guide, f^{-2} (grey) and (black) are also shown. (Right) Time dependence of α , f dependence of the spectrum $\sim f^{-\alpha}$. Gradual decrease from $\alpha = 2$ to $\alpha = 1$ is seen.

The measurement requires only a short time so that it can be applied to obtaining the time dependence of fluctuation spectra. In Fig. 3, we plot the surface fluctuation spectra of epoxy adhesive at various times after its application[3]. As the adhesive ‘hardens’, the fluctuations become smaller and its frequency dependence is seen to change. Since a viscous simple liquid surface behaves as f^{-2} and an elastic solid surface behaves as f^{-1} in this frequency region, the spectrum changes roughly from liquid to solid behavior with time. In this measurement, the noise reduction is crucial for obtaining spectra below the shot noise level which is $\sim 4 \times 10^{-15}$ [rad²/Hz] here. This result is obtained with an optical lever with noise reduction, which reflects the versatility of the noise reduction method.

In this note, we explained the principle of noise reduction that allows us to measure at levels orders of magnitude below the shot noise level. This allows us to directly measure fluctuation spectra of surfaces to previously unseen precision and some of the results were presented here. The results required only a small power (~ 0.5 mW), small sample size ($\sim \mu m$) and short measurement times (few s). The method has a wide area of applicability including measurements that require non-invasiveness. Our method can be applied to various materials and situations to observe hitherto unseen phenomena, which we intend to report on, in the near future.

References

- [1] C.M. Caves, Phys. Rev. D23, 1693 (1981).
- [2] K. McKenzie, B.C. Buchler, D.A. Shaddock, P.K. Lam, D.E. McClelland, Class. Quantum Grav. 21, S1037 (2004).
- [3] T. Mitsui, K. Aoki, Phys. Rev. E 80, 020602(R)-1 (2009).
- [4] K. Aoki, T. Mitsui, Phys. Rev. E 86, 011602 (2012).
- [5] M. von Schmoluchowski, Ann Physik 25, 225 (1908); L. Mandelstam, Ann. Physik 41, 609 (1913).
- [6] R.H. Katyl, U. Ingard, Phys. Rev. Lett. 19, 64 (1967).
- [7] D. Langevin, “*Light scattering by liquid surfaces and complementary techniques*”, Marcel Dekker, New York (1992).
- [8] V.G. Levich, “*Physicochemical Hydrodynamics*”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1962).
- [9] M.-A. Bouchiat, and J. Meunier, J. de Phys. 32, 561 (1971).
- [10] T. Mitsui, K. Aoki, [arXiv:1206.3828](https://arxiv.org/abs/1206.3828)

非加法的式による 3K 黒体放射スペクトルの解析

溝口卓哉 (鳥羽高専) 美谷島寛 (信大理 (非))

NASA が 1996 年以降に発表した 3 K 黒体放射のスペクトルの full data を non-extensive (Tsallis ともいう) parameter $(q - 1)$ を含むいくつかの Planck 分布で解析した。また, 黒体放射のスペクトルに含まれる無次元化学ポテンシャル μ の効果を考慮して, Tsallis parameter の効果を見積もる解析方法を検討した。

Introduction: Non-extensive 統計力学は Tsallis により提唱され, Tsallis 達は, 次のように表される non-extensive な Planck 公式を計算した [1]。

$$U^{(\text{NETD I})}(T, \nu, q) = U_{\text{Planck}}(T, \nu)[1 - e^{-x}]^{(q-1)} \left\{ 1 + (1 - q)x \left[\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{x}{2} \frac{1 + 3e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right] \right\} \\ \approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{q - 1}{e^x - 1} \left[\ln(1 - e^{-x}) - x \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{x^2}{2} \frac{1 + 3e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right] \quad (1)$$

ここで, $U_{\text{Planck}}(T, \nu) = 8\pi h\nu^3/c^3(e^x - 1)$; ($x = h\nu/kT$) はプランク分布で, $|q - 1|(\ll 1)$ は non-extensive parameter と呼ばれる。また, 彼らは (1) 式の検証のため, 1994 年に発表された NASA COBE の CMB 黒体放射の monopole spectrum から Planck 分布 (理論, 及び dust 等の効果) を引いた residual spectrum [2] に適用した。また, この解析に,

$$U_{\text{Planck}}(T + \delta T, \nu) \approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{\partial U_{\text{Planck}}}{\partial T} \delta T = U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{e^x x}{(e^x - 1)^2} \frac{\delta T}{T} \quad (2)$$

で定義される温度揺らぎと呼ばれる量 δT も用いた。表 1 には, 彼らの結果と minimum- χ^2 で求めた parameter とその 95 % CL (平均 $\pm 2\sigma$) での上限値を示す。

表 1: 式 (1) と (2) を用いた COBE CMB の residual spectrum (1994 年) の解析

analyses	$(q - 1)$	δT (K)	χ^2/NDF
C. Tsallis	3.6×10^{-5}	-1.0×10^{-4}	39.3/32
et al., (1995)	(fixed)	(fixed)	
minimum- χ^2	$(0.3 \pm 1.4) \times 10^{-5}$	$(-0.9 \pm 5.1) \times 10^{-5}$	32.2/32
	$ q - 1 < 3.0 \times 10^{-5}$	$ \delta T < 1.1 \times 10^{-4}$	(95 % CL)

また, 式 (1) とは別に, dilute gas 近似で求められた別の non-extensive な Planck 分布が提唱された [3]¹。

$$U^{(\text{NETD II})}(T, \nu, q) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{[1 + (q - 1)x]^{1/(q-1)} - 1} \\ \approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{e^x x^2}{(e^x - 1)^2} \frac{q - 1}{2} \quad (3)$$

本研究では, “Non-extensive” な効果の検証を, NASA が 1996 年以降に発表した CMB の full data [4, 5] 用いて行う。また, 宇宙論の研究では, CMB スペクトルには無次元化学ポテンシャル μ の効果が含まれていると見做されている [6]。そのため, Bose-Einstein (BE) 分布を用いる。

$$U_{\text{Planck}} \rightarrow U_{\text{BE}}(T, \nu, \mu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{x+\mu} - 1} \approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{-\mu e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad (4)$$

¹Planck 分布で $e^{h\nu/kT}$ を T の逆数で Γ 変換すると同じ式が得られる。

この「化学ポテンシャルの効果とどう折り合いを付けて，non-extensive parameter ($q-1$) の効果を見積もるか」を目的にして様々な計算を実行した。

Residual spectrum の解析: 1996 年に発表された COBE CMB の full data の residual spectrum [4] は 1994 年に発表された data と大きく異なっていた。式 (1), (2) および (3) を用いて解析し直した結果を表 1 と図 1 に示す。1994 年の data 解析と比べて， $|q-1|$ の上限値は $1/3$ 程度， $|\delta T|$ の上限値は $1/2$ 程度である。また，monopole spectrum (2005 年) [5] を parameters T , ($q-1$) で解析した結果 (図 1 の右側) は， $|q-1| < 1.23 \times 10^{-5}$ (95 % CL) で，residual spectrum の結果とほぼ等しい値である。

表 2: 式 (1), (2) および (3) を用いた COBE CMB residual spectrum (1996 年) [4] の解析。 $T = 2.7250$ K とした。

analyses	$q-1$	δT (K)	χ^2/NDF
(1) + (2)	$(-0.2 \pm 5.9) \times 10^{-6}$	$(0.1 \pm 2.1) \times 10^{-5}$	45.0/41
	$ q-1 < 1.2 \times 10^{-5}$ $ \delta T < 4.3 \times 10^{-5}$ (95 % CL)		
(3) + (2)	$(-0.3 \pm 5.0) \times 10^{-6}$	$(0.2 \pm 3.0) \times 10^{-5}$	45.0/41
	$ q-1 < 1.0 \times 10^{-5}$ $ \delta T < 6.2 \times 10^{-5}$ (95 % CL)		

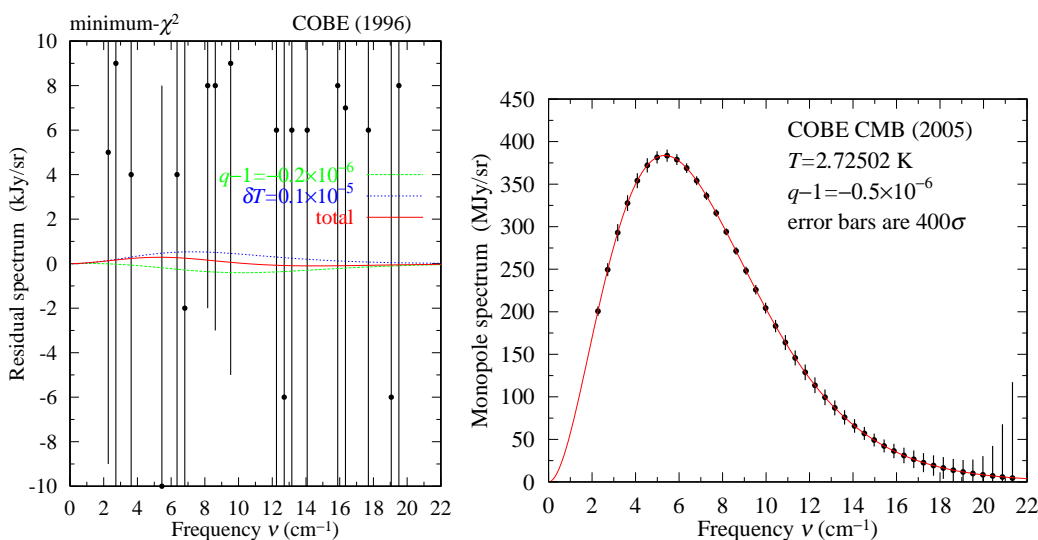


図 1: 式 (1), (2) を用いた COBE CMB residual spectrum (1996 年) [4] の解析 (左図) と monopole spectrum の解析 (右図)。

化学ポテンシャル μ の効果と ($q-1$): 2005 年に NASA の Web Site に公開された COBE/FILAS monopole spectrum [5] を式 (1) および (4) を用いて解析した (表 3)。($q-1$) と μ の項を含んだ式を用いた解析では， $|q-1|$ の上限値は，($q-1$) のみの式を用いた解析より大きくなる。

ここで，CMB スペクトルの空間成分の歪みを調べるために，歪み効果 ε を含んだ Planck 分布の式

$$U_{\text{Planck}}(T, \nu, \varepsilon) = \frac{\pi^{d/2}(d-1)dh\nu^d}{\Gamma(d/2+1)c^d(e^x-1)}, \quad d = 3 + \varepsilon \quad (5)$$

で monopole spectrum を解析した： $|\varepsilon| < 5.1 \times 10^{-5}$ (95 % CL)。

さらに，化学ポテンシャルの効果をおののように引いた data を用いて歪み ε を調べた。

$$[\text{subtracted monopole spectrum}] = [\text{monopole spectrum}] - \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{-\mu e^x}{(e^x-1)^2} \quad (\mu = -1.1 \times 10^{-5})$$

表 3: 式 (1) と (4) を用いた monopole spectrum (2005 年) の解析。

analyses	T (K)	$(q - 1)$	μ	χ^2/NDF
(4)	$2.7250 \pm 2 \times 10^{-5}$	—	$(-1.1 \pm 3.2) \times 10^{-5}$ $ \mu < 7.5 \times 10^{-5}$	45.097/41 (95 % CL)
(1) + (4)	$2.7250 \pm 1 \times 10^{-4}$	$(0.3 \pm 1.0) \times 10^{-5}$ $ q - 1 < 2.3 \times 10^{-5}$	$(-2.5 \pm 5.6) \times 10^{-5}$ $ \mu < 1.4 \times 10^{-4}$	44.89/40 (95 % CL)

差し引きしない元の data では, $|\varepsilon| < 5.1 \times 10^{-5}$ (95 % CL) に対し, 化学ポテンシャルの効果を差し引いた monopole data では $|\varepsilon| < 7.6 \times 10^{-6}$ (95 % CL) と 1 桁値が小さくなった。

式 (5) を用いた解析を踏まえて, 化学ポテンシャルの効果を差し引いた monopole data を式 (1) を用いて解析した結果を表 4 に示す。Data から化学ポテンシャルの効果を引くと, $|q - 1|$ の上限値は元の data の解析で得た値の 1/2 程度になった。

表 4: 式 (1) を用いた化学ポテンシャルの効果を差し引いた monopole spectrum の解析。

T (K)	$(q - 1)$	χ^2/NDF
2.7250 K (fixed)	$(2.2 \pm 2.1) \times 10^{-6}$	45.4/42
	$ q - 1 < 6.4 \times 10^{-6}$	(95 % CL)

Concluding Remarks: Residual spectrum の解析は, $|q - 1| < (1 \sim 1.2) \times 10^{-5}$ (95% CL), $|\delta T| < (4.2 \sim 6.2) \times 10^{-5}$ (95% CL) で, 1994 年の data 解析の上限値 (95% CL) と比べて 1/3 及び 1/2 程度となった。Raw data から化学ポテンシャルの効果を差し引いた data 解析では, $|q - 1| < 6.4 \times 10^{-6}$ (95% CL) で, 元の $|q - 1|$ の上限値 (95% CL) の 1/2 程度となった。 μ の項を含んだ式では, $(|q - 1| < 2.3 \times 10^{-5}) < (|\mu| < 1.4 \times 10^{-4})$ (95% CL) となった。

$|q - 1|$ の値は, data に含まれる化学ポテンシャルの効果によって, 大きく変化するので, この効果を差し引いた data から $|q - 1|$ を求めるべきである。

参考文献

- [1] C. Tsallis, F. C. Sa Barreto and E. D. Loh, Phys. Rev. **E52**, 1447 (1995).
- [2] J. C. Mather, et al., Astrophys. J. **420**, 439 (1994).
- [3] A. R. Plastino, A. Plastino and H. Vucetich, Phys. Lett. **A 207**, 42 (1995); U. Tirnakli, F. Buyukkilic and D. Dermirhan, Phys. Lett. **A 245**, 62 (1998).
- [4] D. J. Fixsen, et al., Astrophys. J. **473**, 576 (1996).
- [5] COBE/FIRAS CMB monopole spectrum, May 2005,
http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/firas_monopole_get.cfm
- [6] 杉山直, “張宇宙とビッグバンの物理” (岩波書店 2001); Y. B. Zeldovich and R. A. Sunyaev, Astrophys. Space Sci. **4**, 301 (1969); R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich, Astrophys. Space Sci. **7**, 20 (1970).

Interweaving Chiral Spirals

Toru Kojo (Bielefeld University)

Abstract

The interweaving chiral spirals (ICS), defined as superposition of differently oriented chiral spirals, break the chiral, translational, and rotational symmetry in quark matter at finite density. We further postulate that the quark mass gap produced by the ICS enlarges the region of the confined phase, by tempering the growth of quark fluctuations near the Fermi surface. The EOS becomes stiffer by increasing of the pressure by $\sim N_c \Lambda_{\text{QCD}} \times (\Lambda_{\text{QCD}} \times 4\pi\mu_q^2)$.

1 Impacts of the inhomogeneous chiral condensates

Recently, it has been argued that there is a new state of QCD matter at high baryon density and low to intermediate temperatures [1].

This novel state is called Quarkyonic matter, with the Fermi sea mainly composed of quarks, but with the confined excitations near the Fermi surface. The domain of the applicability of this picture is given by $M_N/N_c \leq \mu_q \leq N_c^{1/2}\Lambda_{\text{QCD}}$; the former characterizes the scale of the quark matter formation where the hadronic-nuclear-quark matter formation occurs rapidly within a small change in μ_q , while the latter gives the scale of deconfinement where the strength of quantum quark fluctuations becomes comparable to those of gluons due to the enlarged phase space near the Fermi surface.

In this talk, we ask what happens to the chiral symmetry at density mentioned above. So far most of theoretical calculations have suggested that the chiral restoration occurs shortly after the formation of the quark Fermi sea, provided that the chiral condensate is homogeneous [2]. For this reason, the chiral restoration line is usually placed very close to the chemical freezeout line, which should be closely related to the quark matter formation.

However, recently it was recognized that the chemical freezeout line may be separated from the chiral restoration line, according to the lattice QCD estimates for the μ_q -dependence of chiral and quark number susceptibilities [3]. One of the possibilities to fill this gap might be the inhomogeneous chiral condensates [4, 5, 6]. In fact several calculations based on the chiral models as well as confining models suggest that inhomogeneous chiral condensates can break the chiral symmetry even after the quark matter formation, if the gluon exchange force remains strong enough. Furthermore, such condensates can create the mass gap for quarks near the Fermi surface, suppressing the screening effects for the gluons. Thus the inhomogeneous chiral condensates have a big impact on the

deconfinement phenomena. All excitations except the Nambu-Goldstone bosons acquire the mass gaps.

2 A single Chiral Spiral

At zero density, the chiral condensate is formed by condensations of particles and anti-particles. At finite density, however, the Pauli-blocking requires large energy for the creation of an anti-particle, thus the particle-antiparticle condensation is not favored. Instead, more proper ingredients of condensates are particle-holes near the Fermi surface. The excitations near the Fermi surface do not cost energy much, despite they have large momenta, $|\vec{p}| \sim \mu_q$. Any condensates made of pairings must contain particles (holes) with hard momenta, so hard momenta appear either relative or total momenta of the pairs.

Below we focus on the possibility of the chiral density wave (CDW) pairing which evolves in a particular direction. It contains a co-moving particle-hole pair with a large total momentum of $\sim 2\mu_q$, while the relative momentum between them is small and $\sim \Lambda_{\text{QCD}}$. Actually the chiral density wave solution can be always interpreted as the chiral spirals (CSs). A key observation is that once we have a condensation of a pair moving to, say, $+z$ -direction, there is also a pair moving to $-z$ direction. Mathmatically, one can project out fermion components moving to $\pm z$ directions by operating the projection matrices [5],

$$\psi_{\pm} \equiv \frac{1 \pm \gamma_0 \gamma_z}{2} \psi . \quad (1)$$

Then we have two types of the chiral condensates, $\langle \bar{\psi}_- \psi_+ \rangle \sim \Delta e^{2i\mu_q z}$, $\langle \bar{\psi}_+ \psi_- \rangle \sim \Delta e^{-2i\mu_q z}$, whose sum and difference give

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle \sim \Delta \cos(2\mu_q z), \quad \langle \bar{\psi} i \gamma_0 \gamma_z \psi \rangle \sim \Delta \sin(2\mu_q z), \quad (2)$$

with a fixed radius of Δ of the order Λ_{QCD}^3 , which is given by solving the gap equation. These condensates obviously break the chiral symmetry, translational invariance, rotational invariance, and the second condensate further breaks parity *locally*.

3 Interweaving Chiral Spirals

We have seen that the CS must have a particular orientation. Let us ask: Can chiral pairs be formed in such a way to cover the entire Fermi surface, and can differently oriented CSs be interweaved in a consistent way?

The answer to these questions depends on the models, mainly due to the interactions among differently oriented CSs. The attempts to construct the ICS for the NJL-model can be found in [7], but the authors have concluded that the single CDW is energetically favored compared to the ICS. In fact, the interactions among CDWs appear to be repulsive, so the inclusion of many CDWs destroy condensates one another.

However, the conclusion may be altered if we take the asymptotic free nature of microscopic interactions into account. The gluon exchange should be strong for small momentum transfer, while should be weak for hard momentum transfer. If one uses models with this feature, such a momentum dependence is converted into the form factor effects for the interactions among quarks and condensates (or mean fields), which drastically reduces the energetic cost due to interactions among differently oriented CSs [8].

As a consequence, we can find an optimized number of CSs, which depends upon quark density. It means that as quark density increases, there generate more CSs, leading to the sequential phase transitions. Such transitions are likely to be first order, and might be related to the star quake.

Since the entire Fermi surface is covered by the condensates, the reduction of the free energy is very large, $\sim -N_c \Lambda_{\text{QCD}} \times (\Lambda_{\text{QCD}} \times 4\pi\mu_q^2)$, where the former factor comes from the size of the quark mass gap, while the latter comes from the number of pairs. In other words, the quark matter with ICSs give much higher pressure than the quark matter with free quarks, leading to stiffer EOS. This feature is welcomed for the explanation of recently found neutron star with the mass about twice of the solar mass.

References

- [1] L. McLerran, R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A **796** (2007) 83.
- [2] T. K. Herbst, J. M. Pawłowski and B. J. Schaefer, Phys. Lett. B **696** (2011) 58; L. Y. Glozman, R. F. Wagenbrunn, Phys. Rev. D **77** (2008) 054027.
- [3] O. Kaczmarek, F. Karsch, E. Laermann, C. Miao, S. Mukherjee, P. Petreczky, C. Schmidt and W. Soeldner *et al.*, Phys. Rev. D **83** (2011) 014504.
- [4] D. V. Deryagin, D. Y. Grigoriev, V. A. Rubakov, Int. J. Mod. Phys. A **7** (1992) 659. E. Shuster, D. T. Son, Nucl. Phys. B **573** (2000) 434; B. Y. Park, M. Rho, A. Wirzba, I. Zahed, Phys. Rev. D **62** (2000) 034015.
- [5] T. Kojo, Y. Hidaka, L. McLerran, R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A **843** (2010) 37.
- [6] D. Nickel, Phys. Rev. Lett. **103** (2009) 072301; Phys. Rev. D **80** (2009) 074025; S. Carignano, D. Nickel, M. Buballa, Phys. Rev. D **82** (2010) 054009; E. Nakano and T. Tatsumi, Phys. Rev. D **71** (2005) 114006.
- [7] R. Rapp, E. V. Shuryak, I. Zahed, Phys. Rev. D **63** (2001) 034008; S. Carignano and M. Buballa, arXiv:1203.5343 [hep-ph].
- [8] T. Kojo, R. D. Pisarski, A. M. Tsvelik, Phys. Rev. D **82** (2010) 074015; T. Kojo, Y. Hidaka, K. Fukushima, L. D. McLerran and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A **875** (2012) 94.

強磁場中における真空複屈折の詳細解析とその応用に向けて

服部 恒一^{a,b1}, 板倉 数記^{a2}

^a 高エネルギー加速器研究機構, ^b 延世大³

本講演は最近の論文 [1] に基づいている。本研究の詳細な背景と解析的、数値的計算結果については、そちらを参照して頂きたい。

1 高強度外部電磁場中の量子電磁気学

量子電磁気学においては、理論に現れる結合定数が小さいために摂動展開が良く機能し、実験との詳細な比較が成されてきた事が良く知られている。そのため、理論と実験の両面で最も良く理解が進んでいるゲージ理論であると言える。しかし一方で、高強度外部電磁場中でおこり得る量子電磁気学的な現象は、良く知られている通常の真空中での現象とは質的に異なる可能性が古くから指摘されている。その歴史は 1936 年の W. Heisenberg と H. Euler による論文から始まり、以後 1951 年の J. Schwinger の論文などでその基礎がつけられた。それらの計算の動機は、高強度外部電磁場中で量子電磁気学の通常の摂動展開が破綻する、という推察に基づくものである。

図 1 は外場中での電子の伝搬関数を示している。外場を表す外線を一本付け足すごとに、ダイアグラムは $O(|eB|/m^2)$ のオーダーのファクターを得るため⁴、 n 本の外線を持つダイアグラムは $O((|eB|/m^2)^n)$ のオーダーであることがわかる。従って、もし外部電場 E あるいは外部磁場 B が臨界強度 $E_c, B_c \equiv m^2/|e|$ に達すると、無限個のダイアグラムが同等に寄与するために摂動展開が破綻するのである。ここで、 e と m はそれぞれ素電荷と電子質量である。一本の線の両端を繋げて「輪」にしたものは有効ラグランジンを表すダイアグラムになるが、無限次までの寄与をすべて取り入れたものは、現在 Euler-Heisenberg ラグランジアンとして知られており、臨界電場中では実粒子の対生成により真空が不安定になることが上述の論文で示された。無限次まで再足し上げをする事によって、この現象は非摂動的、かつ外場に対して非線形な振舞いを示す。このような高強度外部電磁場中での物理は、通常の量子電磁気学と区別して「非線形量子電磁気学」と呼ばれている。J. Schwinger はより系統的な計算手法の基礎として、無限次まで再足し上げされたフェルミオン伝搬関数 (図 1) をコンパクトな形に書き下す方法を “proper-time method” によって確立した。

2 相対論的重イオン衝突における高強度磁場

上述のように非線形量子電磁気学の理論研究は古くから知られているが、未だかつて実験、及び観測においてその効果が実際に確かめられた事はない。それは臨界電磁場の強度

¹khattori@yonsei.ac.kr

²kazunori.itakura@kek.jp

³現所属

⁴これは磁場 B の場合であるが、電場 E についても同様のカウンティングが議論できる。

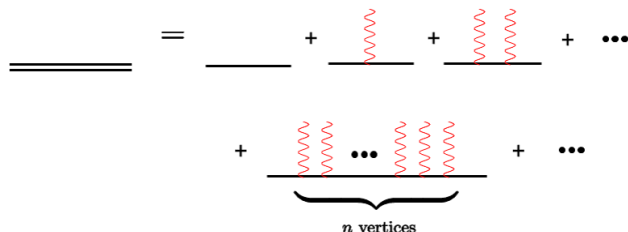


図 1: 高強度外部電磁場中でのフェルミオン伝搬関数: 強度が臨界電磁場に近づくとき、無限次までの再足し上げが必要となる。

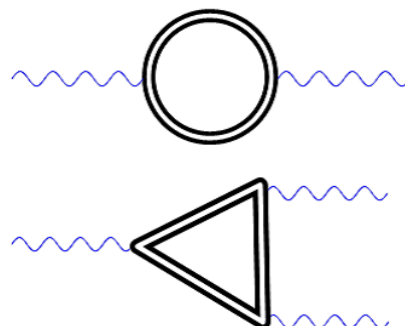


図 2: 高強度外部電磁場中での真空偏極テンソルと光子分裂ダイアグラム

が非常に大きいため、極限的な状況を必要とするからである。上述の臨界磁場 B_c の強度は 10^{13} Gauss 程度であり、これまでに実験室で実現された定常磁場に比べて 8 桁も大きく、非線形量子電磁気学の効果が顕著になる極限的な状況とはかけ離れている。

しかし近年、相対論的重イオン衝突イベントで非常に高強度の磁場が生成されている可能性が指摘され [2]、その強度を評価すると臨界磁場を最大で 4 桁も上回る事が知られている [3]。この高強度磁場は、「カイラル磁気効果」と名付けられた量子色力学的効果を実験で検出するための補佐的な存在として知られているが、非線形量子電磁気学的効果の側面にも注目し、高強度磁場を主役として生じる現象を検証してみるべきである。相対論的重イオン衝突では、非線形量子電磁気学的効果が歴史上初めて検証される可能性があるだけでなく、その効果が衝突時に生成されるクォーク・グルーオンプラズマの性質を解き明かす上で重要になる可能性がある。直接光子やレプトン対などの電磁気学的プローブはこの量子色力学的プラズマからいち早く抜け出すため、その直接的情報を豊富に含んでいる事が期待されているが、これ程に高強度の磁場が存在すれば、プローブ粒子と高強度磁場との相互作用を取り入れる事が、理論と実験の比較の上で必要になるはずである。これまでも、いくつかの現象論的研究がある [4, 5]。

他にも、通常の中性子星よりもさらに高強度の磁場を持つ天体「マグネター」の存在や [6]、臨界電磁場への到達を目指す高強度レーザー施設の建設が注目されている [7]。高強度場中の物理に関する総合的な会議が高エネルギー加速器研究機構で開かれ、その会議録がまとめられている [8]。また、相対論的重イオン衝突で現れるカラー電磁場の物理も含む最近の解説記事が、次の文献で得られる [9]。

臨界電磁場への到達が現実のものとなりつつある今、従来の理論研究よりもさらに一歩踏み込んだ詳細な理論解析が必要である。

3 高強度磁場中での真空複屈折

再足し上げたフェルミオンの伝搬関数が proper-time method によって得られれば、通常のファイマンルール中の自由伝搬関数をこれで置き換える事によって、非線形量子力学における素過程のダイアグラムを形式的に書き下す事ができる。特に光子の伝搬に限れば、図 2 に示す真空偏極テンソルと、さらにもう一本光子の外線を加えた三点関数が最も基本



図 3: 方解石中での複屈折: 入射光に対する電子の応答が異方的で、屈折率が偏光方向に依存する。二つの偏光成分に対する屈折角の違いにより、光路が分裂することで像が二重に見える。

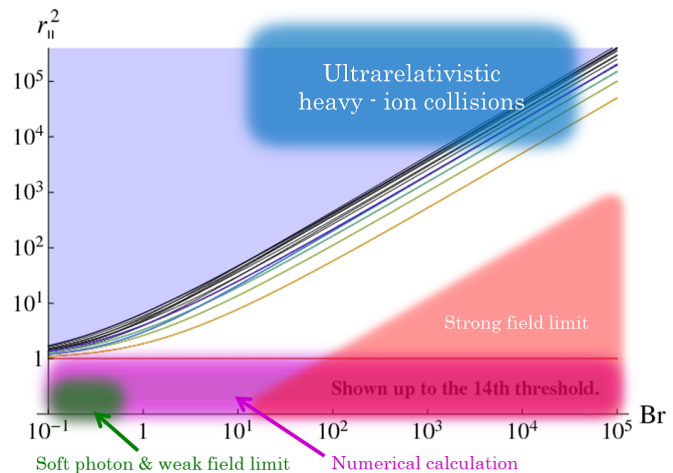


図 4: 外部磁場中での光子崩壊の閾値: フェルミオン粒子・反粒子ペアのランダウレベル上に光子崩壊の閾値が現れる。半透明に色づけされた領域は、これまでに得られている真空偏極テンソルの理論解析と、相対論的重イオン衝突実験における典型的なスケールの領域を表している。

的なものである。フェルミオン伝搬関数で構成される内線は、図1の再足し上げた伝搬関数を表している。後者の三点関数に注目すれば、非線形量子力学で起こる現象が、通常の真空中と質的に異なる事が直ちにわかる。このダイアグラムは1光子から2光子への分裂(あるいは、その逆過程として2光子から1光子への結合)を表しているが、このような奇数本の外線を持つ過程は通常の真空中ではFurryの定理によって禁止されている。しかし、外場中では偶数本の外線を持つダイアグラムが寄与するため、通常の真空中とは異なり光子の分裂・結合が起こる。

真空偏極の効果はダイアグラムからだけではわかりにくい。外部磁場によってローレンツ対称性が破れる事に注目すれば、その効果を推察できる。ローレンツ対称性が陽に破れれば、光速は通常の真空中とは異なり、さらに磁場の存在が系の特別な方向を与えるため、光子の屈折率は異方的、かつ偏光方向にも依存するようになる。この現象は物質中での「複屈折」に似ているため、「真空複屈折」と呼ばれている。図3は方解石の名で知られている鉍石中での複屈折を写したものである。結晶中のイオンに極性があれば、入射光に対する電子の応答が偏光方向に依存し、従って屈折率も偏光方向に対する依存性を持つ。二つの偏光成分が屈折角の違いによって異なる光路を通るために、図3のような二重の像が見られる。また、外場中では実光子に対しても真空偏極テンソルが虚部を持つ事が可能で、これは実光子からフェルミオン粒子・反粒子ペアへの崩壊を示している。相対論的重イオン衝突時に高強度磁場の存在の元でプラズマから放出される光子に対しても、これら外部磁場中で特有の光子の性質を考慮する必要があるだろう。

4 解析的手法による真空偏極テンソルの計算

これら図2に示されたダイアグラムを、proper-time method によって一見してコンパクトな形に形式的に書き下せたとしても、実際には非常に複雑な積分形の表式でしかない(詳細な表式は論文[1]とその引用文献を参照のこと)。それ故、これまでの理論研究は、限られた条件の元での近似計算に終わっていた。図4では、これまでに真空偏極テンソルの理論解析が得られているパラメータ領域まとめた。ここで重要な無次元量は、入射光子の縦運動量 $r_{\parallel}^2 = (\omega^2 - p_z^2)/(4m^2)$ (磁場の向きを z 方向に取っている) と、外部磁場の強度 $B_r = B/B_c$ である。相対論的重イオン衝突実験における典型的なスケールとの比較から、従来の理論解析のみでは不十分で、それを越えるものが必要であることがわかる。

解析の主な困難は、真空偏極テンソルが二重積分で書かれており、その被積分関数が非常に複雑なかたちをしていることによる。また、激しい振動的振舞いをするため、数値積分による解析も限られた領域でしか実行できていなかった。今回我々は、被積分関数を二重の無限和のかたちに展開することで、この二重積分を解析的に実行した。さらに、光子からフェルオン粒子・反粒子ペアへの崩壊が起こる運動学的条件(真空偏極テンソルが虚部を持つ条件)を調べると、二重和の二つの指数がフェルミオンペアのランダウ準位を表している事がわかった。つまり、光子の縦運動量 r_{\parallel}^2 がランダウ準位より大きくなる事が崩壊の条件で、縦運動量が大きくなるにつれて、指数が小さい項から順に複素数になることがわかった。始め、二重積分を行うための数学的手法として無限二重和への展開を導入したが、後に「ランダウ準位に対する足し上げ」という物理的解釈を与える事ができた。また、和の第一項目は、以前から知られていた最低ランダウ準位(図4中の“strong field limit”)での表式と完全に一致する事も確認できた。

5 展望

図4中の曲線は、ランダウ準位上に存在する閾値の位置を表している⁵。本研究における真空偏極テンソルの解析的な計算により、多くのランダウ準位が関与する相対論的重イオン衝突への応用の可能性が開けた。今後の現象論的な研究により、非線形量子電磁気学と相対論的重イオン衝突の物理において、相補的に理解が進むことが期待できる。

参考文献

- [1] K. Hattori and K. Itakura, “Vacuum birefringence in strong magnetic fields: (I) Photon polarization tensor with all the Landau levels”, [hep-ph/1209.2663]; *ibid*, “Vacuum birefringence in strong magnetic fields: (II) Complex refractive index in the lowest Landau level approximation”, in preparation.

⁵直ぐ上で述べた最低ランダウ準位の閾値は、 $r_{\parallel}^2 = 1$ (次元を持つ運動量では $q_{\parallel}^2 = 4m^2$) にあり、磁場の強度 B_r に依存しない。図4中の直線 $r_{\parallel}^2 = 1$ に対応する。

- [2] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, and H. J. Warringa, Nucl. Phys. A **803** (2008) 227-253.
- [3] V. Skokov, A. Y. Illarionov and V. Toneev, Int. J. Mod. Phys. A **24** (2009) 5925-5932; A. Bzdak and V. Skokov, “*Event-by-event fluctuations of magnetic and electric fields in heavy ion collisions*”, arXiv:hep-ph/1111.1949; W. T. Deng and X. G. Huang, Phys. Rev. C **85** (2012) 044907.
- [4] K. Tuchin, Phys. Rev. C **82** (2010) 034904 [arXiv:1006.3051 [nucl-th]], *ibid.* Phys. Rev. C **83** (2011) 017901 [arXiv:1008.1604 [nucl-th]], *ibid.* “*Electromagnetic radiation by quark-gluon plasma in magnetic field,*” arXiv:1206.0485 [hep-ph].
- [5] K. Itakura and K. Hattori, “*Effects of extremely strong magnetic field on photon HBT interferometry*”, nucl-th/1206.3022.
- [6] C. Thompson and R. C. Duncan, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **275** (1995) 255, *ibid.* Astrophys. J. **473** (1996) 322; A. K. Harding and D. Lai, Rept. Prog. Phys. **69** (2006) 2631 [astro-ph/0606674].
- [7] Euro. Phys. J. D, Volume 55, Number 2 / November 2009 “*Topical issue on Fundamental physics and ultra-high laser fields*”.
- [8] K. Itakura, et al. (eds) “*Proceedings of International Conference on Physics in Intense Fields (PIF2010)*,” 24-26 November 2010, KEK, Tsukuba, Japan, available from <http://ccdb5fs.kek.jp/tiff/2010/1025/1025013.pdf>
- [9] 板倉数記、原子核研究 第57巻1号 2012年 pp. 46.

Beyond the ladder analysis of chiral and color symmetry breaking using the non-perturbative renormalization group

Ken-Ichi Aoki^a, Kazuhiro Miyashita^b and Daisuke Sato^a
Kanazawa Univ.^a and Aichi Shukutoku Univ.^b

The dynamical chiral symmetry breaking and the color superconductivity in finite density QCD are analyzed using the non-perturbative renormalization group (NPRG) approach. We show that an approximation almost respecting the gauge independence can be realized in the framework of NPRG, and also report the result of analyzing the “ladder approximated” color superconductivity. The non-ladder extended approximation at finite density encounters a singularity of the β function for the 4-fermi coupling constant as long as the normal regulator functions are used.

Introduction.—The dynamical chiral symmetry breaking (D χ SB) has been analyzed by non-perturbative approaches such as the lattice simulation, the Schwinger-Dyson (SD) equation and so on. The lattice simulation is a most powerful tool to analyze QCD, but the simulation in the dense QCD is essentially difficult due to its sign problem. On the other hand, the SD approach does not suffer from the sign problem. Unfortunately, however, it is difficult to solve the SD equation beyond the ladder approximation, which has the strong gauge dependence of the physical quantities. Including the corrections of the non-ladder diagrams, which are crucial to recover the gauge independence, is difficult in the SD approach. In contrast to them, the non-perturbative renormalization group (NPRG) approach does not have the sign problem and may include the non-ladder corrections using the systematic approximation.

In this article, we show that in the NPRG approach we can define an approximation almost respecting the gauge independence. (The detailed discussion can be found in [1].) Also we report the result of analyzing the color superconductivity (CS), which is theoretically expected in dense QCD.

Effective action.—In order to evaluate the D χ SB and the CS in QCD, we use the Wetterich-type flow equation [2] as a formulation of NPRG. The flow equation is a functional differential equation of the effective action $\Gamma_\Lambda[\Phi]$, which is defined by suppressing the corrections of the quantum fluctuation with the momentum lower than the scale Λ , that is the infrared cutoff. Therefore, solving the flow equation toward the infrared limit, we obtain the full effective action, which is corrected by the full quantum fluctuations without the infrared cutoff, from a bare action of theories such as QCD. Here we skip the details of the flow equation (see reviews [3]).

The Wetterich-type flow equation is an exact equation giving the full effective action, however we cannot exactly solve it. For an approximation, we project the full operator space of the effective action of QCD onto the subspace of the following effective action:

$$\Gamma_\Lambda[\Phi] = \int_x \left\{ \frac{Z_A}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{\psi} (Z_\psi \not{\partial} + iZ_1 \bar{g}_s \mathbf{A}) \psi - V(\psi, \bar{\psi}; \Lambda) \right\}, \quad (1)$$

where the ghost sector is not displayed for simplicity. The operator subspace consists of the operators of the bare QCD action and the multi-Fermi operators $V(\psi, \bar{\psi}; \Lambda)$, which we call the fermion potential. The β function

for the gauge coupling constant agrees with the result of the one-loop perturbation theory because we ignore the higher dimensional operators including the gluon fields. Here we concentrate on evaluating the β function for the fermion potential, which plays the most important role for the D χ SB. Note that we work with the only fermion operators without relying on the bosonization as adopted in [4–6].

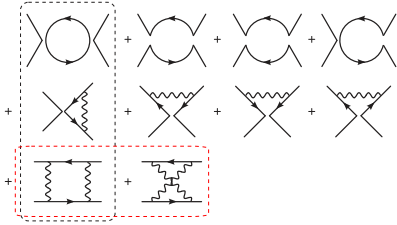
Lowering the cutoff scale, the gauge interaction induces the infinite number of multi-Fermi operators. Especially the 4-Fermi operator, whose β function is diagrammatically represented in Fig. 1, brings about the D χ SB at an intermediate scale as the Nambu–Jona-Lasinio model does. All the possible multi-Fermi operators cannot be evaluated, and we extract a class of the multi-Fermi operators relevant to the D χ SB. They are the scalar multi-Fermi operators represented by powers of $\sigma (\equiv \bar{\psi}\psi)$, and hence we evaluate the fermion potential as a function of σ , $V(\sigma; t)$.

Furthermore we need to limit the infinite number of interactions to constitute the β function. At first, we select the infinite number of the ladder type diagrams. The ladder diagrams of the the 4-Fermi β function correspond to the ones surrounded by the dashed line in Fig. 1. Then, the ladder-approximated flow equation [4] is given by the following partial differential equation (PDE),

$$\partial_t V(\sigma; t) = -\eta_\psi \sigma \partial_\sigma V + \frac{\Lambda^4}{4\pi^2} \log \left[1 + \frac{1}{\Lambda^2} \left(\partial_\sigma V + \frac{(3+\xi)C_2\pi\alpha_s}{\Lambda^2} \sigma \right)^2 \right], \quad (2)$$

where the ξ is the gauge-fixing parameter of the covariant gauge, C_2 is the second Casimir invariant of the quark representation in $SU(3)$ and $\alpha_s (\equiv Z_1^2 \bar{g}_s^2 / 4\pi Z_\psi^2 Z_A)$ is the running gauge coupling constant which obeys the one-loop perturbation theory. We introduce the infrared cutoff which stops running of the gauge coupling constant in order to take into account of the confinement [7]. The anomalous dimension of the quark field, η_ψ , is evaluated at $\sigma = 0$ using the momentum scale expansion as the sharp cutoff regulator function [8] is used here. We note that the ladder flow equation (2) gives the result equivalent to the improved ladder SD equation in the Landau gauge [4].

Solving the flow equation as PDE—Usually, in order to solve the flow equation, we expand the equation with respect to polynomials in the field operators, and define the coupled ordinary differential equations for the coupling constants of operators. The coupled equations, namely the RG equations, are numerically solvable, but the RG

FIG. 1: β function for the 4-Fermi operator.

flow cannot go below a critical infrared scale Λ_c because the flow of the 4-Fermi coupling constant diverges at Λ_c . Actually, the infrared singularity is related to the $D\chi$ SB by the correspondence between the 4-Fermi coupling constant and the susceptibility of the system, that is, the inverse mass of the composite channel meson.

Here we go beyond the critical scale Λ_c by solving the flow equation as a partial differential equation (PDE) without the bosonization and the field operator expansion. In the practical analysis, using the grid method, we numerically solve the PDE of the mass function $M(\sigma; t) \equiv \partial_\sigma V(\sigma; t)$, which is obtained by differentiating the flow equation (2). As realized by the name of the mass function, its value at $\sigma = 0$ is the effective quark mass.

The mass function is an odd function of σ because the operator subspace has the discrete chiral symmetry where the fermion potential is invariant under the γ_5 transformation: $\sigma \rightarrow -\sigma$ ($\psi \rightarrow \gamma_5 \psi$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \gamma_5$). Therefore the mass function at $\sigma = 0$ vanishes due to the chiral symmetry as long as it maintains the continuity. The numerical solution of the PDE of the mass function is shown in Fig. 2. The mass function at the ultraviolet scale,

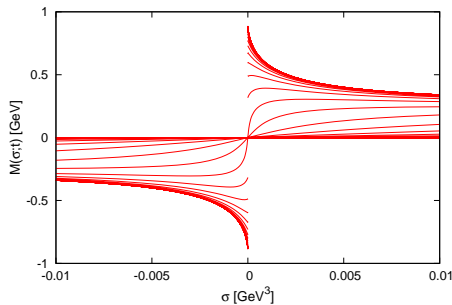


FIG. 2: Revolution of the mass function

namely its initial condition, vanishes since the bare QCD action has no multi-Fermi operators. Lowering the cut-off scale $\Lambda(t)$, the mass function grows up, but its value at the origin keeps vanishing above the critical scale Λ_c due to the chiral symmetry as noted above. At the scale Λ_c the slope of the mass function at the origin diverges. This divergence corresponds to the infrared singularity of the 4-Fermi coupling constant, which is the signal of the $D\chi$ SB in the fermionic system. Below the critical scale, the function loses the analyticity at the origin, and it has the finite jump around the origin. Actually it is impossible to solve the PDE with such singular point. In the practical numerical computation, we drop the singular point by transforming σ to the logarithmic variable $x = \log \sigma$. A solution allowing singular points can be mathematically authorized as a global solution, which is called the weak solution [9].

Beyond “the ladder”—The ladder approximation suffers from strong gauge dependence of the physical quantities. As for the β function for the 4-Fermi coupling constant, the contributions of the pair of the box and the crossed box diagrams surrounded by a red dashed line in Fig. 1 are crucial for the gauge independence. So we attempt to include such paired contributions of non-ladder diagrams at all orders. For this purpose, we introduce the corrected vertex, which consists of the ladder element and the crossed ladder element as shown in Fig. 3 [5]. Here the ingoing (outgoing) external line denotes a quark (antiquark) field, and the internal quark line denotes the dressed propagator, which consists of the infinite number of the ladder (large- N leading) interactions of the multi-Fermi operators as shown in Fig. 4.

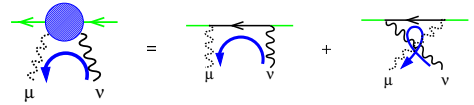


FIG. 3: Corrected vertex.

$$(\leftarrow)^{-1} = (\leftarrow)^{-1} - \left(\begin{array}{c} \vee \\ + \\ \ast \\ + \dots \end{array} \right)$$

FIG. 4: Dressed inverse propagator of the fermion.

Now the non-ladder extended flow equation for the fermion potential are represented by the infinite number of the ladder form diagrams using the corrected vertex, and can be summed up by the logarithmic functions as follows,

$$\partial_t V(\sigma; t) = \frac{\Lambda^4}{4\pi^2} \log \left[1 + \frac{B^2}{\Lambda^2} \right] + \frac{\Lambda^4}{4\pi^2} \log \left[1 + \xi \frac{MG}{\Lambda^2 + M^2} \right] + \frac{\Lambda^4}{8\pi^2} \log \left[\frac{\Lambda^2 + B^2}{\Lambda^2 + M^2} + \frac{3\Lambda^2 G^2}{(\Lambda^2 + M^2)^2} \right], \quad (3)$$

where $B = M + 2\Lambda^{-2}C_2\alpha_s\sigma$ and $G = 2\Lambda^{-2}C_2\alpha_s\sigma$. Here the commutator contributions of the generator of the $SU(3)_c$ is ignored, that is, the interactions are evaluated by Abelian factors only.

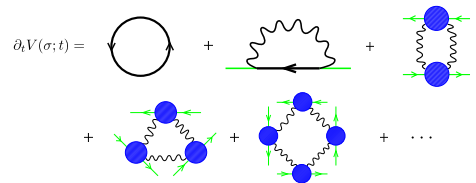


FIG. 5: Non-ladder extended flow equation

Numerical results—Evaluating the PDEs (2) or (3), we obtain the dynamical mass, defined by $m_{\text{dyn.}} = \lim_{\sigma \rightarrow +0} \lim_{t \rightarrow \infty} M(\sigma; t)$, the chiral order parameter. Moreover, we also obtain the chiral condensates $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{1\text{GeV}}$ (renormalized at 1 GeV) by introducing the bare mass term as its source term.

Figs. 6 and 7 show the gauge dependence of the chiral condensates and the dynamical mass, respectively. These results show that the chiral condensates obtained by the non-ladder flow equation (3) are much more stable against the gauge-fixing parameter than the ones obtained by the ladder approximated flow equation (2).

However the dynamical mass looks different. Indeed the dynamical mass is an off-shell quantity that is non-observable, although the chiral condensates are the observable. Therefore we claim that the non-ladder extended flow equation respects the gauge invariance for the physically observable quantities. Here it should be noted that, in the Landau gauge ($\xi = 0$), the almost gauge independent non-ladder result of the chiral condensates *coincides with* the gauge dependent ladder one.

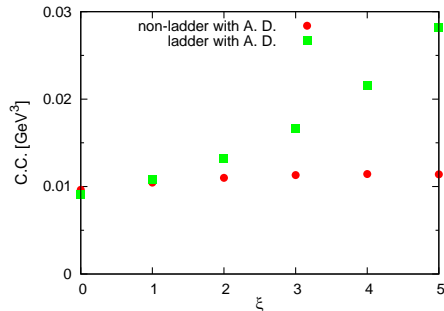


FIG. 6: Gauge dependence of the chiral condensates $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{1\text{GeV}}$ (C.C.).

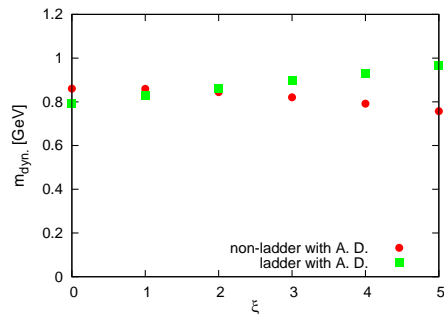


FIG. 7: Gauge dependence of the dynamical mass ($m_{\text{dyn.}}$).

Color superconductivity—In extremely dense matters such as the interior of compact stars, the color superconductivity (CS) is theoretically predicted, where the color antisymmetric diquark pair behaves like the Cooper pair in the BCS theory due to its attractive channel of exchanging gluons. In the rest of this article, we show the result of analyzing the two flavor color superconductivity (2SC) with the massless quarks. So as to evaluate the 2SC in our framework, we extract the diquark-type scalar operator, $\Delta \equiv \bar{\psi}^C i\sigma_2 \lambda_2 \gamma_5 \psi + \bar{\psi} i\sigma_2 \lambda_2 \gamma_5 \psi^C$, where σ_2 and λ_2 are the antisymmetric elements of the Pauli matrices in the flavor space and the Gell-Mann matrices in the color space, respectively. Using the ladder approximation, we can write down the flow equation (PDE) of the

fermion potential which is a function of two variables, σ and Δ . Fig. 8 shows the dependence on the density μ of the chiral condensates $\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{1\text{GeV}}$ and diquark condensates $|\langle\bar{\psi}^C i\gamma_5 \sigma_2 \lambda_2 \psi\rangle_{1\text{GeV}}|$ calculated by the PDE. Increasing the density, the chiral condensates vanishes at the critical density, $\mu_c = 0.43$ GeV, and the diquark condensates has a finite value at this density μ_c .

The ladder approximated result has strong gauge dependence, and therefore we extend the approximation to the non-ladder one. However the non-ladder β function for the 4-Fermi coupling constant has a singularity around $\mu \sim 0.3$ MeV. This singularity is induced by the non-ladder type diagrams in Fig. 1. The loop integrals of these diagrams has a singular factor, $1/(\Lambda^2 - \mu^2 + m^2)$, as

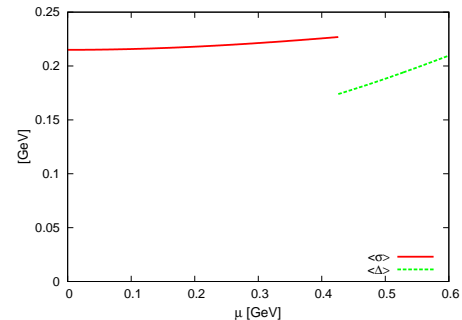


FIG. 8: Phase transition of the chiral symmetry and color superconductivity at finite density. $\langle\sigma\rangle$ and $\langle\Delta\rangle$ denote the chiral condensates and the diquark condensates, respectively.

long as the diquark condensates vanishes. This singularity should be distinguished from the infrared divergence of the 4-Fermi coupling constant induced by its quadratic term in the β function.

We guess the β function singularity of the non-ladder diagrams comes from the fact that the regulator function does not properly evaluate the fluctuations of the modes around the Fermi surface. Therefore, by adopting an appropriate regulator function respecting the Fermi surface structure, we may resolve the singularity problem.

Conclusion—We developed a non-ladder extended flow equation of the fermion potential in QCD, and it gives gauge independent results for the chiral condensates. We also analyzed the finite density QCD and showed the phase transition between the dynamical chiral symmetry breaking and the color superconductivity. Non-ladder extension of the finite density system has a new singularity which requires improvement of the regulator function.

-
- [1] K. -I. Aoki and D. Sato, in preparation (2012).
[2] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301** (1993) 90.
[3] K. -I. Aoki, Int. J. Mod. Phys. B **14** (2000) 1249. , J. Berges, N. Tetradis and C. Wetterich, Phys. Rept. **363** (2002) 223, hep-ph/0005122. , J. M. Pawłowski, Annals Phys. **322** (2007) 2831, hep-th/0512261. , and H. Gies, hep-ph/0611146.
[4] K. -I. Aoki, K. Morikawa, J. -I. Sumi, H. Terao and M. Tomoyose, Phys. Rev. D **61** (2000) 045008 [hep-th/9908043].
[5] K. -I. Aoki, K. Takagi, H. Terao and M. Tomoyose, Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 815 [hep-th/0002038].
[6] H. Gies and C. Wetterich, Phys. Rev. D **65** (2002) 065001, hep-th/0107221; Phys. Rev. D **69** (2004) 025001, hep-th/0209183.
[7] K. Higashijima, Phys. Rev. D **29**, 1228 (1984).
[8] T. R. Morris, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 2411, hep-ph/9308265; Nucl. Phys. B **458** (1996) 477, hep-th/9508017.
[9] K. -I. Aoki, S. -I. Kumamoto and D. Sato, in preparation (2012).

Effects of fluctuations for QCD phase diagram with isospin chemical potential

上門和彦 京都大学基礎物理学研究所

1 序

本講演では共同研究 [1] に基づき、汎関数くりこみ群方程式を用いて 2-flavor, 3-color QCD の有限アイソスピン化学ポテンシャルの相構造について解析した結果について報告を行う。

強い力を記述する量子色力学 (QCD) は有限温度、有限バリオン密度で様々な相構造を持つことが予見されており、QCD 相図の研究は理論的実験的両面から進められている。格子 QCD は第一原理から QCD 相図を研究可能な強力な手法である。しかしながら有限バリオン密度においては、フェルミオンの行列式が複素数になる符号問題があり未だに低温、高化学ポテンシャル ($\mu \gg T$) は到達不可能な領域である。このために有限バリオン密度の相構造を研究するためには、Nambu-Jona-Lasinion (NJL) 模型やクオークメソン (QM) 模型などのような、QCD の低エネルギーの励起モードで構成された有効模型が用いられる。

有限の化学ポテンシャルに対しても符号問題が生じない状況も存在する。そのような系に対して有効模型を構成し相構造を調べ格子 QCD の結果と比較することで、有効模型の信頼性を議論することが可能となる。本研究ではいくつか提案されている符号問題がない系のうち、アイソスピン化学ポテンシャルが有限の 3-color、2-flavor の QCD [2] について QM 模型を一般化した有効模型を構成し相構造を議論する。アイソスピン化学ポテンシャル (μ_I) は u クオークと d クオークの化学ポテンシャルの差として定義される。

$$\begin{aligned}\mu_u &= \mu + \mu_I \\ \mu_d &= \mu - \mu_I\end{aligned}\tag{1}$$

この系の面白い特徴として Silver Blaze と呼ばれるゼロ温度での特別な振る舞いが知られている [3]。ゼロ温度、ゼロクオーク化学ポテンシャルにおいて μ_I を増加させていった場合、通常のハドロン相から、パイオン凝縮相への二次相転移が起こる。Silver Blaze とは転移が起こる μ_I が真空のパイオンの質量の半分と一致するという特徴である。これらは QCD が厳密に持つ性質のため、有効模型を構成した場合にその模型は Silver Blaze 関係を満たさなければならない。

一般に相構造を調べるためには、有効ポテンシャルを系のラグランジアンから計算することが必要になる。有効ポテンシャルを計算するためにしばしば場の期待値の周りのゆらぎを無視する平均場近似が用いられる。この近似は二次相転移点近傍や強いクロスオーバー相転移点の近傍では、ゆらぎの効果が大きくなることから、破綻することが知られておりこれらを超えた計算手法が必要である。本研究では平均場近似を超えて、ゆらぎの効果を取り込むために汎関数くりこみ群 (FRG) 方程式 [4] を用いる。FRG 方程式は有効ポテンシャルの計算方法の一つであり、スケール依存した有効作用に対する汎関数微分方程式として構成されている。FRG 方程式を以下で説明する近似のもとで解くことで、ゆらぎの効果を取り入れた有効ポテンシャルの計算を行う。

2 定式化

本研究の出発点となるのは有限温度、有限バリオン密度中でのカイラル対称性を記述するのに用いられるクオークメソン (QM) 模型である。QM 模型はクオーク、シグマメソン、パイメソンで構成されており、有限アイソスピン化学ポテンシャルに拡張された QM 模型のラグランジアンは

以下のように与えられる

$$\mathcal{L}_{QM+\mu_I} = \psi S_0^{-1} \bar{\psi} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi_0)^2 + U(\rho^2, d^2) - c\sigma + \frac{1}{2}((\partial_\mu + 2\mu_I \delta_\mu^0)\pi_+ (\partial_\mu - 2\mu_I \delta_\mu^0)\pi_-). \quad (2)$$

有限のアイソスピン化学ポテンシャルの場合にはメソン場 $\sigma, \vec{\pi}$ のうち σ と π_+ の期待値がゼロでない可能性がありこれらを変数として有効ポテンシャル $U(\sigma, \pi_+)$ を計算しなければならない。

与えられた有効模型に対して有効ポテンシャルとメソンの2点関数を計算するために汎関数くりこみ群 (FRG) 方程式を用いる。FRG 方程式はスケールに依存した有効作用 Γ_k のスケール依存性を記述し、汎関数微分方程式で与えられる。Fig. 1(a) と Fig.1(b) は有効作用とメソンの2点関

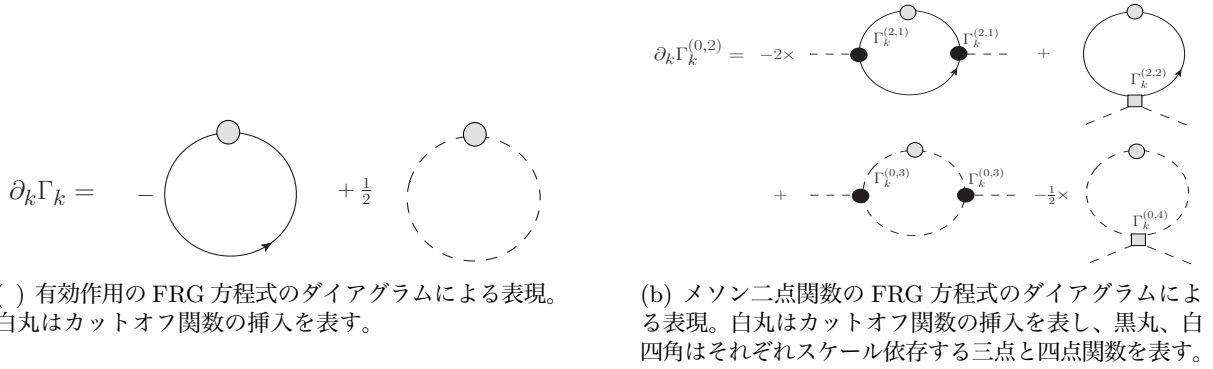


Figure 1: FRG 方程式のダイアグラムによる表現

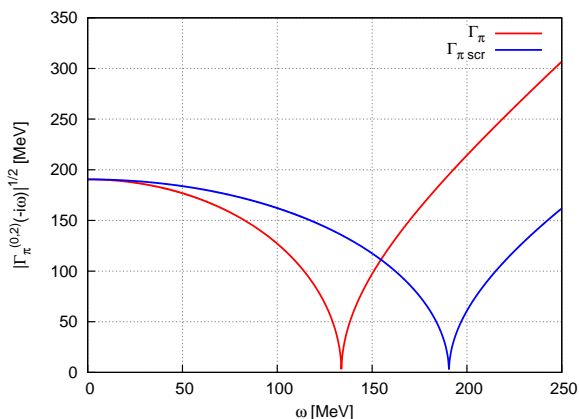
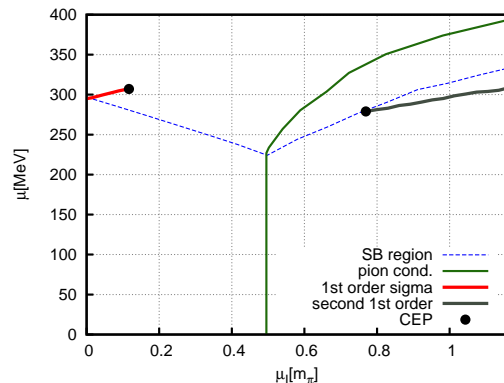
数の汎関数くりこみ群方程式のダイアグラムによる表現である。これらの方程式の特徴は有効作用の方程式には二点関数（の逆）が、二点関数の方程式には三点と四点関数が現れていることである。一般にFRG方程式を解くためには無限個の連立汎関数微分方程式を解かなければならず、不可能である。そのため本研究では有効ポテンシャルとメソン二点関数を解くためにローカルポテンシャル近似 (LPA) と呼ばれる近似を用いる。LPAでは有効作用の形をスケール依存する有効ポテンシャルと運動項で書けると仮定して以下のように近似する、

$$\Gamma_k^{\text{LPA}}[\rho^2, d^2] = T \sum_n \int d^3x \mathcal{L}_{QM+\mu_I} |_{U \rightarrow U_k(\rho^2, d^2)}. \quad (3)$$

このLPA有効作用をFRG方程式に代入することで、有効ポテンシャルとメソン二点関数までで閉じた方程式を得ることができる。得られた有効ポテンシャルとメソン二点関数の方程式をオーダーパラメータ (σ, π_+) のグリッドに分割して解くことで有効ポテンシャルとメソン二点関数を得る。

3 結果

ここではゼロ温度の場合について数値計算を行なって得られた結果について説明する。まず Fig. 2(a) は真空 ($\mu = \mu_I = 0$) でのパイオン二点関数 $\Gamma_\pi^{(0,2)}(\omega)$ のFRG方程式による解である。赤線は二点関数のFRG方程式をモーメント依存まで含めて解いた解を示し、青線は有効ポテンシャルの曲率を用いて定義した $\Gamma_{\pi,scr} \equiv -\omega^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial \sigma^2}$ を表す。赤線のパイオン二点関数がゼロとなる133[MeV]がパイオンのポール質量に対応しており、青線のパイオン二点関数がゼロとなる訳188[MeV]が有効ポテンシャルの曲率による質量に対応している。これまでの多くの先行研究では、後者の有効ポテンシャルの曲率によりパイオンの質量が定義されており、我々が計算した二点関数のポールによる質量とは30%ほどの違いがあることがわかる。

(a) $\mu = \mu_I = 0$ でのパイオン 2 点関数(b) μ μ_I 平面での相図。赤い実線はカイラルの一次相転移を示す。緑の点線はパイオン凝縮相への 2 次相転移を表し、緑の実線は 1 次相転移を表す。Figure 2: $T = 0$ での計算結果

一方で有効ポテンシャルの計算からパイオン凝縮相への相転移の起こる μ_I^c を見積もることが可能である。Silver Blaze 関係は μ_I^c とパイオン質量の関係を示すものであり、ポテンシャルの情報からどちらの質量を用いるべきか決めることができる。その値は $2\mu_I^c = 136.6[\text{MeV}]$ であり、この結果は二点関数のポールを用いた質量の定義と 3% しか変わらず、パイオンの質量の定義に曲率質量ではなくポール質量を用いなければならないことを示している。

Fig. 2(b) は $T = 0$ での相構造を μ - μ_I 平面に図示したものである。赤の実線は一次のカイラル相転移を表しており、この線上で低い μ 側のハドロン相から高い μ の QGP 相へ相転移が起こる。緑の実線はパイオン凝縮相と通常相との二次相転移を表しており、 μ_I が高い側にパイオン凝縮相 ($\pi_+ \neq 0$) が現れる。パイオン凝縮相が起こる μ_I は Silver Blaze の議論と一致しており、低い μ の領域では、ポール質量から決めたパイオン質量と $\mu_I = 2M_\pi$ の関係を満足している。

青の点線は与えられた μ_I でのクォーク質量 $M_q(\mu_I)$ を表している。 μ_I を固定して μ を増加させていった場合、この青い線の内側では真空は安定であり二次相転移は起こり得ない。そのため一次相転移が起こりクォークの質量が変わらない限り、クォークを励起させることができず、青の線を超えるまでは $\mu = 0$ と同じ状態 (圧力一定、ゼロバリオン密度) が続く。青の線を超えたところでクォークが励起され始め、バリオン密度が有限となる。高い μ_I 側にある黒い実線はパイオン凝縮相中での一次相転移を示しており、一次相転移によってクォークの質量が減少し黒線よりも高い μ ではバリオン密度が有限となる。

以上のように我々は汎関数くりこみ群方程式を有効模型に適用し、アイソスピン化学ポテンシャルが有限の場合の QCD の相構造を調べた。二点関数のポールを用いてパイオンの質量を定義することで、QCD の持つ Silver Blaze と呼ばれる関係を満足できることを示した。

References

- [1] K. Kamikado, N. Strodthoff, L. von Smekal and J. Wambach, arXiv:1207.0400 [hep-ph].
- [2] D. T. Son and M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 592.
- [3] T. D. Cohen, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 222001;
- [4] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301** (1993) 90.

Quark-Hadron Phase Transition in an Extended NJL Model with Scalar-Vector Eight-Point Interaction

李 東奎¹、津江 保彦²、João da Providência³、Constança Providência³、山村 正俊⁴

¹ 高知大総人自、² 高知大理、³ コインブラ大、⁴ 関西大工

1 Introduction

高温・高密度等の極限状況下における強い相互作用する多体系を理解することは、ハドロン物理の重要な課題の一つである。特に、有限温度・密度におけるクォーク・ハドロン多体系が環境変化に応じてどのような相転移を起こすのか、またどのような相図を描くのかを解明することは宇宙初期の状態および中性子星内部構造の理解に繋がるものとして非常に興味深い問題である。本稿では、有限密度側に注目し、有限温度・密度におけるクォーク・ハドロン相転移について考察する。

2 Extended NJL model for nuclear and quark matters

有限温度・バリオン化学ポテンシャルにおけるクォーク・ハドロン相転移を記述するために、本研究では核物質およびクォーク物質の有効モデルとして、scalar-vector 型 8 点相互作用を含んだ拡張された NJL モデルを用いる。NJL モデル [1] は当初核子のモデルとして始まり、現代ではクォーク物質のモデルとして扱われているものの、核物質のモデルとしても広く用いられてきた [2]。そこで、ここでは核物質を扱うモデルとして、オリジナルの NJL モデルに vector-vector 型 4 点相互作用と scalar-vector 型 8 点相互作用を導入した拡張された NJL モデルを適用する [3]。これは Walecka モデル [4] に対応するようなもので、核物質の飽和性を再現するモデルとなっている。一方、クォーク物質についても scalar-vector 型 8 点相互作用を導入した拡張された NJL モデルを適用しており、この 8 点の導入により scalar coupling が密度依存性を持ち、結果 vector 型相互作用と似たカイラル対称性の回復を遅くする効果を持つ。核物質・クォーク物質に対する Lagrangian 密度 (2-flavor) は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i = & \bar{\psi}_i i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_i + G_s^i [(\bar{\psi}_i \psi_i)^2 + (\bar{\psi}_i i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \psi_i)^2] - G_v^i (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i)(\bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i) \\ & - G_{sv}^i [(\bar{\psi}_i \psi_i)^2 + (\bar{\psi}_i i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} \psi_i)^2] (\bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i)(\bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_i) \end{aligned} \quad (1)$$

核物質 ($i = N$) に対して、核子場 ψ_N を color 数 1 の基本場として扱う。パラメータ ($G_s^N, G_v^N, G_{sv}^N, \Lambda_N$) については真空と通常核密度での nucleon mass、および核物質の飽和性の条件から決定する。ここで、このモデルは非線り込みなので 3 次元運動量カットオフ Λ_i を導入している。一方、クォーク物質 ($i = N$) に対しては color 数 3 をとり、dynamical quark mass と pion decay constant からパラメータ (G_s^q, Λ_q) を決定する。パラメータ G_{sv}^q (scalar-vector coupling) はフリーパラメータであり、ここでは典型的な場合として $G_{sv}^q \Lambda_q^8 = -68.4$ に取った結果について述べる。また、scalar-vector 相互作用は vector 相互作用と似たカイラル相転移を弱める効果を担っているので、パラメータ G_v^q (vector coupling) については今回 $G_v^q = 0$ とし、ここでは G_{sv}^q に注目して調べる。

クォーク・ハドロン相転移を記述する際、いずれの相が実現しているのかについては両相の圧力を比較することにより決定する。もちろん、NJL からの拡張なのでカイラル相転移についても記述することが可能であり、ここでもクォーク物質の圧力を比較することにより物理的に実現する解を決定する方法を取っている。

3 Numerical results

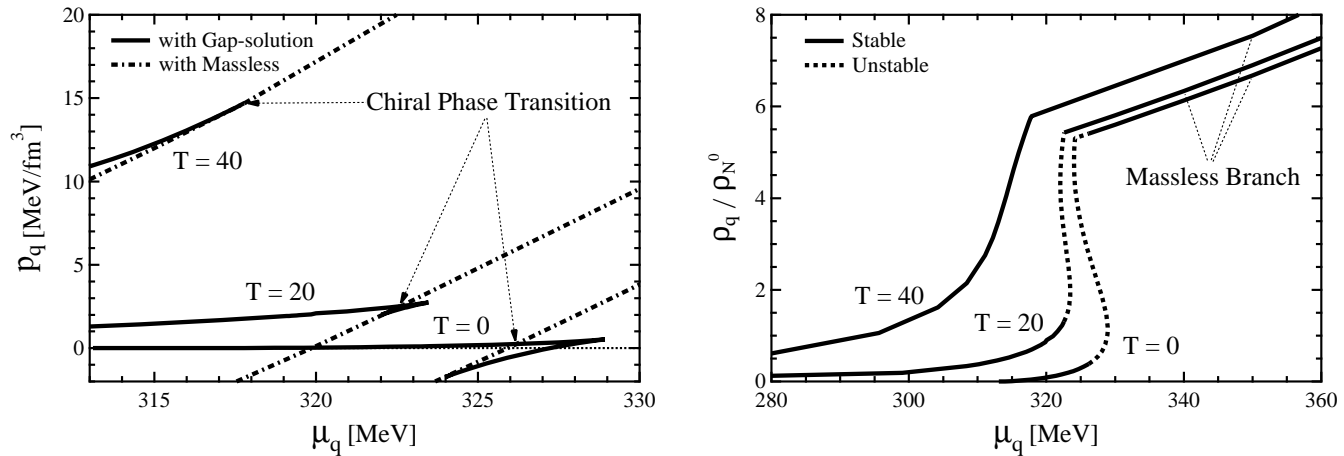


図1 温度 0, 20, 40 MeV でのクォーク物質の圧力 (左) とクォーク数密度 (右)。

図1の左側は、温度 0, 20, 40 MeV でのクォーク物質の圧力を表している。実線は Gap-solution を拾って計算した結果で、破線は massless の値を拾った結果である。ここで、物理的に実現する解は圧力が最大の値を持つ解である。すると、温度 0, 20, 40 MeV においてクォーク化学ポテンシャル μ_q がそれぞれ 326, 323, 318 MeV あたりで massless branch に乗り移っていることから、そこでカイラル対称性の回復 (カイラル相転移) が起きていることがわかる。これと対応する密度表示のグラフ (図1の右側) では、温度 0, 20 MeV において一次相転移が実現し、温度 40 MeV では二次相転移が実現していることがわかる。以上と同じような方法で、有限温

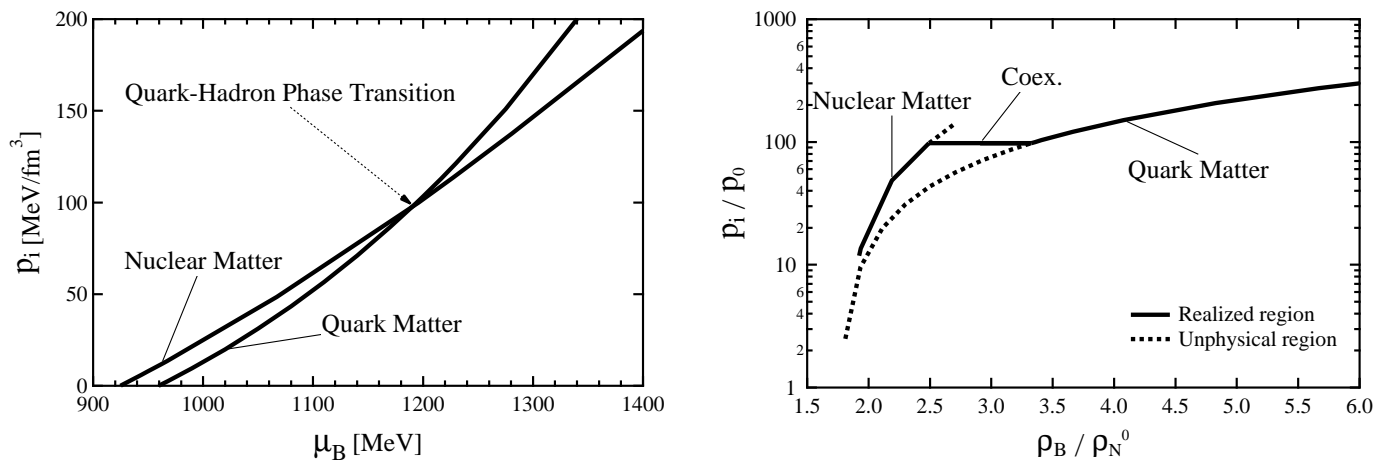


図2 温度 20 MeV でのクォーク・ハドロン相転移。左は圧力表示、右は密度表示。

度・密度でのクォーク・ハドロン相転移について調べる。ここで、ハドロン相とクォーク相の熱平衡条件として $p_N(\mu_N, T) = p_q(3\mu_q, T)$ を課す。紙面の都合上、ここでは温度 20 MeV の場合を例にとって説明する。図2の左側は、温度 20 MeV での核物質とクォーク物質の両圧力を表している。低密度側では核物質が実現し、高密度側ではクォーク物質が実現している。このとき、バリオン化学ポテンシャル μ_B が 1190 MeV あたりでクォーク・ハドロン相転移が起こり、対応する密度表示のグラフ (図1の右側) から核物質相とクォーク相が共存する状態が起こることから、このクォーク・ハドロン相転移は一次相転移であることがわかる。

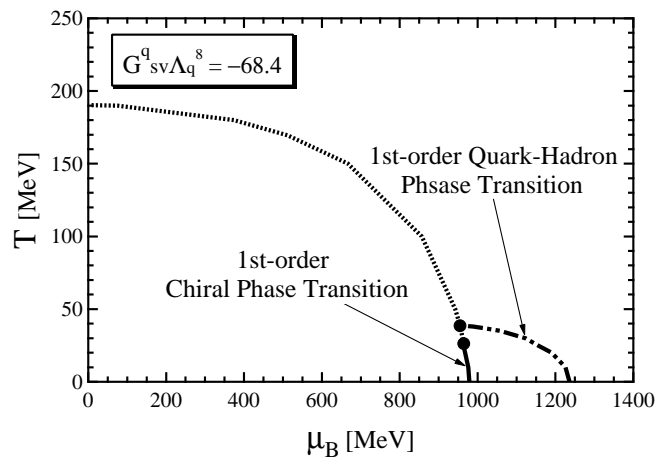


図3 拡張された NJL モデルでの相図 (with $G_{sv}^q \Lambda_q^8 = -68.4$).

結果として、 G_{sv}^q を含む拡張された NJL モデルでの相図は図3のように描かれる [5]。実線と点線はそれぞれ一次と二次のカイラル相転移線を表し、二点鎖線は一次のクォーク・ハドロン相転移線を表す。ここで、クォーク・ハドロンの相境界の内側の領域において、核物質相であるにもかかわらずクォーク物質的にカイラル対称性が回復している領域が現れる。これは Quarkyonic 相 [6] に対応するものであると考えられる。

また、フリーパラメータ G_{sv}^q の強さを変えることにより相図はどのような影響を受けるのかについて、一次のカイラル相転移線が G_{sv}^q の coupling の強さを大きくするにつれて shrink し、さらに大きくすると消えてしまう結果となった。一次のクォーク・ハドロンの相境界については変化はなく、 G_{sv}^q に依存しないことがわかった。

4 Summary and Future Work

本稿では、有限温度・バリオン化学ポテンシャルにおけるクォーク・ハドロン相転移について論議した。核物質とクォーク物質に対して G_{sv}^q を含んだ拡張された NJL モデルによる解析の結果、一次のクォーク・ハドロン相転移を記述することができ、その相図を得ることができた。このとき、カイラル対称性は回復しているが励起はハドロ的な核物質相がこのモデルにおいて現れることがわかった。今回対称核物質とフリーなクォーク相を扱ったが、カラー超伝導相の考慮や中性子物質とクォーク物質の間での相転移を考察することも面白く、中性子星物理に関連するものとして興味深い。

参考文献

- [1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961), 345; *ibid.* **124** (1961), 246.
- [2] V. Koch, T. S. Biro, J. Kunz and U. Mosel, Phys. Lett. **B185** (1987), 1.
W. Bentz and A. W. Thomas, Nucl. Phys. **A 693**, (2001), 138.
S. A. Moszkowski, C. Providência, J. da Providência and J. M. Moreira, nucl-th/0204047.
- [3] Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência and M. Yamamura, Prog. Theor. Phys. **123** (2010), 1013.
- [4] B. D. Serot and J. D. Walecka, Int. J. Mod. Phys. E **6**, (1997), 515.
- [5] T.-G. Lee, Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência and M. Yamamura, arXiv:1207.1499 [hep-ph].
- [6] L. McLerran and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A **796** (2007), 83.

超演算子形式から見た非平衡 Thermo Field Dynamics の 熱的真空の構造

中村祐介, 山中由也
早大基幹理工電子光システム

1 はじめに

実時間正準場の理論形式である Thermo Field Dynamics (TFD) は、空間の自由度を倍加することによって熱的な混合状態期待値を、倍加された空間における純粋状態（熱的真空）の期待値として表現する形式である [1, 2]。TFD では密度演算子の情報は全て熱的真空にとって代わられるが、その際密度演算子がある特別な構造を持っていることを仮定していた。本研究では超演算子形式 [3] における準粒子描像という概念から、我々が用いている非平衡 TFD 形式を導き、非平衡 TFD では仮定であった密度演算子の特別な構造が、より基本的な要請から自然に得られることを示す。なお本研究では自発的対称性が破れていない場合のみを扱う。

本稿では表記簡単化の為、1 モードの Bose 粒子系のみを記す。Fermi 粒子系、多モードの系への拡張は容易である。

2 超演算子形式

本章では Schmutz による超演算子形式 [3] を簡単にレビューする。

生成消滅演算子 a, a^\dagger の粒子数状態 $\{|m\rangle\}$:

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} a^{\dagger, m} |0\rangle \quad \langle m|m'\rangle = \delta_{mm'}, \quad \sum_m |m\rangle \langle m| = 1 \quad (1)$$

で張られる Fock 空間 \mathcal{H} を考える。 \mathcal{H} に作用する線形演算子の集合は Liouville 空間と呼ばれる線形空間 $\bar{\mathcal{H}}$ をなす。 $\bar{\mathcal{H}}$ の要素を $|A\rangle$ の様に二重ブラケットで表記することにし、その内積を $\langle\langle A|B\rangle\rangle = \text{Tr}[A^\dagger B]$ と定義する。 $\bar{\mathcal{H}}$ の完全正規直交系は $\{|m, n\rangle\rangle = ||m\rangle\langle n|\rangle\rangle$:

$$\langle\langle m, n|m', n'\rangle\rangle = \delta_{mm'}\delta_{nn'}, \quad \sum_{m, n} |m, n\rangle\rangle \langle\langle m, n| = 1 \quad (2)$$

である。 \mathcal{H} 上の演算子 A を別の演算子 B に変換する超演算 $\hat{O} : A \mapsto B$ は、超演算子形式では $\hat{O}|A\rangle\rangle = |B\rangle\rangle$ と表記される。超演算 $\check{a}, \check{a}^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$ をそれぞれ

$$\check{a} : A \mapsto aA, \quad \check{a}^\dagger : A \mapsto a^\dagger A, \quad \tilde{a} : A \mapsto Aa^\dagger, \quad \tilde{a}^\dagger : A \mapsto Aa \quad (3)$$

と定義すると

$$\check{a}|m, n\rangle\rangle = \sqrt{m}|m-1, n\rangle\rangle, \quad \check{a}^\dagger|m, n\rangle\rangle = \sqrt{m+1}|m+1, n\rangle\rangle, \quad (4)$$

$$\tilde{a}|m, n\rangle\rangle = \sqrt{n}|m, n-1\rangle\rangle, \quad \tilde{a}^\dagger|m, n\rangle\rangle = \sqrt{n+1}|m, n+1\rangle\rangle \quad (5)$$

及び交換関係

$$[\check{a}, \check{a}^\dagger] = 1, \quad [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad \text{otherwise} = 0 \quad (6)$$

が成立する。従って $|m, n\rangle\rangle$ は \check{a}, \tilde{a} に対する Fock 空間とみなすことも出来る :

$$|m, n\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n!}} (\check{a}^\dagger)^m (\tilde{a}^\dagger)^n |0, 0\rangle\rangle \quad (7)$$

3 Liouville 空間における非摂動表現と準粒子描像

Schödinger 描像における Liouville-von Neumann 方程式

$$i \frac{d}{dt} \rho_S(t) = [H_S, \rho_S(t)] \quad (8)$$

で記述される熱的な系を考える。超演算子形式では Liouville-von Neumann 方程式を

$$i \frac{d}{dt} |\rho_S(t)\rangle\rangle = \hat{H}_S |\rho_S(t)\rangle\rangle \quad (9)$$

と表すことが出来る。ただし $\hat{H}_S = \check{H}_S - \tilde{H}_S$ である。また熱的な期待値は

$$\text{Tr}[A_S \rho_S(t)] = \langle\langle I | A_S(t) | \rho_S(t) \rangle\rangle \quad (10)$$

と書かれる。ここで $\langle\langle I | = \sum_m \langle\langle m, m |$ である。

続いてある非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_u(t)$ を選び、相互作用描像を定義する：

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \hat{U}(t) \hat{H}_u(t), \quad \check{a}(t) = \hat{U}^{-1}(t) \check{a}_S(t) \hat{U}(t), \quad \tilde{a}(t) = \hat{U}^{-1}(t) \tilde{a}_S(t) \hat{U}(t), \quad (11)$$

Liouville 空間や密度演算子は相互作用描像の $\{\check{a}, \tilde{a}\}$ -演算子を通して構築されるため、 $\hat{H}_u(t)$ の選び、準粒子描像を明確に定義することが重要である。しかし熱的状況（特に非平衡系）においてその選択は自明ではない。我々は以下の3つ基本的な要請を課すことによって、それらを決定していく。

- (a) 各時刻において準粒子描像が存在すること
- (b) 未来のマクロな量が現在に影響を及ぼさない、という熱的な因果律
- (c) $t = \infty$ で熱平衡になること

基本要請 (a) により、自発的対称性が破れていない場合の非摂動ハミルトニアンは $\check{a}\tilde{a}$, $\check{a}^\dagger\tilde{a}^\dagger$, $\check{a}^\dagger\tilde{a}$, $\tilde{a}^\dagger\check{a}$ と c 数の線形結合で書けなければならない。また密度演算子は一般的に $|\rho_0(t)\rangle\rangle = \sum p_m(t) |m, m\rangle\rangle$ と書けると仮定する。ここで密度演算子が (i) エルミート性 $\rho_0^\dagger(t) = \rho_0$ 、(ii) 規格化 $\text{Tr}[\rho_0(t)] = 1$ 、(iii) 正値性 $\langle\varphi | \rho_0(t) | \varphi \rangle \geq 0$ for any $|\varphi\rangle$ を満たしていることを要請すると

$$p_m(t) = p_m^*(t), \quad \sum_m p_m(t) = 1, \quad p_m(t) \geq 0, \quad (12)$$

$$\left(\hat{H}_u(t) \right)^\sim = -\hat{H}_u(t), \quad \langle\langle I | \hat{H}_u(t) = 0 \quad (13)$$

という制約が付く。これにより相互作用描像における $\hat{H}_u(t)$ は3つの実パラメータ $n(t)$, $\omega(t)$, $\gamma(t)$ を用いて一般的に

$$\begin{aligned} \hat{H}_u(t) = & \omega(t) \left(\check{a}^\dagger \tilde{a} - \tilde{a}^\dagger \check{a} \right) + i \dot{n}(t) \left(\check{a}\tilde{a} + \check{a}^\dagger \tilde{a}^\dagger - \check{a}^\dagger \tilde{a} - \tilde{a}^\dagger \check{a} - 1 \right) \\ & + i \gamma(t) \left(\check{a}\tilde{a} + \frac{n(t)}{1+n(t)} \check{a}^\dagger \tilde{a}^\dagger - \frac{1+2n(t)}{2(1+n(t))} \left\{ \check{a}^\dagger \tilde{a} + \tilde{a}^\dagger \check{a} \right\} - 1 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

と書くことが出来る。これらのパラメータのうち $\omega(t)$ はミクロな量である励起エネルギーと解釈できるが、残りの2つはマクロな量である。特に $n(t)$ は粒子分布 $\langle\langle I | a^\dagger a | \rho_0 \rangle\rangle$ そのものである。

$A_i = \check{a}, \check{a}^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$ と置き、非摂動伝搬関数

$$\begin{aligned} \Delta(t_1, t_2) &= -i \langle\langle I | T[A_1(t_1)A_2(t_2)] | \rho_0 \rangle\rangle \\ &= -i\theta(t_1 - t_2) \langle\langle I | A_1(t_1)A_2(t_2) | \rho_0 \rangle\rangle - i\theta(t_2 - t_1) \langle\langle I | A_2(t_2)A_1(t_1) | \rho_0 \rangle\rangle \end{aligned} \quad (15)$$

を考える。基本要請 (b) が満たされてる為には、式 (15) の右辺第 1 項からは $n(t_1), \gamma(t_1)$ 、第 2 項からは $n(t_2), \gamma(t_2)$ の寄与が消えなくてはならない。そのことより $\gamma(t) = 0$ でなくてはならないことが導かれる。

以上により非摂動ハミルトニアン $\hat{H}_u(t)$ の構造が得られた。 $\hat{H}_u(t)$ は励起エネルギー $\omega(t)$ と粒子分布 $n(t)$ をパラメータに持つ。さらにこの構造と Heisenberg 方程式により $p_m(t)$ の従う方程式として

$$\dot{p}_m(t) = \dot{n}(t) \left\{ (m+1)p_{m+1}(t) - (2m+1)p_m(t) + mp_{m-1}(t) \right\} \quad (16)$$

を得る。ここで $q_m(t) = \sqrt{m+1} \{ (1+n(t))p_{m+1}(t) - n(t)p_m(t) \}$ として書き換えると

$$\dot{q}_m(t) = \dot{n}(t) \sqrt{m+1} \left\{ \sqrt{m+2} q_{m+1}(t) - 2\sqrt{m+1} q_m(t) + \sqrt{m} q_{m-1}(t) \right\} \quad (17)$$

を得る。ところで熱平衡系では $p_m^{\text{eq}} = (1 - e^{-\beta\omega})e^{-\beta\omega m}$ であるので、 $q_m^{\text{eq}} = 0$ である。従って基本要請 (c) を満たすためには、全ての m に対して $q_m(\infty) = 0$ であることが必要である。そのためには有限の時間 t においても $q_m(t) = 0$ でなくてはいけないことが式 (17) より示される。 $q_m(t) = 0$ よりすぐさま $p_{m+1}(t)/p_m(t) = n(t)/(1+n(t)) \equiv f(t)$ 、つまり $p_m(t)$ は $p_m(t) = (1-f(t))f^m(t)$ という等比分布であることが分かる。

4 結論

3 つの基本要請を置くことにより非摂動ハミルトニアンと密度演算子が

$$\hat{H}_u(t) = \omega(t) (\check{a}^\dagger \check{a} - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) + i\dot{n}(t) (\check{a}\tilde{a} + \check{a}^\dagger \tilde{a}^\dagger - \check{a}^\dagger \check{a} - \tilde{a}^\dagger \tilde{a} - 1) \quad (18)$$

$$|\rho_0(t)\rangle\rangle = (1-f(t)) \sum_m f^m(t) |m, m\rangle\rangle \quad (19)$$

となることが導かれた。非平衡 TFD の言葉でいうと、式 (18) の第 1 項は自由ハットハミルトニアン、第 2 項は熱的カウンター項、また式 (19) は $\alpha = 1$ 表現における熱的真空そのものである。特に密度演算子の等比分布性 ($p_m(t) \propto f^m(t)$) は非平衡 TFD では仮定であったが、本研究ではそれをより基本的で自然な仮定である 3 つの基本要請から導くことに成功した。非摂動ハミルトニアンの残った 2 つのパラメータは、非平衡 TFD において自己エネルギーに対する自己無動着な繰り込み条件などによって決定されるパラメータである [2, 4]。この手続きも本研究で用いた超演算子形式からの視点を用いれば、より自然に導けるかもしれない。また、本研究の方法を自発的対称性のある場合へ拡張していくことも今後の課題である。

参考文献

- [1] H. Umezawa, *Advanced Field Theory — Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1993).
- [2] H. Chu and H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 1693 (1995).
- [3] M. Schmutz, *Z. Physik B* **30**, 97 (1978).
- [4] Y. Nakamura, T. Sunaga, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **325**, 426 (2010); Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *ibid.* **326**, 2070 (2011).

非平衡 Thermo Field Dynamics における 正準量子化に基づいた Dirac 場の構築

水谷友一, 稲垣知宏
広島大学情報メディア教育研究センター

1 はじめに

現在, さまざまな分野において非平衡現象の解明に向けた取り組みが行われている. このような非平衡現象を量子論の枠組みで扱うには, 熱的な状態と実時間の自由度を共に扱う事の出来る, 実時間形式の熱場の量子論が必要となる. その中でも特に, 粒子の生成や消滅を伴うような高エネルギー物理現象に関わる非平衡現象の解明には, 相対論的な場によって記述された理論が必要となる.

我々の研究グループは, 実時間形式の熱場の量子論のひとつである Thermo Field Dynamics (TFD) を相対論的な場を用いて記述することにより緩和過程などの熱非平衡系の性質を明らかにするための研究に取り組んできた.

TFD を非平衡系へ適応するには, 熱平衡系での理論を拡張した非平衡 TFD と呼ばれる理論が用いられる. これまでに相対論的な場に対する非平衡 TFD の方法は, 相対論的中性スカラー場に対して正準量子化に基づいた扱い方が提唱されていた [1]. しかし, 相対論的な複素スカラー場や Dirac 場, Gauge 場に関してはまだ扱い方が十分に理解されていなかった. 特に文献 [2] では, 非平衡 TFD における相対論的 Dirac 場は, 相対論的な場を構成する正振動項と負振動項がそれぞれ異なるエネルギー固有値を持つため, 場の時間発展と無矛盾なラグランジアン構築は困難であると指摘されていた.

そこで我々は, このような問題を解決することにより非平衡 TFD の方法を相対論的複素スカラー場や Dirac 場に対して拡張する事を目的とした研究を行った. 本稿は, 文献 [3] のレビューである. また, 本研究で扱っている非平衡系は一様等方な系を仮定している. 非平衡 TFD において, 相対論的複素スカラー場や Dirac 場などの電荷を持つ場は, 結果的に同様の方法で拡張を行う事ができるため, 以下では相対論的 Dirac 場に対して議論を行う.

2 Thermo Field Dynamics

先ず始めに, TFD の枠組みについてごく簡単に説明する [4]. TFD は, 通常場の量子論で扱われる a 演算子に加えて, この a 演算子と独立な交換関係を満たすチルダ演算子, \tilde{a} によって理論が記述される. $[a_p, a_k^\dagger] = [\tilde{a}_p, \tilde{a}_k^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})$, $[a_p, \tilde{a}_k^\dagger] = [a_p, \tilde{a}_k] = 0$. また, 場の時間発展は, a 演算子のみで構成されたハミルトニアン, H , と \tilde{a} 演算子のみで構成されたハミルトニアン, \tilde{H} , を用いて定義されたハットハミルトニアン, $\hat{H} = H - \tilde{H}$, により定義される. ここで, \hat{H} は, ハミルトニアン, H とチルダ共役則と呼ばれる関係により互いに結びついている. さらに熱的 Bogoliubov 変換, $\xi_p^\alpha(t) = B(n_p)^{\alpha\beta} a_p^\beta(t)$, $\tilde{\xi}_p^\alpha(t) = \tilde{a}_p^\beta(t) B^{-1}(n_p)^{\beta\alpha}$, と呼ばれる変換の下で新たな演算子, ξ , $\tilde{\xi}$ を導入し, この演算子に対する真空状態, $\xi|\theta\rangle = 0$ を熱的真空状態として定義する. さらに TFD では, 力学的演算子, A の熱的な期待値は, 熱的真空状態による期待値, $\langle\theta|A|\theta\rangle$ により与えられる. ここで, 変換に現れた演算子の表記, $a^\alpha, \tilde{a}^\alpha$ は, 演算子とチルダ演算子を 2 成分のベクトル表示で表した熱的二重項表現, $a_p^\alpha(t) = (a_p(t) \tilde{a}_p^\dagger(t))$, $\tilde{a}_p^\alpha(t) = (a_p^\dagger(t) - \tilde{a}_p(t))^T$ を意味し, また, $B(n(p))$ 及び $B^{-1}(n(p))$ は熱的 Bogoliubov 行列と呼ばれる熱的二重項表現にかかる行列を表す. このとき, 熱的 Bogoliubov 変換に現れた変換パラメータ, $n(p)$ も熱的な粒子数分布として与えられるため, TFD では力学的観測の熱的な期待値のみではなく, 熱的 Bogoliubov 変換自身も熱的な状態と関係している.

次に TFD を非平衡系へ拡張した理論である非平衡 TFD は, 熱平衡系では時間に依存しない熱的 Bogoliubov 変換のパラメータ, $n(p)$ を実時間に依存するパラメータ, $n(t;p)$ へ拡張する事により与えられる [5]. この

とき、正準量子化に基づいて定義された演算子、 $a_p^\alpha(t), \bar{a}_p^\alpha(t)$ のエネルギー固有値には、時間に依存する熱的 Bogoliubov 変換の影響により熱的 Bogoliubov 変換パラメータ、 $n(t; p)$ からの寄与が現れ、さらに生成・消滅演算子は、共に等しいエネルギー固有値を持つ事が知られている [6].

ここで、生成・消滅演算子が互いに等しいエネルギー固有値に従う事に着目すると、これらの演算子を組み合わせて記述された場、 $\phi(x)$ の時間微分方程式は、 $\dot{\phi}(x) = C(\nabla_x)\pi(x)$ のような形で、エネルギー固有値に依る係数、 $C(\nabla_x)$ を共役場、 $\pi(x)$ の外側へくりだせるため、場の時間発展方程式とハイゼンベルグ方程式との関係より非平衡系のハミルトニアンを簡単に導出することが出来る。演算子のこのような性質を利用して、相対論的中性スカラー場は、以下のように熱平衡系の表式に含まれる演算子、 $a_p^\alpha(t), \bar{a}_p^\alpha(t)$ を非平衡系の演算子へ置き換えた形で導入される [3].

$$\phi^\alpha(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \{a_p^\alpha(t_x)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + (\tau_3\bar{a}_p(t_x)^T)^\alpha e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\}. \quad (1)$$

このとき、相対論的中性スカラー場が従う自由ハミルトニアン、

$$\hat{H}_Q = \hat{H}_0 - \hat{Q}, \quad (2)$$

は、熱平衡系で現れる自由ハミルトニアン、 \hat{H}_0 に加えて、演算子、 $a_p^\alpha(t), \bar{a}_p^\alpha(t)$ のエネルギー固有値に熱的 Bogoliubov 変換のパラメータ、 $n(t; p)$ からの寄与を含むため、新たに熱的カウンター項と呼ばれる変換パラメータの時間微分項を含む項、 $\hat{Q} \propto \dot{n}(t; p)$ が現れる。

3 非平衡 Thermo Field Dynamics における相対論的 Dirac 場

次に本研究で対象とする相対論的 Dirac 場について述べる。Dirac 場は、粒子に対する演算子、 $a_p^\alpha(t), \bar{a}_p^\alpha(t)$ と反粒子に対する演算子、 $b_p^\alpha(t), \bar{b}_p^\alpha(t)$ の 2 種類の演算子によって記述される。非平衡 TFD では、これら粒子、及び反粒子の演算子は、それぞれ異なる時間に依存した熱的 Bogoliubov 変換パラメータによる変換を受ける。ここでは、粒子演算子に対する変換パラメータを $n_+(t; p)$ 、反粒子演算子に対する変換パラメータを $n_-(t; p)$ と記述する。すると、これらの演算子のエネルギー固有値には、中性スカラー場のときと同様に時間に依存する変換パラメータからの寄与が現れるようになるが、Dirac 場の場合は、粒子、反粒子演算子が、それぞれ異なる変換パラメータ、 $n_\pm(t; p)$ による寄与を受けるため、互いに異なるエネルギー固有値を持つようになる。

これらの演算子を用いて、非平衡系における相対論的 Dirac 場、

$$\psi^\alpha(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_s \{a_p^{s,\alpha}(t_x)u^s(p)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + (\tau_3\bar{b}_p^s(t_x)^T)^\alpha v^s(p)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\}, \quad (3)$$

を導入すると、この場に含まれる正振動項、 ψ_+ と負振動項、 ψ_- のエネルギー固有値が互いに異なるため、時間発展方程式は、 $\dot{\psi}(x) = C_+(\nabla_x)\psi_+(x) + C_-(\nabla_x)\psi_-(x)$ のように、場の正振動項と負振動項が異なる係数、 $C_\pm(\nabla_x)$ により分かれた形となる。そのため、時間発展方程式とハイゼンベルグ方程式との関係が自明ではなくなり、Dirac 場が従うハミルトニアンを簡単に導出することができなくなる。このような相対論的 Dirac 場の正振動項と負振動項が異なるエネルギー固有値を持つ事による問題点は、文献 [2] でも指摘されており、このことから非平衡 TFD で、Dirac 場を扱うことは困難であるとされてきた。しかし、この正振動項と負振動項にみられるエネルギー固有値の不一致は、熱的 Bogoliubov 変換パラメータ、 $n_\pm(t; p)$ の違いが原因であるため、理論の中にこの変換パラメータの違いを記述する項をうまく導入することにより、場の時間発展と無矛盾なハミルトニアンを構築できるのではないかと考える事が出来る。

ここで、もう一度非平衡 TFD のハミルトニアンを見てみると、先に述べたように、自由ハミルトニアン (2) は、熱平衡系に現れる自由ハミルトニアン、 \hat{H}_0 に加えて、時間に依存する変換パラメータ、 $n(t; p)$ に

よる寄与を受けて熱的カウンター項, \hat{Q} を含んでいる. ここで, 中性スカラー場に対する熱的カウンター項を熱的 Bogoliubov 変換を受けた演算子, $\xi_p, \tilde{\xi}_p$ で展開すると以下のように表される.

$$\hat{Q} \propto \dot{n}(t;p) \xi_p^\dagger \tilde{\xi}_p^\dagger, \quad (4)$$

中性スカラー場の場合は 1 種類の熱的 Bogoliubov 変換パラメータのみで理論が記述されるため, 上記の熱的カウンター項によりハミルトニアンを構築することが出来ていた.

しかし, Dirac 場の場合には, $n_\pm(t;p)$ の 2 種類の変換パラメータが現れるため, 変換パラメータの時間依存性を記述する熱的カウンター項も 2 つ必要となる. このような Dirac 場に対する熱的カウンター項は熱的 Bogoliubov 変換を受けた粒子・反粒子演算子, ξ_p, η_p の独立性を利用して以下のように導入される.

$$\hat{Q}_n \propto (n_+(t;p) + n_-(t;p)) (\xi_p^\dagger \tilde{\xi}_p^\dagger + \eta_p^\dagger \tilde{\eta}_p^\dagger), \quad (5)$$

$$\hat{Q}_c \propto (n_+(t;p) - n_-(t;p)) (\xi_p^\dagger \tilde{\xi}_p^\dagger - \eta_p^\dagger \tilde{\eta}_p^\dagger). \quad (6)$$

このように導入された熱的カウンター項, $\hat{Q} = \hat{Q}_n + \hat{Q}_c$, によって, Dirac 場の時間発展に現れる変換パラメータの時間依存性を記述する事が出来き, Dirac 場のハミルトニアンは, 熱平衡系に現れるハミルトニアン, \hat{H}_0 を用いて (2) 式のように表される.

非平衡 TFD では, 相互作用を含んだ系の時間発展を記述するハミルトニアンは, 熱平衡系で与えられるハミルトニアンにより定義される. 熱平衡系における自由ハミルトニアン, \hat{H}_0 , と相互作用ハミルトニアン, \hat{H}_{int} , から成るハミルトニアンを非平衡 TFD で得られる自由ハミルトニアン, \hat{H}_Q によって展開すると,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \hat{H}_Q + \hat{H}_{int} + \hat{Q}, \quad (7)$$

となるため, 非平衡 TFD における相互作用ハミルトニアンにも熱的カウンター項による寄与を受けて, $\hat{H}_I = \hat{H}_{int} + \hat{Q}$, となる.

紙面の都合で詳しい説明は省くが, 非平衡 TFD では Chu-Umezawa のくりこみ条件, $\langle \theta | \xi_{full}(t) \tilde{\xi}_{full}(t) | \theta \rangle = 0$, $\langle \theta | \eta_{full}(t) \tilde{\eta}_{full}(t) | \theta \rangle = 0$, と呼ばれる条件の下で, 時間に依存するパラメータ, $n_\pm(t;p)$ がそれぞれ観測される粒子・反粒子数分布に一致する事が知られている [7]. ここで, 添え字の "full" は, 摂動の寄与を含んだ演算子を表している. さらに, これらのくりこみ条件を摂動伝播関数に課した結果として, 粒子・反粒子数分布の時間発展方程式をそれぞれ得られる. また, 文献 [3] では具体的な例として, 湯川型相互作用モデルから得られる最低次の摂動として 1-loop 量子補正の寄与を考慮した議論を行った. その結果, Chu-Umezawa のくりこみ条件により得られた粒子・反粒子数分布の時間発展方程式は, 1 体のボーズ粒子と 2 体のフェルミ粒子の散乱による量子ボルツマン方程式と一致することが確かめられた.

今後は, この正準量子化に基づいた非平衡 TFD の手法をゲージ場に対して応用すると共に, より高次の摂動の寄与から期待されるボルツマン方程式との違いについて調べてゆく予定である.

参考文献

- [1] Y. Mizutani, T. Inagaki, Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Prog. Theor. Phys.* **126** (2011), 681.
- [2] I. Shirai, M. Jimbo and T. Kon, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 2597 (1989).
- [3] Y. Mizutani, T. Inagaki, *Int. J. Mod. Phys. A* **27** (2012), 1250078.
- [4] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro, and Thermal Physics* (American Institute of Physics, New York, 1993).
- [5] T. Arimitsu, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Int. J. Math. Phys.* **28**, 2741 (1987).
- [6] H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Advances in Physics* **37** (1988), 531.
- [7] H. Chu and H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys. A* **10** (1995), 1693.

カシミア効果の繰り込み群アプローチと 物質中の電磁場の幾何学的取り扱い

静岡県立大学食品栄養科学部、一ノ瀬 祥一

1997年頃からString理論、D-brane理論で始まったホログラフィー(AdS/CFT)のアイデアは今では円熟し、さまざまな物質科学に応用されている。物質科学に”高次元”の時空幾何学(一般相対論)が浸透し始めている。ここでは物質中の電磁場を考えてみる。

物質中の電磁場 \mathbf{E}, \mathbf{B} は誘電率 ε ($\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$) と透磁率 μ ($\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$) を用いたMaxwell方程式で記述される。 ε と μ の二つのパラメータを使い物質を特徴付けている。物質中のミクロな相互作用を仮定すれば、 ε および μ の具体的関数形は求められている。例えばDrude formula。ここではその特徴付けを時間・空間の幾何に基づいて行う。いくつかのモデルが提案されている。

詳しくは文献[1]にあるので、アイデアのみ述べる。物質中の電磁場の全エネルギーを

$$\int d^3x \int d\omega \mathcal{E} = \int d^3x \int d\omega \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij} E_i E_j + \mu^{-1}_{ij} B^i B^j) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

と表す。ここで、3次元空間の計量 $\varepsilon^{ij} (\propto g^{ij})$, $\mu_{ij} (\propto g_{ij})$ は誘電率と透磁率の幾何学的拡張である。以下(4)で定義する。

モデル化 STEP 1 時間 t 、空間 X^i の4次元空間はエネルギー ω 、運動量 K^i で表せる。4次元運動量空間 (ω, K^i) の計量として、例えばMinkowski metric

$$ds^2 = -d\omega^2 + \sum_{i=1}^3 dK^i{}^2 \quad (2)$$

を取る。(文献[1]ではdS4およびAdS4の場合も記されている。)

モデル化 STEP 2 この4次元運動量空間に3次元超曲面

$$\text{Dispersion relation} \quad : \quad (k^i)^2 = p(\omega)^2 \quad , \quad (3)$$

を考える。ここで3次元運動量空間の等方性(isotropy)を使った。 $p(\omega)$ は超曲面を指定する。この曲面上での計量(induced metric)は

$$g_{ij}(\omega) = \delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{(p\dot{p})^2} \quad , \quad \dot{p} = \frac{dp}{d\omega} \quad (4)$$

で与えられる。

モデル化 STEP 3 物質はマイクロ構造での相互作用による「ゆらぎ」がある。その効果を統計分布としてとらえ、以下のように幾何学的に定義する。物質の全エネルギーは

$$E(T) = \frac{1}{N} \int_0^\infty d\rho \int_{\substack{p(0) = \rho \\ p(T) = \rho}} \prod_{\omega, i} \mathcal{D}k^i(\omega) \times \\ \bar{\mathcal{E}}[\bar{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{k})] \exp \left[-\frac{1}{2\alpha'} \int_0^T \sqrt{\dot{p}^2 + 1} p^2 d\omega \right], \\ \text{where } \bar{\mathcal{E}}[\bar{\mathbf{A}}(\omega, \mathbf{k})] = \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon^{ij}(\omega, \mathbf{k}) \bar{E}_i(\omega, \mathbf{k}) \bar{E}_j(\omega, \mathbf{k}) \right. \\ \left. + \mu^{-1}(\omega, \mathbf{k})_{ij} \bar{B}^i(\omega, \mathbf{k}) \bar{B}^j(\omega, \mathbf{k}) \right\}. \quad (5)$$

で与えられる。 α' は string tension で、[長さ] $^{-3}$ の次元をもつ新たなモデルパラメータである。境界条件 ($p(0)=p(T)=\rho$) を満たす、すべての超曲面にわたり面積 A

$$A[p(\omega)] = \int \sqrt{\det g_{ij}} d^3k = \int_0^T \sqrt{\dot{p}^2 + 1} p^2 d\omega \quad (6)$$

をハミルトニアンとして経路積分している。 $T^{-1} = 0$ の場合がカシミアエネルギーである。上記の $E(T)$ は $\log\Lambda$ の発散のみ現れる。それは温度パラメータ T^{-1} に繰り込まれる。

References

参考文献

- [1] S. Ichinose, "Renormalization Group Approach to Casimir Effect and the Attractive and Repulsive Forces in Substance", Talk at Int. Tribology Conf. Hiroshima 2011 (Oct.30-Nov.3, 2011, Hiroshima, Japan), arXiv:1203.2708(cond-mat)

物性物理におけるスカーミオン

慶應義塾大学日吉物理学教室・自然科学研究教育センター

新田宗土

E-mail: nitta (at) phys-h.keio.ac.jp

アブストラクト

Skyrme が核子の模型としてスカーミオンを提唱してから半世紀ほどが過ぎた [1]。物性物理においては、2次元の「おもちゃの」スカーミオンが様々な系で現れる。古くは量子ホール効果で知られていたが、最近では磁性体におけるスカーミオン格子が話題になった。しかしながら、本来の3次元のスカーミオンを安定的に作ることは難しかった。一方、最近、レーザーで冷却された原子気体を用いて、ある種の非可換ゲージ場を人工的に作ることが理論と実験で盛んに研究されている。 $SU(2)$ の非可換ゲージ場を作ることで、3次元のスカーミオンを安定的につくることが出来る。

1 場の理論におけるスカーミオン

ここでは、場の理論においてスカーミオンがどのように記述されているかを1, 2, 3次元のスカーミオンの順番に紹介する。教科書 [3] を合わせて参考にするといよい。

1.1 $O(2)$ シグマ模型における Sine-Gordon キンク

最も簡単なスカーミオンの典型例として、sine-Gordon 模型を考える [2]。sine-Gordon 模型の Lagrangian は次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t\theta)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\theta)^2 - \frac{m^2}{2}(1 - \cos\theta) \quad (1.1)$$

静的な配位を考えることにして、時間微分を落とす。エネルギー密度は

$$2\varepsilon = (\partial_x\theta)^2 + m^2(1 - \cos\theta) \quad (1.2)$$

となる。ここで、Bogomol'nyi のトリックを用いて次のように平方完成の形に書き換える。

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= (\partial_x\theta)^2 + m^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \left(\partial_x\theta \pm m \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \mp 2m\partial_x\theta \sin \frac{\theta}{2} \\ &\geq 2|t_{\text{SG}}| \end{aligned} \quad (1.3)$$

ここで、トポロジカル電荷密度を以下のように定義した。

$$t_{\text{SG}} \equiv m\partial_x\theta \sin \frac{\theta}{2} = -2m\partial_x \left(\cos \frac{\theta}{2} \right). \quad (1.4)$$

これを空間積分すると

$$T_{\text{SG}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx t_{\text{SG}} = -2m \left[\cos \frac{\theta}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} \quad (1.5)$$

となり、確かに空間の無限遠点での境界条件によってのみ決まるのでトポロジカル電荷と呼べるものである。上式(1.3)の不等号が成立するのは、次の Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield (BPS) 方程式が成立するときである。

$$\partial_x \theta \pm m \sin \frac{\theta}{2} = 0. \quad (1.6)$$

エネルギーが式(1.3)のように不等号で表されるために、与えられた境界条件のうち最もエネルギーが低い安定解が BPS 方程式(1.6)を満たすことがわかる。このとき、エネルギーはトポロジカル電荷そのものになっている。

例えば、1 キンク解は

$$\theta(x) = 4 \arctan \exp \frac{m}{4}(x - X) + \frac{\pi}{2} \quad (1.7)$$

のように解ける。ここで、 X はキンクの位置を表す定数で、集団座標とかモジュライパラメーターと呼ばれている。このトポロジカル電荷は

$$T_{\text{SG}} = \int dx t_{\text{SG}} = 2m - (-2m) = 4m \quad (1.8)$$

と計算される。

一般には、 n 回巻くことができ、1 次のホモトピー群で特徴づけられる。

$$n \in \pi_1(S^1) = \mathbf{Z}. \quad (1.9)$$

式(1.1)で与えられるラグランジアンは、実は次のように $O(2)$ 非線形シグマ模型に書き換えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n} - \frac{m^2}{2} (1 - n_2), \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (1.10)$$

これを、 $(n_1, n_2) = (\cos \theta, \sin \theta)$ とパラメトライズすれば、式(1.1)に戻る。ただし、 $O(2)$ 対称性は勾配項のみが持っており、ポテンシャルによって陽に破られている。

物性物理においては、例えば、超伝導の Josephson 接合に sine-Gordon キンクが現れることがよく知られている。

1.2 $O(3)$ シグマ模型における 2 次元スカーミオン

次に、2 次元のスカーミオンを考える。 $O(3)$ 非線形シグマ模型を考える。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3), \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 \quad (1.11)$$

これは、物性では通常 Heisenberg 模型と呼ばれている。 $O(3)$ 対称性を用いると、基底状態は次のように取れる。

$$\langle \mathbf{n} \rangle = (0, 0, 1). \quad (1.12)$$

これより、 $O(3)$ 対称性は、

$$G = O(3) \rightarrow H = O(2) \quad (1.13)$$

と自発的に破れていることがわかる。よって、オーダーパラメーター空間は、

$$\text{OPS} = G/H = O(3)/O(2) \simeq S^2 \quad (1.14)$$

のように 2 次元球面であることがわかる。

このオーダーパラメーター空間（ターゲット空間）は、2 次のホモトピー群が非自明である。

$$\pi_2(\text{OPS}) = \pi_2(S^2) = \mathbf{Z}. \quad (1.15)$$

Belavin と Polyakov によって、このトポロジカル電荷をもった位相励起が発見された [4]。場の理論においては、今日、ランプと呼ばれているが、物性系ではただ単にスカーミオンと呼ばれていることが多い。ここでは、2 次元スカーミオンと呼ぶことにしよう。

また、時間 1 次元空間 1 次元の系で、この配位を考えることもできて、その場合は 2 次元インスタントンとかシグマ模型インスタントンと呼ばれている。（弦理論のコンテキストでは、世界面インスタントンと呼ばれているものである。）

解を構成するために、次のようなステレオグラフィック座標

$$u \equiv \frac{n_1 + in_2}{1 + n_3} = \frac{1 - n_3}{n_1 - in_2} \quad (1.16)$$

を用いるのが便利である。ここで、 u は複素場である。 $u = 0$ と $u = \infty$ が、それぞれ球面の北極 N と南極 S に対応する。この u を用いると、ラグランジアンは次のように書き換えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu u^* \partial^\mu u}{(1 + |u|^2)^2} \quad (1.17)$$

これは、 CP^1 模型と呼ばれているものである。（特に、 CP^1 の Fubini-Study 計量を用いた表式である。）

球面を完全に覆うには、別の座標が必要で $v \equiv 1/u$ を用いると、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu v^* \partial^\mu v}{(1 + |v|^2)^2} \quad (1.18)$$

のように同じ形でかける。ここで、 $v = \infty$ と $v = 0$ が、それぞれ球面の北極 N と南極 S に対応する。

さて、前節と同じように、Bogomol'nyi のトリックを用いて、BPS バウンドを求めよう。

$$\begin{aligned}
E &= \int d^2x \frac{\partial_x u^* \partial_x u + \partial_y u^* \partial_y u}{(1 + |u|^2)^2} \\
&= \int d^2x \left[\frac{|\partial_x u \mp i \partial_y u|^2}{(1 + |u|^2)^2} \pm \frac{i(\partial_x u^* \partial_y u - \partial_y u^* \partial_x u)}{(1 + |u|^2)^2} \right] \\
&\geq \left| \int d^2x \frac{i(\partial_x u^* \partial_y u - \partial_y u^* \partial_x u)}{(1 + |u|^2)^2} \right| \equiv |T_v|.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

トポロジカル電荷を以下のように定義した。

$$\begin{aligned}
T_v &= \int d^2x \frac{i(\partial_x u^* \partial_y u - \partial_y u^* \partial_x u)}{(1 + |u|^2)^2} \\
&= \oint dx^i \frac{-i(u^* \partial_i u - \partial_i u^* \cdot u)}{2(1 + |u|^2)}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

ここで、2行目は無限遠の境界での積分に書き換えた。このことから、境界条件で決まるトポロジカル電荷であることがわかる。このトポロジカル電荷は、微分形式を用いれば、次のように書くことができる。

$$T_v = \int dx^i \wedge dx^j \frac{i \partial_i u^* \partial_j u}{(1 + |u|^2)^2} = \int_{S^2} \frac{idu^* \wedge du}{(1 + |u|^2)^2} = \int_{S^2} \omega \tag{1.21}$$

ここで、 ω はケーラー形式という 2 形式である。

$$\omega = \frac{idu^* \wedge du}{(1 + |u|^2)^2}. \tag{1.22}$$

ケーラー形式の存在は、 CP^1 がケーラー多様体であることを意味している。式 (1.21) の表式は、トポロジカル電荷が実は、ケーラー形式の引き戻しで書けることを意味している。

また、もともとの \mathbf{n} の場を用いると、トポロジカル電荷は次のように書ける。

$$T_v = \int d^2x \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot (\partial_x \mathbf{n} \times \partial_y \mathbf{n} - \partial_y \mathbf{n} \times \partial_x \mathbf{n}) = \int_{S^2} dx^i \wedge dx^j \mathbf{n} \cdot (\partial_i \mathbf{n} \times \partial_j \mathbf{n}) \tag{1.23}$$

エネルギーの下限 $E = |T_v|$ (BPS バウンド) は、BPS 方程式

$$\partial_x u \mp i \partial_y u = 0 \tag{1.24}$$

が満たされるときにのみ成立する。実空間の座標から、 $z \equiv x + iy$ のように複素座標を定義すると、この BPS 方程式は

$$\begin{aligned}
&\partial_z u = 0 \quad \text{anti-BPS} \\
&\text{または} \quad \bar{\partial}_z u = 0 \quad \text{BPS}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

と書き換えることが出来る。よって、 u はそれぞれ、

$$\begin{aligned}
&u = u(\bar{z}) \quad \text{anti-BPS} \\
&\text{または} \quad u = u(z) \quad \text{BPS}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

のように反正則または正則関数であることがわかる。

ここでは、BPS 解のみ考えよう。1 ソリトン解は、次のように与えられる。

$$u(z) = \kappa + \frac{\lambda}{z - z_1} \quad (1.27)$$

ここで、 z_1 はソリトンの位置を表す複素定数、 λ は絶対値がソリトンのサイズ、位相がソリトンの持っている $U(1)$ 位相を表す定数であり、これらはソリトンの集団座標（モジュライパラメーター）である。一方、 κ は境界条件であり、ソリトンのモジュライではない。より一般に、 k ソリトン解は次のように書ける。

$$u(z) = \kappa + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{z - z_i} \quad (1.28)$$

z_i は i 番目のソリトンの位置、 λ_i はソリトンのサイズと $U(1)$ 位相である。この解のトポロジカル電荷は、

$$T_v = 2\pi k, \quad k \in \pi_2(S^2) \simeq \mathbf{Z} \quad (1.29)$$

となっている。このことから、 k 個ソリトンは、好き勝手な位置においても、全エネルギーは同じであることがわかる。これは、ソリトン間に相互作用が存在しないことを意味している。

次節の Skyrme 項に類似の 4 階微分項とポテンシャル項を同時に導入することで、スカーミオンのサイズを固定することが出来る。これは、ベビー・スカーミオンと呼ばれている [5]。この場合は、スカーミオン間に複雑な相互作用が存在している。

1.3 $O(4)$ シグマ模型における 3 次元スカーミオン

詳しくは述べないが、QCD の持っているカイラル対称性という対称性が、基底状態で自発的に破れ、 $SU(2)$ の南部 Goldstone(NG) 粒子が現れる。 $SU(2)$ カイラル・ラグランジアンは、その NG 粒子を記述する低エネルギー有効理論である。 $SU(2)$ 群の要素に値を持つ場 $U(x) \in SU(2)$ を用いて、

$$\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{16} \text{tr} (\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) = \frac{f_\pi^2}{16} \text{tr} (U^\dagger \partial^\mu U)^2 \quad (1.30)$$

と書かれる。Skyrme は、次のように $SU(2)$ カイラル・ラグランジアンに変更を加えることでスカーミオンを考えた [1]。

$$\mathcal{L} = -\frac{f_\pi^2}{16} \text{tr} (\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U)^2 + \mathcal{L}^{(4)} - V(U) \quad (1.31)$$

ここで、 $\mathcal{L}^{(4)}$ は Skyrme 項と呼ばれる 4 階微分を含んだ項で次のように与えられる。

$$\mathcal{L}^{(4)}(U) = \frac{1}{32e^2} \text{tr} ([U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2). \quad (1.32)$$

(この項を考えた理由は後で述べる。) ポテンシャル項は特になくともよいが、クォークの質量により

$$V = m^2[(U + U^\dagger - \mathbf{1}_2)] \quad (1.33)$$

という項が生じるので、よく考えられる。

スカーミオンのトポロジカル電荷は、

$$k \in \pi_3(SU(2)) \simeq \pi_3(S^3) \simeq \mathbf{Z} \quad (1.34)$$

である。スカーミオンの解は、次のように与えられる。

$$U = \exp\left(\frac{if(r)\sigma \cdot \mathbf{r}}{r}\right) \quad (1.35)$$

\mathbf{r} は実空間における 3 次元の位置ベクトルで、 $r = |\mathbf{r}|$ である。 f は運動方程式で決められる関数で、 k ソリトン解の場合は、境界条件として、

$$\begin{aligned} f &\rightarrow 0 \quad (U \rightarrow +\mathbf{1}_2), \quad r \rightarrow \infty \\ f &\rightarrow k\pi \quad (U \rightarrow -\mathbf{1}_2), \quad r = 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

を課す。 $k = 1$ は安定な解を与えるが、 k が 2 以上は k ソリトンが同じ位置に重なっており不安定であることが知られている。

$O(4)$ 非線形シグマ模型との関係を知るために、

$$U(x) = n_4(x)\mathbf{1}_2 + \sum_{i=1}^3 n_i(x)\sigma_i \quad (1.37)$$

と場の再定義をしてやると、次のように書き換えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n} + \mathcal{L}^{(4)}(\mathbf{n}) - V(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n}^2 = 1. \quad (1.38)$$

ここで、ポテンシャル項と Skyrme 項はそれぞれ

$$V(\mathbf{n}) = m^2(1 - n_4), \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(4)}(\mathbf{n}) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n})(\partial^\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\nu \mathbf{n}) - \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\mu \mathbf{n})^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq \nu} (\partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n})(\partial^\mu \mathbf{n} \cdot \partial^\nu \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (1.40)$$

と書き換えられる。

また、2 成分の BEC との関係を知るためには、次の表式が便利である。

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

という複素 2 成分のスカラー場を用意して,

$$U = \begin{pmatrix} \Psi_1 & -\Psi_2^* \\ \Psi_2 & \Psi_1^* \end{pmatrix} \in SU(2) \simeq S^3, \quad (1.42)$$

$$\det U = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 = 1. \quad (1.43)$$

2 成分の B E C では, この 2 つのスカラー場を 2 成分の波動関数とみなす。

場の理論において, Skyrme が Skyrme 項 $\mathcal{L}^{(4)}$ を入れた理由は, スカーミオンの安定性のためである。Derick の定理によると, Skyrme 項がない場合は, 3 次元のスカーミオンはスケール変換で小さくするとエネルギーが下がる。よって, どんどん小さくなる不安定性がある。Skyrme 項があるとこれを支えることが出来て安定なサイズが存在する。

2 物性物理におけるスカーミオン

トークではここまです場の理論からの準備として, 物性物理でどのようなスカーミオンが現れるかを紹介した。

1. 1 次元のスカーミオン (sine-Gordon ソリトン) は, 超伝導の Josephson 接合において現れることがよく知られている。これは, 実は 2 つの超伝導体の間に挟まれた, Abrikosov 渦であり, Josephson 渦と呼ばれている。銅酸化物高温超電導体では, 多層構造を持っており, このような Josephson 渦が現れる。
2. 2 次元のスカーミオンは, 様々な物性系に現れる。そのためか, 物性で, 単にスカーミオンと言うと, この 2 次元のスカーミオンを指す場合が多い。古くから知られているのは, 量子ホール効果, 磁性体, 超流動ヘリウム 3 などである。最初に理論的に予言されたのが, 磁性体においてであったことからわかるように, 様々な磁性体でスカーミオンが実験的にも発見されている。特に, 最近, スカーミオンの格子構造が見つかって話題になった。また, 最近スピンの 1 のスピノール B E C において, 実験的に作られた [6]。
3. 3 次元のスカーミオンは, 2 成分の B E C において考えられていた [7]–[14]。しかし, Skyrme 項がないために, 一般には不安定である。安定化させる様々な方法が考案されてきたが, 非常に難しかった。せいぜい準安定になるくらいであった。
 - 最近, 我々のグループは非可換ゲージ場を用いることで, 3 次元のスカーミオンが安定に存在することを見出した [15]。しかも, これは基底状態として完全に安定に存在する。詳しくは論文を見ていただきたい。
 - それとは別に, 2 成分 B E C において, ドメイン壁と反ドメイン壁の衝突を用いて, 3 次元スカーミオンを実験的に構成する方法を最近提唱した [16]。

詳しい説明は, ページの都合上割愛させていただき別の機会に譲るが, 研究会で話した内容については, 研究会のスライドを見ていただきたい。

参考文献

- [1] T. H. R. Skyrme, “A Nonlinear field theory,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **260**, 127 (1961); “A Unified Field Theory of Mesons and Baryons,” Nucl. Phys. **31**, 556 (1962).
- [2] T. H. R. Skyrme, “Particle states of a quantized meson field,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **262**, 237 (1961).
- [3] N. S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological solitons, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 493 p*
- [4] A. M. Polyakov and A. A. Belavin, “Metastable States of Two-Dimensional Isotropic Ferromagnets,” JETP Lett. **22**, 245 (1975) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **22**, 503 (1975)].
- [5] B. M. A. Piette, B. J. Schroers and W. J. Zakrzewski, “Multi - Solitons In A Two-Dimensional Skyrme Model,” Z. Phys. C **65**, 165 (1995) [arXiv:hep-th/9406160]; B. M. A. Piette, B. J. Schroers and W. J. Zakrzewski, “Dynamics of baby skyrmions,” Nucl. Phys. B **439**, 205 (1995) [arXiv:hep-ph/9410256].
- [6] L. S. Leslie, A. Hansen, K. C. Wright, B. M. Deutsch, and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **103**, 250401 (2009); J. Choi, W. J. Kwon, and Y. Shin Phys. Rev. Lett. **108**, 035301 (2012).
- [7] J. Ruostekoski and J. R. Anglin, “Creating vortex rings and three-dimensional skyrmions in Bose-Einstein condensates,” Phys. Rev. Lett. **86**, 3934 (2001).
- [8] R. A. Battye, N. R. Cooper and P. M. Sutcliffe, “Stable skyrmions in two-component Bose-Einstein condensates,” Phys. Rev. Lett. **88**, 080401 (2002).
- [9] U. A. Khawaja and H. T. C. Stoof, “Skyrmions in a ferromagnetic Bose-Einstein condensate,” Nature (London) **411**, 918 (2001), “Skyrmion physics in Bose-Einstein ferromagnets,” Phys. Rev. A **64**, 043612 (2001).
- [10] C. M. Savage and J. Ruostekoski, “Energetically stable particle-like skyrmions in a trapped Bose-Einstein condensate,” Phys. Rev. Lett. **91**, 010403 (2003).
- [11] J. Ruostekoski, “Stable particlelike solitons with multiply-quantized vortex lines in Bose-Einstein condensates,” Phys. Rev. A **70**, 041601 (2004).
- [12] S. Wuster, T. E. Argue, and C. M. Savage, “Numerical study of the stability of skyrmions in Bose-Einstein condensates,” Phys. Rev. A **72**, 043616 (2005).
- [13] I. F. Herbut and M. Oshikawa, “Stable Skyrmions in spinor condensates,” Phys. Rev. Lett. **97**, 080403 (2006) [arXiv:cond-mat/0604557]; A. Tokuno, Y. Mitamura, M. Oshikawa, I. F. Herbut, “Skyrmion in spinor condensates and its stability in trap potentials,” Phys. Rev. A **79**, 053626 (2009).

- [14] M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, “Vortex rings in two-component Bose-Einstein condensates,” *JHEP* **0406**, 017 (2004) [arXiv:cond-mat/0307559].
- [15] T. Kawakami, T. Mizushima, M. Nitta and K. Machida, “Stable Skyrmions in SU(2) Gauged Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **109**, 015301 (2012) [arXiv:1204.3177 [cond-mat.quant-gas]].
- [16] M. Nitta, K. Kasamatsu, M. Tsubota and H. Takeuchi, “Creating vortons and three-dimensional skyrmions from domain wall annihilation with stretched vortices in Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A* **85**, 053639 (2012) [arXiv:1203.4896 [cond-mat.quant-gas]].

Effects of Vertex correction in the Schwinger-Dyson equation in QED3

Yuichi Hoshino

Kushiro National College of technology

September 30, 2012

1 Introduction

Chiral order parametr $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ is gauge invariant in QED,QCD.However if we evaluate this quantity by the Schwinger-Dyson equation for example,we must take into account the vertex correction to satisfy Ward-Takahashi-identity which is the consequence of gauge invariance.Ward-Takahashi identity is written as

$$(p - q)_\mu \Gamma_\mu(p, q) = S^{-1}(q) - S^{-1}(p), \quad (1)$$

where Γ is a three-point vertex,and S is a fermion propagator

$$S(p) = \frac{i}{A(p)p \cdot \gamma - B(p)}. \quad (2)$$

Reliable Ansatz for three point vertex in QED should satisfy Ward-Takahashi identity.Following Ball-Chiu Ansatz[3] we have

$$\Gamma_\mu(p, q) = \Gamma_\mu^T(p, q) + \frac{A(p) + A(q)}{2} \gamma_\mu + \frac{A(p) - A(q)}{2(p^2 - q^2)} (p+q) \cdot \gamma (p+q)_\mu - \frac{B(p) - B(q)}{p^2 - q^2} (p+q)_\mu, \quad (3)$$

where $\Gamma_\mu^T(p, q)$ is an arbitrary transverse part that can be added to the vertex,without dsiturbing the Ward-Takahashi identity.

2 Schwinger-Dyson equation

In QED3 and Chern-Simon QED[2],Schwinger-Dyson equation for the fermion propagator with vertex correction is given

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma_\mu S(k) \Gamma_\nu(p, k) D_{\mu\nu}(p - k), \quad (4)$$

where D is the photon propagator

$$D_{\mu\nu}(p) = \frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2 - i\mu \epsilon_{\mu\nu\rho} p_\rho / p^2)}{p^2 - \mu^2} - id \frac{p_\mu p_\nu}{p^4},$$

, μ is a gauge invariant mass, and d is a gauge fixing parameter. Following

$$iS(p)^{-1} = A(p)\gamma \cdot p - B(p) = \gamma \cdot p - \Sigma(p)$$

for 2-spinor

$$2B(p) = \text{tr}(\Sigma(p)), 2p^2(A(p) - 1) = \text{tr}(\gamma \cdot p \Sigma(p)) \quad (5)$$

we obtain coupled integral equation for $A(p), B(p)$.

3 Numerical analysis

If we solve the Dyson-Schwinger equation with longitudinal vertex in QED3, we find that the gauge dependence of chiral order parameter $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ is very small. At least for weak coupling it is estimated

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -(3.2 - 3.4) \times 10^{-3} e^4 \quad (6)$$

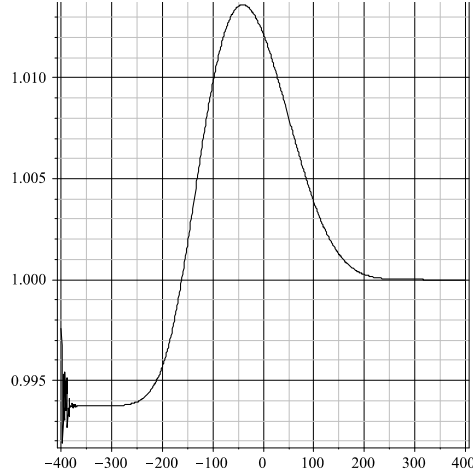
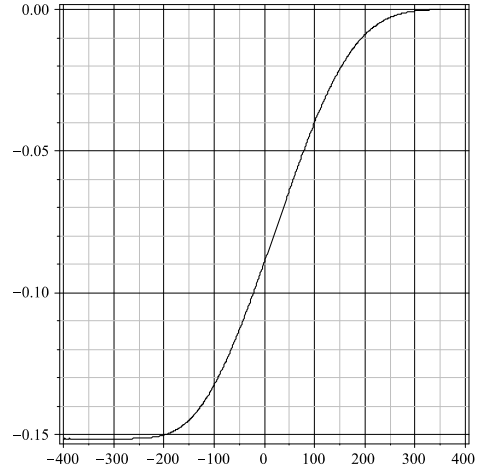
for $d = 0..2$, here d is a gauge fixing parameter. The above value agrees quite well with the results in [1]. In three dimension QED is superrenormalizable and ultraviolet finite but infrared singular. We find that correction enhance the infrared singularity of the wave function $A(p)$ and mass $B(p)$. The following term in the vertex enhances the mass and vacuum expectation value

$$-\frac{B(p) - B(q)}{p^2 - q^2} (p + q)_\mu. \quad (7)$$

Gauge dependent term has infrared singular too. In Chern-Simon QED gauge field has mass. So that in the Landau gauge infrared divergence does not appear. However in other gauge we find the infrared divergence as in QED3. For 2-spinor case vacuum expectation value $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ is a spin density. In QED dynamical mass $B(p) \propto 1/p^2$. This is modified by Chern-Simon term of the photon propagator as $B(p) \propto 1/p$ at high-energy. This yields logarithmic divergence of the spin density $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \propto \ln \Lambda$, where vacuum expectation value is written as

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2B(p)}{A^2(p)p^2 + B(p)^2}. \quad (8)$$

For $\Lambda = 10^3, \mu = 1.0$, we get $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = .08e^4, d = 0..3$. In the Figures we see the Landau gage solution of wave function renormalization $Z = 1/A(p)$ and effective mass $M(p) = B(p)/A(p)$ with $\mu = 1$ and the scale $p = \exp(\pi/2 \sinh(n/155))$. In the near future detailed analysis will appear[6].

Fig.1 $Z = 1/A(p)$ in $d = 0$ gauge.Fig.2 $M(p) = B(p)/A(p)$ in $d = 0$ gauge.

4 References

- [1] C.S.Fisher, R.Alkofer, T.Dahm, and P.Maris, Phys.Rev.D70:073007(2004).
- [2] S.Deser, R.Jackiw and S.Templeton, Ann.Phys.140(1982)372.
- [3] J.S.Ball and T.W.Chiu, Phys.Rev.D22(1980)2542.
- [4] A.Bashir and M.R.Pennington, Phys.Rev.D50(1994)7679-7689.
- [5] A.Basir, A.Raya, and S.S.Madrigal, Phys.Rev.D84(2011)036013.
- [6] Y.Hoshino, T.Inagaki and Y.Mizutani in preparation.

Lattice QCD at finite T and μ

— Updates from Lattice 2012 —

筑波大・数理物質系・物理 金谷 和至
Email: kanaya (at) ccs.tsukuba.ac.jp

2012年の格子場の理論国際会議 Lattice 2012 は、オーストラリアのケアンズで、6月24日～29日の6日間にわたって開催された [1]。有限温度・有限密度関係では約40件の発表があり、発表全体の約15%であった。有限温度の総合報告は Maria P. Lombardo が行い、相構造の研究から多数フレーバーまで包括的にレビューした。有限密度関係は Gert Aarts が、複素ランジバン法による有限密度シミュレーションの最近の進展を解説した。

この報告では、Lattice 2012での発表を中心にして、有限温度・有限密度QCD関係の最近の進展をレビューする。模型を使った研究や、テクニカラーの模型を目指したフレーバー数やカラーの数、クォークの表現などを変えた理論の研究も多く進展が報告されたが、ここでは扱わない。この原稿を書いている9月現在、プロシーディングスはまだほとんど arXiv に投稿されていないようである。よって、残念ながら図はほとんど引用できないし、また、私の理解で正しいかも確認できない。さいわい、Lattice 2012における発表スライドのほとんどは、プレナリもパラレルも Lattice 2012 のホームページ [1] からダウンロード可能なので、正確な情報はそれを参照してもらいたい。

1 有限温度相構造

図1に、 $N_F = 2 + 1$ の場合の有限温度 QCD 相転移の相転移次数をクォーク質量の関数としてまとめた、いわゆる Columbia plot を示す。有効模型を用いたくりこみ群の研究や格子シミュレーションにより、 u, d, s クォークが十分軽いときと十分重いときには QCD 相転移は1次転移だが、中間的なクォーク質量の時は連続的なクロスオーバーになると考えられている。スタガード型クォークを用いたシミュレーションにより、クォーク質量が物理的な値をとる物理点は、クロスオーバー領域にあると考えられている。

この図の左上の角は $m_s = \infty, m_{ud} = 0$ で、 $N_F = 2$ QCD のカイラル極限である。Pisarski と Wilczek による最初の研究でも指摘されているように [2]、ここでの相転移次数には、量子異常効果の温度依存性による不定性が含まれている。相転移の性質を考える上で、系の対称性が重要だが、カイラル極限のフレーバー・カイラル対称性のうち、軸性 $U(1)$ 対称性 ($U(1)_A$) は、量子異常により、全ての温度で陽に壊されている。 $U(1)_A$ が対称性として存在しないとすると、 $N_F = 2$ の場合には、カイラル相転移は $O(4)$ スピン模型と同じユニバーサリティー・クラスに属する2次相転移になると期待される。他方、希薄インスタントン気体近似によると、量子異常の効果は温度とともに急速に小さくなる。もし、相転移点 T_C 近傍で量子異常の効果が十分弱く、 $U(1)_A$ が「effective に」回復していると思わせるとすると、有効模型の対称性が変わり、 $N_F = 2$ QCD のカイラル相転移は、2次転移が排除されるわけではないが、1次転移となる可能性が大きくなる。

図1の左図は $N_F = 2$ QCD のカイラル相転移が2次の場合、右図は1次の場合を表している。これからわかるように、そのどちらが実現しているかにより、物理点近傍のユニバーサリティー・

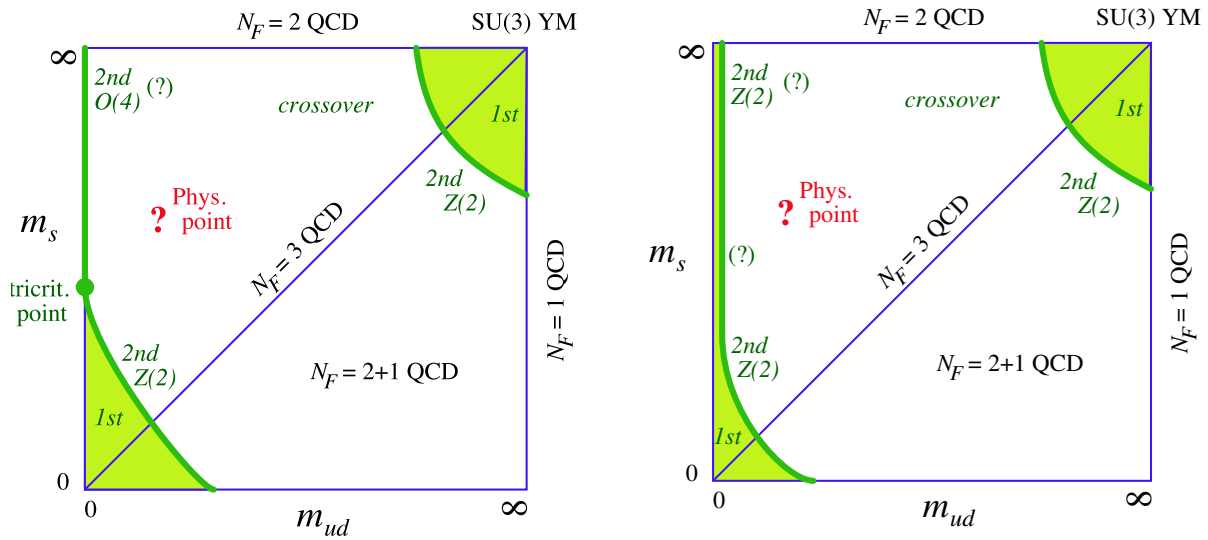


図 1: 2 + 1 フレーバー QCD の有限温度相転移次数： 横軸は縮退した ud クォーク質量で、縦軸は s クォーク質量。 $m_{ud} = m_s$ の対角線は縮退した $N_F = 3$ QCD、 $m_s = \infty$ の上端は $N_F = 2$ QCD、 $m_{ud} = \infty$ の右端は $N_F = 1$ QCD に相当する。右上の角が、クォークが全てデカップルした SU(3) Yang-Mills 理論となる。**(左図)** $N_F = 2$ のカイラル極限が 2 次相転移である場合の標準的シナリオ。 $N_F = 2$ のカイラル極限は、O(4) のユニバーサリティー・クラス、1 次相転移領域の端はイジング (Z(2)) のユニバーサリティー・クラスとなる。左端の軸上で両者の境界は、三重臨界点となる。三重臨界点近傍の 1 次相転移領域の端は、有効 Ginsburg-Landau 模型 (ϕ^6 模型) の解析から、 $m_{ud} \propto (m_s^{\text{tricrit.}} - m_s)^{5/2}$ のように、緩やかに立ち上がると考えられている。**(右図)** $N_F = 2$ のカイラル極限が 1 次相転移である場合に想定されるシナリオ。 m_s の中間的領域で特別のメカニズムでもない限り、 $N_F = 3$ カイラル極限の 1 次相転移領域と $N_F = 2$ カイラル極限の 1 次相転移領域は繋がると思われる。その描像で正しいなら、三重臨界点は存在せず、1 次相転移領域の端は全てイジング・ユニバーサリティー・クラスとなる。

クラスが影響を受け、そこでのパラメータ依存性や体積依存性が変わる可能性がある。希薄インスタントン気体近似が T_C 近傍まで有効である保証はないので、格子シミュレーションによる直接検証が重要である¹。

1.1 O(4) スケーリング

格子上で相転移次数を判断する上で、ユニバーサリティーから予言される臨界スケーリング現象の確認が重要な役割を果たす。 $N_F = 2$ のシミュレーションで O(4) スケーリングが見られれば、図 1 の左側のシナリオとなる。Wilson 型クォークを使ったシミュレーションでは筑波グループが 90 年代の後半に既に O(4) スケーリングを報告している [4]。(図 2 左図参照。)その後、改良された Wilson クォーク (clover クォーク) でも O(4) スケーリングが確認された [5]。ただし、どちらも初期のシミュレーションなので、クォーク質量が重く ($m_\pi \gtrsim 600$ MeV)、カイラル極限でどうなるかの確認が残されている。近年、Wilson 型による研究が世界的に再開され、軽いクォークや大きな格子による研究が進められているが、スケーリングに関して明確な結果を得るまでには至っ

¹他方、フレーバー・カイラル対称性を格子上で実現することは自明ではなく、カイラル相転移に関する格子の結果を見るときは、格子誤差の影響を慎重に見極める必要がある。最近の状況については [3] を参照。

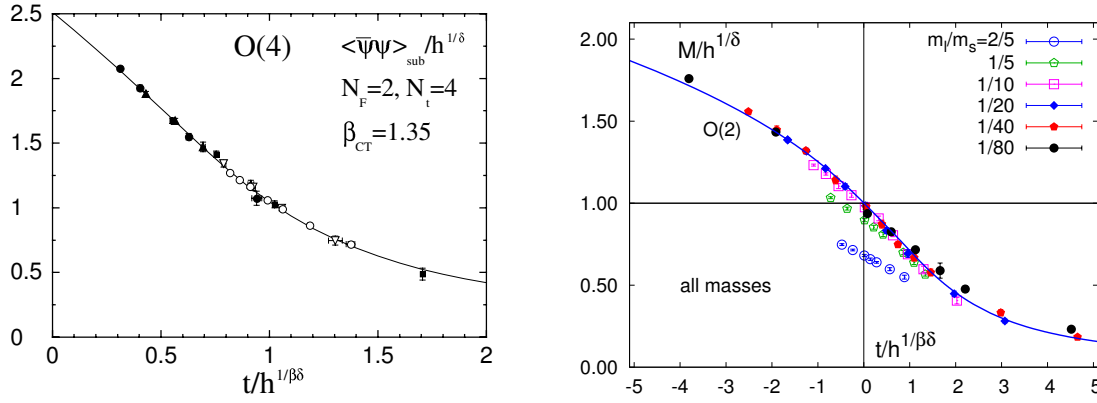


図 2: O(4) スケーリング テスト: (左図) Wilson 型クォークによる 2 フレーバー QCD の O(4) スケーリング フィット [4]. $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{sub}} = 2m_q a \sum_x \langle \pi(x)\pi(0) \rangle$ は、軸性 Ward-高橋恒等式に基づくくりこみ条件で加算的くりこみを行ったカイラル凝縮。(右図) staggered 型クォークによる 2+1 フレーバー QCD の O(2) スケーリング フィット [11]. $M = \hat{m}_s \left(\langle \bar{\psi}\psi \rangle_l - \frac{m_l}{m_s} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_s \right) N_t^4$ は、加算的発散部分を差し引いたカイラル凝縮。

ていない [6, 7, 8, 9, 10]。

大規模シミュレーションが最も進んでいる staggered 型クォークによる研究は、O(4) スケーリングに関しては長年不明確な状況が続いていたが (この関連の歴史は [3] を参照)、2009 年に $N_F = 2+1$ p4 クォークで m_{ud} を極めて軽くしたシミュレーション²により、初めて O(N) スケーリングが確認された [11]。(図 2 右図参照。) staggered 型の格子化誤差のためにこれは O(4) ではなく O(2) のスケーリングである。その後、より大きな N_t や他の改良 staggered 型クォークでも同様のスケーリングが確認されている [12, 13]。O(2) のスケーリングが連続極限で O(4) に置き換わると仮定すると (自明な仮定ではないが)、この結果は物理点近傍で O(4) スケーリングが見られたことを意味し、図 1 の左側の 2 次転移シナリオを強く示唆する。

1.2 U(1)_A の回復

他方、高温相で U(1)_A 対称性がどうなっているかを直接見る試みも、初期のシミュレーション以来続けられている。もし U(1)_A が「effective に」回復したなら、 π と σ 、 δ と η の縮退に加えて、 π と δ 、 σ と η も縮退すると期待される。

$$\begin{array}{ccc}
 \pi = \bar{q} \gamma_5 \frac{1}{2} \vec{\tau} q & \longleftrightarrow & \sigma = \bar{q} q \\
 \downarrow \text{U(1)}_A & \text{SU(2)}_L \times \text{SU(2)}_R & \downarrow \\
 \delta = \bar{q} \frac{1}{2} \vec{\tau} q & \longleftrightarrow & \eta = \bar{q} \gamma_5 q
 \end{array}$$

$N_F = 2$ case :

π と δ の縮退があれば感受率でも $\chi_\pi = \chi_\delta$ が導かれるが (注意: 逆は証明されていない)、 χ_σ や χ_η と違って、 χ_π , χ_δ の計算には disconnected diagram が含まれないので、格子計算が少し楽になる。SU(N_F)_L × SU(N_F)_R が回復すると、Banks-Casher 関係式

$$-\langle \bar{q} q \rangle \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\lambda \frac{2m_q \rho(\lambda)}{\lambda^2 + m_q^2} \xrightarrow{m_q \rightarrow 0} \pi \rho(0) \quad (1)$$

² π 中間子質量で $m_\pi^{\text{PNG}} = 75\text{--}150$ M V。s クォーク質量は物理点近傍に固定。ただし、t t の破れがあるので、実効 π 中間子質量はもっと大きくなる。

(V は体積) より、クォーク演算子の固有値分布が原点で $\rho(0) = 0$ と要求されるが、 $\chi_\pi - \chi_\delta$ にも類似の関係式

$$\chi_\pi - \chi_\delta \xrightarrow{V \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\lambda \frac{4m_q^2 \rho(\lambda)}{(\lambda^2 + m_q^2)^2} \xrightarrow{m_q \rightarrow 0} ?? \quad (2)$$

が導かれ、 ρ の原点近傍の振る舞いと $\chi_\pi - \chi_\delta$ の値が関係する。カイラル極限は Banks-Casher ほど簡単ではないが、例えば、 $\rho \sim m_q^a \lambda^b$ で $a + b \leq 1$ なら³、カイラル極限で $\chi_\pi - \chi_\delta \neq 0$ となる [14]。

Lattice 2012 では、大野が HISQ クォークを用いた $\rho(\lambda)$ の研究を報告した [15]：高温側で原点近くの $\rho(\lambda)$ が非常に小さいが、体積依存性が不明確。他方、 $\rho(0)$ の m_q 依存性を見ると、 T_C 近傍で 1 次の傾きを示し、これからは $\chi_\pi - \chi_\delta \neq 0$ が示唆される。しかし、staggered 型なので、連続極限を取らないと明確な結論は導けない。Cossu は、フレーバー・カイラル対称性を保持した overlap クォークを、トポロジ固定項を入れてシミュレーションした結果を紹介し、クォーク質量を小さくすると $T > 170\text{MeV}$ で $\rho(\lambda)$ が原点付近に gap を持つと報告した [16]。 T_C 直上での振る舞いや体積依存性の検証が望まれる。Lin は DW クォークを用いて $\rho(\lambda)$ の原点付近の分布や π , δ の相関関数を $m_\pi \approx 200\text{MeV}$ で調べ、 T_C 近傍で $\chi_\pi - \chi_\delta$ が有限になると報告した [14]。従って、数値的にはまだ混沌としている。

これらの数値シミュレーションとは別に、青木らは、 $N_F = 2$ 格子カイラルフェルミオンを使って、 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ が回復した場合の Ward-高橋恒等式を解析的に調べ、高温側 ($SU(2)_L \times SU(2)_R$ が回復した相) でクォーク質量依存性が解析的であると仮定するならば、 $\chi_\pi - \chi_\delta$ を含むいくつかの物理量の高温側での期待値が、体積 V のべきで抑制されることを示した [17]。従って、 $m \rightarrow 0$ より先に $V \rightarrow \infty$ の熱力学極限を取る限り、 T_C 直上を含む高温相で $\chi_\pi - \chi_\delta = 0$ となる。

上に議論したように、 T_C 直上での $\chi_\pi - \chi_\delta = 0$ は、(十分条件ではないにせよ) 素直には、 $U(1)_A$ が T_C 直上で effective に回復していることを示唆する。すると、特別のメカニズムでも効かない限りは、 $N_F = 2$ のカイラル相転移は 1 次であると思われる。すると、図 1 の右側の 1 次転移シナリオが示唆される。もしそれで正しいなら、実際のシミュレーションで $O(4)$ や $O(N)$ に見えているスケーリングはいったい何か？

格子フェルミオンがカイラルフェルミオンでなければ、格子間隔 a の正のべきに比例した補正が入る。しかし、これは格子化誤差であり、正しい連続極限をもつ格子理論ならば、連続極限を取れば消えるはずである。青木らの研究により、数値的な結果から $U(1)_A$ の回復に関する結論を引き出すためには、連続極限や体積依存性の確認が重要であることが再確認される。 $O(4)$ や $O(N)$ のスケーリングも、体積効果や格子化誤差の評価など、より詳細な検証が必要である。その結果に応じて、必要条件と十分条件の違いや、有限質量における未知のメカニズムを考察する必要が出てくるかもしれない。

2 状態方程式

2.1 staggered 型クォークによる状態方程式

QCD の状態方程式では、改良された staggered 型クォークを使った研究が大きく進んだ状態が続いている。 $N_F = 2 + 1$ の物理点近傍⁴でのシミュレーションが常識となり、stout クォークではさらに連続極限をとった結果が報告されている。

³B nk C h が成立するためには $a + b > 0$ の制限がある。

⁴ただし m_π^{PNG} で見ているので、連続極限を取らなければ実効的に物理点よりは重くなる。

Lattice 2012 では、Petreczky が⁵、 $N_F = 2+1$ の HISQ クォークで物理点近くの結果を示した。懸案となっている Budapest-Wuppertal グループの stout クォークによる結果とのずれを検証し、 f_K でスケールを決め、 $N_t \geq 8$ まで格子を細かくすれば不一致が小さくなる傾向があるが、 $N_t = 10, 12$ では統計誤差の範囲でほとんど不一致が改善されないことが報告された [18]。

2.2 Wilson 型クォークによる状態方程式

他方、2008–2010 年頃、staggered 型クォークによる相転移温度の研究から、taste 対称性の破れによる格子化誤差が有限温度 QCD においても大きな影響を持つことが、強く認識されはじめた。staggered 型クォークには、それに加えて、連続極限が保証されていないという問題もある⁵。これらを契機として、近年、Wilson 型や格子カイラルクォークを用いた有限温度・有限密度 QCD 研究が世界的に活発になって来ている。

Lattice 2012 では、Burger が⁵、 $N_F = 2$ の Wilson 型クォークとして twisted mass クォークを使った状態方程式の結果を報告した [8]。 $32^3 \times 12$ 格子で、 $m_\pi \approx 320\text{--}480$ MeV とまだ重い領域だが、 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ (ナイーブな定義) の感受率から T_C を決め、 $m_\pi \approx 400, 700$ MeV での状態方程式に関する中間報告を行った。

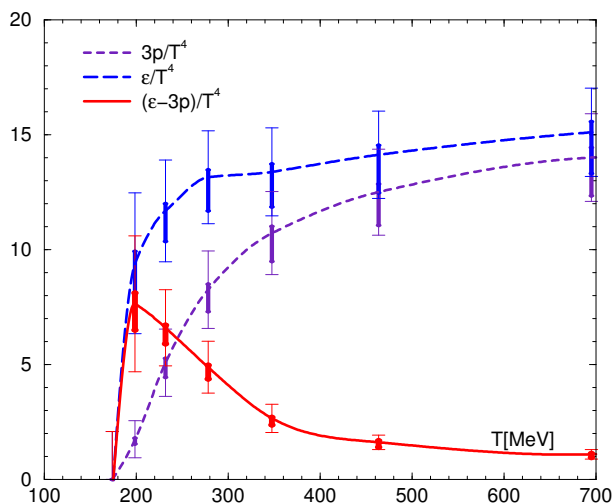


図 3: Wilson 型クォークによる 2+1 フレーバー QCD の有限温度状態方程式： clover クォークと岩崎ゲージ作用を用いて、 s クォーク質量は物理点近傍、 ud クォーク質量は $m_\pi = 636$ MeV に相当する。太い誤差棒は、ベータ関数による系統誤差をあらわす。[19]

梅田は、Wilson 型クォークとして初めての $N_F = 2+1$ 状態方程式の結果を報告した [10, 19]。計算時間を削減するために開発された固定格子間隔法 [20] に基づいて、ひとつのシミュレーション・ポイントで、 N_t を変えることで温度 $T = 1/N_t a$ を 180–700 MeV の範囲で変化させ、 T 積分法で圧力を計算した。(図 3) 固定格子間隔法では、既存のゼロ温度配位を利用できるという利点がある。この研究では、ILDG/JLDG 上に公開されている、CP-PACS+JLQCD Collaboration による $m_\pi = 636$ MeV の配位がゼロ温度配位として採用された。まだ物理点よりかなり重いですが、手法の有効性が確認されたので、次のステップでは、PACS-CS Collaboration による、物理点直上の配位の採用が計画されている。

⁵これらについては、[3]などを参照。

2.3 状態方程式における動的チャーム・クォーク効果

Krieg は、 $N_F = 2 + 1 + 1$ の stout クォークを使った状態方程式計算の状況を報告し、昨年度より統計を上げた結果を示した。動的なチャーム・クォークがあると、 $(\epsilon - 3p)/T^4$ は高温でよりゆっくり落ちる様相を示すと期待されるが、 $N_F = 2 + 1$ の結果と比較して、 $T > 300$ MeV で $(\epsilon - 3p)/T^4$ の上昇が見られることを報告した [21]。同様な効果は、Heller による HISQ クォークを使った $N_F = 2 + 1 + 1$ 状態方程式計算の中間結果でも指摘された [22]。

3 有限密度

有限密度 QCD のシミュレーションは、「符号問題（複素位相問題）」のために計算可能な領域が大きく制限されている。これは、クォークからの経路積分への寄与 $\det M$ が、化学ポテンシャル μ がゼロでないと一般に複素数になってしまうことに由来する。

$\det M$ は経路積分を Monte Carlo 法で評価する上で、確率分布の役割を持っており、それが実でなくなると、importance sampling に基づいた Monte Carlo 計算の根拠が崩れてしまう。 $\mu = 0$ の系や $\det M$ を $|\det M|$ に置き換えた「phase-quenched」の系なら Monte Carlo シミュレーション可能なので、それらのシミュレーションで物理量に $\det M$ や位相項を描けたものを評価することで元の理論での期待値を評価する reweighting 法もよく用いられる。例えば、phase-quenched シミュレーションを使う場合は、物理量 \mathcal{O} の期待値は、 $\det M = |\det M| e^{i\theta}$ とおいて、

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} e^{i\theta} \rangle_{||} / \langle e^{i\theta} \rangle_{||} \quad (3)$$

とあらわされる（ここで $\langle \dots \rangle_{||}$ は phase-quenched シミュレーションによる期待値）。しかし、 μ が大きくなると、 θ のゆらぎが大きくなり、 $e^{i\theta}$ が符号をしばしば変え、(3) の分母も分子も、統計的に信頼できる値を得るのが難しくなる（符号問題）。 θ は単純には体積に比例するので、符号問題は系の体積と共に指数関数的に難しくなる。

符号問題をを解決、もしくは緩和するために、

- $\mu = 0$ からの Taylor 展開
- μ だけでなく、 T など他のパラメータも含んだ空間での multi-parameter reweighting
- 符号問題の無い純虚数 μ からの数値的解析接続
- μ の代わりにクォーク数やバリオン数を固定した canonical ensemble のシミュレーション
- 物理量の確率分布（ヒストグラム）の利用
- 統計平均を熱的なランダムウォークの時間平均で評価する Langevin 法の複素空間への拡張

など、これまで様々な計算法が提案されてきた。通常、複数の手法を組み合わせ、適用範囲をできるだけ拡大するよう試みる。その結果、 μ/T が小さな領域では、様々な成果があげられてきた。

Lattice 2012 で、武田、中村、Jin は、Wilson 型クォークを用いた $N_F = 3, 4$ QCD の有限密度相転移に関する中間結果を報告した [23]。phase-quenched simulation からの reweighting 計算を行い、位相を Danzer-Gattringer の reduction 法で評価した。 $N_F = 4$ では、有限温度相転移が 1 次になるクォーク質量でシミュレーションを実行し、有限密度の相転移点で 1 次の有限体積スケーリングが見られることを、体積 6^3-8^3 の範囲で示した。

中川と江尻は、ヒストグラム法による有限密度 QCD 相構造の研究を報告した [24]。ヒストグラム法は、物理量の確率分布の形状を調べることにより 1 次相転移の領域を判定しようとする方法であるが、物理量として (有効) 作用に現れるブラケット (ゲージ作用を β で割ったもの) や、 $|\det M|$ そのものを採用すれば、相転移に敏感であると同時に、reweighting で β などのパラメータを動かすことも容易にする [25, 26]。多数点のヒストグラムの情報を繋ぐ multi-parameter reweighting により確率分布を広い範囲でサーベイし、パラメータ空間内の 1 次相転移領域やその端を割り出そうという方法である。 $N_F = 2$ clover クォークで phase-quenched シミュレーションを実行し、符号問題を複素位相のキュムラント展開法で緩和することにより、1 次相転移の端の臨界点を示唆する兆候が報告された。

永田は、 $\mu \neq 0$ の場合のクォーク行列式を、 μ に依存した項と μ に依存しない演算子 Q の和の行列式で表す reduction formula: $\det M \propto \det[e^{-\mu/T} + Q]$ を使って、 Q の固有値分布が $|\lambda| = \ell^{N_t}$ (“ N_t -scaling”) を示すことを報告した。この性質を使えば、低温極限で、 μ が小さい領域だけでなく、 μ がカットオフより大きな極限でも符号問題無く $\det M$ を評価できると議論した。これから、低温・高密度極限をシミュレーションする可能性が示唆される [27]。

木村らは、ダブリングが最小の 2 である Karsten-Wilczek フェルミオンを $N_F = 2$ のモデルとして考えると、カイラル対称性の一部を保持しながら虚化学ポテンシャルを導入できることを指摘し、第一段階として、強結合極限での相構造を、平均場近似で計算した。強結合極限の平均場計算で $\mu_C(T=0)/T_C(\mu=0)$ が小さく出てしまう問題が、K-W フェルミオンでは多少緩和されることを示した [28]。

4 その他の進展

Lattice 2012 では、その他にも様々な進展が報告された：

Allton らは、HAL-QCD グループが核力研究に採用した波動関数と Schrödinger 方程式からポテンシャルを計算する方法を $N_F = 2$ の有限温度 QCD に用いて、重クォークポテンシャルの温度依存性を計算しようと試みた [29]。

S.Y. Kim らは、NRQCD の格子シミュレーションにより、熱浴中で運動量を持つ Υ のスペクトル関数を、最大エントロピー法を用いて計算し、数 T_c の領域では、クォーク質量の効果より温度効果の方が大きいことを示した [30]。

Negro らは、 θ 真空の効果をもつ SU(3) Yang-Mills 系で研究した。 θ 項 $e^{i\theta Q}$ をそのまま経路積分に導入したのでは、複素位相問題が発生してしまうので、純虚数の θ を導入したシミュレーションを行い、それを実の θ に解析接続して、 T_c が θ とともに下がることを示した [31]。この結果は、佐々木らの Entanglement PNJ 模型による計算と、定性的に一致する [32]。

参考文献

- [1] <http://www.physics.adelaide.edu.au/cssm/lattice2012/index.php>
- [2] R.D. Pisarski and F. Wilczek, Phys. Rev. D 29, 338 (1984).
- [3] K. Kanaya, PoS (Lattice 2010) 012 (2010).
- [4] Y. Iwasaki et al. (QCDPAX Collaboration), Phys. Rev. Lett. 78, 179 (1997).

- [5] A. Ali Khan et al. (CP-PACS Collaboration), Phys. Rev. D 63, 034502 (2001).
- [6] V.G. Bornyakov et al. (QCDSF-DIK Collaboration), Phys. Rev. D 82, 014504 (2010).
- [7] B.B. Brandt, talk at Lattice 2012.
- [8] F. Burger (tmfT Collaboration), talk at Lattice 2012.
- [9] D. N6gr6di (Budapest-Wuppertal Collaboration), talk at Lattice 2012.
- [10] T. Umeda (WHOT-QCD Collaboration), talk at Lattice 2012.
- [11] S. Ejiri et al. (BNL-Bielefeld Collaboration), Phys. Rev. D 80, 094505 (2009).
- [12] O. Kaczmarek et al. (BNL-Bielefeld Collaboration), Phys. Rev. D 83, 014504 (2011).
- [13] A. Bazavov et al. (HotQCD Collaboration), Phys. Rev. D 85, 054503 (2012).
- [14] A. Bazavov et al., arXiv:1205.3535; Z. Lin (HotQCD Collaboration), talk at Lattice 2012.
- [15] H. Ohno (HotQCD Collaboration), talk at Lattice 2012.
- [16] G. Cossu (JLQCD Collaboration), talk at Lattice 2012.
- [17] S. Aoki, talk at Lattice 2012; S. Aoki, H. Fukaya and Y. Taniguchi, arXiv:1209.2061.
- [18] P. Petreczky (HotQCD Collaboration), talk at Lattice 2012.
- [19] T. Umeda et al. (WHOT-QCD Collaboration), Phys. Rev. D 85, 094508 (2012).
- [20] T. Umeda et al. (WHOT-QCD Collaboration), Phys. Rev. D 79, 051501(R) (2009).
- [21] S. Krieg (Budapest-Wuppertal Collaboration), talk at Lattice 2012.
- [22] U.M. Heller (MILC Collaboration), talk at Lattice 2012.
- [23] S. Takeda, Y. Nakamura, and X.-Y. Jin, talks at Lattice 2012.
- [24] Y. Nakagawa and S. Ejiri (WHOT-QCD Collaboration), talks at Lattice 2012;
中川義之, 「ヒストグラム法で探る有限密度格子 QCD の相構造」(この会議報告集).
- [25] S. Ejiri, Phys. Rev. D 77, 014508 (2008).
- [26] H. Saito et al. (WHOT-QCD Collaboration), Phys. Rev. D 84, 054502 (2011).
- [27] K. Nagata (XQCD-J Collaboration), talk at Lattice 2012; K. Nagata et al. (XQCD-J Collaboration), arXiv:1204.1412
- [28] T. Kimura, talk at Lattice 2012; T. Misumi, T. Kimura and A. Ohnishi, arXiv:1206.1977.
- [29] C. Allton, talk at Lattice 2012.
- [30] S.Y. Kim, talk at Lattice 2012.
- [31] F. Negro, talk at Lattice 2012; M. D'Elia, F. Negro, arXiv:1205.0538.
- [32] T. Sasaki, talk at Lattice 2012; T. Sasaki et al., Phys. Rev. D 85, 056009 (2012).

ヒストグラム法で探る有限密度格子QCDの相構造

中川義之 for WHOT-QCD Collaboration*
新潟大学自然科学研究科

1 序

強い相互作用の基礎理論であるQCDは、ハドロン相、クォーク・グルーオン・プラズマ相をはじめとして非常に豊富な相構造をもっていると考えられている。QCDの第一原理計算である格子QCDシミュレーションは、これまでゼロ密度有限温度系の様々な性質を明らかにしてきた。しかし有限密度格子QCDでは符号問題やオーバーラップ問題があり、比較的低密度の領域では有効な方法が確立しているものの[1]、高密度QCDを探るシミュレーション法は未だに確立していない。本研究では高密度領域でも適用可能な計算手法の確立を目的とし、ヒストグラム法と再重み付け法 (reweighting method) [2,3]、さらに複素位相に関するキュムラント展開を用いて有限密度QCDの数値シミュレーションを行い、有限密度QCDの相構造を探る。

2 ヒストグラム法

ヒストグラム法では、まずある演算子 \hat{O} で配位をラベルし、その分布関数 (ヒストグラム) $w(O)$ を求める。そこから有効ポテンシャル $V(O) = -\ln w$ を求め、シミュレーションパラメータを動かすことで、有効ポテンシャルの形状の変化を調べる。もし転移がクロスオーバーであれば有効ポテンシャルは常に正の曲率をもつが、1次相転移をもてば、 $V(O)$ は double well 型になって負の曲率をもつことになる。

ここでは時空平均をとったゲージ作用 P 、及びゼロ化学ポテンシャルを基準としたクォーク行列式の絶対値 $F(\mu) = N_f \ln |\det M(\mu)| / \det M(0)|$ でゲージ配位をラベルすることを考える。すると (ゼロ化学ポテンシャルを基準とした) 分配関数は

$$\frac{\mathcal{Z}(\beta, \mu)}{\mathcal{Z}(\beta, 0)} = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta, 0)} \int \mathcal{D}U e^{i\theta(\mu)} |\det M(\mu)|^{N_f} e^{6\beta N_{\text{site}} P} = \int dP dF \langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P,F)} w_0(P, F; \beta, \mu) \quad (1)$$

と表すことができる。ここで

$$w_0(P', F'; \beta, \mu) = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta, 0)} \int \mathcal{D}U \delta(\hat{P} - P') \delta(\hat{F} - F') |\det M(\mu)|^{N_f} e^{6\beta N_{\text{site}} \hat{P}} \quad (2)$$

はクォーク行列式の複素位相を無視したときの確率分布関数であり、

$$\langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P', F')} = \frac{\int \mathcal{D}U e^{i\theta(\mu)} \delta(\hat{P} - P') \delta(\hat{F} - F') |\det M(\mu)|^{N_f} e^{6\beta N_{\text{site}} \hat{P}}}{\int \mathcal{D}U \delta(\hat{P} - P') \delta(\hat{F} - F') |\det M(\mu)|^{N_f} e^{6\beta N_{\text{site}} \hat{P}}} = \frac{\langle \langle e^{i\theta(\mu)} \delta(\hat{P} - P') \delta(\hat{F} - F') \rangle \rangle_{(\beta, \mu)}}{\langle \langle \delta(P - P') \delta(F - F') \rangle \rangle_{(\beta, \mu)}} \quad (3)$$

は複素位相を除いたボルツマンの重みで計算した、クォーク行列式の複素位相の期待値である。 $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ は複素位相を除いたボルツマンの重みで計算した期待値を表す。

分配関数を格子QCDシミュレーションで正しく評価するためには、式(1)の P と F に関する積分を正確に評価する必要がある。つまり位相を含んだ確率分布 $w(P, F; \beta, \mu) = \langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P,F)} w_0(P, F; \beta, \mu)$ が最大となる (P, F) で多くの配位を用意する必要がある。しかし複素位相(3)の P, F 依存性が大きい場合は、 w と w_0 が最大になる点がズレてしまう。たくさんの配位を生成して w_0 を精密に求めたとしても、複素位相によって w と w_0 のピークの位置がズレてしまえば、そうして得られた配位から式(1)の積分を正しく評価することはできない。

*本研究は青木慎也氏 (筑波大)、江尻信司氏 (新潟大)、初田哲男氏 (理研)、金谷和至氏 (筑波大)、大野浩史氏 (Bielefeld 大)、齋藤藤氏 (筑波大)、梅田貴史氏 (広島大) との共同研究である。

このオーバーラップ問題を回避するために我々は複素位相を無視したボルツマンの重みで、様々なシミュレーションパラメータで配位を生成する。そうして得られた配位から再重み付け法を用いて、求めたい (T, μ) での分布関数及び複素位相を計算する。再重み付け法を用いると、複素位相は

$$\langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P', F')} = \frac{\left\langle \left\langle e^{i\theta(\mu)} \delta(P - P') \delta(F - F') \left| \frac{\det M(\mu)}{\det M(\mu_0)} \right|^{N_f} \right\rangle \right\rangle_{(\beta_0, \mu_0)}}{\left\langle \left\langle \delta(P - P') \delta(F - F') \left| \frac{\det M(\mu)}{\det M(\mu_0)} \right|^{N_f} \right\rangle \right\rangle_{(\beta_0, \mu_0)}} \quad (4)$$

で求めることができる。我々は F 及び $C = \left| \frac{\det M(\mu)}{\det M(\mu_0)} \right|$ を

$$F = N_f \ln \left| \frac{\det M(\mu)}{\det M(0)} \right| = N_f \int_0^{\mu/T} \Re \left[\frac{\partial(\ln \det M(\mu))}{\partial(\mu/T)} \right]_{\bar{\mu}} d\left(\frac{\bar{\mu}}{T}\right) \quad (5)$$

$$C = N_f \ln \left| \frac{\det M(\mu)}{\det M(\mu_0)} \right| = N_f \int_{\mu_0/T}^{\mu/T} \Re \left[\frac{\partial(\ln \det M(\mu))}{\partial(\mu/T)} \right]_{\bar{\mu}} d\left(\frac{\bar{\mu}}{T}\right) \quad (6)$$

で求めるが、これらは積分の下限値が違っただけであり、非常に相関が強い。そこで C が F の関数として表わせると近似して式 (4) を評価する。

3 複素位相に関するキュムラント展開

化学ポテンシャルがゼロから大きくなるとクォーク行列式の位相が激しく揺らぎ、その期待値は統計誤差の範囲内でゼロになってしまう。ここではこの符号問題を避けるために複素位相の期待値に対してキュムラント展開を行う：

$$\langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P, F, \mu)} = \exp \left[i \langle \theta \rangle_c - \frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle_c - \frac{i}{3!} \langle \theta^3 \rangle_c + \frac{1}{4!} \langle \theta^4 \rangle_c + \dots \right]. \quad (7)$$

時間反転に対応する $\mu \leftrightarrow -\mu$ の変換の下で、奇数次のキュムラントは符号を反転させる。そのため、対称性から複素位相の期待値は

$$\langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P, F, \mu)} = \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle_c + \frac{1}{4!} \langle \theta^4 \rangle_c + \dots \right] \quad (8)$$

となり、正の実数となる。こうすることで、符号問題はキュムラント展開の収束性の問題に置き換わる。

ここで問題になるのはキュムラント展開の収束性である。展開の収束性が理想的なのは位相がガウス分布するときである。逆にガウス分布から離れると展開の収束性はひどく悪くなると考えられる。例えば位相 $\theta(\mu) = N_f \Im[\ln \det M(\mu)]$ の周期性を考えて $-\pi$ から π に制限するように θ を計算してしまうと、その分布は化学ポテンシャルが大きくなるとガウス分布から大きく離れてしまう。我々に必要なのは位相がガウス分布に近い分布をするように θ を計算することである。そこでここでは θ の周期性を無視して $-\infty$ から ∞ の領域で定義し、

$$\theta(\mu) = N_f \Im[\ln \det M(\mu)] = N_f \int_0^{\mu/T} \Im \left[\frac{\partial(\ln \det M(\mu))}{\partial(\mu/T)} \right]_{\bar{\mu}} d\left(\frac{\bar{\mu}}{T}\right) \quad (9)$$

のように $\ln \det M(\mu)$ の μ 微分を計算してそれを積分することで θ を求める。こうすることで、我々はガウス関数で良く近似される θ の分布を得ることができる [4]。

4 数値シミュレーションの結果

本研究では $8^3 \times 4$ の格子で、岩崎ゲージ作用及び $N_f = 2$ の $O(a)$ 改良されたウィルソンクォーク作用を用い、 $K = 0.141139$ 、 $c_{\text{SW}} = 1.603830$ で固定した。 F や θ を求めるためにランダムノイズ法を用いて $\ln \det M(\mu)$ の 1 階微分、及び 2 階微分を 10 トラジェクトリー毎に計算した。統計数は 2900 である。

我々が知りたいのは、 μ を変えたときの有効ポテンシャル $V(P, F; \beta, \mu) = -\ln w_0(P, F; \beta, \mu) - \langle e^{i\theta(\mu)} \rangle_{(P, F)}$ の曲率である。複素位相のキュムラント展開を2次まで考えると、 P 、 F 方向の曲率は

$$\frac{\partial^2 V}{\partial P^2} = \frac{\partial^2(-\ln w)}{\partial P^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle \theta \rangle_c}{\partial P^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} = \frac{\partial^2(-\ln w)}{\partial F^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \langle \theta \rangle_c}{\partial F^2}, \quad (10)$$

となる。ここで P 、 F が各シミュレーションポイントでの平均値のまわりにガウス分布すると仮定すると、分布関数の曲率 $\partial^2(-\ln w)/\partial P^2$ 、 $\partial^2(-\ln w)/\partial F^2$ はそれぞれ P 、 F の感受率の逆数に等しくなる。

図1は $\mu/T = 3.2, 3.6, 4.0$ での F 方向の分布関数の曲率を示している。曲率は μ/T が大きくなるとともに急激に小さくなるのがわかる。一方、 P 方向の曲率は μ/T が変化してもほとんど変わらなかった。

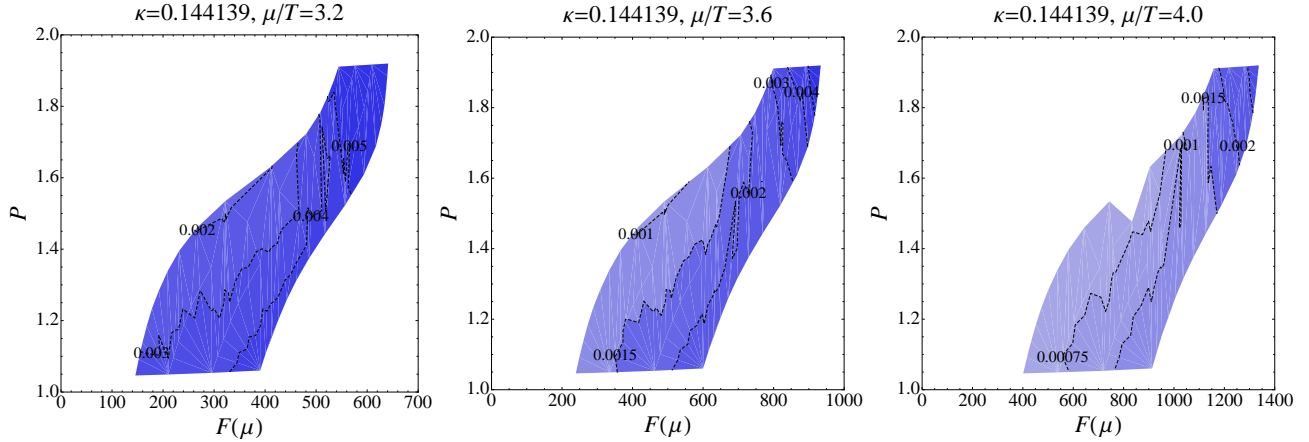


図1: $\mu/T = 3.2, 3.6, 4.0$ での F 方向の分布関数の曲率。

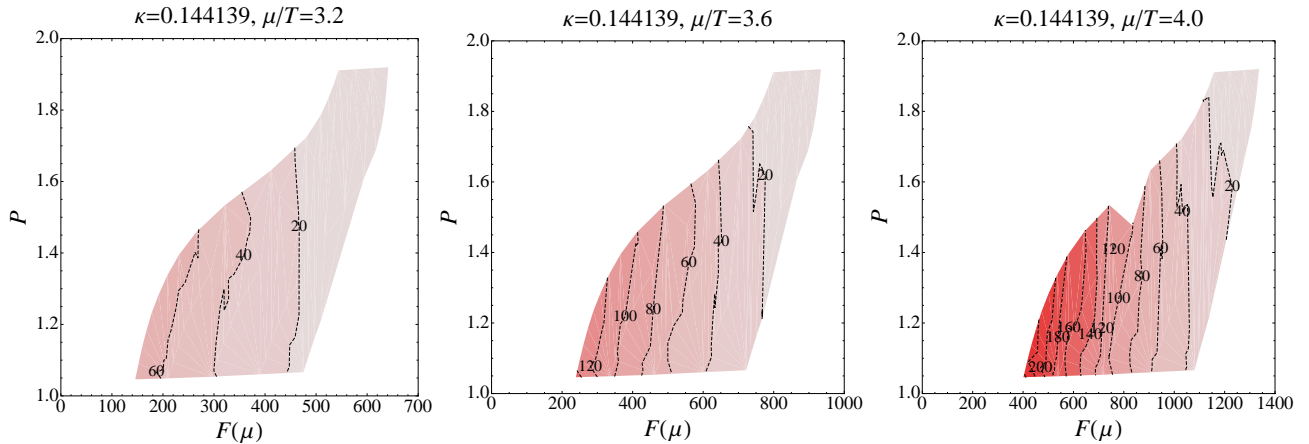


図2: $\mu/T = 3.2, 3.6, 4.0$ での複素位相の2次のキュムラント $\frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle_c$ 。

図3は $\mu/T = 3.2, 3.6, 4.0$ での複素位相の2次のキュムラント $\frac{1}{2} \langle \theta^2 \rangle_c$ の等高線を図示している。 $\langle \theta^2 \rangle_c$ は (P, F) が大きな領域で小さな値をとり、 (P, F) が小さな領域で大きな値をとることがわかる。 (P, F) が小さな領域をカバーするのは低温相でのシミュレーションで得られた配位であり、逆に (P, F) が大きな領域をカバーするのは高温相の配位である。つまり低温相側でクォーク行列式の位相の揺らぎは大きくなる。また、 μ/T が大きくなるにつれ、等高線の間隔が狭くなっているのがわかる。つまり μ/T が大きくなると低温相側での位相の揺らぎが急激に大きくなるのである。

位相を無視したシミュレーション ($N_f = 2$ の場合は有限アイソスピンシミュレーション) で1次相転移をもたなければ、分布関数 $-\ln w_0$ の曲率は常に正である。有限クォーク化学ポテンシャルで1次相転移をもつためには、位相の2次のキュムラントから負の寄与があり、その大きさが $-\ln w_0$ の正の曲率よ

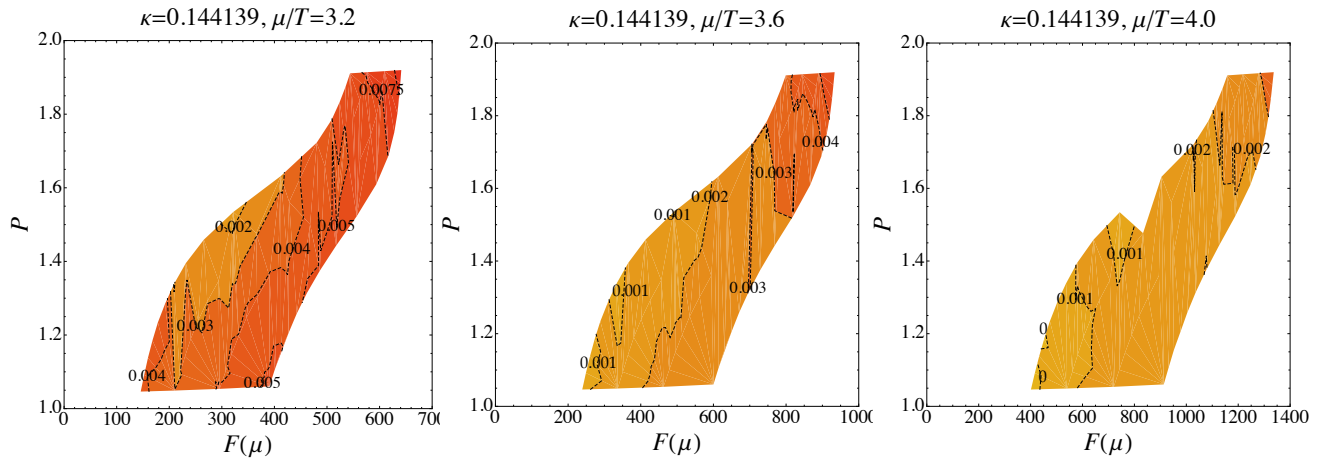
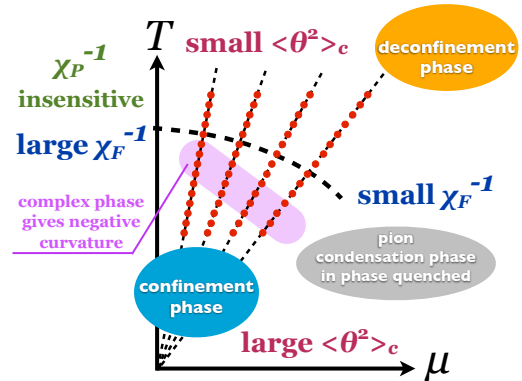


図 3: $\mu/T = 0.4, 2.4$ でのクォーク行列式の位相分布。

りも大きくなる必要がある。図 3 は F 方向の有効ポテンシャルの曲率 $\partial^2 V / \partial F^2$ をプロットしたものである。 μ/T が大きくなるにつれて有効ポテンシャルは小さくなり、 $\mu/T = 4.0$ では曲率が 0 となる領域が現れているのがわかる。これは $\mu/T = 4.0$ で 1 次相転移が起こることを示唆している。

5 まとめ

ここではヒストグラム法を用いた有限密度格子 QCD の相構造の研究に関する進展を報告した。複素位相についてキュムラント展開を用いると、その最低次の次数で有効ポテンシャルは分布関数 $-\ln w_0$ と 2 次のキュムラント $\langle \theta^2 \rangle$ の和となる。ここでは、 μ/T が大きくなると分布関数の正の曲率が急激に小さくなることを示した。さらに $\mu/T = 4.0$ で位相の 2 次のキュムラントからくる負の曲率が打ち勝って、有効ポテンシャルの曲率が負となる領域が現れることを示した。これは $\mu/T = 4.0$ で 1 次相転移が起こることを示唆している。



References

- [1] S. Ejiri *et al.* [WHOT-QCD Collaboration], Phys. Rev. **D82**, 014508 (2010). [arXiv:0909.2121 [hep-lat]].
- [2] S. Ejiri, Phys. Rev. **D77**, 014508 (2008). [arXiv:0706.3549 [hep-lat]].
- [3] H. Saito *et al.* [WHOT-QCD Collaboration], Phys. Rev. **D84**, 054502 (2011). [arXiv:1106.0974 [hep-lat]].
- [4] Y. Nakagawa *et al.* [WHOT-QCD Collaboration], PoS LATTICE2011 (2011) 208

Complexification approaches to the sign problem

H. Fujii^{*1}

¹*Institute of Physics, University of Tokyo, Komaba 3-8-1, Tokyo 153-8902*

The action functional of QCD becomes complex at finite baryon chemical potential, which prevents the direct application of the importance sampling technique to evaluation of the partition function — the sign problem in QCD. We briefly discuss two old and new attempts to solve it, complex Langevin simulation and sampling on the Lefschetz thimble.

I. INTRODUCTION

Direct evaluation of the QCD partition function $Z(T)$ at finite temperature has been successful with importance sampling algorithms in the path integral representation, providing information of the QCD equation of state. At finite baryon chemical potential μ , however, the Dirac operator becomes non-Hermitian to make the action functional complex and we encounter the sign problem. One should remember that the partition function $Z(T, \mu)$ itself is still real positive even at finite μ . In this workshop, we discussed two attempts towards the solution of the sign problem, in both of which the configuration space is necessarily complexified.

II. COMPLEX LANGEVIN SIMULATION

The statistical sampling with the complex Langevin equation has a long history since 80's [1–3]. The algorithm is very simple. One just solves a stochastic evolution equation in a fictitious time θ :

$$\frac{\partial \phi(x, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x, \theta)} + \eta(x, \theta), \quad (1)$$

^{*} e-mail: hfujii@phys.c.u-tokyo.ac.jp

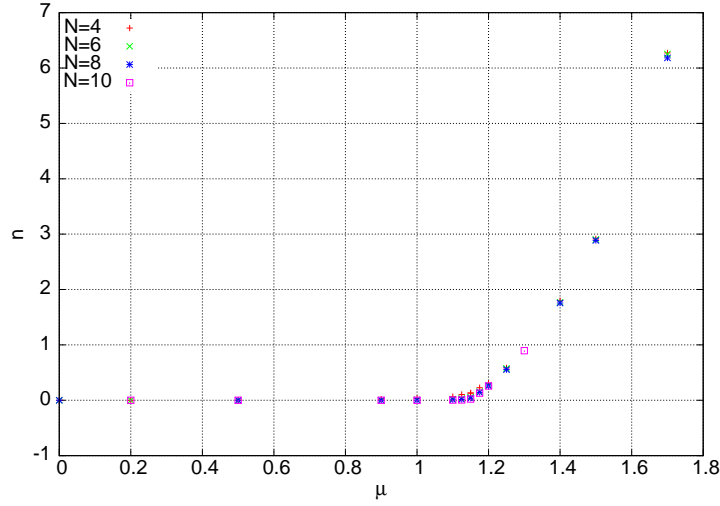


FIG. 1: Number density stays is independent of μ being zero as far as $\mu < \mu_c$. The so-called Silver Blaze phenomenon is observed.

where ϕ is the scalar field and η the Gaussian stochastic field with variance $\langle \eta(x, \theta) \eta(x', \theta') \rangle = 2\delta(x - x')\delta(\theta - \theta')$. The long-time average of an operator using this equation is known to coincide with the state average in equilibrium.

There is no apparent difficulty in generalizing Eq. (1) to the case of a complex action S . The price to pay is that, since the force $\delta S / \delta \phi$ is now complex, one needs to complexify as well the fields ϕ , which was originally real. However, more delicate issue is about equilibration. Is equilibration achieved with the complex action? Is the equilibrium state correct? Hot discussions are revived recently regarding these points. [4, 5].

In the workshop we showed the numerical study of the U(1) $\lambda\phi^4$ theory in Ref. [6], whose action is

$$S = \int d^4x \left[|\partial_\nu \phi|^2 + (m^2 - \mu^2)|\phi|^2 + \mu(\phi^* \partial_4 \phi - \partial_4 \phi^* \phi) + \lambda|\phi|^4 \right]. \quad (2)$$

The field is $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ with $\phi_{1,2} \in \mathbb{R}$. The term proportional to the chemical potential μ makes the action complex, and therefore one needs to complexify the fields as $\phi_{1,2} \in \mathbb{C}$. We show the numerical results on the lattice with size N^4 ($N = 4, 6, 8, 10$) in Fig. 1. The constancy of the density (at zero) can be achieved only when the complex phase is properly treated[6]. The complex Langevin simulation seems very successful here. See also Ref. [7].

An application of the complex Langevin simulation to the chiral random matrix model was reported by T. Sano in this workshop.

III. INTEGRATION ON THE LEFSCHETZ THIMBLE

Once one admits the necessity of complexification of the configuration space, one may recognize the freedom to deform the integration “path” in the functional space to improve the convergence of the integration in the spirit of the steepest descent. A simplest example,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\kappa x^2} = \int_{\mathcal{C}} dz e^{i\kappa z^2} = e^{i\pi/4} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\kappa t^2} = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}. \quad (3)$$

The counterpart to the deformed “path” is the Lefschetz thimble in the functional integration [8]. Denoting the complexified fields as z , we have the action $S[z]$ holomorphic in z . If one considers flows

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\overline{\partial S[z]}}{\partial z} \quad (4)$$

from a critical point σ where

$$\left. \frac{\partial S[z]}{\partial z} \right|_{\sigma} = 0, \quad (5)$$

one finds that along the flow

$$\frac{\partial \text{Re}S[z]}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial \text{Im}S[z]}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

The union of these flows are called Lefschetz thimble \mathcal{J}_{σ} associated to the point σ . The Morse theory dictates that the functional integration can be represented the integration on the Lefschetz thimbles. Note that the imaginary part of $S[z]$ is constant on a thimble. Especially, since $S[0] = 0$, $\text{Im}S[z] = 0$ on the Lefschetz thimble \mathcal{J}_0 associated with the origin $z = 0$. But there is no criterion known so far on the question which thimbles should be chosen as the integration path among several critical points. It seems natural to choose \mathcal{J}_0 .

It is pointed out, however, that there still remains a residual sign problem stemming from the Jacobian factor [9]. If we denote the coordinates on the Lefschetz thimble as ξ , then

$$\int d\phi e^{-S(\phi)} = \int_{\mathcal{J}_0} dz e^{-S(z)} = \int d\xi \left| \frac{dz}{d\xi} \right| e^{-S(\xi)}. \quad (7)$$

Even if $S[\xi]$ is kept real positive on the thimble \mathcal{J}_0 , we have a complex phase of $\left| \frac{dz}{d\xi} \right|$ in general. Note that in contrast to the complex Langevin where the dimension of the configuration space

is effectively doubled by complexification, here the dimension of the thimble is kept the same as the original although deformed.

We've just performed a pilot simulation with the hybrid Monte Carlo algorithm for the $\lambda\phi^4$ theory, which hints that the residual phase may be very small and which is very encouraging. We are now developing the code to perform the simulation more efficiently. At the same time, analytic study of the sign problem on the Lefschetz thimble is underway in our group.

Acknowledgments

The author is very grateful to D. Honda, M. Kato, Y. Kikukawa S. Komatsu and T. Sano for valuable discussions and collaboration.

-
- [1] G. Parisi and Y. s. Wu, *Sci. Sin.* **24**, 483 (1981).
 - [2] G. Parisi, *Phys. Lett.* **B 131** 393 (1983); J.R. Klauder, *Acta Physica Austriaca Suppl.*, XXV, p251, (1983); J.R. Klauder, *Phys. Rev.* **A 29** 2036 (1984).
 - [3] P. H. Damgaard and H. Huffel, *Phys. Rept.* **152**, 227 (1987).
 - [4] G. Aarts, F. A. James, E. Seiler and I. O. Stamatescu, *Phys. Lett. B* **687**, 154 (2010) [arXiv:0912.0617 [hep-lat]].
 - [5] G. Aarts, E. Seiler and I. O. Stamatescu, *Phys. Rev. D* **81**, 054508 (2010) [arXiv:0912.3360 [hep-lat]].
 - [6] G. Aarts, *JHEP* **0905**, 052 (2009) [arXiv:0902.4686 [hep-lat]].
 - [7] G. Aarts and F. A. James, *JHEP* **1008**, 020 (2010) [arXiv:1005.3468 [hep-lat]].
 - [8] C. Pehlevan and G. Guralnik, *Nucl. Phys. B* **811**, 519 (2009) [arXiv:0710.3756 [hep-th]].
 - [9] M. Cristoforetti, F. Di Renzo and L. Scorzato (AuroraScience Coll), arXiv:1205.3996 [hep-lat]

有限密度ランダム行列模型に対する 複素ランジュバン方程式

佐野 崇*、藤井 宏次†、菊川 芳夫†

平成 24 年 8 月 24 日

概要

有限密度格子 QCD シミュレーションは、符号問題のために難しい。符号問題を回避するアルゴリズムとして、複素ランジュバン法がある。この方法には一見して符号問題が存在しないが、正しい定常解を得られるか否かについて、満足のいく証明はない。我々は複素ランジュバン法を、カイラルランダム行列模型に適用し、数値解と厳密解を比較することで、手法の妥当性を調べた。

1 イントロダクション

QCD 相構造は、重イオン衝突実験や、中性子星の内部構造に関連して、実験的にも理論的にも興味深い。相構造の解析は、系の基底状態を調べることに他ならず、本質的に非摂動的手法を用いる必要がある。

汎関数積分を計算機によって数値評価する格子 QCD シミュレーションの方法は、強力な非摂動的手法の一つである。しかし、ひとたび有限のクォーク化学ポテンシャルが導入されると、作用が複素化するために、確率解釈が破綻し、インポートランスサンプリング法に基づく通常の格子シミュレーションは困難になる。

インポートランスサンプリング法とは異なるアルゴリズムに、複素ランジュバン法がある。この方法は、複素ランジュバン方程式を逐次的に解くのみであり、一見して符号問題は存在しない。しかし、この手法には数学的基礎が乏しく、具体的な模型に適用した場合も、ランジュバン方程式の収束性が著しく悪かったり、収束結果が正しい値を示さない場合も見つかっている。

我々は、カイラルランダム行列 (ChRM) 模型に対して、複素ランジュバン法を適用した。ChRM 模型は、有限密度でカイラル相転移を示し、かつ符号問題を持つ。一方で解析的に厳密解を導くこともできる。したがって、厳密解と数値解を比較して、複素ランジュバン法の可否を、直接検証することが可能である。

2 確率過程量子化法

確率過程量子化法に基づくアルゴリズムを説明するために、次のような一次元積分を考える。

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-S(x)) \quad (1)$$

*発表者、理研 email:tsano@riken.jp

†東大総文

ただし、 S は実関数であるとする。このとき、 x の関数 $f(x)$ に対して、期待値 $\langle f(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int dx f(x) e^{-S}$ を計算したいとする。

このとき、次のような方程式 (ランジュバン方程式) を考える。

$$\frac{d}{d\theta} x(\theta) = -\frac{\partial S(x)}{\partial x} + \eta(\theta) \quad (2)$$

θ は、ある時間パラメータ (ランジュバン時間) であり、ランジュバン方程式は、ランジュバン時間方向への発展方程式である。右辺第一項は“力”の項であり、 x が与えられると一意に求まる。第二項の η はノイズの項であり、次ような規格化条件を満たす; $\langle \eta(\theta)\eta(\theta') \rangle = 2\delta(\theta - \theta')$ 。

ランジュバン方程式にはノイズ項があるために、ある時刻 θ における x の値は一意には定まらず、分布している。その分布関数を $P(x, \theta)$ と表す。このとき、充分大きな θ に対して、 $P(x, \theta)$ は初期値に依存せず、 $\frac{1}{Z} e^{-S}$ に収束することが知られている [1]。この事実を用いると、ランジュバン方程式 (2) を数値的に解き、熱化後の変数 x をサンプルすることで、任意の $f(x)$ の平均値を計算することができる。

次に、 S が複素数の場合を考える [2, 3]。 S が複素数でも、ランジュバン方程式 (2) は同様に書き下すことができる。このとき、力の項も複素数になるために、もともと実だった変数 x の虚部を考えないと、方程式は閉じない。複素ランジュバン方程式を数値的に解くことについて、 S の複素化は、表向きには新たな困難を生じない。そして、複素ランジュバン方程式を用いて得られた変数列を用いて、複素重み e^{-S} の元での期待値が得られれば、複素ランジュバン法によって問題が解けたことになる。これは符号問題の解決に他ならない。

この方法について、数学的な証明はいくども試みられている [4, 5]。一方で、具体的なモデルにおいては、シミュレーションが不安定で、そもそも解が得られなかったり、収束しても、収束先が正しくない解を導くなどの問題が発見されている。ただし、シミュレーションの不安定性の問題については、最近進展があり、一般的にシミュレーションを安定化する工夫が提案されている [6]。

3 ランダム行列模型

有限密度 QCD に対するカイラルランダム行列 (ChRM) 模型は、次のように定義できる。 [7, 8]

$$Z = \int [dW] e^{-N \Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \prod_{f=1}^{N_f} \det \begin{pmatrix} m & iW + \mu \\ iW^\dagger + \mu & m \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\equiv \int [dW] e^{-N \Sigma^2 \text{tr} W^\dagger W} \prod_{f=1}^{N_f} (\det D(\mu) + m), \quad (4)$$

ただし、積分の測度は、 $\int [dW] = \prod_{ij} \int_{-\infty}^{\infty} d(\text{Re}\{W_{ij}\}) d(\text{Im}\{W_{ij}\})$ である。 Σ はカイラル対称性の破れのスケールを決めるパラメータで、 m はクォーク質量である。また、 N_f はクォークフレーバ数である。行列のサイズ N は疑ゼロモード数と呼ばれ、 N は系の体積に比例する大きな数と捉える。

ChRM 模型の一つの利点は、解析的な取り扱いが容易であることである。この模型は、疑ゼロモード数 N が無限に大きい場合に解析的に解かれ、有限の化学ポテンシャル μ_c において、カイラル相転移が起きることが知られている。特にカイラル極限では $\Sigma \mu_c = 0.528$ である。有限の N についても、適当な変数変換を行うことで、分配関数中の積分変数を減らすことができ、分配関数を厳密に求めることが可能になる。

解析的に容易に取り扱える一方で、有限密度においては、 $\det(D+m)$ は複素数になる。すなわち、ChRM 模型は、QCD と同様に符号問題を持つ。このような特徴から、ChRM 模型は、複素ランジュバン法を適用し、手法を検証する場として適している。

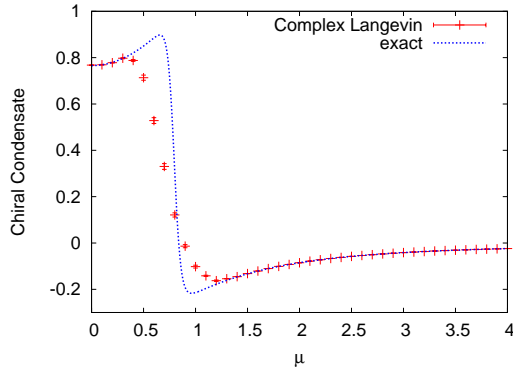


図 1: カイラル凝縮の化学ポテンシャル依存性。曲線が厳密解、点が数値解である。 $m = 0.4$ 。

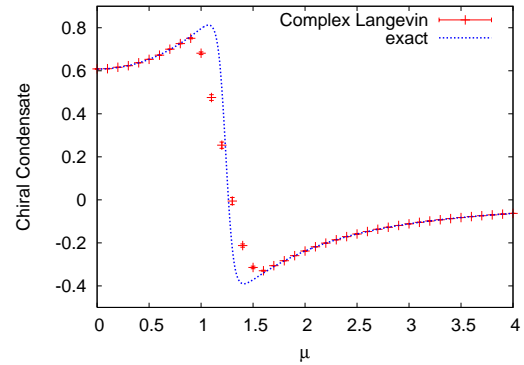


図 2: 図 1 に同じ。ただし $m = 1.0$ である。

4 数値結果

$N_f = 1$, $\Sigma = 1$, $N = 8$ の場合に、複素ランジュバン方程式を数値的に解き、厳密解と数値解を比較した。ランジュバン時間を離散化した際の刻み幅は、 10^{-4} とし、熱化の後、 4×10^3 ステップごとに配位をサンプルすることで、自己相関によるエラーの過小評価を避けた。シミュレーションは、我々の試みたすべてのパラメータ領域において、特別な工夫をすることなく、収束した。

$m = 0.4, 1.0$ の時に、 μ の関数としてカイラル凝縮 $\frac{1}{2N} \text{tr} D^{-1}$ をプロットしたものが、それぞれ図 1、図 2 である。 μ が 0 に近いが、または相転移 (有限体積なのでクロスオーバ) よりも十分に大きな領域では、数値解は厳密解を再現する。一方で、相転移の起こる近傍では、数値解は厳密解には一致しなかった。また、 m が大きいほど、より小さな μ において、両者の不一致が起きることがわかった。

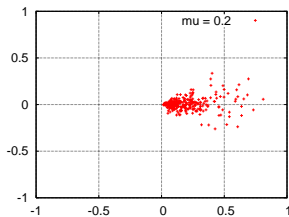


図 3: $\det(D+m)$ の、シミュレーション中の分布。 $m = 0.4$, $\mu = 0.2$ である。

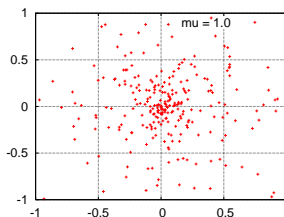


図 4: 図 3 に同じ。ただし $\mu = 1.0$ である。

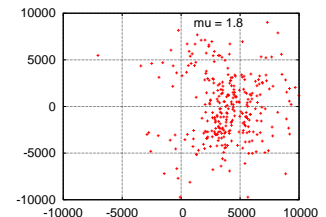


図 5: 図 3 に同じ。ただし $\mu = 1.8$ である。

シミュレーションによる厳密解の再現の失敗をより詳しく見るために、 $m = 0.4$ におけるシミュレーション中の $\det(D + m)$ の分布を、図 3($\mu = 0.2$)、図 4($\mu = 1.0$)、図 5($\mu = 1.8$) にそれぞれ示した。 μ が小さく、シミュレーションが厳密解を再現するとき、 $\det(D + m)$ は、主に実軸周りに分布する (図 3)。 μ を大きくし、シミュレーションが破綻するとき、 $\det(D + m)$ は小さくなり、4 象限全体に分布する (図 4)。さらに μ を大きくし、シミュレーションが再び厳密解を再現するとき、 $\det(D + m)$ の実部は大きくなり、全体として原点からは離れる (図 5)。

5 まとめと議論

我々は、ChRM 模型に対して複素ランジュバン方程式を解き、得られた解を厳密解と比較した。シミュレーションは安定に行うことができたが、主に相転移点の近傍でのみ、シミュレーションは厳密解を再現しない。

厳密解を再現しない領域では、Dirac 演算子の行列式 $\det(D + m)$ は、複素 4 象限にほぼ均等に分布している。 $\det(D + m)$ は、作用の中では対数関数の引数になっており、小さな $\det(D + m)$ に対して作用は大きくなる。このことが、シミュレーションに不安定性を与え、正しい結果を与えない理由になっている可能性がある。また、対数関数は本来、複素指数に対して多価関数である。文献 [9] では、簡単な模型を用いて、対数関数を一価関数とした場合の特異性 (カット) の効果が重要であり、それを無視した場合にシミュレーションが上手くいかず、その効果を取り込むことで、正しい解が得られることが示されている。ChRM 模型においても、シミュレーションが不正確なのは、対数関数の引数が 4 象限に渡って移動する場合であるため、そのようなカットの効果を見落としていると言える。カット効果の導入は、ChRM 模型に対しても応用できる可能性があり、複素ランジュバン法による符号問題の克服についての手がかりとなり得る。

参考文献

- [1] for a review, P. H. Damgaard and H. Hufel, Phys. Rept. **152**, 227 (1987).
- [2] G. Parisi, Phys. Lett. B **131**, 393 (1983).
- [3] J. Klauder, Acta Phys. Austriaca Suppl. **XXXV** (1983) 251.
- [4] G. Aarts, E. Seiler and I. -O. Stamatescu, Phys. Rev. D **81**, 054508 (2010).
- [5] T. Matsui and A. Nakamura, Phys. Lett. B **194**, 262 (1987).
- [6] G. Aarts, F. A. James, E. Seiler and I. -O. Stamatescu, Phys. Lett. B **687**, 154 (2010).
- [7] A. M. Halasz, A. D. Jackson, R. E. Shrock, M. A. Stephanov, J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. **D58**, 096007 (1998).
- [8] for a review, J. J. M. Verbaarschot and T. Wettig, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50**, 343 (2000) [arXiv:hep-ph/0003017].
- [9] K. Fujimura, K. Okano, L. Schulke, K. Yamagishi and B. Zheng, Nucl. Phys. B **424**, 675 (1994).

グラフェン状の系における秩序現象と相構造

荒木 康史*
(東京大学)

1 はじめに

グラフェン (graphene) は炭素原子が六角格子状に結合することによって構成される層状物質であり、2004 年に実験的に単離が成功して以降 [1]、実験室で扱いやすい 2 次元電子系として大きな注目を集めている。単層グラフェンの特徴として、伝導電子・正孔のバンド構造が特定の波数の周囲で線形となる、「ディラック・コーン構造」を示すことが挙げられる [2]。すなわち、グラフェンの電子の性質は 2 次元における無質量ディラック粒子として記述することが可能であり [3]、これは高エネルギー物理との類似性からも興味深い点である。

電子間のクーロン相互作用を考えると、この系は量子電磁気学 (QED) に類似した理論で記述できると期待される。グラフェンにおいて電子が伝播する速度 (フェルミ速度: v_F) は光速の約 300 分の 1 ときわめて遅いため、電子が実効的に感じるクーロン相互作用の強さは、通常の QED の場合に比べて v_F^{-1} 倍だけ強くなる。クーロン相互作用が十分強い場合、系の持つ何らかの対称性が自発的に破れ、バンドギャップを生じる (絶縁体となる) 可能性が指摘されている [4]。これは量子色力学 (QCD) におけるカイラル対称性の自発的破れに類似したメカニズムであり、グラフェン系においても Schwinger–Dyson 方程式 [5, 6]、large- N 展開 [7, 8]、厳密繰り込み群 [9]、ハートリー・フォック法 [10, 11]、格子モンテカルロ計算 [12, 13, 14, 15]、強結合展開 [16] などの手法によりこのメカニズムが検証されている。

ただし、グラフェンは六角格子構造を持つため、それに起因する様々な対称性の破れのパターンが考えられる:

- 電荷密度波 (CDW): 一方の部分格子 (六角格子を構成する 2 つの三角格子のうちの 1 つ) が多くの電子によって占められ、他方の部分格子が多くの正孔によって占められるものであり、部分格子対称性を破る。相互作用の効果によって自発的に誘起されうるほか、炭化ケイ素 (SiC) や窒化ホウ素 (BN) といった六角格子をもつ別の物質と接触させることで外部からも誘起されうる [17, 18]。
- スピン密度波 (SDW): 一方の部分格子が特定の向きのスピン、他方が逆向きのスピンによって占められるものであり、系は反強磁性を示す。部分格子対称性だけでなく、スピン対称性も破る。
- Kekulé 歪み (KD): 隣接サイト間のホッピングの強さが一定のパターンで非一様となるものであり、並進対称性を部分的に破る [19, 20]。相互作用の効果以外にも、特定の原子をグラフェンに吸着させることにより外部からも誘起されうる [21, 22]。
- 異常量子ホール状態 (QAH): 第二隣接サイト間のホッピングが誘起され、見かけ上六角格子を貫くような磁束が現れた状態 [23]。トポロジカル絶縁体の有効模型の一つとしても知られている [24]。

このように自発的に、および外部から誘起されうる様々な秩序が存在し、それらの競合について様々な研究が行われている [25, 26, 27, 28] が、未だ完全な理解には至っていない。筆者は、グラフェン (およびそれに関連した系) における複数の秩序の間の競合に関して、いくつかの観点から、それぞれに有効な手法を用いて議論を行った。本稿ではそれらの手法、および結果について解説する。

2 部分格子対称性の破れと Kekulé 歪み

筆者の論文 [29, 30] では、自発的な部分格子対称性の破れ (電化密度波およびスピン密度波) と Kekulé 歪みの間の競合について、格子 QED の強結合展開の手法を用いて考察した。出発点とするモデルとして、電磁場の効果を $U(1)$ ゲージ場として取り入れた、六角格子上の有効作用を用いる。分配関数に関して結合定数の逆数 $\beta \equiv v_F \epsilon_0 / e^2$ に関する摂動展開 (強結合展開) を適用し、各次数においてリンク変数 (ゲージ場の自由度) を積分することにより、フェルミオンの 4 点相互作用の形

$$O(\beta^0): \quad -\frac{1}{4} \left[\sum_{\mathbf{r}_A, \tau'} n_a(\mathbf{r}_A, \tau') n_a(\mathbf{r}_A, \tau' + a) + \sum_{\mathbf{r}_B, \tau'} n_b(\mathbf{r}_B, \tau') n_b(\mathbf{r}_B, \tau' + a) \right] \quad (1)$$

$$O(\beta^1): \quad -\frac{\sqrt{3}\beta}{8} \sum_{\mathbf{r}_A, \tau'} \sum_{i=1}^3 [a^\dagger(\mathbf{r}_A, \tau') b(\mathbf{r}_A + \mathbf{s}_i, \tau') b^\dagger(\mathbf{r}_A + \mathbf{s}_i, \tau' + a) a(\mathbf{r}_A, \tau' + a) + \text{H.c.}] \quad (2)$$

*araki@nt.phys.s.u-tokyo.ac.jp

が得られる (ここで $a^{(\dagger)}, b^{(\dagger)}$ は各部分格子の各サイトにおける生成/消滅演算子、 $s_{1,2,3}$ は A サイトから見た隣接 B サイトの位置ベクトル、 τ' は虚時間)。このうち、0 次の相互作用 [式 (1)] は各サイトの電荷密度に依存するため部分格子対称性を破る秩序を誘起し、1 次の相互作用 [式 (2)] は隣接サイト間の相関に依存するためホッピングの強さの繰り込み、および Kekulé 歪みを誘起する可能性がある。一方、Kekulé 歪みは前節で述べた通り、吸着原子などにより外部から誘起される可能性もある。ここでは、外的および自発的な Kekulé 歪みそれぞれについて、自発的な部分格子対称性の破れとの競合の効果を説明する。

2.1 外的な Kekulé 歪みを導入した場合

電子間相互作用の無い系において外部から Kekulé 歪み

$$\delta H = \frac{\Delta}{3} \sum_{\mathbf{r}_A} \sum_{i=1}^3 \left[e^{i(\mathbf{K}_+ \cdot \mathbf{s}_i + \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_A)} + e^{i(\mathbf{K}_- \cdot \mathbf{s}_i - \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}_A)} \right] a^\dagger(\mathbf{r}_A) b(\mathbf{r}_A + \mathbf{s}_i) + \text{H.c.} \quad (3)$$

を導入した場合 (\mathbf{K}_\pm は運動量空間内での 2 つのディラック点の位置、 $\mathbf{G} \equiv \mathbf{K}_+ - \mathbf{K}_-$)、各ディラック点において $|\Delta|$ の大きさのバンドギャップが開き、1 部分格子分の平行移動に関して系は不変ではなくなる。

強結合極限 ($\beta = 0$; 0 次の相互作用のみを考慮した場合) における系の振舞いを考えるために、部分格子対称性を破るような平均場 $\sigma \equiv \langle a^\dagger a - b^\dagger b \rangle$ を導入し、フェルミオンの自由度を積分して有効ポテンシャル $F_{\text{eff}}(\sigma; \Delta)$ を導出する。Kekulé 歪みが無い場合 ($\Delta = 0$)、有効ポテンシャルは σ のみの関数となり、停留点をとることにより部分格子対称性が自発的に破れている ($\sigma \neq 0$) ことが分かる。これは $F_{\text{eff}}(\sigma)$ のうち、フェルミオンの 1 ループ積分の $\sigma = 0$ における対数発散によるものである。ここで Δ を 0 からずらすと、この対数発散が抑えられるため σ は減少する。特に $\Delta_C/3t = 0.485$ に達すると $\sigma = 0$ となり、部分格子対称性が完全に回復される。各ディラック点におけるバンドギャップの大きさは $\sqrt{(v_F \sigma/2a)^2 + \Delta^2}$ となるため、 $|\Delta| < \Delta_C$ の場合、バンドギャップの大きさは Kekulé 歪みの強さ $|\Delta|$ に比例しない形となる (図 1) [29]。

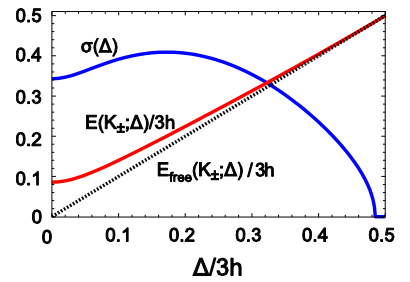


図 1: Kekulé 歪みの大きさ Δ に対する、カイラル対称性の破れの大きさ σ 、およびそれに伴うギャップの大きさ $E(\mathbf{K}_\pm; \Delta)$ の振舞い。 $E_{\text{free}}(\mathbf{K}_\pm; \Delta) = |\Delta|$ は電子間に相互作用が無い場合のギャップの大きさである。

2.2 自発的な Kekulé 歪みを考慮した場合

強結合展開の 1 次の効果 [式 (2)] を考慮すると自発的な Kekulé 歪みが誘起される可能性があるため、0 次の効果によって生じる部分格子対称性の破れとの競合を考える必要がある。ここでは相互作用の間の競合をより詳しく扱うため、0 次の相互作用 [式 (1)] に係数 z を補い、2 つの係数 $z, \xi (\equiv \sqrt{3}\beta/8)$ を独立に動かして考える。

0 次の項については、強結合極限の場合と同様に平均場 $\sigma \equiv \langle a^\dagger a - b^\dagger b \rangle$ を導入して考える。一方 1 次の項に関しては、以下のように 2 成分に分解して記述されると仮定する:

$$\langle a^\dagger(\mathbf{r}_A) b(\mathbf{r}_A + \mathbf{s}_i) \rangle \equiv \lambda_\sigma + \lambda_\Delta e^{2\pi i/3} \left[e^{i(\mathbf{K}_+ \cdot \mathbf{s}_j + \mathbf{G} \cdot \mathbf{r})} + e^{i(\mathbf{K}_- \cdot \mathbf{s}_j - \mathbf{G} \cdot \mathbf{r})} \right] \quad (4)$$

ここで第 1 項はフェルミ速度を空間一様に $Z_\sigma \equiv 1 - \xi \lambda_\sigma/3$

倍だけ繰り込む効果を与え、第 2 項は $\Delta = 3\xi \lambda_\Delta$ の大きさの自発的な Kekulé 歪みに相当する。これらの平均場を導入してフェルミオンの自由度を積分することにより、この系の性質は有効ポテンシャル $F_{\text{eff}}(\sigma, \lambda_\sigma, \lambda_\Delta)$ によって記述される。有効ポテンシャルの最小値を与えるような $(\sigma, \lambda_\sigma, \lambda_\Delta)$ を秩序変数の期待値とみなして、相互作用の強さ z, ξ を動かして相図を描くと図 2 のようになる。すなわち、0 次の相互作用が支配的な領域では部分格子対称性の破れ (SLSB) が現れ、一方 1 次の相互作用が支配的な領域では Kekulé 歪み (KD1/KD2) が現れる。これら 2 つの相の間の相境界上では、秩序変数の 2 次の効果まで考えた場合 2 つの秩序が共存することが可能である。一方、Kekulé 歪みが支配的な場合でも、 $\xi = 10.67$ と十分大きな値に達すると λ_Δ の符号を逆転させるような相転移

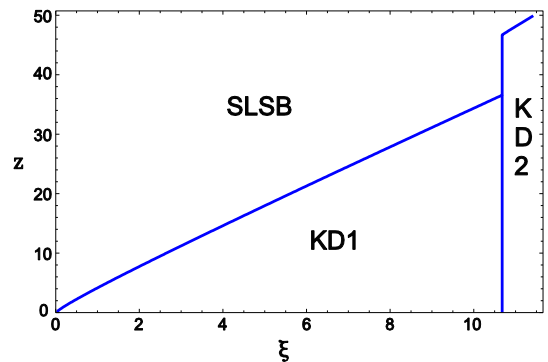


図 2: 強結合展開の 0 次および 1 次に現れる相互作用の強さ (z, ξ) を動かして得られる相図。部分格子対称性の破れ (SLSB) および Kekulé 歪み (KD) からなる。KD 相は λ_Δ の符号の違いにより、KD1 と KD2 の 2 つの相に分かれる。

が起こる。以上3つの相の間の相転移は全て1次相転移である。強結合展開は $z = 1$ に固定して ξ を0から徐々に大きくしていくことに相当するため、この相図上では $\xi = 0.20$ で SLSB から KD1 への、 $\xi = 10.67$ で KD1 から KD2 への相転移が起こる。

3 電荷密度波とスピン密度波

筆者は G. W. Semenoff 氏との共同研究 [31] において、電荷密度波 (CDW) とスピン密度波 (SDW) 秩序の間の競合を六角格子構造を保った変分法を用いて考察した。CDW は前述のように外的なもの、自発的なものの2種類があり、これらのどちらか一方と SDW の間の競合は既にいくつかの研究があるが [25, 26, 28]、両方を取り入れた競合現象を取り扱ったものは本研究が初めてである。本研究ではこれら全ての要素を扱うことができるモデルとして、拡張 Hubbard 模型を用いる。これは電子間相互作用のうち支配的なものだけを明示的に局所相互作用の形で書いたものであり、ここでは同一サイト上の反発 (結合定数 U)、隣接2サイト間の反発 (結合定数 V) の2種類を導入する。 U または V が十分大きくサイト間ホッピングの強さ t が無視できる場合、定性的議論により、これらの相互作用はそれぞれ自発的な SDW および CDW を誘起する。また、外部から CDW を誘起する要因として、一方の部分格子における化学ポテンシャルを上げ、他方を下げるような項 $m \sum_r [a^\dagger a - b^\dagger b]$ を導入する。電子間相互作用を無視した場合、このポテンシャル項は $|m|$ の大きさのバンドギャップを生成する。これら3つの項の競合によって起こりうる新奇な現象について、以下で解説する。

相互作用の入ったハミルトニアン H の性質を考えるため、性質が既知である (容易に対角化可能である) 「仮の」ハミルトニアン H_0 をとる。ここでは H_0 を特徴付けるパラメータとして、各スピン自由度 ($\sigma = \uparrow, \downarrow$) に関するフェルミ速度の繰り込み定数 Z_σ 、およびバンドギャップの大きさ Δ_σ をとる。その上で、 H をできる限り近似できるように最適な H_0 を探すことを目標とする。 H と H_0 の間には Jensen–Peierls 不等式

$$\ln \text{Tr} e^{-\beta H} \leq \ln \text{Tr} e^{-\beta H_0} + \langle H - H_0 \rangle_0 (\equiv F') \quad (5)$$

が常に成り立つため ($\langle \cdot \rangle_0$ は $e^{-\beta H_0}$ によるアンサンブル平均)、 H をできる限り近似するためには F' を最小とする、すなわち $\delta F' / \delta H_0 = 0$ となるような H_0 を探せばよい。これは平均場近似

のギャップ方程式に相当するものであるが、様々な秩序を扱えるという点で平均場近似を拡張したものといえる。

このギャップ方程式を解き、 Δ_σ の振舞いをもとに系の相図を描くと図3のようになる。外部ポテンシャル m が存在せず、相互作用 U, V が十分小さい場合は対称性は破れず、系は半金属 ($\Delta_\uparrow = \Delta_\downarrow = 0$) のままとなる。同一サイト上相互作用 U が支配的な領域では、SDW ($\Delta_\uparrow \neq \Delta_\downarrow$) の秩序が生成され、系は反強磁性を示す。一方、隣接サイト間相互作用 V が支配的な領域では、系は CDW ($\Delta_\uparrow = \Delta_\downarrow \neq 0$) を示す。外部ポテンシャル m は CDW を誘起するため、 m を増加させると相境界は SDW の領域を抑制する方向に動く。これらの間の相転移は、 $V = 0$ の場合のみ2次相転移であるのを除くと全て1次相転移である。

次に、電子のバンド構造 (すなわち Z_σ と Δ_σ) の振舞いを具体的に見るために、相互作用の強さを固定し外部ポテンシャルを動かすことを考える。ここでは SDW-CDW 相転移の周辺での振舞いを調べるため、 $U = 6.0t$, $V = 0.5t$ に固定して m を動かす (図4)。 m が十分小さな領域では、 $\Delta_\uparrow, \Delta_\downarrow$ とともに増加する。そのため、 $m \neq 0$ の場合は $|\Delta_\uparrow| \neq |\Delta_\downarrow|$ となる。 Δ_σ と Z_σ はギャップ方程式によって互いに依存しているため、フェルミ速度についても $Z_\uparrow \neq Z_\downarrow$ が成り立つ。すなわち、SDW 領域で外部ポテンシャル m を導入すると、2つのスピン状態間のバンドの縮退が解け、バンドギャップの大きさとフェルミ速度は異なる値をとる。 m を十分大きくすると系は CDW 相に転移し、スピン対称性が回復されるため、

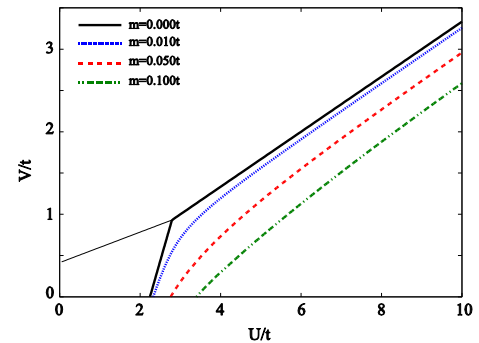


図3: 局所相互作用の強さ U, V 、および格子ポテンシャル m を動かした場合の相図。太線は SDW と CDW の相境界。細線は半金属と CDW の相境界。半金属相は $m = 0$ の場合のみ現れる。

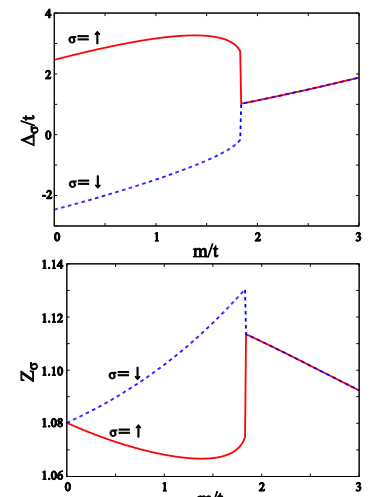


図4: $U = 6.0t$, $V = 0.5t$ に固定し、 m を動かした場合の、各スピン状態 ($\sigma = \uparrow, \downarrow$) におけるギャップの大きさ Δ_σ (上) およびフェルミ速度の繰り込み定数 Z_σ (下) の振舞い。

これらのバンドギャップの縮退も回復される。このようなバンド構造の振舞いは角度分解型光電子分光 (ARPES) によって直接観測したり、輸送現象への影響を調べることによって実験的に確かめられることが期待される。

4 結論

以上のように、グラフェン等六角格子を持つ系においては、格子構造に起因する様々な秩序間の競合現象が期待される。本稿では取り上げなかったが、第二隣接サイト間相互作用を考えた場合は異常量子ホール状態が自発的に生成される可能性も指摘されており [25, 26]、グラフェンでトポロジカル絶縁体の実現可能か否かについても注目されている。クーロン相互作用を長距離まで取り入れた場合は秩序の空間一様性が破綻する可能性があり [32]、平均場の仮定によらない解析が要求される。また、平均場からの揺らぎを取り入れた場合は半金属相と SDW 相の間にスピン液体相が現れる可能性も指摘されている [33] が、一方で六角格子の場合は現れないという主張もあり [34]、注意深く解析を行う必要がある。最近では 2 層グラフェン系においてバンドギャップが自発的に開いた相が実験的に確認されており [35, 36]、このような系へ本研究の手法を適用することも期待される。

謝辞

J. E. Drut 氏、初田哲男氏、木村太郎氏、G. W. Semenoff 氏には、有益な議論や助言をいただいたことを感謝する。本研究は、日本学術振興会の特別研究員奨励費 (DC1, No.22.8037) の補助によるものである。

参考文献

- [1] K. S. Novikov *et al.*, *Science* **306**, 666 (2004).
- [2] P. E. W. W. , *Phys. Rev.* **71**, 622 (1947).
- [3] G. W. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2449 (1984).
- [4] R. V. W. n A. H. C. t o N to, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 30 (2009).
- [5] D. V. Khvichenko, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 246802 (2001); D. V. Khvichenko *et al.*, *Nucl. Phys. B* **687**, 323 (2004); D. V. Khvichenko, *J. Phys. Conf. Ser.* **21**, 075303 (2009).
- [6] E. V. Gorbunov, V. P. Guynin, V. A. Minkyn, I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. B* **66**, 045108 (2002); O. V. Gorbunov, E. V. Gorbunov, V. P. Guynin, *Phys. Rev. B* **81**, 075429 (2010).
- [7] I. F. Herbst, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 146401, (2006).
- [8] D. T. Son, *Phys. Rev. B* **75**, 235423 (2007); J. E. Drut *et al.*, *Phys. Rev. B* **77**, 075115 (2008).
- [9] A. G. G. n, V. M. top. to. n M. Pot, *Ann. H. n. Po. nc.* **11**, 1409 (2010); *Phys. Rev. B* **82**, 121418 (2010).
- [10] G. B. gh, M. P. n, R. A. g. n A. H. M. cDon, *So. St. t. Co. un.* **149**, 1117 (2009); J. Jung *et al.*, *Phys. Rev. B* **84**, 085446 (2011).
- [11] A. H. M. cDon, J. Jung, *et al.*, F. Zhng, *Phys. Sc.* **T146**, 014012 (2012).
- [12] J. E. D. ut. n T. A. L. h, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 026802 (2009); *Phys. Rev. B* **79**, 165425 (2009); J. E. D. ut, T. A. L. h. n L. Suo. nt, *Xiv* 1002.1273.
- [13] S. H. n. n C. St. outho, *Phys. Rev. B* **78**, 165423 (2008); W. A. ou, S. H. n. n C. St. outho, *Phys. Rev. B* **81**, 125105 (2010); *Phys. Rev. B* **84**, 075123 (2011).
- [14] P. V. Bu. v. ov. ch, E. V. Lu. ch. v. k. y, O. V. P. v. ov. ky, M. I. Po. k. pov. n M. V. U. y. by. h. v, *Phys. Rev. B* **86**, 045107 (2012); P. V. Bu. v. ov. ch. n M. I. Po. k. pov, *Xiv* 1206.0619.
- [15] E. Sh. nt. n. n T. Onog, *Xiv* 1203.1091.
- [16] Y. A. k. n T. H. t. u, *Phys. Rev. B* **82**, 121403(R) (2010); Y. A. k, *Ann. Phys. (N. Y.)* **326**, 1408 (2011).
- [17] S. Y. Zhou, G. H. Gw. on, A. V. F. o. ov, P. N. F. t, W. A. H, D. H. L, F. Gu. n, A. H. C. t. o N. to, n A. L. nz, N. tu. M. t. **6**, 770 (2007).
- [18] G. G. ov. nn. tt, P. A. Kho. y. kov, G. B. ock, P. J. K. y, J. v. n. n B. nk, *Phys. Rev. B* **76**, 073103 (2007).
- [19] N. A. V. t, H. Aj. k. n T. An. o, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 3036 (1994).
- [20] C. Y. Hou, C. Ch. on. n C. Mu. y, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 186809 (2007); *Phys. Rev. B* **81**, 075427 (2010).
- [21] M. F. j. n H. R. fi. T. b, *Phys. Rev. B* **79**, 045417 (2009).
- [22] V. V. Ch. nov, V. I. F. 'ko, O. Sy. ju. n. n B. L. A. t. hu, *So. St. t. Co. un. c. t. on* **149**, 1499 (2009).
- [23] F. D. M. H. n, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2015 (1988).
- [24] C. L. K. n. n E. J. M, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146802 (2005); *Phys. Rev. Lett.* **95**, 226801 (2005).
- [25] S. R. gh. u, X. L. Q, C. Hon. k. p. n S. C. Zh. ng, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 156401 (2008).
- [26] C. W. k. n M. F. nz, *Phys. Rev. B* **81**, 085105 (2010).
- [27] R. D. n. chn, *Phys. Rev. B* **78**, 115417 (2008).
- [28] D. So. no, J. F. n. n. z. Ro, *Phys. Rev. B* **85**, 195433 (2012).
- [29] Y. A. k, *Phys. Rev. B* **84**, 113402 (2011).
- [30] Y. A. k, *Phys. Rev. B* **85**, 125436 (2012).
- [31] Y. A. k. n G. W. S. noff, *Phys. Rev. B* **86**, 121402(R) (2012).
- [32] J. S. bo, F. So. n F. Gu. n, *Phys. Rev. B* **82**, 121413 (2010).
- [33] Z. Y. M. ng, T. C. L. ng, S. W, F. F. A. n. n A. Mu. t. u, N. tu. **464**, 847 (2010).
- [34] S. So, Y. Ot. uk, S. Yunok, *Xiv* 1207.1783.
- [35] R. Tho. W. tz, M. T. A. n, B. E. F. n, J. M. t. n. n A. Y. coby, *Science* **330**, 812 (2010).
- [36] A. S. M. yo. ov, D. C. E, M. Much. K. uczy. n. k, R. V. Go. b. ch. v, T. Tu. o. ov. ky, A. Zhukov, S. V. Mo. ozov, M. I. K. t. n. on, V. I. F. 'ko, A. K. G. n K. S. Novo. ov, *Science* **333**, 860 (2011).

冷却原子の実験を通じて中性子物質を探る

堀越宗一

東京大学工学系研究科附属光量子科学研究センター

希薄な極低温二成分フェルミ粒子系の物性は、粒子密度 n 、温度 T と異なるスピン間の s 波散乱長 a のみで特徴付けられる“普遍的”性質を持っており、粒子の種類や相互作用ポテンシャルの詳細に依らない。冷却フェルミ原子系はこのような普遍的性質を持っているだけでなく、 s 波散乱長を自由に制御できる他の系にはないユニークな特徴を持っている。それ故、冷却原子系は理想的な多体シミュレータとして働き、近似を一切含まない実験データは理論研究の試金石として重要な役割を果たす。我々はこの冷却原子系を用い、未知の物質である中性子星の物性解明へ向け研究を進めている。本レビューでは、中性子星の状態方程式を決定するプロジェクトの概要を紹介し、冷却原子系の普遍的な多体物理に触れ、冷却原子の実験を通じて如何にして中性子物質を探るのかを述べる。最後に我々の提案する冷却フェルミ原子を用いた状態方程式の実験的決定方法を説明する。

1. 中性子星と本新学術領域研究の概要

中性子星は宇宙で観測可能な最大密度物質である。星の質量はこれまでの観測により $1\sim 2M_{\odot}$ 程度と判っており、半径は 10km 程度と予想されている[1]。ここで M_{\odot} は太陽質量である。この質量と半径より星の中心密度は $3\sim 10\rho_0$ 程度になると見積もられ、中性子星は巨大な原子核に相当する事が分かる。ここで $\rho_0 = 0.16\text{fm}^{-3}$ は飽和核密度である。中性子星の興味深いところは、星の地殻から内核に渡る豊富な多体系の存在にある。例えば密度の低い星の外側から内側にかけて順に見ていくと、低密度領域の地殻領域は原子核から漏れ出た中性子が自由に動き回る中性子物質によって構成され、密度が大きくなるにつれ中性子過剰原子核の存在が支配的になる。その内側ではさらに密度が大きくなり、原子核はパスタ構造やラザニア構造といった秩序を構成し[2]、最終的に原子核は溶けて一様な原子核となる。さらに高密度側に進むとストレンジクォークを含んだハイペロンの存在が許されるようになると考えられ、ハイパー核の分野へ繋がっていく。最も密度の高い星の中心においては、バリオンやハイペロン中のクォークがグルーオンの束縛から逃れ自由に動き回るクォーク物質の存在が期待されている。このような希薄なフェルミ粒子系からクォーク物質まで連続的に繋がっているような多体系は中性子星以外に存在しない。ただし今現在、中性子星の内部構造、星を支える状態方程式や最大質量等は実験、理論のいずれの方面からも明らかにならず、中性子星は宇宙に浮かぶ巨大な謎の物質のままである。

本新学術領域研究「実験と観測で解き明かす中性子星の核物質」では、その名の通り実験、観測のデータの下、中性子星の内部構造と状態方程式を決定するのが目的である。具体的には、低密度領域に存在する中性子物質は冷却フェルミ原子を用い、低中密度領域に存在する中性子過剰原子核は理研のRIBFを用い、高密度領域のハイパー核についてはKEKのJ-PARCを用いて、それぞれバリオン密度に対する組成比とエネルギーを決定する。それぞれの測定データより原子核の状態方程式： $E = f(\rho, (n_n, n_p, n_{\Lambda}, \dots))$ を理論班に

よって構築し、重力と圧力の釣り合いの関係式より中性子星のMR曲線（質量-半径曲線）を決定する。ここで ρ はバリオン密度、 $n_n, n_p, n_\Lambda, \dots$ は中性子、陽子、 Λ 粒子などの組成比である。地上実験で得られたMR曲線の妥当性はX線望遠鏡ASTRO-Hにより直接中性子星の観測を行い、観測データ上をMR曲線が通るかどうかで評価する。

2. 冷却原子を用いた普遍的多体フェルミ系

そこで我々は中性子星の状態方程式構築へ向け冷却原子を用いた中性子物質のシミュレーションを目指しているのだが、果たして本当に温度 10^{-6}K 、圧力 10^{-10}Pa の冷却原子を用いて、温度 10^{10}K 、圧力 10^{30}Pa 程度の中性子星の物理が解るのだろうか[3]？“普遍的”という意味を理解する上でまずは冷却原子系の長さスケールについて考える。冷却原子系には6つの長さスケールが存在する。短い方からファンデルワールス長、散乱の有効距離、s波散乱長、熱的波長、平均粒子間距離、粒子を閉じ込めているポテンシャルのサイズである。フェルミ粒子である ${}^6\text{Li}$ 原子の場合、ファンデルワールス長は $R_{\text{vdw}} = 1.7\text{nm}$ 、有効距離は $r_e = 4.7\text{nm}$ 、s波散乱長は外部磁場の強度で制御可能なフェッシュバッハ共鳴により $|a| = 0 \sim \infty$ まで可変、熱的波長は $1\mu\text{K}$ で $\Lambda_T \sim 100\text{nm}$ 、平均粒子間距離は典型的に $d = n^{-1/3} \sim k_F^{-1} \sim 100\text{nm}$ 程度、ポテンシャルのサイズは $L \sim 10\mu\text{m}$ 程度である。s波散乱長が平均粒子間距離程度に大きい場合、長さの大小関係は $R_{\text{vdw}} < r_e \ll \Lambda_T, d, |a| \ll L$ となり、粒子や実験系に特有な長さスケール R_{vdw}, r_e, L は意味を持たなくなる。粒子固有のパラメータやシステム固有のパラメータが系の物性に变化を与えず、粒子密度 n 、温度 T とs波散乱長 a のみで系の物性が特徴付けられる性質を“普遍的”と呼ぶ。また普遍的な多体系から得られる物理量を、普遍的な物理量と呼ぶ。

このように相互作用している普遍的な二成分フェルミ粒子系が示す多体物理の一つとしてBCS-BECクロスオーバーがある[4]。異なるスピン間のs波散乱長が正($a > 0$)の場合、系はBEC領域に属す。この場合十分高温領域において系は斥力相互作用しているフェルミ粒子として振る舞う。フェルミ気体の熱運動による運動エネルギーが二体の束縛エネルギーよりも小さくなるとフェルミ粒子は二原子分子を形成しボース粒子となり、熱的分子として振る舞う。この時系を構成している粒子は分子となる。ここで注意したいのは、分子を形成している二原子間には束縛エネルギーによる強い引力が働いているが、分子間の散乱長は原子間の散乱長 a と $a_{\text{mol}} = 0.6a$ の関係にあるため分子間は斥力相互作用をしている。よって、分子を形成している低温領域において系は斥力相互作用している分子気体として振る舞う。さらに温度が下がると相転移を起こし斥力相互作用をしている分子のボース・アインシュタイン凝縮(BEC)となる。一方、散乱長が負($a < 0$)の場合、系はBCS領域に属す。この場合分子状態が存在しないためフェルミ温度以上の領域までは、系は引力相互作用しているフェルミ粒子として振る舞う。フェルミ温度以下まで温度が下がってくるとフェルミ面が現れ始め、多体効果によりフェルミ粒子は運動量空間でクーパー対を形成しBCS超流動相転移を起こす。固体の高温超電導では $T > T_c$ で擬ギャップ相があると言われており、高温超電導メカニズムと関係があるため大きな論点となっているが、s波相互作用しているフェルミ粒子系において擬ギャップが存在するかは未だ定かではない[5]。高温超電導のメカニズム解明の視点からも擬ギャップの問題は重要な課題である。 $T = 0$ において量子多体系は、実空間で対を形成している分子BEC状態から運動量空間で

対を形成している BCS 超流動状態に相転移を伴わず連続的に繋がっていると言われており、この連続的変化を BCS-BEC クロスオーバーと呼ぶ。

それでは BCS-BEC クロスオーバー領域のフェルミ多体系はどのような状態方程式で記述できるのだろうか？ その答えのヒントは多体中の二体の振る舞いに隠されている。Zhang と Leggett の理論[6]によると、二成分フェルミ粒子系中のアップスピンとダウンスピンの二体密度行列は、スピン間の距離が $a, k_F^{-1} \gg r \equiv |r_\uparrow - r_\downarrow| > R_{vdw}$ を満たす近距離において、 $|\phi_{pair}(r)|^2 \equiv \langle \psi_\uparrow^\dagger(r_\uparrow) \psi_\downarrow^\dagger(r_\downarrow) \psi_\downarrow(r_\downarrow) \psi_\uparrow(r_\uparrow) \rangle = 4\pi k_F N \cdot h(x, \theta) \cdot$

$\frac{|\phi(r)|^2}{4\pi}$ という形で与えられる事が示されている。ここで $h(x, \theta)$ は、相互作用パラメータ $x = -\frac{1}{k_F a}$ と温度パラ

メータ $\theta = T/T_F$ のみで決まる普遍的な多体関数である。また $\phi(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{a}$ は散乱長のみで与えられる 2 体の波動関数である。これより多体中の近距離二体相関も粒子密度 n 、温度 T と散乱長 a のみで特徴付けられる普遍的な形を持っている事が解る。今日この普遍的な多体関数は Tan のコンタクト: $C \equiv 4\pi k_F N \cdot h(x, \theta)$ として用いられることが多く、このコンタクトを用いた Tan 理論は近年冷却原子の分野から誕生した新しい理論

である。コンタクトを用いた関係式の一つとして、断熱関係式 $\left(\frac{dE}{da^{-1}}\right)_{S,V,N} = -\frac{\hbar^2}{4\pi m} C \equiv -I$ がある [7, 8]。こ

の関係式は、フェッシュバッハ共鳴を用いて散乱長を変化させたときの多体系の内部エネルギーの変化を示している。

このコンタクトを用いた断熱関係式の表式は、まさに新しい熱力学変数の導入を期待させる。相互作用のない気体の内部エネルギーの全微分は、 $dE = -pdV + TdS + \mu dN$ で与えられるが、上記の断熱関係式より、 a^{-1} も内部エネルギーの熱力学変数である事が解る。よって s 波散乱長も熱力学変数として考えると、今考えているフェルミ粒子系の内部エネルギーの全微分は、 $dE = -pdV + TdS + \mu dN - Ida^{-1}$ で与えられることが解る。グランドカノニカルポテンシャルは $\Omega = E - TS - \mu N$ であるため、グランドカノニカルポテンシャルの全微分は、 $d\Omega = dE - d(TS) - d(\mu N) = -pdV - SdT - Nd\mu - Ida^{-1}$ で与えられる事が解る。 V のみが示量変数であるため、結果として“普遍的”な性質を持つフェルミ粒子系の状態方程式は $\Omega(V, T, \mu, a^{-1}) = -p(T, \mu, a^{-1})V$ の形で与えられることが解る [9]。

3. 中性子星の普遍的領域

ここで中性子星の地殻領域が先に述べた普遍的な領域に属しているかどうか議論する。地殻領域の中性子密度は $\rho = 0.0015 \sim 0.5\rho_0$ 程度であるとされており、これより平均中性子間距離は $d = \rho^{-1/3} = 2 \sim 16 \text{fm}$ 程度と見積もられる。またフェルミ波数 $k_F = (3\pi^2\rho)^{1/3}$ を用いると相互作用パラメータは、 $x = 0.04 \sim 0.28$ と見積もられ、地殻領域の中性子物質はユニタリ極限 ($x = 0$) から BCS 領域に分布していることが解る。一方中性子の有効距離は $r_e \sim 1 \text{fm}$ である。中性子星温度は中性子のフェルミ温度に対して十分小さいため $T = 0$ とし熱的波長は考慮に入れないとすると、長さスケールは $r_e < d, |a|$ となる。残念ながら $r_e \ll d$ の条件は満たしておらず、密度の高い領域では有効距離の 2 倍程度しか粒子は離れていないが、ほぼ普遍的な領域に属していると言っても過言ではない。それを示す一つの例として数値計算による中性子物質と冷却フェルミ原子 (普遍的な多体系) のエネルギー比較がある [2]。計算結果によると多少有効距離の影響があるものの、10% 以内の範囲で中性子物質と冷却原子の内部エネルギーが一致していることが判る。また理論的に有効距

離を取り入れ補正を加えることも可能であり、より精度の高い情報を中性子星に提供できる。詳細は他の論文に譲る[10]。

冷却原子から中性子星に情報提供できるのは状態方程式のみではない。中性子星の冷却曲線は、超流動相転移温度、超流動密度、超流動ギャップ、中性子の比熱が大きく関わっている。また冷却フェルミ原子系で実験可能なスピンインバランス系、格子系、粘性、抵抗、渦なども中性子星の磁場や回転、格子状に並んだ原子核の影響等と関係があり、大きな可能性を秘めている。実験室のテーブル上で中性子星の実験が可能なのはまさに普遍的性質の賜物である。

4. 状態方程式を決める実験的手法

本研究はフェルミ粒子である 6Li 原子を用いる。二成分フェルミ粒子系は基底状態の $2S$ 軌道の超微細構造 $F=1/2$ 状態の 2 つの磁気副準位、 $|F=\frac{1}{2}, m_F=-\frac{1}{2}\rangle$ 、 $|F=\frac{1}{2}, m_F=+\frac{1}{2}\rangle$ に全粒子数の半分ずつを分布させる事により実現される。この二つのスピン状態間には 834Gauss で s 波散乱長が発散するフェッシュバツハ共鳴が存在し、外部磁場を調整するだけでスピン間の s 波散乱長を任意に制御する事ができる[11]。基本的な実験の流れは次の通りである。真空チャンバー中でリチウム金属を 350°C 程度に加熱し、蒸発したリチウム原子をレーザー冷却により 1mK 程度まで冷却、その後原子の共鳴線より十分波長が長いレーザー光で光双極子トラップを行い、冷却フェルミ原子を保存場に閉じ込める。続いて原子にラジオ波を照射し目的のスピン状態に分布させ、エネルギーの高い粒子を選択的に逃がす蒸発冷却を経た後、極低温二成分フェルミ粒子系はフェルミ縮退に到達する。この時与えている磁場強度によりスピン間の s 波散乱長が決定され、幅広い相互作用領域を研究できる。冷却原子の観測は吸収イメージング法により行う。これは共鳴レーザー光を冷却原子に照射し、原子の存在するところで吸収され透過してきたレーザー光の影の分布から原子の分布を測定する手法である。トラップ中で撮像する事により原子の密度分布を、またトラップから解放後に撮像する事により原子の運動量分布を得ることができる。

さて、このように温度も相互作用も自由に制御できる冷却原子系だが、一つ大きな問題点がある。それは調和型の光トラップに閉じ込められている冷却原子は不均一な密度分布を持っていることである。これにより、温度 T と s 波散乱長 a 以外の熱力学量、例えば圧力 P や化学ポテンシャル μ 、またフェルミエネルギー ε_F は密度に依存する為、相互作用パラメータ x や温度パラメータ θ も位置に依存してしまう。よって状態方程式 $p(T, \mu, a^{-1})$ を冷却原子系で決定するには、局所的な圧力、局所的な温度、化学ポテンシャル、 s 波散乱長の組み合わせを測定により決定する必要がある。また、温度計や圧力計は我々の生活の中に存在する為どうか測定できる気がするが、化学ポテンシャル計となると頭を悩ます問題である。

これまで我々は s 波散乱長が発散しているユニタリー極限の熱力学に興味を持ち研究を行ってきた。ユニタリー極限において熱力学関数は温度と密度のみで与えられるため、内部エネルギーの熱力学関数は $E = N\varepsilon_F(n)f_E\left(\frac{T}{T_F(n)}\right)$ によって与えられる。つまり実験的に内部エネルギー、粒子数密度、温度の組み合わせを、不均一に分布している冷却原子気体の各局所点で決定する必要があるのである。この時我々が見出した解決方法は次の通りである[12]。まず気体の圧力とポテンシャル間に働く力のバランス、 $\nabla P(r) + n(r)\nabla U_{\text{trap}}(r) = 0$ を用いて、粒子密度分布とポテンシャル形状から圧力分布を求める。次にユニタリー極限の圧力関係式 $PV = \frac{2}{3}E$ を用いることにより内部エネルギー分布を得る。気体の温度は原子のサ

イズより見積もることができるので、これにより局所的な内部エネルギー、粒子密度分布、温度の組み合わせを得る事ができるのである。ユニタリー極限の状態方程式 $P(T, \mu, a^{-1} = 0)$ は熱力学関係式を用いると内部エネルギーの関数から導出可能である。ただし残念ながらこの手法はユニタリー極限定の関係式である圧力関係式や熱力学関数を用いているため、任意の s 波散乱長で相互作用している粒子系に用いることができない。また気体のサイズから見積もる温度評価の精度も悪く改善が必要である。そこで我々は任意の s 波散乱長で相互作用している二成分フェルミ粒子系の状態方程式を高精度で決定する方法を以下に提案する。

・局所的圧力 $P(r)$: バランスの関係式からも局所的な圧力が求まるが、近年もっと簡単な導出方法が判っている [13]。ギブス-デューエムの関係式より局所的な圧力の関係式は $dp = -sdT + nd\mu$ で与えられる。気体は熱平衡状態にあり z 方向に軸対称なポテンシャルにトラップされているとする。このとき絶対温度 T はトラップ全体に渡り一様であり、また局所密度近似 (LDA) により局所的な化学ポテンシャルは任意の z 平面上で $\mu(r, z) = \mu(0, z) - \frac{m}{2}\omega_z^2 r^2$ となる。故に $d\mu = -m\omega_z^2 r$ を代入し軸上 ($r = 0$) での圧力を求めると、 $P(r = 0, z) = m\omega_z^2 \int_0^\infty nrdr = \frac{m\omega_z^2}{2\pi} \bar{n}(z)$ となる。ここで $\bar{n}(z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} n(x, y, z) dx dy$ は原子の密度分布を半径方向に積分した線密度である。よって吸収像で観測される密度分布そのものが局所的な圧力の測定に相当する事が解る。また原子の密度分布を測定する撮像系の分解能が、実験で得られる状態方程式の精度に直結していることが容易に解る。それ故我々は原子の密度分布を高分解能で撮像できるシステムを導入中である。

・絶対温度 T : 理想気体の場合、気体の温度は既知の運動量分布により評価する。だが強く相互作用しているフェルミ粒子系の運動量分布と温度の関係は解析的に判っていないので、運動量分布は温度評価には使えない。我々はこの問題を解決する為、ENS が用いた 7Li を温度計として 6Li に混ぜる方法を考えている [14]。同位体であるボゾンの 7Li は 6Li と弱く相互作用する為、 6Li の物性を大きく変化させない。また弱く相互作用し、ほぼ理想ボース気体として扱える 7Li の運動量分布は既知なため、 7Li をトラップから解放し運動量分布を測定する事により絶対温度を評価する事ができる。

・化学ポテンシャル μ : 局所的な化学ポテンシャルは LDA より $\mu(r) = \mu(0) - U_{trap}(r)$ で与えられる。よってトラップ中心の化学ポテンシャルが判ればトラップポテンシャルの形状から局所的な化学ポテンシャルが得られる。そこで我々は次のようなトラップ中心の化学ポテンシャルの決定方法を提案している。熱平衡状態の下、局所的な内部状態は $\mathcal{E} = TS + \mu n - P$ の関係式で成り立っている。これを三次元調和ポテンシャルと LDA を用いてトラップ全体で積分すると、 $E_{rel} = TS + \mu(0)N - \frac{5}{3}E_{pot}$ が得られる。ここで E_{rel} はリリースエネルギーで運動エネルギーと相互作用エネルギーの和である。 S はトラップ全体のエントロピー、 N は全粒子数、 E_{pot} はポテンシャルエネルギーである。実験的には、リリースエネルギーは相互作用が働いている状態でトラップから解放し、相互作用エネルギーが運動エネルギーに変換されてから運動量分布を測定する事により求まる。トラップ全体のエントロピーは磁場を断熱的に BCS 極限まで掃引し、原子の密度分布とエントロピーの関係が判っている相互作用領域で密度分布を評価する事により求まる。ポテンシ

ヤルエネルギーはトラップ中の密度分布とトラップポテンシャルの形状により求まる。よって分からないのはトラップ中心の化学ポテンシャルのみとなり実験的に求める事ができるのである。

・ s 波散乱長 a : 散乱長の磁場依存が既知である [11]。

以上により、不均一なトラップ系から実験的に局所的な熱力学量で与えられる状態方程式 $p(T, \mu, a^{-1})$ の決定が可能であることが解る。状態方程式が得られれば、これは単位体積当たりのグランドカノニカルポテンシャルであるため、全ての熱力学量を導出する事が可能である。つまり粒子密度は $n = \left(\frac{dp}{d\mu}\right)_{T,a}$ 、

ロビー密度は $s = \left(\frac{dp}{dT}\right)_{\mu,a}$ 、内部エネルギー密度は $\mathcal{E} = Ts + \mu n - P$ より求まる。これにより粒子密度と内部

エネルギーの関係が得られ、中性子物質の状態方程式として与えることができる。

このようにして近い将来得られる状態方程式の妥当性を評価する方法を述べておく。先に述べた普遍的多体関数 $h(x, \theta)$ を用いると、圧力関係式 : $PV = \frac{2}{3}(E - N\varepsilon_F x h(x, \theta))$ と断熱関係式 : $\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_\theta = 2\varepsilon_F N h(x, \theta)$ が得られる [6]。よって、ある (x, θ) の点での圧力と内部エネルギーを比較する事によって得られる $h(x, \theta)$ と、その両端の内部エネルギーを同じ温度パラメータ x で測定し、エネルギー勾配から得られる $h(x, \theta)$ が一致するかを評価すれば良い。この方法は理論的モデルに頼らない評価方法であり、この方法で実験データの妥当性が評価されれば、実験データは一切の近似や仮定を含まない普遍的多体フェルミ粒子系を記述する理論のベンチマークとなる。

5. 現状

現在我々は三次元磁気光学トラップに 6Li 原子と 7Li 原子を同時に約 10^8 個ずつ捕獲する事に成功している。温度はそれぞれ約 $200 \mu\text{K}$ であり、光双極子トラップの深さが 1mK 程度なので十分捕獲可能である。典型的に 1% 程度の 10^6 個の原子が光トラップにトラップされ、蒸発冷却後 10^5 個程度のフェルミ縮退を見込んでいる。

6. まとめ

本研究により希薄な二成分フェルミ粒子系の状態方程式、多体系に存在する普遍的多体関数を決定する。状態方程式より粒子密度や内部エネルギーを導出し、中性子物質の状態方程式を与える。また中性子星の冷却曲線を説明する上で重要な超流動相転移温度や比熱等も状態方程式から導出可能である。ただし、中性子物質は冷却原子に比べて十分に希薄ではなく、有効距離の影響が無視できないため、冷却原子の情報を中性子物質に適応するには理論的補正が必要になる。実験的に冷却原子の有効距離を変える提案もされており、将来の挑戦課題の一つである [15]。本新学術プロジェクトは冷却原子と原子核の分野が融合する日本で初めての機会である。これを機に新しい研究分野が開けることを期待する。

参考文献

- [1] P. B. Demorest, *et al.*, *Nature* 467, 1081-1083 (28 October 2010).
- [2] Alexandros Gezerlis and J. Carlson, arXiv:1109.4946.
- [3] Allan Adams *et al.*, arXiv:1205.5180.
- [4] Wilhelm Zwerger, *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas* (Lecture Notes in Physics).
- [5] J. T. Stewart, J. P. Gaebler, and D. S. Jin, *Nature* 454, 744 (2008).
- [6] Shizhong Zhang and Anthony J. Leggett, *Phys. Rev. A* 79, 023601 (2009).
- [7] S. Tan, *Annals of Physics* 323, 2952 (2008). S. Tan, *Annals of Physics* 323, 2971 (2008). S. Tan, *Annals of Physics* 323, 2987 (2008).
- [8] Eric Braaten, arXiv:1008.2922.
- [9] Víctor Romero-Rochín, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 44 095302 (2011).
- [10] Félix Werner and Yvan Castin, arXiv:1204.3204.
- [11] M. Bartenstein, *Phys. Rev. Lett.* 94, 103201 (2005).
- [12] M. Horikoshi, *et al.*, *Science* 327, 442 (2010).
- [13] Tin-Lun Ho and Qi Zhou, *Nature Phys.* 6, 131-134 (2010).
- [14] S. Nascimbène, *et al.*, *Nature* 463, 1057-1060 (25 February 2010).
- [15] Bout Marcelis, *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 100, 153201 (2008).

多軌道を持つ引力フェルミ原子気体における相分離

小林恵太^A, 太田幸宏^B, 奥村雅彦^A, 山田進^A, 町田昌彦^A
原子力研究開発機構^A, 理化学研究所^B

光学格子中の中性原子気体実験は急速に進歩しており、様々なパラメーター（相互作用、温度、トラップポテンシャルの形状等）の制御性の高さから、量子多体系の、特に強相間電子系の量子シミュレーターとして期待されている。また、近年では p バンド中の原子気体の実現しており [1]、より複雑かつ多彩な強相間多体効果が観測されようとしている。特に多バンドの自由度を実現することにより、高温超伝導、軌道秩序、磁性などの問題に対し新たな物理を与えてくれるものと思われる。本稿では多軌道を持つ一次元引力相互作用中性原子気体フェルミオン気体に対し、密度行列繰り込み群 [2] を用いた数値計算を行なった。先ず、ハルデー絶縁体相 [3, 4]、Luther-Emery 相 [5] が実現することを示す。更にスピンインバランスが存在する場合に、余剰スピンとフェルミオンペアの強い相分離が引き起こされることを示す。

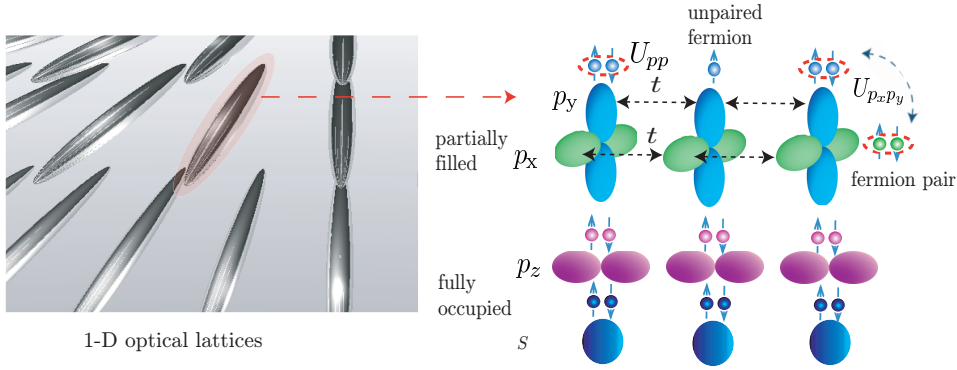


図 1: (左図) 強い異方性を持つ光学格子ポテンシャル: $V_{\text{opt}}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=x,y,z} V_{\alpha} \cos^2(2\pi\alpha/\lambda_{\alpha})$, ($V_x = V_y \gg V_z, \lambda_x = \lambda_y \neq \lambda_z$) から作られる擬一次元光学格子。(右図) 一次元光学格子中において $p_x(y)$ 軌道まで原子が占有している状態の模式図。ここでエネルギーが低い軌道 s, p_z は原子が2重占有しているとする。

本稿では図.1にあるような多軌道を持つ一次元光学格子系を考える。 s, p_z 軌道は原子が2重占有しており、 p_x, p_y 軌道に原子が部分占有しているとする。この時、 s, p_z 軌道の寄与は小さいとし、 p_x, p_y 軌道に注目した強結合ハミルトニアンは以下のように与えられる。

$$H = -\sum_{p,\sigma} \sum_{\langle i,j \rangle} t c_{p,\sigma,i}^{\dagger} c_{p,\sigma,j} - \mu \sum_{p,\sigma,i} n_{p,\sigma,i} + \sum_i \left[\sum_p U_{pp} n_{p,\uparrow,i} n_{p,\downarrow,i} + \sum_{p \neq p'} U_{pp'} \left\{ n_{p,\uparrow,i} n_{p',\downarrow,i} + c_{p,\uparrow,i}^{\dagger} c_{p,\downarrow,i}^{\dagger} c_{p',\downarrow,i} c_{p',\uparrow,i} + c_{p,\uparrow,i}^{\dagger} c_{p',\downarrow,i}^{\dagger} c_{p,\downarrow,i} c_{p',\uparrow,i} \right\} \right]. \quad (1)$$

ここで $n_{p,\sigma,i} (\equiv c_{p,\downarrow,i}^{\dagger} c_{p,\uparrow,i})$ は i -サイト、 p 軌道の粒子数演算子であり、和は p_x, p_y 軌道に対して取るものとする。ホッピング項 t 及び相互作用項 $U_{pp'}$ は $t = -\int dz w_{p,i+1} \left[\frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2M} + V_{\text{opt}} \right] w_{p,i}$, $U_{pp'} = g \int dx w_{p,i}^2 w_{p',i}^2$ として与えられる。ここで $w_{p,i}$ は p_x, p_y 軌道の Wannier 関数であり、いま引力相互作用 $g < 0$ を考えている。ここで系がスピンインバランス $P (\equiv \sum_{p,i} (n_{p,\uparrow,i} - n_{p,\downarrow,i})) \geq 0$ を持つ場合の有効ハミルトニアン ($|U_{pp'}|/t \gg 1$) は2次摂動により以下のように与えられる。

$$H_{\text{eff}} = -\sum_{p,\sigma} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathcal{P} t c_{p,\sigma,i}^{\dagger} c_{p,\sigma,j} \mathcal{P} + J_{\text{ex}} \sum_{p,p'} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathcal{P} \left(\rho_{p,i}^{(z)} \rho_{p',j}^{(z)} - \frac{1}{2} \rho_{p,i}^{(+)} \rho_{p',j}^{(-)} - \frac{J_{\text{ex}}}{4} n_{p,\uparrow,i} n_{p',\uparrow,j} \right) \mathcal{P} - \sum_p \sum_i 2\bar{\mu} \mathcal{P} \rho_{p,i}^{(z)} \mathcal{P}. \quad (2)$$

ここで $\rho_{p,i}^{(l)}$ は擬スピン 1/2 演算子 $\rho_{p,i}^{(+)} = c_{p,\uparrow,i}^\dagger c_{p,\downarrow,i}$, $\rho_{p,i}^{(-)} = [\rho_{p,i}^{(+)}]^\dagger$, $\rho_{p,i}^{(z)} = (\sum_\sigma n_{p,\sigma,i} - 1)/2$ であり、フェルミオンペアの自由度を表している。また $\bar{\mu} = \mu + (|U_{pp}| + |U_{p_x p_y}|)/2$, $J_{\text{ex}} = 2t^2 / (|U_{pp}| + |U_{p_x p_y}|)$ である。射影演算子 \mathcal{P} は状態を擬スピン 1 状態: $\{|0,0\rangle_i, (|\uparrow\downarrow,0\rangle_i + |0,\uparrow\downarrow\rangle_i)/\sqrt{2}, |\uparrow\downarrow,\uparrow\downarrow\rangle_i\}$ 及び余剰スピンを含む状態: $\{|\uparrow,\uparrow\downarrow\rangle_i, |\uparrow\downarrow,\uparrow\rangle_i, |\uparrow,0\rangle_i, |0,\uparrow\rangle_i, |\uparrow,\uparrow\rangle_i\}$ に射影するものである。この有効ハミルトニアンはス

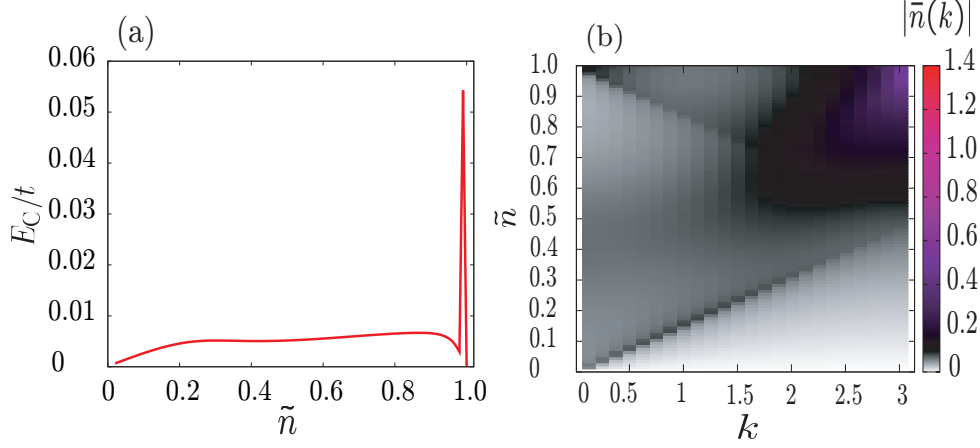


図 2: (a) 縦軸: チャージギャップ $E_C \equiv E(N+ \uparrow\downarrow) + E(N- \uparrow\downarrow) - 2E(N)$ 、横軸: フィリング $\tilde{n} = \sum_{p,\sigma,i} n_{p,\sigma,i} / 2L$. (b) 密度分布のフーリエ変換 $\tilde{n}(k) = \sum_j (n(i) - 2\tilde{n}) e^{ikj} / \sqrt{L}$. 数値パラメータ: $U_{pp} = -10$, $U_{p_x p_y} = (4/9)U_{pp}$, $L = 100$, $P = 0$.

ピンインバランス $P = 0$ において擬スピン 1XXZ モデル $H_{\text{eff}} = J_{\text{ex}} \sum_{\langle i,j \rangle} (\rho_i^{(z)} \rho_j^{(z)} - \frac{1}{2} \rho_i^{(+)} \rho_j^{(-)})$ に帰着する (擬スピン 1 演算子は $\rho_i^{(l)} = \sum_p \rho_{p,i}^{(l)}$ である)。スピン 1XXZ モデルではハルデー相 [6] が実現し、スピンギャップ、端 1/2 スピンの存在が知られている [7, 8]。また有効磁場 $\bar{\mu}$ が強い状態では系は朝永・ラッテンジャー流体として振る舞うことになる [9, 10, 11]。今の場合、ハーフフィリングではチャージギャップ、端状態によるギャップレス励起の存在、ハーフフィリング以外では Luther-Emery 相が予想される。図.2 には式 (1) に対し DMRG を用いた数値計算結果を示している。まず図.2.(a) においてハーフフィリング付近 ($\tilde{n} \simeq 1$) においてギャップレス励起及びチャージギャップの存在が確認できる。このことからハーフフィリングではハルデー絶縁体相が実現していることが確認できる。図.2.(b) は密度分布のフーリエ変換を示している。まず、 $(k, \tilde{n}) \simeq (1, \pi)$ 付近に端状態に起因する強いピークの存在が確認できる。またハーフフィリング以下に規則的になるピークが確認できる。これは Luther-Emery 相における CDW によるものであり、朝永・ラッテンジャー流体から予測される周期 $2k_F = 2\pi(1 - |\sum_i \rho_i^{(z)} / L|) = 2\pi\tilde{n}$ [9] と一致している。以上の解析から、この系ではハルデー絶縁体相、Luther-Emery 相が実現していることが解る。

次にスピンインバランスがある場合の解析を行ってこよう。図.3.(a)-(d) はスピンインバランス ($P = 12$) が存在する場合の密度・スピン密度分布を示している。フィリング $\tilde{n} = 0.99, 0.6$ ではスピン密度分布に Friedel 振動が現れ、 $\tilde{n} = 0.6$ では密度分布にも逆位相の Friedel 振動が現れる。フィリングが低い領域 $\tilde{n} = 0.4, 0.2$ ではフェルミオンペアと余剰スピンの相分離が引き起こされる。ここで余剰スピンの運動に注目しよう。有効ハミルトニアンの中で余剰スピンの運動は $H_K = -\sum_{p,\sigma} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathcal{P} t c_{p,\sigma,i}^\dagger c_{p,\sigma,j} \mathcal{P}$ として与えられる。今、2-site で余剰スピンのホッピング過程 $H_K |\psi_i\rangle_i |\psi_{i+1}\rangle_{i+1} = C |\psi'_i\rangle_i |\psi'_{i+1}\rangle_{i+1}$ を考えよう (図.3.(e))。まず、粒子数がハーフフィリングに近い場合 $N = 3 \sim 4$ では余剰スピンの遷移振幅は $-t/\sqrt{2} (-t/2)$ となることが解る。一方、粒子数が少ない場合 $N = 1 \sim 2$ 余剰スピンの遷移振幅は $-t$ となり、ハーフフィリングに近い場合より運動エネルギーを得ることが解る。このことは余剰スピンは運動エネルギーを稼ぐために、密度の低い領域を作りたがる傾向があることを意味している。実際に、図.3.(b) においてスピン密度が大きい領域では密度分布が低くなっており、余剰スピンの密度分布に逆位相の Friedel 振動を引き起こしている

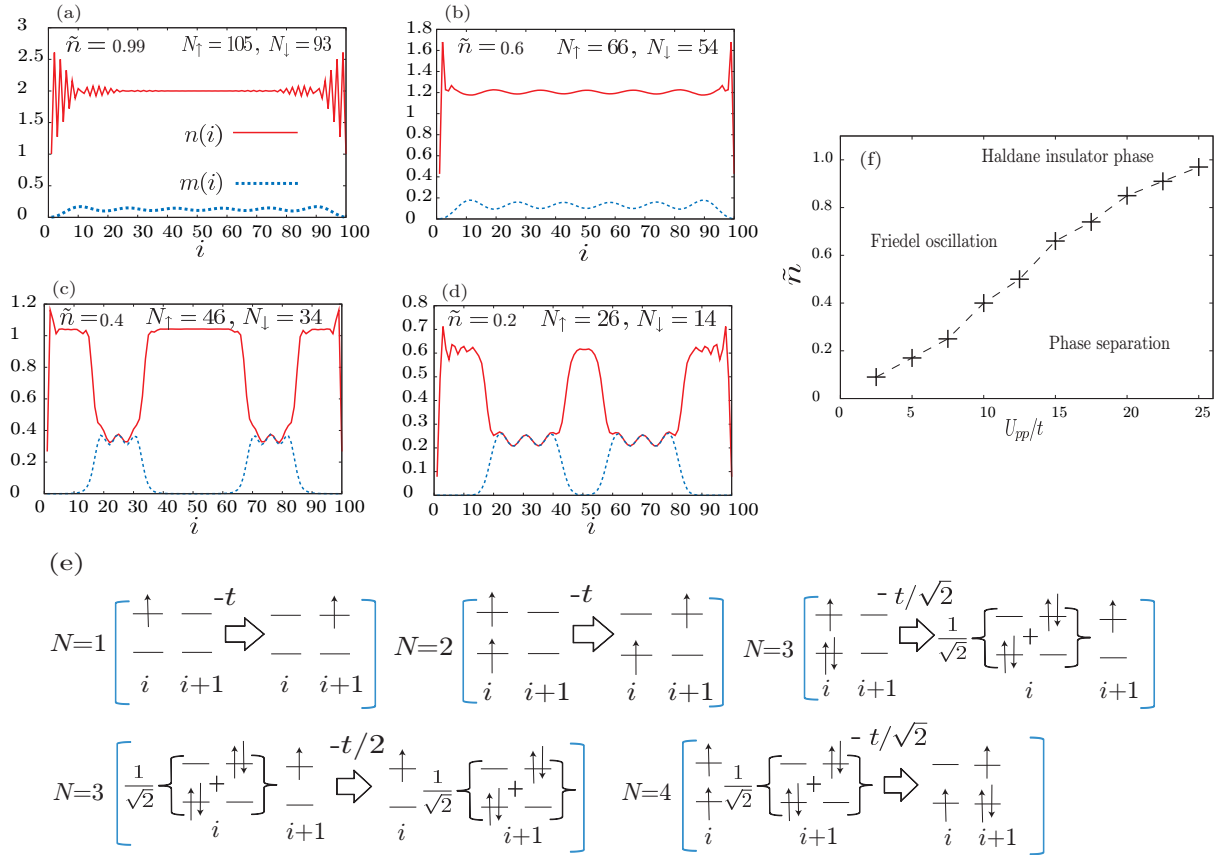


図 3: (Color Online) (a)-(d) 密度分布 $n(i) = \sum_{\sigma,p} n_{\sigma,p,i}$ 、スピン密度分布 $m(i) = \sum_p (n_{\uparrow,p,i} - n_{\downarrow,p,i})$ (フィリング $\tilde{n} = 0.99$, $\tilde{n} = 0.6$, $\tilde{n} = 0.4$, $\tilde{n} = 0.2$)。数値パラメータ: $U_{pp} = -10$, $U_{p_x p_y} = (4/9)U_{pp}$, $L = 100$, $P = 12$. (e) 余剰スピンのホッピング過程. (f) 相図

理解できる。ただし図.3.(a) ではハルデー絶縁体相によるチャージギャップのため余剰スピンの影響はバルク部分では小さく、ギャップレス状態である端状態に強く表れていることが解る。更にフィリングが小さい場合には余剰スピンとフェルミオンペアの相分離を引き起こすことにより、余剰スピンの運動エネルギーを得ていると理解できる。図.3.(f) は相分離に対する相図を DMRG から求めたものであるが、 U_{pp} が大きく \tilde{n} が小さい領域で相分離領域が拡大していることが解る。まず U_{pp} が大きい場合には $J_{ex} \rightarrow 0$ となり、余剰スピンの運動が系にとって主要となる。また \tilde{n} が小さい場合は、 $\bar{\mu}$ が大きくなるため擬スピン・スピン相互作用の寄与が小さくなり、やはり余剰スピンの運動が系にとって主要となることから相図の振る舞いが理解できる。

本稿では多軌道を持つ一次元引力相互作用中性原子気体フェルミオン気体に焦点をあて DMRG による解析を行った。ハルデー絶縁体相、Luther-Emery 相、余剰スピンとフェルミオンペアの強い相分離などの結果を得た。余剰スピンとフェルミオンペアの相分離は単一軌道の一次元フェルミオン気体においてもトラップ中において見られる現象であるが [12, 13]、多軌道を持つ相分離は単一軌道の場合のものより強く、トラップなしでも起こりうるものである。

参考文献

- [1] Torben Müller, Simon Fölling, Artur Widera, and Immanuel Bloch, Phys. Rev. Lett. **99**, 200405 (2007).
- [2] S.R. White, Phys. Rev. Lett. **69**, 2863 (1992); Phys. Rev. B **48**, 10345 (1993).
- [3] Emanuele G. Dalla Torre, Erez Berg, and Ehud Altman, Phys. Rev. Lett. **97**, 260401 (2006).
- [4] H. Nonne, P. Lecheminant, S. Capponi, G. Roux, and E. Boulat, Phys. Rev. B. **81**, 020408(R) (1995).
- [5] A. Luther and V. J. Emery, Phys. Rev. Lett. **33**, 589 (1974).
- [6] F. D. M. Haldane, Phys. Lett. A **93**, 464 (1983); Phys. Rev. Lett **50**, 1153 (1983).
- [7] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, Phys. Rev. Lett. **59**, 799 (1987); Commun. Math. Phys. **115**, 477 (1988).
- [8] S. Miyashita and S. Yamamoto, Phys. Rev. B **48**, 913, (1993).
- [9] Gabor Fath, Phys. Rev. B **68**, 134445, (2003).
- [10] Ian Affleck, Phys. Rev. B **72**, 132414, (2005).
- [11] L. CAMPOS VENUTI, E. ERCOLESSI, G. MORANDI, P. PIERI and M. RONCAGLIA, Int. J. Mod. Phys. B **16**, 1363, (2002).
- [12] A. E. Feiguin and F. Heidrich-Meisner Phys. Rev. B. **76**, 220508(R) (2007).
- [13] Masaki Tezuka, and Masahiko Ueda, Phys. Rev. Lett. **100**, 110403 (2008).

Bose 凝縮体ソリトン束縛状態と輻射成分との 運動量空間における干渉について

峰真如, 藤嶋浩史^A, 奥村雅彦^{B,C}, 矢嶋徹^D

早大本庄学院, A) キヤノン光技研,

B) 原子力機構システム計算科学センター,

C) 理研, D) 宇都宮大学

1 はじめに

中性原子気体の Bose-Einstein 凝縮 (BEC) の系は, マクロなスケールで量子論的現象が観測できるだけでなく, 相互作用が弱く制御可能性にも優れているため理論と実験の詳細な比較ができるという点で魅力的な研究対象となっている. ここで制御可能とは, 外部ポテンシャルの形, 温度, 原子間相互作用にまで及ぶ. たとえば原子の閉じ込めポテンシャルを変化させて擬 1 次元系を作ったり, 原子間の相互作用を斥力から引力まで変えたりすることができる. このことは, 後述するように本研究の出発点となっている.

一方でソリトン理論によると, 非線形シュレーディンガー方程式 (Non-linear Schrödinger Equation, 以後 NLSE と略記) は, 複素数値関数 $\psi = \psi(x, t)$ に対して,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - |\psi|^2 \psi \quad (1)$$

と表されるが, これには, N -ソリトン束縛状態解が存在する [1]. ここで N は自然数である. また, N -ソリトン束縛状態とは異なる初期状態からの時間発展についても, そのふるまいが知られており, 十分大きな振幅を持った初期状態に対して, その後の時間発展が “ソリトン束縛状態 + 小振幅の輻射成分” と表現できる [1]. しかし輻射成分は小振幅なため, 実際の物理系で観測することは困難である.

本研究では, まずこのソリトン束縛状態からずれた初期状態について, その時間発展の結果, 運動量空間で干渉パターンが現れることを示す. 一方で, 中性原子 BEC 系は, その原子分布を与える振幅関数が NLSE に従う (ただし非線形相互作用の強さのパラメータが入る) ことに注目する. また, 先述したように擬 1 次元系を作ったり, 原子間相互作用を引力型に調整することができる. そして, 中性原子 BEC 系では Time of flight 法と呼ばれる観測方法により運動量分布が観測できることに着目し, ソリトン束縛状態と輻射成分との運動量空間での干渉を観測することを提案する.

本稿の構成は以下の通りである. 第 2 節では具体例として 2 ソリトン束縛状態と, それからずれた初期状態について運動量空間での時間発展の様子を数値的に求める. 第 3 節ではまとめを行う.

2 2 ソリトン束縛状態に関する解析

本節では特に, 2 ソリトン束縛状態に注目し, 解析を行う.

2 ソリトン束縛状態の初期状態として,

$$\psi_1(x, 0) = 2 \operatorname{sech}(x) \quad (2)$$

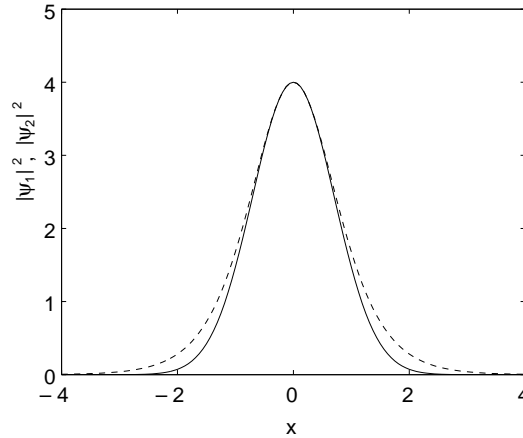


図 1: 初期状態 (2) と (3) をプロットしたもの. 点線が 2 ソリトン束縛状態解 (2) で, 実線が非ソリトン解 (3) である.

を用意する. また, この関数に対して, パルス幅と振幅が似た関数

$$\psi_2(x, 0) = 2 \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (3)$$

も考える. (2) 式に対する時間発展は解析的に求められており,

$$\psi_1(x, t) = 4 \exp\left(-\frac{it}{2}\right) \frac{\cosh(3x) + 3 \exp(-4it)\cosh(x)}{\cosh(4x) + 4\cosh(2x) + 3\cosh(4t)} \quad (4)$$

となることが知られている [1]. 一方で, (3) に対する時間発展は逆散乱法を用いて解の厳密な時間発展を積分表示できるが, その表示は複雑であるため, 時間発展は数値的に求める.

図 1 は, 初期状態 (2), (3) について, その絶対値二乗したものをグラフにしたものである. このグラフからわかるとおり, 両者は非常によく似た波束であることがわかる. なお, この絶対値二乗したものは, BEC 系においては粒子の空間分布に対応している.

次に, それぞれの初期状態に対する時間発展について, 運動量空間での分布を見る.

図 2 は, 2 ソリトン束縛状態 (2) の $t = 14$ での運動量分布を見たものである. グラフからわかるように, 運動量空間での構造は見えない. 一方で, 図 3 は, 初期状態 (2) からの時間発展について, $t = 14$ での運動量分布を見たものである. この場合は, 運動量空間での干渉パターンが見える. これは 2 ソリトン束縛状態と輻射との干渉によるものと考えられる. これを以下に定性的に示す.

2 ソリトン束縛状態解を

$$\psi_{\text{sol}}(x, t) = e^{-\frac{1}{2}x^2} (3 - \cos 4t) \quad (5)$$

と置き, 輻射の成分を

$$\psi_{\text{rad}}(x, t) = \int \tilde{f}(k) e^{-\frac{i}{2}k^2 t} e^{ikx} dk \quad (6)$$

と置く. 2 ソリトン束縛状態解については原点付近に局在し周期 $\frac{\pi}{2}$ で振動している関数で近似した. そして輻射成分については振幅が微小なので通常の線形シュレディンガー方程式の一般

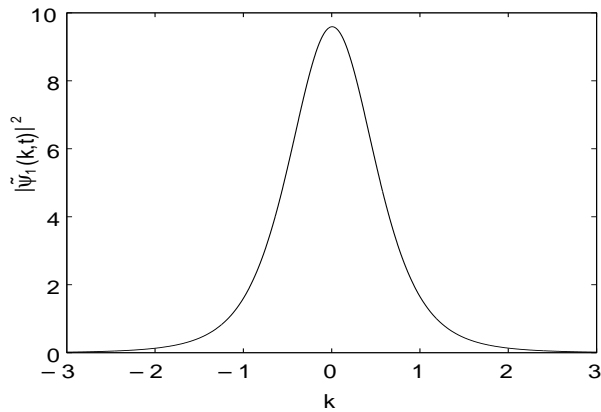


図 2: 2 ソリトン束縛状態 (2) の $t = 14$ での運動量分布.

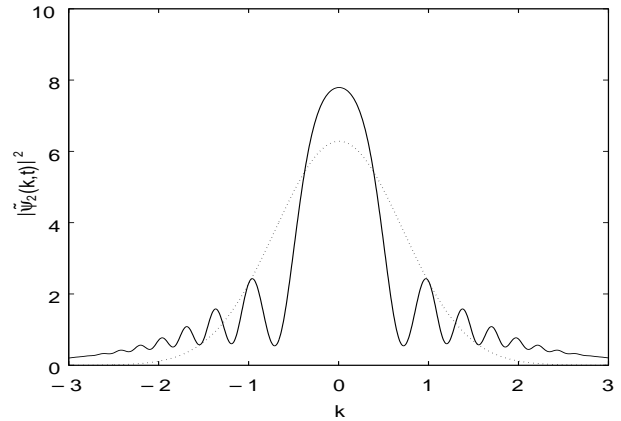


図 3: 初期状態 (3) に対する $t = 14$ での運動量分布. 点線は初期状態を示す.

解で近似した. ここで群速度 0 であることに対応して $\tilde{f}(k)$ は実数値偶関数としている. このとき, 運動量空間での時間発展は次のように書かれる.

$$|\tilde{\psi}_{\text{sol}} + \tilde{\psi}_{\text{rad}}|^2 = (3 + \cos 4t)^2 e^{-k^2} + \tilde{f}^2(k) + 2(3 + \cos 4t)\tilde{f}(k)e^{-\frac{1}{2}k^2} \cos\left(\frac{1}{2}k^2 t\right) \quad (7)$$

このことからわかるように, 干渉項に波数空間での振動が見られる. さらに, 図 3 では波数 k が大きいところで k に関する周期が減少する傾向が見られるが, このことも定性的に説明できている.

3 まとめ

本研究では, NLSE に着目し, N -ソリトン束縛状態からずれた際にソリトン解と非ソリトン解との運動量空間での時間発展に着目した. 特に非ソリトン解に対しては, ソリトン束縛状態と輻射成分との干渉が現れる. BEC 系では運動量分布を観測することができるため, BEC 系でこの干渉が見られれば, 輻射成分を間接的に観測できたことになる. 具体的な実験パラメータについては, 文献 [2] で議論されている. ソリトンは流体, 光学, プラズマなど様々な物理系に現れる現象であるため, 本研究の今後の応用が期待される.

参考文献

- [1] J. Satsuma and N. Yajima, Prog. Theor. Phys. Suppl. **55** (1974) 284.
- [2] H. Fujishima, M. Okumura, M. Mine and T. Yajima, arXiv:1203.5907 [cond-mat.quant-gas], to appear in JPSJ.

再訪:Pitaevskii-Stringari の定理

キヤノン株式会社光学技術研究所 藤嶋 浩史 (Hironobu FUJISHIMA)*

Optics R&D Center, CANON INC.

宇都宮大学工学研究科 情報システム科学専攻 矢嶋 徹 (Tetsu YAJIMA)†

Department of Information Systems Science, Graduate School of Engineering,
Utsunomiya University

ここ数十年膨大な研究成果が蓄積されてきている冷却中性原子気体による BEC 系は、相転移現象の本質について、いまだ議論の絶えない系である。3次元においては、BEC は原子間相互作用がなくてもボーズ統計性を持つバンチングの性質によって達成されることが考えられる。実際当初ボーズとアインシュタインは相互作用のない光子気体の研究から BEC 現象を予言しており、純粋に低エネルギー極限において発散するボーズ分布関数の性質からくる帰結を意図していた。この相互作用なしの描像に立って、二次元以下の有限温度で相転移の発生を禁止する定理がホーエンバーグの定理であり [1]、この定理は状態密度が低次元で定数（二次元）、マイナス二分の一乗（一次元）に比例するために粒子数積分が発散することによって証明される。

一方、BEC の本質を短距離相互作用による大域的 U(1) ゲージ対称性の破れによる通常の相転移として記述するという見方もある。一般に、短距離相互作用する二次元以下の平坦な系では、連続的対称性の自発的な破れの描像に基づく相転移はマーミン=ワグナーの定理によって禁止されることがよく知られている [2]。この場合にも定性的には、低次元特有の強い量子揺らぎが非対角長距離秩序 (ODLRO) の形成を阻害すると説明される。この定理は磁性の分野をはじめとしてさまざまな物理系に対して一般的に適用することが出来るが、BEC 系に対してこの定理を適用すると、「2次元以下では有限温度で BEC 転移は起こらない」となる。この定理の証明はボゴリューボフの不等式と f-総和則を活用することにより、

$$n_{\mathbf{p}} \geq \frac{Mk_B T}{p^2} \frac{|\langle \hat{a}_0 \rangle|^2}{N} - \frac{1}{2} \quad (1)$$

を示して行われる。ここで M は原子質量、 N は原子の個数である。左辺の $n_{\mathbf{p}}$ は運動量 \mathbf{p} をもつ原子の個数密度を表す。有限温度で長波長極限をとり、左辺を積分して比零運動量をもつ非凝縮相の原子個数を求めると（上限は適当でよい）、 $\langle \hat{a}_0 \rangle$ が 0 にならない限り、非凝縮相の原子数が発散してしまう。この定理が有効なのは温度 T が有限のときのみであって、二次元系の場合、絶対零度での相転移を禁止するものではない。

*E-mail address:fujishima.hironobu@canon.co.jp

†E-mail address:yajimat@is.utsunomiya-u.ac.jp

ところが斥力相互作用する一次元系ボーズ系ではより強いことがいえる。すなわち絶対零度であっても、ボーズ凝縮が起こらない。すなわち熱的影響がない純粋な量子相転移の存在を排除することが出来る。最も端的な証明は、リーブ・リニガーモデルによるものである。リーブ・リニガーの積分方程式により、相互作用を繰り込まれた運動量分布（ラピディティ）が0に局在しないことが示される [3]。また、一粒子密度行列が無限遠方で0になることを示すことが出来る ($\lim_{|x| \rightarrow \infty} \langle \psi^\dagger(x) \psi(0) \rangle \rightarrow 0$) [4]。これによりペンローズ・オンサーガーの基準 [5] に従う BEC が排除されたことになる。では、このような可積分模型の方法によらず、マーミン=ワグナーの定理と同様の方式でこの定理を証明できないものであろうか？この問題に対する答えは 1991 年にピタエフスキーとストリンガリによって与えられた [6]。彼らの方法で示される不等式は

$$n_p \geq \frac{Mc}{2} \frac{|\langle \hat{a}_0 \rangle|^2}{pN} - \frac{1}{2} \quad (2)$$

である。上式中で c は音速である。これも $\langle \hat{a}_0 \rangle$ が0にならない限り、非凝縮相の原子数が発散することをいうものである。

しかし、もともとのマーミン=ワグナーの定理もピタエフスキー=ストリンガリの定理も次のような深刻な問題をはらんでいる。まず、第一に場の演算子と粒子描像の関係がはっきりしないことである。彼らは論文中で

$$[\hat{a}_q, \rho_q] = \hat{a}_0$$

なる表現を用いているので (\hat{a} はボーズ粒子の消滅演算子)、 \hat{a}_0 を c 数ではなく演算子として考えていることになる。また ρ_q は良くなされるように

$$\sum \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k+q}$$

と定義されていると考えられる。場の演算子の定義には粒子描像の取り方によっていろいろあるのでここで整理しておかなくてはならない。まず、凝縮相が存在していることを表す c 数場（オーダーパラメタ）を場の演算子の展開の中に含ませるかどうかという問題がある。かたや凝縮相をあらわす c 数場をいれ、そこから量子揺らぎの展開を始める。もう一方は凝縮相がないものとしていきなり演算子の展開を始める。

$$\hat{\rho}_k = \int \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) e^{-ikx} dx$$

であるので、仮に場の演算子の展開に c 数場が入っていたら、 ρ は c 数と、生成消滅演算子それぞれ一個のみを含む項を持つはずである。しかし、ピタエフスキー=ストリンガリの論文中では

$$\sum \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k+q}$$

となっている。これは、彼らが凝縮相がはじめから存在しないものとして、場の演算子の展開を始めているということを意味する。彼らの論文によると、 \hat{a}_0 を演算子として扱っておいたうえで、且つ、 $\langle \hat{a}_0 \rangle = \sqrt{N_0}$ を仮定する（ボゴリューボフ近似）と矛盾が発生する（非凝縮相の原子数が長波長極限で発散する）のでやはり $\langle \hat{a}_0 \rangle = \sqrt{N_0} = 0$ でなくてはならないという論理を用いている。しかし、ボゴリューボフ近似は $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = 0$ のように場の

理論の要である正準交換関係を破壊する。そればかりか、もし $\langle \rangle$ が通常の生の原子に対する真空だとすると、 \hat{a}_0 が演算子であることと $\langle \hat{a}_0 \rangle = \sqrt{N_0}$ であることとははそもそも両立しないことが自明な仮定である。彼らは最初から \hat{a}_0 を c 数ではない演算子として扱っているのだから、この期待値が 0 となるのは最初からトリビアルであるのである。さらに、一般には $\langle \hat{a}_0 \rangle \neq \langle \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \rangle = N_0$ である。そもそも、 $\langle \rangle$ がどんな粒子描像について取られた平均値なのかということも明らかではない。

筆者は、この定理が U(1) ゲージ対称性の自発的破れを否定するものである以上、つぎのような手続きを踏むべきではないかと考える。つまり凝縮相の存在を仮定しておいて場の演算子を c 数から展開し、オーダーパラメタが現れる粒子描像を明確にしたうえで、そこから矛盾を導き、背理的に凝縮体の存在を否定するべきである。講演では以上の視点にかんがみ、論理的に破たんのないようにピタエフスキー = ストリンガリの定理の再証明を試みた。そして以下のような結論を得た。すなわち $p = 0$ のコヒーレント状態を

$$|0(\theta)\rangle \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}N_c\right)\exp\left(\sqrt{N_c}\hat{a}_0^\dagger\right)|0\rangle \quad (3)$$

のように定義してその真空 $|0(\theta)\rangle$ による平均を $\langle \rangle$ とした時、平坦な一次元 Bose 系では

$$n_p \geq \frac{Mc}{N} \frac{|\langle \sqrt{N_c} \delta_{p0} \rangle|^2}{p} - \frac{1}{2} \quad (p \rightarrow 0) \quad (4)$$

でなくてはならないことが示される。上の式で N_c は存在を仮定された凝縮粒子数である。また δ_{p0} は同じく存在を仮定された凝縮体が存在する一次元領域のスケールを L_c としたときに、幅 $1/L_c$ の領域で大きさ L_c 、をとるような関数である。上の不等式を長波極限 $p < 1/L_c$ の領域で辺々を積分すると、非凝縮粒子数はまたも発散することが分かる。これはとりもなおさず、仮定に反して $N_c = 0$ でなくてはならないことを意味しており、一次元系に特有の強い量子揺らぎにより、最小不確定なコヒーレント状態を維持することが出来ず、系は通常の粒子数状態にならざるを得ないことを意味しているのである。

参考文献

- [1] P. C. Hohenberg: Phys.Rev. **158** (1967) 383.
- [2] N. D. Mermin, H. Wagner: Phys. Rev. Lett. **17** (1966) 1133.
- [3] E. H. Lieb and W. Liniger: Phys. Rev. **130** (1963) 1605.
- [4] F. D. M. Haldane: Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 1840.
- [5] O. Penrose and L. Onsager: Phys. Rev. A **104** (1956) 576.
- [6] L. Pitaevskii and S. Stringari: J. Low. Temp. Phys **85** (1991) 377.

Early onset problem in low temperature finite density QCD

永田桂太郎

広島大学情報メディア教育研究センター

Abstract

ゼロ温度有限密度 QCD の解析にはクォーク数密度が $\mu = m_\pi/2$ 程度から上昇する”early onset”と呼ばれる問題が存在する. フェルミオン行列式の縮約公式を用いて零温度極限を取るアイデアを導入し, $T = 0$ でクォーク化学ポテンシャルが小さい場合のクォーク数密度を考察する.

1 はじめに

温度が低くクォーク化学ポテンシャル μ が小さい QCD の系を考える. 経験的にこの系は希薄なバリオンのガスとなると考えられる. $T = 0$ では化学ポテンシャルがある閾値を越えるまでフェルミ粒子は励起されないので, バリオン数密度は零に留まりその閾値は $3\mu = \mu_B \sim M_N$ となるはずである. 一方, 問題をクォークレベルから考えた場合, ナイーブに考えれば μ がクォーク質量 (m_q) を超えるときにクォークの励起がおきてもよい. $0 \leq \mu \leq M_N/3$ においてクォーク化学ポテンシャルの効果を抑制し, 希薄なバリオンのガスがどのように実現されるかは非自明な問題である.

大正準集団に基づく格子 QCD 計算では, クォーク化学ポテンシャルがパイオン質量の半分を超える ($\mu = m_\pi/2$) ところでクォーク数密度の増加が起きることが報告されている. これはバリオンガスの描像から期待される $\mu_B = M_N$ と inconsistent であり, early onset の問題と呼ばれている [1, 2, 3, 4].

クォークの化学ポテンシャルを導入したにもかかわらず, $\mu = m_q$ ではなく $\mu = M_N/3$ まで化学ポテンシャルの効果が生じない現象は [5] で”Silver Blaze”と呼ばれている. Cohen はアイソスピン化学ポテンシャル ($\mu_u = -\mu_d$) の場合にパイオン凝縮相への相転移が $\mu = m_\pi/2$ で起きることからクォークの最低励起エネルギー¹が $m_\pi/2$ であることを指摘し, それにより $T = 0, \mu < m_\pi/2$ において化学ポテンシャル依存性が生じないことが説明した [5]. クォーク化学ポテンシャル ($\mu_u = \mu_d$) の場合は [6] で研究されている.

格子 QCD の計算 [1, 2, 3, 4] で起きた early onset の問題が格子上の系統誤差に起因しているのか, 或いは物理的な問題なのかは符号問題のためはっきりしなかった. 一方, [5, 6] ではクォークのエネルギースペクトルは実際には計算されていないため QCD に基づく定量的な検証が必要である. しかし, 数値計算と理論的な考察両面でコンシステントな結果が得られているため, early onset の問題は単に数値計算上の問題ではなく冒頭で述べた零温度 QCD の物理的な問題と捉えてよいと思う.

最近の研究 [7] で, 我々はフェルミオン行列式の縮約公式を用いて early onset の問題を考察した. 縮約公式に関する最近の知識 [8] を利用して, クォーク行列式の零温度極限を取るアイデアを導入し, $T = 0, \mu < m_\pi/2$ でクォーク数密度が零であるという結論を得た. 得られた結果は [1, 2, 3, 4, 5, 6] と同じものであるが, 縮約行列の性質を利用した新しい手法を用いている.

¹ $\gamma_0(D + m)$ の最小固有値

本稿では [7] で用いた格子 QCD の低温極限を取るアイデアを紹介し, それを用いて early onset の問題の発生原因を考察する. 以下の議論では $\mu < m_\pi/2$ に注目する.

2 フェルミオン行列式の縮約公式

はじめにフェルミオン行列式の縮約公式を導入する. フェルミオン行列式は時空, カラー, ディラックの添字を持つ多次元行列式であるが, その時間成分を解析的に実行する縮約公式がスタaggerドフェルミオンと Wilson フェルミオンに対して導出されている [8]. 以下では Wilson フェルミオンを考える. Wilson フェルミオン行列を Δ とすると, 縮約公式は

$$\det \Delta(\mu) = C_0 \xi^{-N_{\text{red}}/2} \det(Q + \xi), \quad (1)$$

で与えられる. ここで, C_0 はあるスカラー量, $\xi = \exp(-\mu/T)$ はフガシテイ, $N_{\text{red}} = 4N_c N_s^3$ である. Q は縮約行列と呼ばれ, Wilson フェルミオンの場合は以下の式で定義される

$$Q = (\alpha_1^{-1} \beta_1) \cdots (\alpha_{N_t}^{-1} \beta_{N_t}), \quad (2)$$

ここで

$$\alpha_i = B(t_i) r_- - 2\kappa r_+, \quad (3)$$

$$\beta_i = (B(t_i) r_+ - 2\kappa r_-) U_4(t_i). \quad (4)$$

$B(t_i)$ は Δ の時刻 t_i における対角成分, $r_\pm = (1 \pm \gamma_4)/2$, κ はホッピングパラメータである. 時間方向のリンク変数 $U_4(t_i)$ に注目すると縮約行列は $Q = \prod_{i=1}^{N_t} (\cdots) U_4(t_i)$ という形をもっており, Polyakov loop $P = \prod_{i=1}^{N_t} U_4(t_i)$ との類似があることがわかる. ただし, Q は空間方向の伝搬も含む.

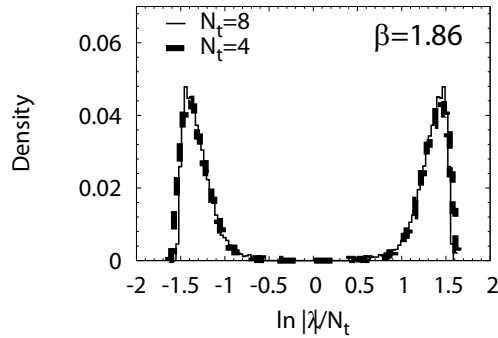


Figure 1: Q の固有値密度. 横軸は $\ln |\lambda|/N_t$. 太い点線および細い実線はそれぞれ $N_t = 4$ および $N_t = 8$ の結果. 図から固有値の 3 つの性質を読み取ることができる. y 軸対称性は固有値の対称性 $\lambda \leftrightarrow 1/\lambda^*$ を表す. $|\lambda| = 1$ 近傍の固有値密度がゼロの領域はギャップを表す. $N_t = 4$ と $N_t = 8$ の結果の一致は N_t についてのスケーリング則を表す. 格子計算の詳細は [8] を参照.

Q の固有値 λ_n の 3 つの性質 (i) 対称性, (ii) ギャップ, (iii) N_t スケーリング則を考える.

- (i) Q の 2 つの固有値 $\lambda_n \leftrightarrow 1/\lambda_n^*$ は対を組む. これは γ_5 -Hermite 性に基づく厳密な対称性である [9]. これに従い, 固有値は 1 より大きいものと, 小さいものに分類される. 以下それぞれを”大きい固有値”と”小さい固有値”と呼ぶ.
- (ii) Q の固有値分布は複素 λ 平面上の単位円近傍 $|\lambda| \sim 1$ に固有値の存在しないギャップを持つ. ギャップの大きさは単位円内の最大固有値 $\max_{|\lambda_k| < 1} \lambda_k$ によって与えられる. Gibbs によれば [10], ギャップ近傍の固有値とパイオン質量の間に

$$am_\pi = -\frac{1}{N_t} \max_{|\lambda_k| < 1} \ln |\lambda_k|^2, \quad (5)$$

の関係がある。(5)式は演算子レベルの対応で、後に Fodor, Szabo, Tóth らは熱力学的枠組みを用いて上の式が以下のように修正されることを指摘している [11]

$$am_\pi = \lim_{N_t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{N_t} \ln \left\langle \left| \sum \lambda_k \right|^2 \right\rangle \right). \quad (6)$$

ここで $\langle \cdot \rangle$ は熱平均を表す。十分低温 (大きい N_t) において $\max_{|\lambda_k| < 1} \ln \lambda_k$ が主要となり、2つの式が一致すると期待されている [11]。この点についてはまだ議論の余地があるが、 $T = 0$ においてギャップの大きさはパイオン質量と関係している。

- (iii) 最近の研究で我々は λ の N_t に関するスケーリング則を見出した。このスケーリング則は $N_t = 4, 8$ についての固有値分布の比較から得られたもので、より大きな N_t での検証が必要である。しかしながら、 Q の定義 (2) 式や縮約行列と Polyakov loop の類似からもこのスケーリング則が期待されている。

3つの性質は図1に示されている。以下ではこれらの性質を利用して議論を進める。

3 $T = 0$ でのクォーク数密度

縮約公式と固有値 λ の性質を利用してクォーク数密度を考える。クォーク数密度演算子は $\hat{n} = [V_s^{-1} T(\partial/\partial\mu) \det \Delta(\mu)] / \det \Delta(\mu)$ で与えられる。簡単な計算の後、

$$\hat{n} = \sum_{n=1}^{N_{\text{red}}/2} \left(\frac{\lambda_n \xi^{-1}}{1 + \lambda_n \xi^{-1}} - \frac{\lambda_n^* \xi}{1 + \lambda_n^* \xi} \right), \quad (7)$$

を得る。ここで和は小さい固有値のみについて取る。大きい固有値からの寄与は対称性 (i) を利用して小さい固有値で表してある。 N_t スケーリング則を用いて小さい固有値を $\lambda_n = \exp(-\epsilon_n a N_t + i\theta_n)$ とパラメトライズする。ここで $T = 1/(aN_t)$ より、 $\lambda_n = \exp(-\epsilon_n/T + i\theta_n)$ と書くことが出来る。このとき、数密度演算子は

$$\hat{n} = \sum_{n=1}^{N_{\text{red}}/2} \left(\frac{1}{1 + e^{(\epsilon_n - \mu)/T - i\theta_n}} - \frac{1}{1 + e^{(\epsilon_n + \mu)/T + i\theta_n}} \right), \quad (8)$$

と表される。

零温度 $T = 0 (N_t \rightarrow \infty)$ 低密度の場合を考える。本研究では空間体積を固定して考える。体積を固定して零温度極限をとった場合、 μ が小さければ (8) 式は零となる。 \hat{n} が零でない値をとりうるのは μ が最小の ϵ_n を超えたときであるので $\mu < \epsilon_{\min}$ の場合、 $\hat{n} = 0$ となる。(5) を用いれば、 $\epsilon_{\min} a = m_\pi a/2$ であり、したがって

$$\hat{n} = 0, \mu < m_\pi/2, \quad (9)$$

が得られる。これは $T = 0, \mu < m_\pi/2$ においてクォーク数密度は各配位毎に零であることを意味しており、その期待値 $\langle n \rangle$ も零となる。ここで、 $\mu \neq 0$ においては符号問題のため各配位毎の \hat{n} の値と期待値 $\langle n \rangle$ の関係は非自明である。(9) から $\langle n \rangle = 0$ を得ることが出来るのは μ がギャップより小さく各配位毎に $\hat{n} = 0$ となるからである。

次にこの結果の物理的な解釈を考える。(8) 式において固有値の和の記号を積分記号で表す ($\sum_{n=1}^{N_{\text{red}}/2} = \int_{|\lambda| < 1} d\lambda \rho(\lambda)$) と、

$$\hat{n} = \int_{|\lambda| < 1} d\lambda \rho(\lambda) \left(\frac{1}{1 + e^{(\epsilon - \mu)/T - i\theta}} - \frac{1}{1 + e^{(\epsilon + \mu)/T + i\theta}} \right), \quad (10)$$

が得られる. ここで $\rho(\lambda)$ は固有値密度である. 括弧内の 1 項目はクォークのフェルミ分布, 2 項目は反クォークのフェルミ分布と対応することが読み取れる. 既に述べたように縮約行列 Q は Polyakov loop P と類似した形を持っている. Polyakov loop P はクォークの自由エネルギー F と $\langle P \rangle \sim e^{-F/T}$ の関係にある. これらの対応関係から, ϵ はクォークのエネルギー準位を表していると考えられる². ϵ をクォークのエネルギー準位と考えると, ϵ_{\min} はその最低励起エネルギーに対応している. 以上から, クォークの最低励起エネルギーは $m_\pi/2$ であり, $T = 0$ で $\mu < m_\pi/2$ の領域ではクォークを励起することができず, クォーク数密度は零に留まるという結論が得られた.

4 おわりに

零温度有限密度の QCD の性質, 特にクォーク数の early onset の問題を考察した. 本研究で得られた結果は既に知られているものであるが, フェルミオン行列式の縮約公式を利用することで, 格子 QCD の零温度極限をとるアイデアやその物理的な解釈を提示した. 本研究の結果は最近の研究で得られた縮約行列の性質に基づいている. 固有値のギャップとパイオン質量の関係および N_t スケーリング則に関しては今後より現実的な格子計算での検証が必要である. また, 零温度極限を取る際に格子の空間体積を固定した. 熱力学極限とゼロ温度極限の両方を考慮することも物理的に重要である.

本研究では $\mu < m_\pi/2$ に注目した. 最後に $\mu > m_\pi/2$ の領域についての注意点を述べておく. μ が $m_\pi/2$ を超えると \hat{n} は零でない値を取りうる. しかし, \hat{n} は複素数であるため, 各配位毎に $\hat{n} \neq 0$ であってもそれは必ずしも $\langle n \rangle \neq 0$ を意味しない. 様々な配位についての相殺があれば \hat{n} を零にすることは可能である. $m_\pi/2 < \mu < M_N/3$ の領域にはそのような非自明な機構が存在すると考えられる. それがどのように実現され, early onset の問題が解決されるかは今後の課題である.

本研究は科研費 (20340055, 20105003, 23654092) に基づく研究であり, 数値計算には大阪大学の NEC-SX9 を利用した.

References

- [1] I. Barbour, S. Hands, J. B. Kogut, M.-P. Lombardo, and S. Morrison, Nucl. Phys. **B557**, 327 (1999), arXiv:hep-lat/9902033.
- [2] I. M. Barbour, S. E. Morrison, E. G. Klepfish, J. B. Kogut, and M.-P. Lombardo, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **60A**, 220 (1998), arXiv:hep-lat/9705042.
- [3] I. M. Barbour, S. E. Morrison, E. G. Klepfish, J. B. Kogut, and M.-P. Lombardo, Phys. Rev. **D56**, 7063 (1997), arXiv:hep-lat/9705038.
- [4] I. M. Barbour and A. J. Bell, Nucl. Phys. **B372**, 385 (1992).
- [5] T. D. Cohen, Phys. Rev. Lett. **91**, 222001 (2003), arXiv:hep-ph/0307089.
- [6] D. H. Adams, Phys. Rev. **D70**, 045002 (2004), arXiv:hep-th/0401132.
- [7] K. Nagata, arXiv:1204.6480.
- [8] XQCD-J Collaboration, K. Nagata, S. Motoki, Y. Nakagawa, A. Nakamura, and T. Saito, Prog. Theor. Exp. Phys. 01A103, (2012), arXiv:1204.1412, and references therein.
- [9] A. Alexandru and U. Wenger, Phys. Rev. **D83**, 034502 (2011), arXiv:1009.2197.
- [10] P. E. Gibbs, Phys. Lett. **B172**, 53 (1986).
- [11] Z. Fodor, K. Szabo, and B. Toth, JHEP **0708**, 092 (2007), arXiv:0704.2382.

²ただし, ϵ は熱平均量ではなく各配位毎の量であることと, 各配位毎に位相因子 θ が生じることに注意が必要である.

三角格子上 2 成分ボソン系の有効理論とその相構造

名古屋工業大学大学院工学研究科
久野義人

1 概要

近年、光学格子と呼ばれるレーザーの干渉によってつくられるハイパークリーンな人工格子系を用いて極低温の原子系の実験が盛んに行われつつある [1]. この実験技術により巨視的量子多体現象 (特に Bose 粒子系において) が観測、自在に制御可能となりつつある。本研究は特に 2 成分極低温 Bose 粒子系 [2] に焦点を当て極低温の有効モデルである 2 成分 Bosonic t-J モデル [3] を出発点とする。このモデルは擬スピン表示を用いて表現されており、極低温化では超流動状態とスピン秩序が競合するような興味深いモデルである。また、高温超伝導体のモデルであると考えられている Fermion t-J モデルに重要な知見を与える可能性がある。本研究ではこのモデルの有効モデルである拡張された量子 XY モデル (EQXYM) を導き、EQXYM をモンテカルロシミュレーション (MCS) によって計算し二次元三角格子の相構造を求めた。また、EQXYM からさらに GL 理論をリスペクトして有効作用を導出した。この有効作用によって EQXYM の相構造における各状態相において場の演算子の位相ゆらぎに起因する Nambu-Goldstone Boson (NGB) の個数、つまりはギャップレスモードの数について調べた結果を報告する。

2 拡張された XY モデルの説明とその相構造

2 成分の Bose-Hubbard モデルにおいて強い斥力により各サイトにおいての二重占有を禁止したモデルが 2 成分 Bosonic t-J モデルである。

$$H_{tJ} = - \sum_{\langle i,j \rangle} t(a_i^\dagger a_j + b_i^\dagger b_j) + \sum_{x,\mu} (J_{XY} \vec{S}_{x+\mu} \vec{S}_x + J_Z S_{x+\mu,3} S_{x,3}) + V_0 \sum_i (\delta \rho_a^2 + \delta \rho_b^2 + \delta \rho_c^2)$$

ここで、 i, j は再隣接サイトの組、 J_{XY}, J_z は XY 方向、z 方向スピン相互作用の強さ、 V_0 は各粒子濃度を均一化するポテンシャルの強さ。他は通常の t-J モデルと同じである。ここで特に、擬スピン表示として、 $S_x^1 = a^\dagger b + b^\dagger a$ 、 $S_x^2 = -i(a^\dagger b - b^\dagger a)$ 、 $S_x^3 = a^\dagger a - b^\dagger b$ 、 $S_x^3 = a^\dagger a - b^\dagger b$ を採用している。EQXYM は、このモデルを Slave-particle 表示に落とし込み $J_z = 0$ を仮定する。さらに、a 粒子、b 粒子、hole の場の演算子を $a_x = (\sqrt{\rho_{0,x}} + \delta \rho_{1,x}) e^{i\phi_{1,x}}$ 、 $b_x = (\sqrt{\rho_{0,x}} + \delta \rho_{2,x}) e^{i\phi_{2,x}}$ 、 $h_x = (\sqrt{\rho_{0,x}} + \delta \rho_{3,x}) e^{i\phi_{3,x}}$ 置き換え、経路積分形式に乗せる。この経路積分表示に移行すると振幅のゆらぎ $\delta \rho$ については絶対零度を想定した場合、積

分実行可能であり、以下に EQXYM が導かれる。

$$H_{EXY} = -\frac{1}{V_0} \sum_{x,\tau,i} \cos(\phi_{i,x+\tau} - \phi_{i,x}) + \sum_{x,\mu,\tau} \left[C_1 \cos(\phi_{12,x} - \phi_{12,x+\mu}) + C_2 \cos(\phi_{13,x} - \phi_{13,x+\mu}) + C_3 \cos(\phi_{23,x} - \phi_{23,x+\mu}) \right] \quad (1)$$

ここで、 $\phi_{12,x} = \phi_{1,x} - \phi_{2,x}$ 、 $\phi_{13,x} = \phi_{1,x} - \phi_{3,x}$ 、 $\phi_{23,x} = \phi_{2,x} - \phi_{3,x}$ である。この変数の長距離相関を見ることにより、XY スピン強磁性、a 粒子 BEC、b 粒子 BEC の出現を判別できる。また

$$C_1 = -c_1 \alpha \sqrt{\rho_{1,x+\mu} \rho_{1,x} \rho_{2,x+\mu} \rho_{2,x}} (1 - \rho_{3,x} - \rho_{3,x+\mu} + \rho_{3,x} \rho_{3,x+\mu}) \quad (2)$$

$$C_2 = \frac{c_3}{2} \sqrt{\rho_{1,x+\mu} \rho_{1,x} \rho_{3,x+\mu} \rho_{3,x}} \quad (3)$$

$$C_3 = \frac{c_3}{2} \sqrt{\rho_{2,x+\mu} \rho_{2,x} \rho_{3,x+\mu} \rho_{3,x}} \quad (4)$$

である。本研究では、EQXYM について C_1 、 C_3 をフリーパラメーターとして二次元三角格子絶対零度下での相構造は MCS により図 1 を得た。ここで、各粒子濃度は a 粒子 35%、b 粒子 35%、ホール濃度 30% として、 J_{XY} は反強磁性的に設定した。図 1 において、注目すべきことは A 相と B 相であり、スピン 120 度構造と超流動相が共存することである。

3 EQXYM の有効作用

EQXYM を Hubbard-Stratonovich 変換によって以下の有効作用が導出される [4]。

$$A_{eff} = \int d\tau \left[\sum_{i,\mu} \left(-a_s \Phi_{1,i}^\dagger \Phi_{1,i+\mu} + a_h \Phi_{2,i}^\dagger \Phi_{2,i+\mu} + a_h \Phi_{3,i}^\dagger \Phi_{3,i+\mu} + c.c \right) - \sum_i \left(\frac{1}{V_0} \partial_\tau \Phi_{1,i}^\dagger \partial_\tau \Phi_{1,i} + \frac{1}{V_0} \partial_\tau \Phi_{2,i}^\dagger \partial_\tau \Phi_{2,i} + \frac{1}{V_0} \partial_\tau \Phi_{3,i}^\dagger \partial_\tau \Phi_{3,i} + 4V_0 |\Phi_{1,i}|^2 + 4V_0 |\Phi_{2,i}|^2 + 4V_0 |\Phi_{3,i}|^2 \right) - g \left(\Phi_{1,i}^\dagger \Phi_{2,i} \Phi_{3,i}^\dagger + \Phi_{1,i} \Phi_{2,i}^\dagger \Phi_{3,i} \right) + \lambda_1 |\Phi_{1,i}|^4 + \lambda_2 |\Phi_{2,i}|^4 + \lambda_3 |\Phi_{3,i}|^4 \right] \quad (5)$$

ここで、 $\Phi_{1,x} \Leftrightarrow \phi_{12,x}$ 、 $\Phi_{2,x} \Leftrightarrow \phi_{13,x}$ 、 $\Phi_{3,x} \Leftrightarrow \phi_{23,x}$ の対応がある。また、 $a_s \propto J_{XY}$ 、 $a_h \propto t$ である。また、 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ である。この有効作用の各場の二次の係数をまとめ上げて、その符号の変化を見ることで図 1 の相構造との対応が見て取れる。また、図 1 での各相構造において MCS で得られた秩序変数 n_i からの位相ゆらぎを $\Phi_{i,x} = \sqrt{n_i} + i\phi_{i,x}$ とし導入する。そして、 $\phi_{i,x}$ についての有効ポテンシャルを求め対角化する手法でギャップレスモードの数、つまり NGB の数を調べたところ図 2 のようになることが分かった。注目すべきことは 120 度構造 + a 粒子、b 粒子超流動相 (B 相) で三つの NGB が存在する、これはもとの Bosonic t-J モデルが $U(1) \times U(1)$ の対称性を持っていることを考えると、一つ余分に NGB が存在しているように見える。この余分な NGB は Quasi-Nambu-Goldstone mode と呼ばれるものであることが示唆される [5]。また、強磁性 + a 粒子、b 粒子の超流動相 (D 相) においては 2 つの NGB、有効作用の三次の相互作用の影響により、もう一つの位相場はギャップモード、つまりは Higgs モードを示唆する結果を得た。

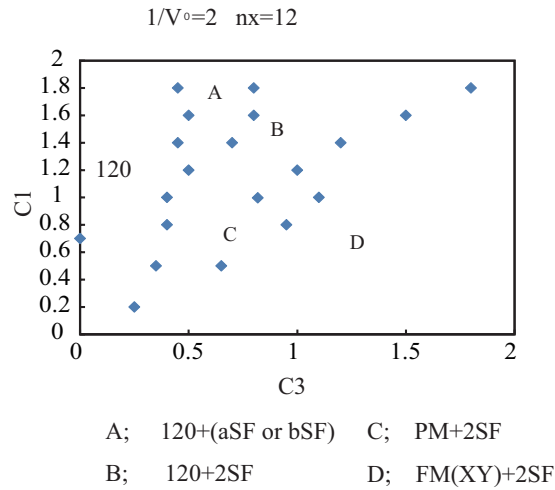


図 1: EQXYM の相構造

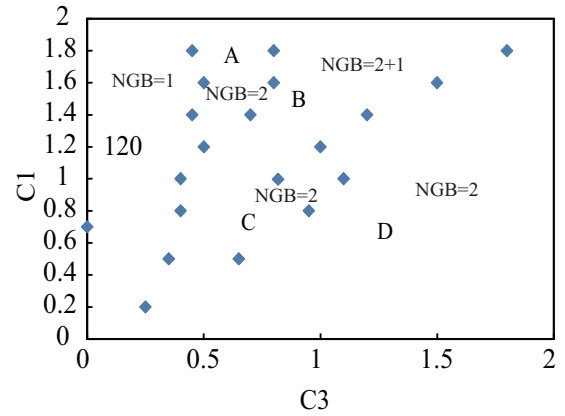


図 2: Nambu-Goldstone Boson の数

4 まとめと展望

本研究ではNGBの数を二次元三角格子において各状態相ごとに求めた。今後は量子補正項を考慮した形でギャップモードの詳しい解析、対称性の破れの個数とNGBの出現数等詳しく調べていきたい[6]。また、2成分Bosonic t-JモデルにおいてChern-Simons termを考慮した時のFermion t-Jモデルとの対応を考えていきたい。

参考文献

- [1] M.Greiner et al. , Nature(London)415,39(2002).
- [2] S. B. Papp, J. M. Pino, and C. E. Wieman, Phys. Rev.Lett. 101, 040402 (2008).
- [3] K.Kataoka, Y.Kuno,and I.Ichinose , arXiv:1206.5358 (2012).
- [4] Y.Kuno,K.Kataoka, and I.Ichinose, in preparation.
- [5] S.Uchino, M.Kobayashi, M.Nitta, and M.Ueda , Phys. Rev. Lett. 105, 230406 (2010).
- [6] H.Watanabe and H.Murayama,Phys. Rev. Lett. 108, 251602 (2012).

強磁性超伝導現象を記述する格子GLの 数値シミュレーションによる研究

名古屋工業大学大学院工学研究科
小澤秀敏

1 概要

2000年以降発見が続く強磁性超伝導物質は、新奇超伝導物質の一つとして多くの実験および理論物理学者の関心を集めている。これは従来強磁性と超伝導は相容れない物性であると信じられていた常識を覆すもので、競合する秩序の共存という普遍的な問題に深く関連するためである。本研究においてはこの現象を記述するために町田・大見氏により提唱された Ginzburg-Landau 理論を空間格子上で再構築し、その格子 GL 理論を主に数値計算法により調べた。特に超伝導物質中には磁化が存在するため、自発的に vortex 励起の出現が起こり、平均場近似等が適用できないためである。

2 強磁性超伝導を記述する格子 GL モデル

強磁性超伝導における波動関数は、磁化下において2電子からなるクーパーペアが図1のように支配的なペアと弱いペアに分かれるので、2成分で表すことができる。今回は内部磁場を加えることで強磁性と見なし、その相構造の変化を調べた。

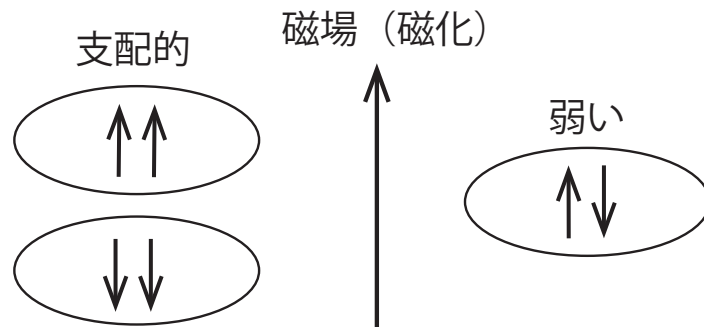


図 1: 強磁性超伝導の波動関数

続いて、実際のモデルについて触れる。まず、クーパーペアの波動関数をオーダーパラメーターとした超伝導自由エネルギーは

$$F = \int \left[\frac{\hbar^2}{4m} \left| \left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar} A(r) \right) \psi(r) \right|^2 + \alpha |\psi(r)|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi(r)|^4 \right] d^3r \quad (1)$$

のように与えられる。これを空間格子上に再構築すると、

$$\begin{aligned} F &= (\text{クーパーペアと磁化の相互作用}) \\ &\quad + (\text{ゼーマン効果}) + (\text{クーパーペアの密度ゆらぎ調整}) \\ &= -c_1 (R_{x+\mu} R_x \bar{z}_{x+\mu} e^{iA_{x,\mu}} z_x + c.c) - c_3 M_{x,\mu\nu} \cdot S_x + G(R_x^2 - 1)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで、式(1)の ψ を

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow\uparrow} \\ \psi_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} z_{\uparrow\uparrow} \\ z_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, |z_{\uparrow\uparrow}|^2 + |z_{\downarrow\downarrow}|^2 = 1 \quad (3)$$

のように書き直し、 R をクーパーペアの密度ゆらぎ、 z を位相とした。

磁場中の超伝導現象では vortex が発生しており、その内部では常伝導になりクーパーペアが存在していないため、クーパーペアの密度ゆらぎを取り入れている。

さらに、今回の研究で重要な項であるゼーマン効果について触れておく。通常、磁化下においてはその方向によって $\psi_{\uparrow\uparrow}$ と $\psi_{\downarrow\downarrow}$ のどちらかが支配的になる。つまり、 $\psi_{\uparrow\uparrow} \neq \psi_{\downarrow\downarrow}$ となり、クーパーペアが作る磁気モーメントが発生する。これを

$$S_x = |z_{x\uparrow\uparrow}|^2 - |z_{x\downarrow\downarrow}|^2 \quad (4)$$

として組み込むことで縮退している軌道エネルギーが磁気モーメントと磁化の相互作用によって分裂する。これがゼーマン効果である。

今回は以上のようなモデルに対してモンテカルロシミュレーションを行った。

3 結果

クーパーペアの密度ゆらぎを調整するパラメーター G や、ゼーマン効果の大きさ c_3 を変えたときの超伝導転移温度の変化の様子を図2に示す。

図2はそれぞれ磁化が無い場合、磁化がある場合(ゼーマン効果なし)、磁化がある場合(ゼーマン効果あり)のものであり、各線において左側が超伝導相、右側が常伝導相である。これを見ると G が小さい、つまりクーパーペアの密度ゆらぎが大きい方が転移温度が高くなっていることが分かる。また、ゼーマン効果を入れるとその転移温度がより高くなっていることが分かる。

これより、ゼーマン効果が強磁性超伝導の存在に大きく寄与しているということが言える。

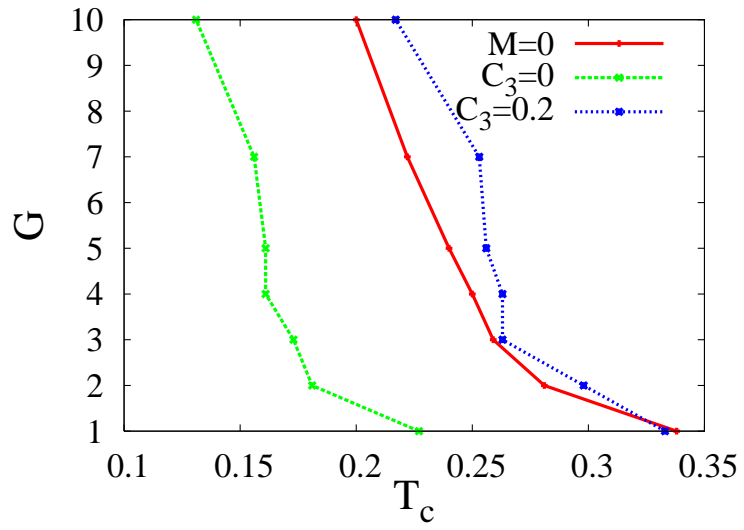


図 2: 転移温度の変化

参考文献

- [1] Akihiro Shimizu, Hidetoshi Ozawa, Ikuo Ichinose, and Tetsuo Matsui, Phys. Rev. B 85, 144524 (2012)

一次元光学格子中における中性冷却 Bose 原子気体系の非平衡緩和過程

桑原幸朗，中村祐介，山中由也
早大基幹理工電子光システム

1 はじめに

通常，熱的状況における物理量の期待値は混合状態期待値として表される．熱場の量子論に対する定式化の1つである Thermo Field Dynamics (TFD) では，ある生成消滅演算子 a, a^\dagger に対して新たに $\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$ を導入することで自由度を倍加する．これにより混合状態期待値を，熱的真空と呼ばれる純粋状態による期待値として表すことができる [1]．特に，非平衡な状況を扱う非平衡 TFD では時間依存する分布関数を未知関数として導入し，自己無撞着な繰り込み条件を課すことで量子輸送方程式が導出される [1, 2]．これまでに冷却中性原子気体系に非平衡 TFD を適用することで，non-Markov 型の量子輸送方程式が導出されることが知られている [3–6]．

しかし，非平衡 TFD から導出される量子輸送方程式を用いた非平衡緩和過程の解析において，時間依存する外場が存在するときのモデルに対しての解析はまだ十分に行われていない．そこで本稿では，時間依存する外場中の冷却 Bose 気体系に対する非平衡緩和過程を量子輸送方程式によって解析する．モデルについての詳細は次に述べる．

2 ハミルトニアン

弱い調和振動子ポテンシャルに閉じ込められた一次元光学格子中の冷却 Bose 気体系を考える．ただし，Bose-Einstein 凝縮していない場合を考える． $t < 0$ であらかじめ平衡状態を用意しておき， $t = 0$ で調和振動子ポテンシャルの中心を瞬間的にずらす．これにより $t > 0$ で系は非平衡状態となる．図 1 にモデルの概略図を示す．

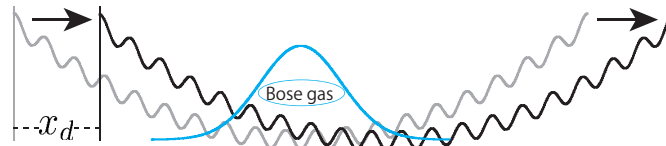


図 1 モデル概略図

上記モデルに対するハミルトニアンは，Bose-Hubbard モデルを用いて次のように記述できる [7]:

$$H(t) = H_0(t) + H_{\text{int}}(t), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} H_0(t) &= \sum_{i=1}^{I_s} \left[-J\psi_i^\dagger(t)(\psi_{i+1}(t) + \psi_{i-1}(t)) + \{(i - I_c + \theta(-t)d)^2 V - \mu\}\psi_i^\dagger(t)\psi_i(t) \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{I_s} \psi_i^\dagger(t)h_{0,ij}(t)\psi_j(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$H_{\text{int}}(t) = \frac{U}{2} \sum_{i=1}^{I_s} \psi_i^\dagger(t) \psi_i^\dagger(t) \psi_i(t) \psi_i(t). \quad (2.3)$$

ただし, i はサイト番号を表し, $\psi_i(t), \psi_i^\dagger(t)$ は同時刻交換関係

$$[\psi_i(t), \psi_j^\dagger(t)] = \delta_{ij}, \quad [\psi_i(t), \psi_j(t)] = 0, \quad [\psi_i^\dagger(t), \psi_j^\dagger(t)] = 0, \quad (2.4)$$

を満たす場の演算子である. I_s は全サイト数, I_c は中心サイト番号をそれぞれ表し, $I_c = (I_s - 1)/2$ である. J, μ, U, V はそれぞれホッピング項, 化学ポテンシャル, オンサイトの接触相互作用定数, 調和トラップの強さである. また d はトラップのずらし幅を表す量であり, 光学格子の格子間隔を a_{opt} として $d = x_d/a_{\text{opt}}$ である. なお, ここでは粒子の移動は隣接サイトへの移動のみを考慮し, 粒子間相互作用はサイトをまたがった相互作用の効果を考えないものとする.

ここで, 式 (2.2) を自由ハミルトニアンにとり, 場の演算子を次のように Schrödinger 方程式に従う完全系 $\{v_{i\ell}(t)\}$ で展開する [5, 6]:

$$\psi_i(t) = \sum_{\ell} v_{i\ell}(t) a_{\ell}(t), \quad (2.5)$$

$$i\dot{v}_{i\ell}(t) = \sum_j h_{0,ij}(t) v_{j\ell}(t). \quad (2.6)$$

このとき, 分布関数は $n_{\ell}(t) = \langle 0 | a_{\ell}^\dagger(t) a_{\ell}(t) | 0 \rangle$ で定義される. ただし, $\langle 0 |, | 0 \rangle$ は TFD における熱的真空である. $\{n_{\ell}(t)\}, \{v_{i\ell}(t)\}$ の初期条件にはトラップをずらす前の平衡状態 ($t < 0$) を用いる. すなわち

$$\sum_j h_{0,ij}^d u_{j\ell} = \omega_{\ell} u_{i\ell}, \quad h_{0,ij}^d = h_{0,ij}(t) \quad (t < 0), \quad (2.7)$$

$$v_{i\ell}(0) = u_{i\ell}, \quad n_{\ell}(0) = \frac{1}{e^{\beta\omega_{\ell}} - 1}, \quad (2.8)$$

とする. ここで, β は逆温度である.

3 量子輸送方程式

前章の系に非平衡 TFD を適用し自己エネルギーに自己無撞着な繰り込み条件を課すことで non-Markov 型の量子輸送方程式

$$\begin{aligned} \dot{n}_{\ell}(t) = & 4U^2 \text{Re} \sum_{m_1 m_2 m_3} \int_{-\infty}^t ds I_{\ell m_3; m_2 m_1}(t) I_{\ell m_3; m_2 m_1}^*(s) \\ & \times [n_{m_1} n_{m_2} (1 + n_{m_3}) (1 + n_{\ell}) - (1 + n_{m_1}) (1 + n_{m_2}) n_{m_3} n_{\ell}]_s, \end{aligned} \quad (3.1)$$

が導出される [2–6]. ただし, $I_{\ell_1 \ell_2; \ell_3 \ell_4}(t) \equiv \sum_i v_{i\ell_1}^*(t) v_{i\ell_2}^*(t) v_{i\ell_3}(t) v_{i\ell_4}(t)$ である. また, $[\]_s$ は $[\]$ 内の分布関数が時刻 s のものであることを意味する.

ここで, 式 (2.6), (3.1) を数値的に解き, 得られた $\{n_{\ell}(t)\}, \{v_{i\ell}(t)\}$ から気体の重心を計算した結果を図 2 に示す. ただし, 気体の重心は N を全粒子数として, $\bar{x}(t) = \sum_{i,\ell} (i - I_c) |v_{i\ell}(t)|^2 n_{\ell}(t) / N$ で計算した. $U = 0$ では分布関数は時間発展しないため, 時間発展は完全系による式 (2.6) のみとなり緩和の様子は見ら

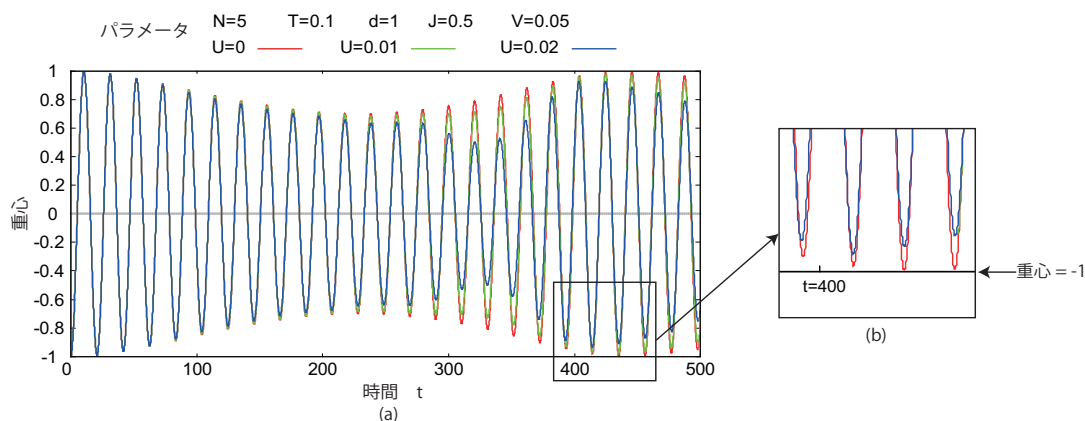


図 2 気体の重心の時間変化 (a) . 小窓はグラフの一部を拡大したものであり , 見やすさのため $U = 0$ と $U = 0.02$ のみを表示している (b) .

れない . 重心の振動にうなりが見られるが , このうなりは光学格子による効果である . 一方 , $U \neq 0$ では $U = 0$ の結果と比べると振幅が小さくなっており , 相互作用が強いほど振幅は小さくなるのがわかる . また , $t = 400$ を過ぎたところに注目すると $U \neq 0$ は $U = 0$ と異なり重心の値が初期値に戻らないことがわかり , 式 (3.1) からの寄与による熱緩和過程の様子を確認できる (図 2(b)) .

4 まとめと展望

弱い調和振動子ポテンシャルに閉じ込められた一次元光学格子中の冷却 Bose 気体系においてあらかじめ平衡状態を用意しておき , $t = 0$ で調和振動子ポテンシャルの中心をずらすことで非平衡状態にした時間依存する外場モデルを考えた . そのモデルに対する非平衡緩和過程を非平衡 TFD から導出された non-Markov 型量子輸送方程式を用いて解析した . 気体の重心の時間変化を数値計算した結果 , 重心は振動し光学格子の効果によるうなりが見られ , 特に $U \neq 0$ のときは熱緩和過程を確認できた . 今後の課題としては , エネルギーの繰り込みによる結果への影響を調べたり , 凝縮体がある場合への拡張などがある .

参考文献

- [1] H. Umezawa, *Advanced Field Theory - Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1993).
- [2] H. Chu and H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys. A* **10**, 163 (1995).
- [3] Y. Nakamura, T. Sunaga, M. Mine, M. Okumura, and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **325**, 426 (2010).
- [4] Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Ann. Phys. (N.Y.)* **326**, 1070 (2011).
- [5] Y. Nakamura (2011). PhD Thesis, Waseda University Graduate School of Advanced Science and Engineering.
- [6] 中村祐介 , 桑原幸朗 , 山中由也 , 日本物理学会 2011 年秋季大会 , 21pEE-12 (2011).
- [7] D. Jaksh, C. Burder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).

捕捉された Bose-Einstein 凝縮系における Bogoliubov de-Gennes の方法とゼロモード

高橋淳一, 中村祐介, 山中由也
早大基幹理工電子光システム

1 初めに

本研究では, 場の量子論の立場から Bose-Einstein 凝縮 (BEC) を記述する. BEC を記述する多くの場の量子論的取り扱いでは, Bogoliubov 近似が用いられている. しかし, ゼロモードを c 数と置く Bogoliubov 近似では, 特に非一様系においてはエネルギー Spektrum が離散的になり, この近似は和の一項を無視することに相当するため, 場の量子論の正準交換関係を明白に破ってしまう. すなわち, Bogoliubov 近似ではゼロモードを量子論的に扱わないため, 理論的には不完全となる. 本研究ではこれらの問題より Bogoliubov 近似を用いない定式化を行い, 問題を克服する. 非一様系においてハミルトニアンを対角化する方法は Generalized Bogoliubov の方法 (GB の方法) [1, 2] と Bogoliubov-de Gennes の方法 (BdG の方法) [3, 4] がある. GB の方法では, 適切に対称性を微小に破る項 (breaking term) をハミルトニアンに入れて, ゼロモードが微小エネルギーを持つモードとして取り扱うことが可能で, そこからゼロモードを含めた Fock 空間の真空を構成することができる. さらに breaking term のゼロ極限で対称性の回復が保証される. 一方, 通常の BdG の方法ではゼロモードは量子座標で記述され, この量子座標に対する状態 (波動関数) を, すなわち系の真空を一意的に決める処方では知られていない. また, GB の方法で行われているような, 場の量子論レベルでの対称性の議論は行われていない. しかし, GB の方法は秩序変数の位相が空間座標に依らない場合しか現時点では定式化されていないため, 凝縮体中に渦やソリトンがあるような場合には対応できない. そこで本研究では秩序変数の位相に空間座標依存性のある場合も扱える BdG の方法において, GB の方法の場合のように, 真空の定義や対称性の保持が可能であることを調べる.

2 モデル

冷却中性原子系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{x} \left[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})(K + V - \mu)\hat{\psi}(\mathbf{x}) + \frac{g}{2}\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x})\hat{\psi}(\mathbf{x}) \right]$$

ここで, $x = (\mathbf{x}, t)$, $K = -\frac{1}{2m}\nabla^2$, V は外場ポテンシャル, m は粒子の質量, μ は化学ポテンシャル, g は相互作用定数である.

系の対称性が自発的に破れた状況, つまり凝縮体が存在する場合, 場の真空期待値は $\langle \Omega | \hat{\psi}(\mathbf{x}) | \Omega \rangle = \xi(\mathbf{x})$ となるので,

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) + \hat{\varphi}(\mathbf{x})$$

と分解できる. ただし, $\langle 0 | \hat{\varphi}(\mathbf{x}) | 0 \rangle = 0$ であり, 秩序変数 $\xi(\mathbf{x})$ は任意の複素関数で全粒子数 N_c との間に $N_c = \int d^3\mathbf{x} |\xi(\mathbf{x})|^2$ という関係がある. なお, 本研究では秩序変数は時間に依存しないものを想定した. この場の分割を用いてハミルトニアンを書き換える, その際, 場の二次以下の項を非摂動項 \hat{H}_0 とし, 三次以上の項を摂動項 \hat{H}_I とする.

3 Bogoliubov de-Gennes の方法

この方法は, BdG 方程式の完全系を用いて非摂動ハミルトニアンを対角化する方法である. BdG 方程式は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ -\mathcal{M}^* & -\mathcal{L} \end{pmatrix} \mathbf{y}_n(\mathbf{x}) = \omega_n \mathbf{y}_n(\mathbf{x})$$

で与えられる. ただし, $\mathcal{L} = K + V - \mu + 2g|\xi(\mathbf{x})|^2$, $\mathcal{M} = g\xi^2(\mathbf{x})$ である. BdG 方程式の固有値は一般に複素数となるが, ここでは実数の範囲内で議論する. また, BdG 方程式にはゼロモードと呼ばれる零固有値を持つ解が存在する. これらの解は不定計量内積 $(s, t) \equiv \int d^3x s^\dagger(\mathbf{x}) \sigma_3 t(\mathbf{x})$ の下で直交性を示す. しかし, この不定計量内積の下ではゼロモードが全てのモードと直交してしまうため BdG 方程式の固有関数だけでは完全系を張れない. そこで, $T\mathbf{y}_{-1}(\mathbf{x}) = I\mathbf{y}_0(\mathbf{x})$ を満たすモード \mathbf{y}_{-1} を導入する. このモードは共役モードと呼ばれ, ゼロモードとは直交せず, 他のモードとは直交する性質を持つ. なお, I はゼロモードと共役モード間の規格化定数である [3].

BdG 方程式の固有関数系に共役モードを加えた関数系を用いて非摂動ハミルトニアンを対角化する. 場が次のように展開できるので

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \\ \hat{\varphi}^\dagger(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \sum_{n=1} \{ \hat{a}_n \mathbf{y}_n(\mathbf{x}) + \hat{a}_n^\dagger \sigma_1 \mathbf{y}_n^*(\mathbf{x}) \} - i\hat{Q}\mathbf{y}_0(\mathbf{x}) + \hat{P}\mathbf{y}_{-1}(\mathbf{x})$$

非摂動ハミルトニアンは

$$\hat{H}_0 = \frac{I\hat{P}^2}{2} + \sum_{n=1} \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n$$

となる. ここで, この非摂動ハミルトニアンのゼロモードセクターは量子座標 \hat{Q} の自由粒子型波動関数 $\psi(Q, t)$ で記述されることになるが, $\psi(Q, t)$ を一意的に決める処方が知られていない. つまり, ゼロモードセクターを含んだ真空の定義は自明ではない.

4 結果

この問題を解決するため Breaking term を導入する [1]

$$\hat{H}_\varepsilon(t) = \varepsilon \bar{\varepsilon} \int d\mathbf{x} \left[\xi^*(\mathbf{x}) \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) + \xi(\mathbf{x}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \right]$$

ここで ε は微小な無次元量, $\bar{\varepsilon}$ はこの系の典型的なエネルギースケールである. 対称性が自発的に破れた理論を構成する際, このような項を元のハミルトニアンに加え, ハミルトニアンの対称性を破ることにより無限に縮退した真空の中から一つの状態を選び議論をする. そして計算の最後で $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることで元々のハミルトニアンの持つ対称性を回復させる. 詳細は省くが, breaking term を導入するとハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H}_0^\varepsilon &= \frac{1}{2}(\hat{\Phi}, T_\varepsilon \hat{\Phi}) \\ &= \frac{\tilde{\omega}_0^\varepsilon \tilde{D}}{2} \hat{Q}_\varepsilon^2 + \frac{\tilde{\omega}_0^\varepsilon}{2\tilde{D}} \hat{P}_\varepsilon^2 + \sum_{n=1} \omega_n^\varepsilon \hat{a}_n^{\varepsilon\dagger} \hat{a}_n^\varepsilon + (\text{c-number}) \end{aligned}$$

と調和振動子型となる. $\tilde{\omega}_0^\varepsilon, \tilde{D}$ は $O(\varepsilon^{1/2})$ の定数である.

従って, 量子力学の調和振動子と同様に $\hat{P}_\varepsilon, \hat{Q}_\varepsilon$ に線形変換

$$\hat{a}_0^\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2\tilde{D}}} \hat{P}_\varepsilon - i\sqrt{\frac{\tilde{D}}{2}} \hat{Q}_\varepsilon$$

を施すことにより, ゼロモード部分に消滅演算子を定義することができる. そこで, ゼロモードの真空はその消滅演算子で消去される状態 $|0\rangle_\varepsilon$ と定義する.

このように定義した真空が次の形の Ward-高橋恒等式 (WT 恒等式)

$$|\xi(\mathbf{x})|^2 = \frac{\varepsilon\bar{\varepsilon}}{2} \int d^4x' \left[-\xi^*(\mathbf{x})\xi^*(\mathbf{x}')\Delta^{12}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t-t') + \xi(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}')\Delta^{21}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t-t') \right. \\ \left. - \xi^*(\mathbf{x})\xi(\mathbf{x}')\Delta^{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t-t') + \xi(\mathbf{x})\xi^*(\mathbf{x}')\Delta^{22}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t-t') \right]$$

を満たしているかどうか調べる. ここで, Δ^{ij} は

$$i\Delta^{ij}(x, x') = {}_\varepsilon\langle 0 | T[\varphi^i(x)\bar{\varphi}^j(x')] | 0 \rangle_\varepsilon$$

$\varphi^i = (\hat{\varphi} \ \hat{\varphi}^\dagger)^t$, $\bar{\varphi}^j = (\hat{\varphi}^\dagger \ -\hat{\varphi})$ である. WT 恒等式は Heisenberg 方程式, 正準交換関係から近似なしで導かれるものである. また, WT 恒等式から南部-Goldstone 定理 (NG 定理) の成立も保証される. そこで, 本研究ではこの真空が WT 恒等式を満たすことを調べた. 証明の詳細は省くが, ここで定義した真空は WT 恒等式を満たすものであることが示される. また, この証明にはゼロモード項 $\hat{P}_\varepsilon, \hat{Q}_\varepsilon$ の存在が本質的である.

また, 上の議論を平衡 Thermo Field Dynamics [5] を用いて有限温度の場合に拡張して調べた. 結果として, 有限温度非一様系においても, WT 恒等式の成立, 従って NG 定理の成立を示すことができた. この証明にも量子化されたゼロモード項 $\hat{P}_\varepsilon, \hat{Q}_\varepsilon$ の存在が本質的である. 結論として, 有限温度場の量子論においても, 量子化されたゼロモードの存在が, 正当な場の量子論のためには不可欠である.

参考文献

- [1] M. Okumura and Y. Yamanaka, Phys. Rev. A **68**, 013609 (2003).
- [2] M. Okumura and Y. Yamanaka, Prog. Theor. Phys. **111**, 199 (2004).
- [3] M. Lewenstein and L. You, Phys. Rev. Lett. **77**, 3489 (1996).
- [4] H. Matsumoto and S. Sakamoto, Prog. Theor. Phys. **107**, 679 (2002).
- [5] H. Umezawa, *Advanced Field Theory — Micro, Macro, and Thermal Physics* (AIP, New York, 1993).

非平衡の場の理論を用いた粒子数期待値に対する 相互作用からの寄与の研究

広島大学大学院理学研究科 堀田 龍一

E-Mail:hottarc@theo.phys.sci.hiroshima-u.ac.jp

素粒子物理現象における粒子数生成過程のより深い理解を得るために、C P非対称、粒子数非保存なモデルを設定し、解析を行った。

2particle-irreducible closed-time-path formalism を用いて current divergence の摂動的な計算を行い、適当な条件の下で相互作用からもたらされる粒子数期待値の変化率が有限の時刻 t に対して、どの様に時間発展するのかを数値計算によって求めた。

本研究は広島大の両角卓也氏、トムスク教育大の高田浩行氏との共同研究である。

I. 模型

我々は、図 1 の様に重い中性スカラー N が軽い粒子のペアに崩壊する模型を考える。この模型では上段と下段の過程の amplitude の差が粒子数を作り出す。ここで A 、 A^* 、 A_ϕ は結合定数で A と A^* は粒子数保存を破り、 A_ϕ は粒子数を保存する。 N は中性スカラー粒子で粒子数 0 を持っていて、 ϕ 、 ϕ^* は複素スカラー粒子でそれぞれ粒子数 1、 -1 を持つ。 B^2 は粒子数保存を破る質量項。図 1 の過程を記述するラグランジアンは以下の様になる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu N \partial^\mu N - \frac{1}{2} m_N^2 N^2 + |\partial_\mu \phi|^2 - m_\phi^2 |\phi|^2 + B^2 \phi^2 + B^{*2} \phi^{*2} + AN\phi^2 + A^* N \phi^{*2} + A_\phi N \phi \phi^*. \quad (1)$$

B^2 と A の位相差で CP symmetry が破れており、 CP violation phase は、

$$\phi_A = \arg\left[\frac{A}{B^2}\right], \quad (2)$$

と書く事が出来る。

これを実場形式に以下の実スカラー場 ϕ_1 、 ϕ_2 を使って書き直す。

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

そうすると、ラグランジアンは以下の様に書き直す事が出来る。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu N \partial^\mu N - \frac{1}{2} m_N^2 N^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i^2 \phi_i^2 + \phi_i A_{ij} \phi_j, \quad (4)$$

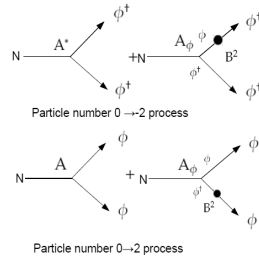


図1 粒子数を生成する過程

m_1, m_2 は実スカラー場の質量で、以下の様に書く事が出来る。

$$m_1 = (m_\phi^2 - B^2)^{1/2}, m_2 = (m_\phi^2 + B^2)^{1/2}. \quad (5)$$

A_{ij} は実スカラー場と N との結合定数で以下の通り。

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} |A| \cos[\phi_A] + \frac{A_\phi}{2} & -|A| \sin[\phi_A] \\ -|A| \sin[\phi_A] & |A| \cos[\phi_A] - \frac{A_\phi}{2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

II.2PI CTP formalism を用いた計算と数値計算の結果

U(1) current は keldysh Green 関数 [1] を用いて以下の様に書く事が出来る。

$$\langle j_\mu(X) \rangle = [\partial_{x\mu} G_{12}^{12}(x, y) - \partial_{y\mu} G_{12}^{12}(x, y)]|_{x=y=X}. \quad (7)$$

この current divergence は

$$\partial_\mu \langle j_\mu(X) \rangle = [\square_{x\mu} G_{12}^{12}(x, y) - \square_{y\mu} G_{12}^{12}(x, y)]|_{x=y=X}. \quad (8)$$

ここで $\langle \rangle$ は分布関数 $\rho(0) = \exp[\beta(H_0 - \mu N)]$ をかけて $Trace$ を取ったものを表す。この計算においては、相互作用からの寄与に注目するため、化学ポテンシャル μ は 0 と置く。

ここで非平衡状態を扱うために E.Calzetta and B.L.Hu[2] によって導入された 2PI-CTP formalism を使って Green 関数が従う方程式を得る。現在の我々の模型にこの手法を導入すると、2PI effective action は以下の様になった。

$$\Gamma = \frac{1}{2} \log \det(G_N)^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 [\log \det(G_{ij})^{-1}] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial N^a(x) \partial N^b(y)} G_N^{ab}(x, y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \phi_i^a(x) \partial \phi_j^b(y)} G_{ij}^{ab}(x, y) + \Gamma_2 + const, \quad (9)$$

S は A_{ij} が関係しない部分の action, Γ_2 は A_{ij} が関係する相互作用を表す、ここで我々は以下の様な 2PI diagram だけを考え、それより高次の寄与は無視した。

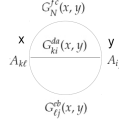
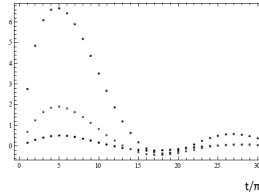


図2 計算に含める 2PI diagram

図3 有限な時刻 t における decay process から current divergence への寄与の時間発展

それにより、2つの Schwinger-Dyson 方程式を得る。それらと (8) を使う事で、以下の様な Current divergence を求める方程式を得る。

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle j^\mu(X) \rangle = & 2B^2 G_{12}^{12}(X, X) - 8A_{1j}A_{2j} \text{Im} \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_0^{X^0} G_{jj}^{12}(z^0, X^0, \mathbf{p}) \right. \\ & \left. \times G_N^{12}(z^0, X^0, -\mathbf{p} - \mathbf{k}) \left(G_{22}^{12}(z^0, X^0, \mathbf{k}) - G_{11}^{12}(z^0, X^0, \mathbf{k}) \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

我々は宇宙膨張の効果を取り入れていないのでこの方程式を解くと 0 になる。しかし Decay process のみに注目して、どの様に粒子数が生成されるかを見ることは出来る。それを求めるにあたって我々は、パラメータ B^2 は非常に小さいため最低次の効果のみを取り出し、時間積分のあと $X^0 \rightarrow \infty$ $B^2 \rightarrow 0$ の極限を取る、しかし $t = B^2 X^0$ は有限であるという条件を置く。そうすると、有限な時刻 t に対する decay process から current divergence への寄与は図 3 で表せ、正負で振動し、 B が増える (CP の破れが大きくなる) と Current divergence への寄与が大きくなることがわかる。

参考文献

- [1] L. V. Keldysh, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 1515 (1964) [Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965)].
- [2] E. Calzetta and B. L. Hu, Phys. Rev. D **37**, 2878 (1988).

量子渦の非可換統計

– $SO(N)$ 対称性を持つマヨラナフェルミオン –

広野雄士^A、安井繁宏^B、板倉数記^B、新田宗土^C
東京大/理研^A、KEK^B、慶応大^C

1. はじめに

ある種の超伝導や超流動における量子渦は、内部にマヨラナフェルミオンのようなゼロエネルギー束縛状態を持っている。このようなゼロエネルギー状態があると、基底状態に縮退が生じ、非可換エニオンと呼ばれる特異な統計性を持つ粒子が現れることが知られている。3+1次元では、統計性で粒子を分類するとボソン若しくはフェルミオンの二つの可能性しかない。粒子はローレンツ群の規約表現に属することから整数または半整数のスピンをもち、さらにスピン統計性の定理により整数（半整数）のスピンをもち、ボソン（フェルミオン）であることが帰結するからである。しかし、2+1次元ではこの限りではない。空間が3次元の世界では、二つの同種粒子を2回交換する操作が、一度も交換をしないという操作と等価であったが、空間次元が2のときは等価ではないからである。

2+1次元では、ボソンとフェルミオンに加えて、同種粒子の交換に際して任意の位相がつく（可換）エニオンの存在も理論的に可能である。そして、複数の縮退した状態を持ち、それらの状態が交換操作の下で行列によって変換を受けるのが非可換エニオンである。変換行列は一般には非可換なので、渦の交換順序に依存して終状態が変わる、ということが有り得る。これは可換エニオンや通常のボソン・フェルミオンでは起こり得ない、特異な性質である。このように非可換エニオンは理論的に興味深いが、応用面でもトポロジカルな量子計算をするためのプラットフォームとなることがわかっており、理論と実験の両面において現在研究が盛んである [1]。

この非可換エニオンを実現する物理系の候補として、マヨラナフェルミオンを内部に持つ超伝導渦がある。この系が非可換統計を示すことは Ivanov [2] によって2002年に初めて指摘された。一方で、カラー超伝導や超対称QCDに現れる量子渦内には複数のマヨラナフェルミオンが束縛される場合がある。本研究の目的は、複数個、特に奇数個のマヨラナフェルミオンを束縛した量子渦の量子統計の性質を明らかにすることである。カラー超伝導における量子渦は、 $N = 3$ の実現例となる。我々は、奇数個のマヨラナフェルミオンを内部に持つ量子渦の示す非可換統計性が、交換する渦の数や N の値に依存しない、ある普遍的な構造を持つことを示した。本稿ではその主な結果を記す。導出や詳細については論文 [3] を参照のこと。

2. 超伝導量子渦と非可換統計

$2m$ 個の量子渦が z 軸に平行に延びている状況を考える。系は z 方向に並進対称であるとし、 k 番目と $k+1$ 番目の渦を反時計周りに交換する操作を T_k と呼ぶことにする。任意の渦同士の交換は、隣り合う渦同士の交換 T_k の組み合わせによって実現することができる。 z 方向の対称性から系は2次元空間と見なすことができる。どちら周りに交換するかが区別される、すなわち $T_k \neq (T_k)^{-1}$ であることに注意。 k 番目の渦に束縛されたマヨラナフェルミオンを演算子 γ_k^a とする($k = 1 \sim 2m, a = 1 \sim N$)。本研究では N 個のフェルミオンが一つの渦内にある場合を考えるのだが、それを表すのが添字 a である。これらのフェルミオン演算子 γ_k^a はクリフォード代数 $\{\gamma_k^a, \gamma_l^b\} = 2\delta^{ab}\delta_{kl}$ を満たしており、さらに渦

の交換操作 T_k の下で

$$T_k : \begin{cases} \gamma_k^a & \rightarrow \gamma_{k+1}^a \\ \gamma_{k+1}^a & \rightarrow -\gamma_k^a \end{cases}, \quad \text{for all } a, \quad (1)$$

のように変換する。負符号がつくのは、渦の存在下でフェルミオンの波動関数が2価になることに由来する。フェルミオン演算子を式(1)のように変換する演算子を、次のように書くことができる。

$$\tau_k^{[N]} \equiv \prod_{a=1}^N \tau_k^a, \quad (2)$$

ここで τ_k^a は次式で定義されている。

$$\tau_k^a \equiv \exp\left(\frac{\pi}{4} \gamma_{k+1}^a \gamma_k^a\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \gamma_{k+1}^a \gamma_k^a). \quad (3)$$

この交換演算子 $\tau_k^{[N]}$ 同士が、 $k \neq \ell$ の場合に非可換になり得ることを見るためには、明示的にヒルベルト空間を構成し、交換演算子を行列表示してみればよい。ヒルベルト空間を同定するのに、二つの渦にあるマヨラナフェルミオンを次のように組み合わせるディラック演算子を構成すると便利である。

$$\Psi_K^a \equiv \frac{1}{2} (\gamma_{2K-1}^a + i \gamma_{2K}^a). \quad (4)$$

このように定義したディラック演算子は通常のディラックフェルミオンの反交換関係を満たす。したがって、

$$\Psi_K^a |0\rangle = 0 \quad \text{for all } a \text{ and } K, \quad (5)$$

によって”真空”状態 $|0\rangle$ を定義し、 $|0\rangle$ に対して生成演算子を作用するという通常の手続きによりヒルベルト空間の基底を作ることが出来る。

3. 交換演算子の分解

任意の N (奇数) の場合において、式(2)で書かれる交換演算子は、次のように二つの演算子の積に分解出来ることを示すことが出来る。

$$\tau_k^{[N]} = \sigma_k^{[N]} h_k^{[N]}. \quad (6)$$

ここで $\sigma_k^{[N]}$ と $h_k^{[N]}$ は次のように定義されている。

$$\sigma_k^{[N]} \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{N-1} \left(1 + \Gamma_k^{(2)} + \Gamma_k^{(4)} + \cdots + \Gamma_k^{(N-1)}\right), \quad (7)$$

$$h_k^{[N]} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \Gamma_k^{(N)}\right). \quad (8)$$

上記では、表記の簡略化のために次式で定義される記号 $\Gamma_k^{(n)}$ を用いた。

$$\Gamma_k^{(n)} \equiv \frac{1}{(n!)^2} e^{\frac{\pi}{2} i(n-1)} \epsilon^{a_1 \cdots a_N} \epsilon^{b_1 \cdots b_N} \delta_{b_{n+1}}^{a_{n+1}} \cdots \delta_{b_N}^{a_N} \gamma_{k+1}^{a_1} \cdots \gamma_{k+1}^{a_n} \gamma_k^{b_1} \cdots \gamma_k^{b_n}. \quad (9)$$

$\epsilon^{a_1 \cdots a_N}$ は N 階の完全反対称テンソルである。

交換演算子を分解して現れる二つの演算子 $h_k^{[N]}$ と $\sigma_k^{[N]}$ はそれぞれ意味を持っている。演算子 $h_k^{[N]}$ は、Ivanov によって議論された、一つの渦内に束縛されるフェルミオン数が 1 個の場合の演算子と等価であることを示すことが出来る。一方、 $\sigma_k^{[N]}$ は対称群の生成元である。すなわち、対称群の生成元が満たすべき以下の関係式、

$$(\sigma_k^{[N]})^2 = 1, \quad (10)$$

$$(\sigma_k^{[N]} \sigma_l^{[N]})^3 = 1 \quad \text{for } |k - l| = 1, \quad (11)$$

$$(\sigma_k^{[N]} \sigma_l^{[N]})^2 = 1 \quad \text{for } |k - l| > 1, \quad (12)$$

を $\sigma_k^{[N]}$ が満足することを示せる。

さらに、交換演算子を行列表示した場合に、ある基底を取るとその表現行列が、渦上のフェルミオンが一個の場合の交換演算子の表現行列と、対称群の生成子の表現行列とのテンソル積で与えられることを示すことが出来る。

参考文献

- [1] レビューとして、C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **80**, 1083 (2008) [arXiv:0707.1889 [cond-mat.str-el]].
- [2] D. A. Ivanov, Phys. Rev. Lett. **86**, 268 (2001) [arXiv:cond-mat/0005069 [cond-mat.supr-con]].
- [3] Y. Hirono, S. Yasui, K. Itakura and M. Nitta, Phys. Rev. B **86**, 014508 (2012) [arXiv:1203.0173 [cond-mat.supr-con]].

重イオン衝突に於ける相対論的“揺動”流体 ～ 因果律と記憶効果と有色雑音～

村瀬功一¹、平野哲文²

東京大学 大学院理学系研究科¹、上智大学 理工学部²

1 はじめに

クォークとグルーオンから成る系を数兆度の高温に熱すると、クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) ができると考えられている。この QGP は高エネルギー重イオン衝突によって生成され [1]、その輸送的性質が調べられている。相対論的重イオン衝突加速器 (RHIC) では粒子分布の二次の異方性 v_2 において完全流体模型が予想する値に近い値が得られ、強結合の QGP が生成されているという描像が確立した [2, 3, 4]。

最近では、RHIC や近年動き出した大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) で、粒子の方位角分布の高次調和成分 v_n ($n > 2$) が測られ、事象毎の揺らぎを考えなければ説明の付かない値が得られている。原子核同士の衝突時に初期条件に入る、核子分布に由来する揺らぎによって、 v_n の振る舞いを説明できる事が事象毎のシミュレーションによって分かって来ており、最近はこの初期の揺らぎと終状態の v_n について活発に研究されている。例えば、これらの v_n の値から初期条件の模型と QGP の比粘性係数 η/s を制限しようという試みが為されている。

しかし、事象毎の揺らぎは、初期条件の核子分布だけでなく、QGP の時空発展中に生じる熱揺らぎである流体力学的揺らぎ (hydrodynamic fluctuation[5]) などによっても引き起こされる [6]。流体力学的揺らぎは、初期の揺らぎと同様に測定量 v_n に影響を与える可能性があり、定量的に η/s などの輸送的性質を決定する為には、この流体力学的揺らぎの効果も定量的に評価する必要があると考えている。現状の相対論的流体模型に流体力学的揺らぎを取り入れる為に、本研究では因果律を満たす二次 (または高次) の相対論的散逸流体に対して、二次 (高次) の相対論的揺動流体力学 (relativistic fluctuating hydrodynamics) を構築する。

2 記憶関数と揺動散逸関係

流体力学的揺らぎは、流体の散逸流場に対して空間の各点で独立に発生する熱揺らぎである。状態方程式や構成方程式で記述される散逸流場の値は平均的な成分に過ぎない。流体力学のような有限の長さスケールを持つ系においては、各事象毎に熱揺らぎがこの平均からのずれとして発生する。流体力学的揺らぎの強度スペクトルは、ブラウン粒子の揺動力の時と同様に、揺動散逸関係によって構成方程式に含まれる散逸と関係付けられる。

数値計算では、試行毎 (事象毎) に異なる確率過程として流体力学的揺らぎを乱数で決定して計算を行う。即ち、流体方程式はもはや決定論的な偏微分方程式ではなく、Langevin 方程式のような確率微分方程式となる。

構成方程式に対応する流体力学的揺らぎの強度を調べる為に、先ず構成方程式を散逸流に対して陽な形で書き表す。

$$\Pi = - \int_{x^0 > x'^0} d^4x' G_{\Pi}(x - x') \theta(x') + \delta\Pi, \quad (1)$$

$$\pi^{\mu\nu} = \int_{x^0 > x'^0} d^4x' G_{\pi}(x - x')^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_{\langle\alpha} u_{\beta\rangle}|_{x'}) + \delta\pi^{\mu\nu}, \quad (2)$$

$$\nu_i^\mu = - \int_{x^0 > x'^0} d^4 x' G_{ij}(x-x')^{\mu\alpha} (T \nabla_\alpha \frac{\mu_j}{T} |_{x'}) + \delta \nu_i^\mu. \quad (3)$$

但し、 $u^\mu(x)$ は Landau フレームでの四元速度で、 $T(x)$ および $\mu_i(x)$ は各点 x の局所平衡系における温度と保存電荷 i の化学ポテンシャルである。また、散逸流 $\Pi(x)$, $\pi^{\mu\nu}(x)$, $\nu_i^\mu(x)$ はそれぞれ、体粘性による圧力の補正、ずれ粘性による偏差応力、保存電荷 i の拡散である。構成方程式は平衡近くでは、この様に現在および過去の熱力学的力と記憶関数 $G(x-x')$ の畳み込みである平均的な成分と、流体力学的揺らぎ $\delta\Pi(x)$, $\delta\pi^{\mu\nu}(x)$, $\delta\nu_i^\mu(x)$ の和で書かれる。

流体力学的揺らぎの強度は揺動散逸関係によって以下の形に決定される。

$$\langle \delta\Pi(x) \delta\Pi(x') \rangle = TG_\Pi(x-x'), \quad (4)$$

$$\langle \delta\pi^{\mu\nu}(x) \delta\pi^{\alpha\beta}(x') \rangle = TG_\pi(x-x')^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (5)$$

$$\langle \delta\nu_i^\mu(x) \delta\nu_j^\alpha(x') \rangle = TG_{ij}(x-x')^{\mu\alpha}. \quad (6)$$

ここで、記憶関数 $G(x)$ は時刻について偶関数となる様に $x^0 < 0$ の領域に拡張した物とする。

一次の散逸流体の場合は、 $G_\Pi(x) = 2\zeta\delta^{(4)}(x)$, $G_\pi(x)^{\mu\nu\alpha\beta} = 4\eta\delta^{(4)}(x)\Delta^{\mu\nu\alpha\beta}$, $G_{ij}(x)^{\mu\alpha} = -2\kappa_{ij}\delta^{(4)}(x)\Delta^{\alpha\beta}$ に対応する。但し、 $\Delta^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - u^\mu u^\nu$, $\Delta^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Delta^{\mu\alpha}\Delta^{\nu\beta} + \Delta^{\mu\beta}\Delta^{\nu\alpha}) - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta^{\alpha\beta}$ は各散逸流の空間への射影子である。この時、記憶関数は時間について局所的であり、構成方程式は現在の熱力学的力で書かれる。従って、流体力学的揺らぎの時間相関は同時刻のみで非零であり、即ち流体力学的揺らぎは白色雑音 (white noise) となる。

3 二次の散逸流体の場合

しかし、一次の散逸流体は長波長で因果律を破る解を持つ事が知られている [7] 為、相対論的流体模型においては好ましくない。因果律を守る為には、緩和時間の効果を持つ二次または高次の散逸流体が必要である。

ここでは、因果律を守る最も簡単な二次の構成方程式として、以下の物を考える。

$$\tau_\Pi D\Pi + \Pi = -\zeta\theta, \quad (7)$$

$$\tau_\pi \Delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} D\pi^{\alpha\beta} + \pi^{\mu\nu} = 2\eta\partial^{\langle\mu} u^{\nu\rangle}, \quad (8)$$

$$\tau_{ij} \Delta^\mu{}_\alpha D\nu_j^\alpha + \nu_i^\mu = \kappa_{ij} T \nabla^\mu \frac{\mu_j}{T}. \quad (9)$$

但し、 $D = u^\alpha \partial_\alpha$ は物質と共に動く系での時間微分である。この構成方程式を陽な形に解くと記憶関数は以下の様になる。

$$G_\Pi(x-x') = \delta^{(3)}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}') \left| \frac{\partial \sigma^\mu}{\partial x^\nu} \right| \Theta(\tau - \tau') \cdot \frac{1}{\tau_\Pi} e^{-\frac{\tau - \tau'}{\tau_\Pi}} \zeta, \quad (10)$$

$$G_\pi(x-x')^{\mu\nu\alpha\beta} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}') \left| \frac{\partial \sigma^\mu}{\partial x^\nu} \right| \Theta(\tau - \tau') \cdot \frac{1}{\tau_\pi} e^{-\frac{\tau - \tau'}{\tau_\pi}} \cdot 2\eta \Delta(\tau; \tau')^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (11)$$

$$G_{ij}(x-x')^{\mu\alpha} = \delta^{(3)}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}') \left| \frac{\partial \sigma^\mu}{\partial x^\nu} \right| \Theta(\tau - \tau') \cdot \tau_{ij}^{-1} [T e^{-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' \tau_{jk}^{-1} |_{\tau''}}]_{jk} \kappa_{kl} \Delta(\tau; \tau')^{\mu\alpha}. \quad (12)$$

但し、 τ と σ は物質と共に動く座標系での時刻と座標であり、

$$\Delta(\tau_f; \tau_i)^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} := \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta(\tau_f)^{\mu\nu}{}_{\alpha_0 \beta_0} \left[\prod_{k=0}^{N-1} \Delta(\tau_f + \frac{\tau_i - \tau_f}{N} k)^{\alpha_k \beta_k}{}_{\alpha_{k+1} \beta_{k+1}} \right] \Delta(\tau_i)^{\alpha_N \beta_N}, \quad (13)$$

$$\Delta(\tau_f; \tau_i)^\mu{}_\alpha := \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta(\tau_f)^\mu{}_{\alpha_0} \left[\prod_{k=0}^{N-1} \Delta(\tau_f + \frac{\tau_i - \tau_f}{N} k)^{\alpha_k}{}_{\alpha_{k+1}} \right] \Delta(\tau_i)^\alpha{}_\alpha \quad (14)$$

は、 τ' から τ の各時刻で散逸流の空間に射影するテンソルとなっている。また $T e^{-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' \tau_{jk}^{-1} |_{\tau''}}$ は時間順序積による指数関数である。

時間相関に着目すると何れも指数関数的な減少 $\frac{1}{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{\tau}}$ の形になっている。一般に因果律を保持する高次の散逸流体の場合、この様に記憶関数 $G(x)$ は異なる時間に対して非零の値を持つ、即ち記憶効果が存在する。これに伴って、流体力学的揺らぎも異なる時刻間について非零の相関 $TG(x)$ を持ち、流体力学的揺らぎは有色雑音 (colored noise) となる。

4 まとめと展望

相対論的な系で散逸とそれに対応する流体力学的揺らぎを取り扱う場合、因果律を保持する為に緩和時間を考慮に入れなければならない。この時、構成方程式は現在及び過去の熱力学的力に対する応答で書かれ、その応答関数は記憶関数と呼ばれる。流体力学的揺らぎの強度は揺動散逸関係によってこの記憶関数を用いて表され、一般に異なる時刻の間で流体力学的揺らぎに相関がある事が分かる。つまり、流体力学的揺らぎは白色雑音ではなく有色雑音として計算に取り入れる必要がある。

また、QGP の時空発展の途中に現れる熱揺らぎである流体力学的揺らぎは、初期の揺らぎと同様に事象毎の計算で測定量 v_n に影響を与えうる。定量的に η/s などの輸送的性質を決定する際には、この流体力学的揺らぎの効果を考慮に入れて事象毎の計算をし、その影響の大きさを見積もる必要がある。今後は、簡単な二次の構成方程式の下で、相対論的流体模型の数値計算の枠組に散逸と流体力学的揺らぎを実装し、実際に事象毎の計算によって流体力学的揺らぎの v_n に対する影響を調べる。

参考文献

- [1] I. Arsene *et al.* [BRAHMS Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 1 (2005); B. B. Back *et al.* [PHOBOS Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 28 (2005); J. Adams *et al.* [STAR Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 102 (2005); K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration], Nucl. Phys. A **757**, 184 (2005).
- [2] P. F. Kolb, P. Huovinen, U. W. Heinz and H. Heiselberg, Phys. Lett. B **500**, 232 (2001); P. Huovinen, P. F. Kolb, U. W. Heinz, P. V. Ruuskanen and S. A. Voloshin, Phys. Lett. B **503**, 58 (2001); P. F. Kolb, U. W. Heinz, P. Huovinen, K. J. Eskola and K. Tuominen, Nucl. Phys. A **696**, 197 (2001).
- [3] D. Teaney, J. Lauret and E. V. Shuryak, Phys. Rev. Lett. **86**, 4783 (2001); nuclth/0110037.
- [4] T. Hirano, Phys. Rev. C **65**, 011901 (2002); T. Hirano and K. Tsuda, Phys. Rev. C **66**, 054905 (2002).
- [5] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, New York, 1959).
- [6] J. I. Kapusta, B. Muller and M. Stephanov, Phys. Rev. C **85**, 054906 (2012) [arXiv:1112.6405 [nucl-th]]; Acta Phys. Polon. B **43**, 781 (2012) [arXiv:1201.3405 [nucl-th]].
- [7] W. A. Hiscock and L. Lindblom, Phys. Rev. D **31**, 725 (1985).

PNJL 模型によるメソングスの状態方程式

山崎加奈子, 松井哲男
東大駒場

1 導入

QCD 相図を解明することは、QCD の重要な課題の一つである。相図の理解には、カイラル相転移と非閉じ込め相転移が相図上のどこで起こるかを調べることが不可欠である。そのための第一歩として、本研究では有効模型を用いゼロ密度で状態方程式の計算を行った。我々は、有効模型を用いてこれらの相転移を計算した。この二つの相転移を取り扱うことの出来る有効模型として、Nambu-Jona-Lasinio model with Polyakov loop (PNJL 模型)[1] を用いた。PNJL 模型は、カイラル相転移を特徴づけるカイラル凝縮と非閉じ込め相転移を特徴づける Polyakov loop の期待値を持つことで、これら二つの相転移を同時に計算することが出来る。しかし、もし我々が平均場近似を行った場合、低温相でメソンやバリオンを取り扱うことが出来ない。そこで本研究ではメソン励起を取り込んだ計算を行った。

2 PNJL 模型

修正された NJL 模型の分配関数は以下のように定義される。

$$Z(T, A_4) = \int [d\bar{q}][dq] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{NJL}(q, \bar{q}, A_4) \right] \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_{NJL}(q, \bar{q}, A_4) = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_0)q + G[(\bar{q}q)^2 + (i\bar{q}\gamma_5\tau q)^2] \quad (2)$$

この Lagrangian は、NJL 模型 [2, 3] の Lagrangian とは異なりゲージ場の第 4 成分を含む。この模型ではグルーオンはダイナミカルな自由度としてではなく、単なる外場として扱われる。この分配関数は、クォーク場の 4 次の項を含むため、このままでは積分を実行することが出来ない。そこで、補助場としてボソン場 ϕ をガウス積分の形で導入する。積分測度を適当に選ぶことで、クォーク場の 4 次の項を打ち消すことができ、フェルミオン積分の実行が可能となる。 q, \bar{q} がグラスマン数であることに注意し、フェルミオン場についての積分を実行すると、有効作用 I が補助場として導入したメソン場 ϕ とゲージ場の第 4 成分の関数として得られる。メソン励起からの寄与を計算するために、有効作用をボソン場の揺らぎの二次まで展開し、揺らぎについて積分することで熱力学ポテンシャルを得る。

$$\Omega(T, A_4) = T \left(I_0 + \frac{1}{2} \text{Tr}_M \ln \frac{\delta^2 I}{\delta\phi_i \delta\phi_j} \right) \quad (3)$$

第一項目は平均場からの寄与、第二項目はメソン励起からの寄与である。

3 状態方程式

3.1 平均場近似

圧力への平均場近似からの寄与は、式 (3) の第一項目から求まる。 I_0 はゲージ場の関数だが、ゲージ場について統計平均を取ることで、Polyakov loop の期待値で書き直すことができ、温度と Polyakov loop の関数として状態方程式が得られる。

$$p_{MF}(T, \Phi) = p_{MF}^0(M_0) + 4 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{3E_p} f_{\Phi}(E_p) - \mathcal{U}(T, \phi) \quad (4)$$

M_0 は構成クォーク質量、 E_p はクォークのエネルギーで $E_p = \sqrt{p^2 + M_0^2}$ 、 f_{Φ} は Polyakov loop の期待値 Φ の関数として書かれたフェルミ分布関数である。第一項目は真空の圧力、第二項目は熱励起からの寄与、第三項目の \mathcal{U} は、グルーオンのダイナミクスを表すために導入された有効ポテンシャルで、各パラメーターは $T = 0$ で $\Phi = 0$ を満たし、高温でグルーオンの圧力を再現するように選ばれる。

3.2 メソン励起

メソン励起の圧力への寄与は、式 (3) の二項目から計算される。

$$p_M(T, A_4) = -\frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ \ln \left[\beta^2 \left(\frac{1}{2G} - \Pi_{\sigma}(\omega_n, q, A_4) \right) \right] + 3 \ln \left[\beta^2 \left(\frac{1}{2G} - \Pi_{\pi}(\omega_n, q, A_4) \right) \right] \right\} \quad (5)$$

式 (5) はメソンの松原周波数についての和と、メソンの運動量についての積分を含む。第一項目はシグマメソンの寄与、第二項目はパイオンの寄与で、二項目のファクター 3 はパイオンの縮退度である。ギャップ方程式を用いると、

$$\frac{1}{2G} - \Pi_{\pi}(\omega_n, q, A_4) = (\omega_n^2 + q^2) F(\omega_n, q, A_4) + \frac{m_0}{2GM_0} \quad (6)$$

$$F(\omega_n, q, A_4) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p 2E_{p+q}} \left[\left(\frac{1}{\omega + E_p - E_{p+q}} - \frac{1}{\omega - E_p + E_{p+q}} \right) \text{tr}_c (f(E_p - igA_4) - f(E_{p+q} - igA_4)) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\omega + E_p + E_{p+q}} - \frac{1}{\omega - E_p - E_{p+q}} \right) \text{tr}_c (1 - f(E_p - igA_4) - f(E_{p+q} - igA_4)) \right] \quad (7)$$

と書ける。ここで関数 $F(\omega_n, q, A_4)$ は non-collective mode を表す関数である。シグマメソンについても、質量の違いを除いて、同様の書き換えが出来る。第一項目は collective mode と non-collective な個別励起で構成されており、第二項目は裸のクォーク質量に比例する。従ってカイラル極限では、第二項目は消え、かつ $\frac{1}{2G} - \Pi$ が log の引数であるので、collective mode と non-collective mode を分離することができ、それぞれの圧力への寄与を別々に計算出来る。数値計算の結果、collective mode が主に圧力に寄与し、non-collective mode からの寄与は非常に小さい。クォークが質量を持つ場合、このような分離は出来ないが、 $\mathcal{M}_1 \equiv \text{Re} \left[\frac{1}{2G} - \Pi \right] = 0$ 、 $\mathcal{M}_2 = \text{Im} \left[\frac{1}{2G} - \Pi \right] = 0$ を計算することで、メソンポールの有無を計算出来る。

4 数値計算

図 1 は、 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ を ω/q の関数としてプロットした図である (ω はメソンのエネルギー、 q はメソンの運動量)。 $T < T_c$ では $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ とともにゼロになる点が time-like 領域に存在し、この点がメソンポールに対応する。一方 $T > T_c$ では、 \mathcal{M}_1 は常に正であり、低温で \mathcal{M}_2 がゼロであった領域も無くなる。このことは、高温でメソンポールが個別励起の continuum に飲み込まれ無くなったことを意味している。

図 2 は圧力を温度の関数としてプロットした図である。赤い線が平均場の寄与にメソン励起の寄与を加えた圧力、青い線が平均場の寄与だけを含んだ圧力である。平均場のみの計算では、低温では Polyakov loop によってクォークの単独の励起が抑えられるため圧力はほぼゼロであるのに対し、メソン励起を取り込んだ計算では、メソンが圧力に寄与していることがわかる。

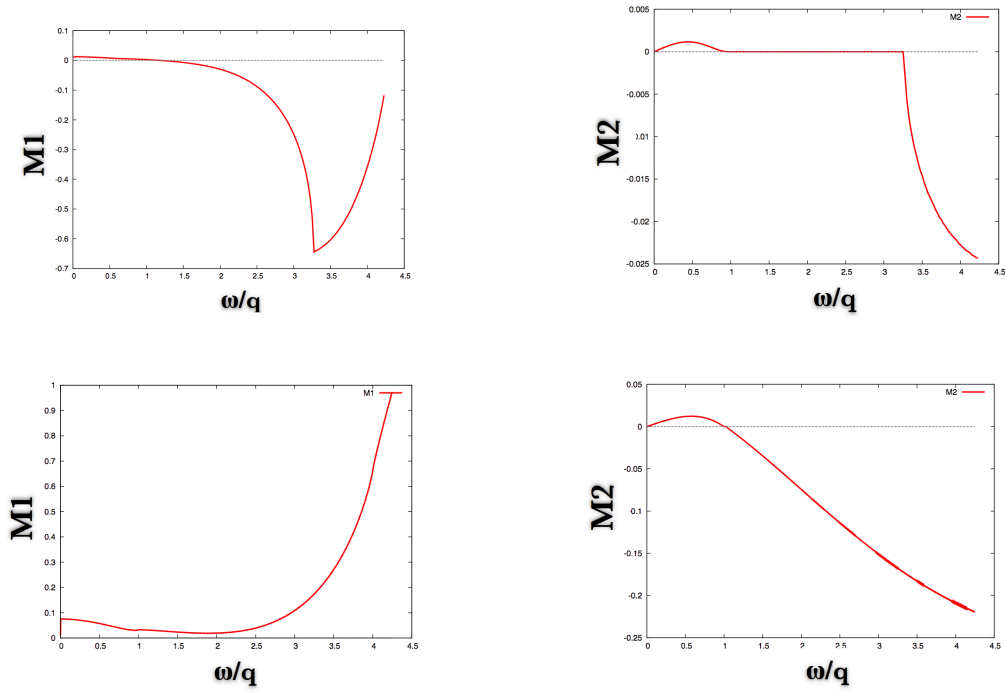


図 1: $T < T_c$ での M_1 (左上), $T < T_c$ での M_2 (右上), $T > T_c$ での M_1 (左下), $T > T_c$ での M_2 (右下).

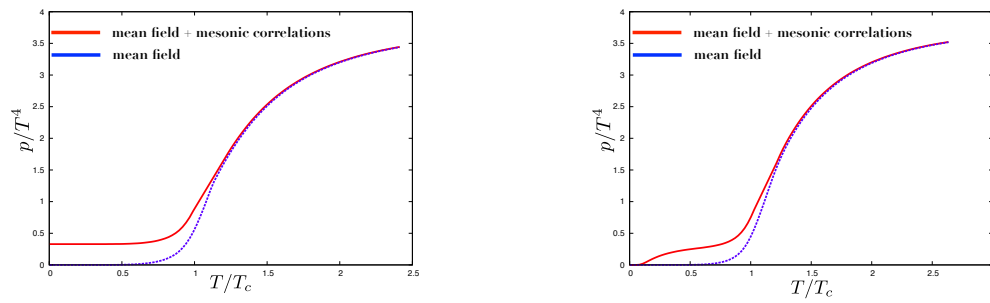


図 2: 状態方程式。右: カイラル極限、左: クォーク質量 140MeV.[4]

5 まとめ

本研究では、PNJL 模型を用いてメソン励起を取り込み、状態方程式の計算を行った。メソン励起を取り込んだ場合、カイラル極限では collective mode と non-collective mode を分離することができ、collective mode からの寄与が支配的であることがわかった。有限のクォーク質量を持たせた場合、2つのモードの分離は出来ないが、しかし、ポールの有無の計算から高温でのメソン励起からの寄与が小さいことがわかった。

参考文献

- [1] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591**, 277 (2004) [hep-ph/0310121].
- [2] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [3] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
- [4] K. Yamazaki and T. Matsui, arXiv:1206.4921 [hep-ph].

テンソル力のあるフェルミ液体の繰り込み群による解析

東京大学大学院理学系研究科 谷崎佑弥*

この発表は、理研の初田哲男氏との共同研究に基づくものである。

1 Introduction

双極子間相互作用のある多体フェルミ系が現在注目を集めてきている。フェッシュバハ共鳴を用いた接触相互作用のコントロールにより、冷却原子気体の分野は BCS-BEC crossover の理想的な環境として注目されてきた。その一方で、電気双極子モーメントの大きい分子や磁気双極子の大きな原子を用いることで、双極子間相互作用が支配的な多体系を作る試みも理論・実験の双方から研究されてきた。特にフェルミ系に注目してみると、今年になり Dy161（磁気双極子モーメントが Bohr magneton の約 10 倍の原子）のフェルミガスを冷却しフェルミ縮退が実現された [1]。今後、実験の進展により双極子相互作用が支配的な系における超流動など多体系の性質が明らかにされると期待される。また、この系は中性子星内部の高密度核物質と相互作用の形が類似しており、これまで直接検証のできなかった中性子超流動の性質をシミュレートできる可能性がある。

双極子相互作用のあるフェルミ多体系に対して様々な立場から、特に強結合領域での相を変分計算に基づいて研究されてきている [2,3]。また平均場近似を用いた計算により、強結合領域での変分計算で予言されるより早くフェルミ液体の記述が破綻することが指摘されている [4]。本研究では、弱結合領域からはじめて instability の形を仮定せずにフェルミ液体に対する instability をくりこみ群の立場から議論する。

2 Formalism

Wilson 流のくりこみ群を用いてフェルミ液体がフェルミ多体系の universality class であることを理解しようとする試み [5] によれば、多くの coupling が irrelevant であり free Fermi gas にくりこみ群の flow が流れることが Fermi liquid description を正当化している。いくつかの例外は、相互作用が強くて Pomeranchuk instability に抵触する場合や Fermi surface で引力が働き Cooper instability が起こる場合で、対応する effective couplings が marginally relevant になる。

*E-mail:tanizaki@nt.phys.s.u-tokyo.ac.jp

Fermi surface の近くでは、作用のうちの kinetic term に対応する部分は

$$S_o = \frac{k_F^2}{2\pi^2\beta} \sum_{\omega_n} \int_{-\Lambda_o}^{\Lambda_o} dl \int \frac{d^2\hat{\mathbf{k}}}{4\pi} \psi^\dagger(k)[i\omega_n + v_F l]\psi(k)$$

と書くことができる。ここで、 k_F はフェルミ運動量、 β は逆温度、 ω_n はフェルミオンの Matsubara frequencies、 ψ, ψ^\dagger は spin 1/2 のフェルミオン場である。decimation と rescaling により S_o が不変であるようにすることで、field の scaling dimension を定めることができ、これを用いることで各相互作用の振る舞いを定めることができる。この時、Landau channel と BCS channel と呼ばれる特殊な momentum configuration の 4 点相互作用のみが marginal となり、そのほか全ての相互作用は irrelevant に分類される。

以上の tree level の議論に基づいて、1-loop level での scaling の補正を marginal coupling に対して行う。irrelevance に則って 6 点以上の相互作用を無視した時に、4 点相互作用の 1-loop 補正は次の三つのファインマン・ダイアグラムからなる：

$$\begin{aligned} \text{ZS} &= \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \alpha' \quad \beta' \end{array}, & \text{ZS}' &= \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \beta' \quad \alpha' \end{array}, \\ \text{BCS} &= \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \alpha' \quad \beta' \end{array}. \end{aligned}$$

ここで、low-energy excitation 以外は既に integrate out されているので、外線及び内線の運動量は Fermi surface の付近に制限されている。これにより、例えば BCS channel (incident particles の運動量が \mathbf{k} と $-\mathbf{k}$ とフェルミ面の反対の点にある) に効く 1-loop 補正は BCS diagram のみである。BCS channel に絞って議論すると、上の解析に基づいて leading contribution 飲みを取り出せば、

$$\Lambda \partial_\Lambda V_{\beta'\alpha'}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Big|_{\text{BCS}} = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta}{2} v_F \Lambda\right) \int \frac{d^2\hat{\mathbf{k}}''}{4\pi} V_{\delta\gamma}^{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') V_{\beta'\alpha'}^{\gamma\delta}(\mathbf{k}'', \mathbf{k}')$$

という flow equation を得ることができる。ここで、 α などは spin indices、 \mathbf{k} などは出てきた粒子の運動量を表し、' がついているときは入ってくる粒子のものを表すとする。

3 Result

今回得られた flow equation を積分して、

$$\mathbf{V}(\Lambda) = \mathbf{V}_o \left(\mathbf{1} + \mathbf{V}_o \int_\Lambda^{\Lambda_o} \frac{d\Lambda'}{\Lambda'} \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\beta}{2} v_F \Lambda'\right) \right)^{-1}$$

を得る。これは、random phase approximation から導かれる表式であり、くりこみ群の範囲内でそれに相当する近似を導くことができた。また、今回は議論しなかった Landau

channel に相当する部分を計算すると、平均場近似で得られた Fermi liquid 自体の不安定性 [4] も導くことができることが分かった。

V_o は bare coupling に対応する行列なので、bare action から読み取ることができ、dipole-dipole interaction に対しては、全角運動量 J, J_z 、軌道角運動量 L 、合成スピン S で行列要素を書くと

$$\begin{aligned} \Gamma_{LS, L'S'}^{JJ_z, J'J'_z} &= -(-)^{S+J} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \frac{3}{2} \gamma^2 s(s+1)(2s+1) \\ &\times \sqrt{(2L+1)(2L'+1)(2S+1)(2S'+1)} \begin{Bmatrix} S' & S & 2 \\ L & L' & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S & s & s \\ S' & s & s \\ 2 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \\ &\times \left[(H_L + H_{L'}) C_{10,10}^{20} C_{L'0,L0}^{20} + (-)^L 10 \sum_l H_l C_{L0,10}^{l0} C_{L'0,10}^{l0} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ L & L' & l \end{Bmatrix} \right]. \end{aligned}$$

これより、引力的な contact interaction が支配的な時は 1S_0 の channel に superfluid instability があり、dipole-dipole interaction が支配的な時は 3P_1 の superfluid が出るのがわかった。特に、 3P_1 superfluid は他の系では見られたことのないもので、dipole-dipole interaction 特有のものであるといえる。

参考文献

- [1] M. Lu, N.Q. Burdick, and B.L. Lev. “Quantum degenerate dipolar Fermi gas”. *Physical Review Letters*, 108(21):215301, 2012.
- [2] B.M. Fregoso and E. Fradkin. “Ferronematic ground state of the dilute dipolar Fermi gas”. *Physical review letters*, 103(20):205301, 2009.
- [3] K. Maeda, T. Hatsuda, and G. Baym. “Meson condensation analogs in ultracold atomic and molecular dipolar gases”. *arXiv preprint arXiv:1205.1086*, 2012.
- [4] T. Sogo, M. Urban, P. Schuck, and T. Miyakawa. “Spontaneous generation of spin-orbit coupling in magnetic dipolar Fermi gases”. *Phys. Rev. A*, 85:031601, Mar 2012.
- [5] R. Shankar. “Renormalization-group approach to interacting fermions”. *Reviews of Modern Physics*, 66(1):129, 1994.

強く相互作用するクォーク相を含む中性子星の状態方程式と最大質量

益田晃太、初田哲男^A、高塚龍之^B
東大理、理研^A、岩手大^B

概要

ハイペロンを含むハドロン相から s-quark を含むクォーク相へのクロスオーバーを仮定した状態方程式を用いて中性子星の物理、主に中性子星の質量を計算する。この時、(i) クロスオーバーが比較的低密度 $((3-4)\rho_0$ (ρ_0 : 原子核密度)) で生じ、(ii) クォーク相が強く相互作用している、という 2 つの条件下でクォーク相を持たない中性子星よりも重くなり、 $2M_\odot$ を超え得ることを見る。これは高密度におけるエキゾチックな成分の出現による一般的な状態方程式の軟化と反する結果である [1]。

1 はじめに

2010 年に観測された $(1.97 \pm 0.04)M_\odot$ の中性子星 (PSR J1614-2230) の存在は EOS に強い制限を与え、特にコア部分にエキゾチックな成分が存在する可能性について疑問符を与える [2]。従来、ハイブリッド星の研究はハドロン相とクォーク相を 1 次相転移を仮定し接続してきたが、本研究ではハドロン相のパーコレーション描像に立ち、クロスオーバー接続を試みる。その際、中性子星内部で実現する高密度状況下ではハイペロン (s-quark) が存在すると思われるため、その効果を取り入れたハドロン相 (クォーク相) を扱う。ハドロン相についてはここでは詳細は述べないが、核子間に働く三体力をハイペロンを含むバリオン間に拡張し、nuclear incompressibility $\kappa = 300\text{MeV}$ の TNI3u (Three-Nucleon Interaction、3 は κ の大きさ、u は universal を意味する) を採用した [3]。

2 クォーク相状態方程式

ストレンジを含むクォーク相における状態方程式を構築する。0K においてハドロン - クォーククロスオーバーが予測される原子核密度の数倍の領域ではクォーク同士はまだ強く相互作用することが予測される。また高密度では負符号問題により量子色力学 (QCD) の格子場の理論 (格子 QCD) による数値計算は扱えないため、本研究ではカイラル対称性の自発的破れを導く QCD の低エネルギー理論である (2+1) フレーバー南部 - ヨナ・ラシーニョ (NJL) 模型を用いる (u, d, s, e^-, μ^-)。用いるラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NJL}} = & \bar{q}(i\partial - m)q + \frac{G_S}{2} \sum_{a=0}^8 [(\bar{q}\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda^a q)^2] \\ & + G_D [\det \bar{q}(1 + \gamma_5)q + \text{h.c.}] - \frac{g_V}{2} (\bar{q}\gamma^\mu q)^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

とする (ここで i はフレーバー、 λ は Gell-Mann 行列、 m はカレント質量)。第 2 項はスカラー型 4 フェルミ相互作用、第 3 項は $U_A(1)$ 対称性を破る Kobayashi-Maskawa-'t Hooft (KMT) 6 フェルミ相互作用を表す。第 4 項は現象論的ベクトル型 4 フェルミ相互作用を意味し、ここではフレーバーに依存しないクォーク間にユニバーサルに効く斥力を与えるモデルを採用する。NJL 模型中に含まれるパラメータセットとして今回は $\Lambda = 631.4\text{MeV}$, $G_S\Lambda^2 = 3.67$, $G_D\Lambda^5 = 9.29$, $m_{u,d} = 5.5\text{MeV}$, $m_s = 135.7\text{MeV}$ を用いる (Λ は three-momentum cutoff) [4]。 g_V の大きさは決まっていないが、NJL 模型の QCD 相図への適用により

G_S と同じ大きさ程度であることが予測されるため

$$0 \leq \frac{g_v}{G_S} \leq 1.5 \quad (2.2)$$

の範囲で動かすことにする。このモデルの下、電荷的中性と β 平衡の条件を課し、状態方程式を計算する。得られた結果の主な特徴を簡単に述べれば、(i) 電荷的中性条件が効き μ^- は出現しない、(ii) s-quark は $\rho \sim 4\rho_0$ で出現する、という 2 点である。

3 クロスオーバー

ハドロン相とクォーク相のクロスオーバー接続を試みる。クロスオーバーを特徴付ける 2 つのパラメータとして典型的クロスオーバー密度 $\bar{\rho}$ と幅 Γ を用意し、 $\rho \ll \bar{\rho} - \Gamma$ では純粋ハドロン相の描像が、 $\rho \gg \bar{\rho} + \Gamma$ では純粋クォーク相の描像が成り立ち、 $\bar{\rho} - \Gamma \lesssim \rho \lesssim \bar{\rho} + \Gamma$ で定義される中間領域ではハドロンとクォークが強く相互作用する状況を考える。この状況を実現するため、既に研究されている 0 密度有限温度状況下での両相のスムーズな現象論的接続を模倣し [5]、

$$P = P_H \times f_- + P_Q \times f_+, \quad (3.1)$$

$$f_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \tanh \left(\frac{\rho - \bar{\rho}}{\Gamma} \right) \right) \quad (3.2)$$

のような接続を試みる (P_H :ハドロン相圧力、 P_Q :クォーク相圧力)。エネルギー密度 ε は熱力学的関係式より求める。 $\bar{\rho}$ と Γ はパラメータであるが以下の 2 つの条件下でふる:(i) 熱力学的安定条件 $dP/d\rho > 0$ 、(ii) 原子核密度でハドロン描像成立 $\bar{\rho} - 2\Gamma > \rho_0$ 。

4 結果

求めた状態方程式を用い Tolman-Oppenheimer-Volkov 方程式を解く。得られたベクトル型相互作用毎の M-R relation、M- ρ_c relation (ρ_c :中心密度) を図 1,2 ($(\bar{\rho}, \Gamma) = (3\rho_0, \rho_0)$) に示す。比較のためハド

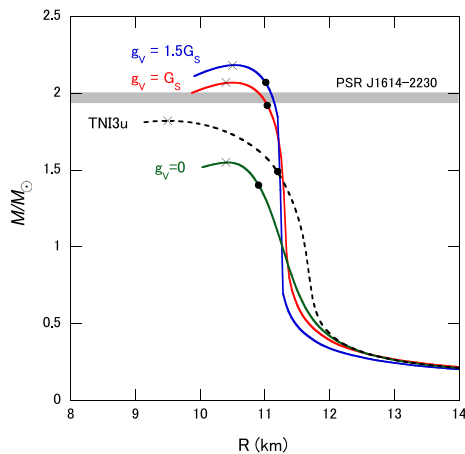


図 1 M-R relation ($(\bar{\rho}, \Gamma) = (3\rho_0, \rho_0)$)
×:最大質量、●:ハイペロン,s-quark 出現

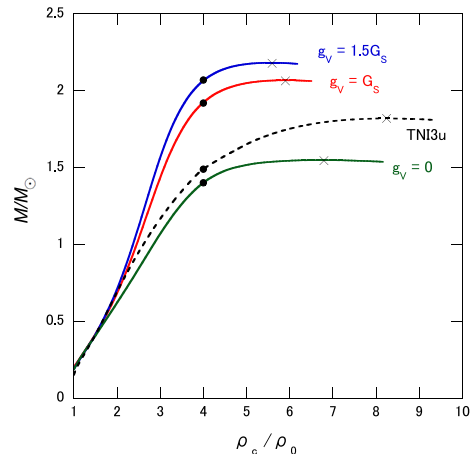


図 2 M- ρ_c relation ($(\bar{\rho}, \Gamma) = (3\rho_0, \rho_0)$)
×:最大質量、●:ハイペロン,s-quark 出現

表1 $M_{\max}/M_{\odot}(\rho_c/\rho_0)$ の $\bar{\rho}, \Gamma$ 依存性

$\bar{\rho}$	$\Gamma/\rho_0 = 1$		$\Gamma/\rho_0 = 2$	
	$g_V = G_S$	$g_V = 1.5G_S$	$g_V = G_S$	$g_V = 1.5G_S$
$3\rho_0$	2.07 (5.9)	2.18 (5.6)	—	—
$4\rho_0$	1.93 (6.7)	2.00 (6.6)	—	—
$5\rho_0$	1.79 (7.7)	1.83 (7.4)	1.82 (7.4)	1.86 (7.3)
$6\rho_0$	1.70 (8.3)	1.70 (8.3)	1.73 (8.0)	1.74 (8.0)

ロン相のみの場合も黒の点線で描いてある。×印は最大質量を与える点、黒丸はハイペロン、s-quark が表れる密度を意味する。図から見て取れるように確かに強く相互作用するクォークを含む中性子星の方がハドロン相のみの中性子星よりも重くなり得、更に観測事実にも耐え得る。次に最大質量の $(\bar{\rho}, \Gamma)$ 依存性を表1に示す。 $\bar{\rho}$ が小さい程、 Γ が大きい程、

即ちクロスオーバーの影響が低密度で生じる程最大質量は大きくなる事が分かる。

5 まとめ

本研究により強く相互作用するクォーク相の影響が比較的低密度から生じる場合、エキゾチックな成分を含む中性子星でも $2M_{\odot}$ を超え得る可能性が示唆された。この場合、ハドロン相が状態方程式のかたさに与える影響は少なく、最大質量はハドロン相の状態方程式の詳細に依らない。例えば nuclear incompressibility $\kappa = 250\text{MeV}$ の状態方程式でも、またユニバーサル三体力を考慮しない状態方程式でも $2M_{\odot}$ を超え得る。しかし、ユニバーサル三体力はハイペロンの出現を遅らせる効果をもつため、中性子星の冷却を論ずる時には重要な役割を果たす。具体的にはユニバーサル三体力がある場合ハイペロンは $4\rho_0$ 程から混じりだすが、この密度は図 1,2 の $g_V/G_S = 1$ の場合 $1.92M_{\odot}$ に対応するため、 $1.92M_{\odot}$ 以下の星にはハイペロンは存在せず direct Urca process が生じないため、速い冷却を回避出来る可能性を持つ。しかし、ユニバーサル三体力を考慮しない場合、ハイペロンは $2.5\rho_0$ 程から混じりだし、約 $0.9M_{\odot}$ 以下の星でしか速い冷却を回避出来ない。

今後は有限温度に拡張し、またカラー超伝導の効果も取り入れて行く予定である。

参考文献

- [1] K. Masuda, T. Hatsuda, and T. Takatsuka. Hadron-Quark Crossover and Massive Hybrid Stars with Strangeness. arXiv:1205.3621v2[nucl-th].
- [2] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts, and J. W. T. Hessels. A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay. NATURE, 467(7319):1081–1083, OCT 28 2010.
- [3] S Nishizaki, Y Yamamo, and T Takatsuka. Hyperon-mixed neutron star matter and neutron stars. PROGRESS OF THEORETICAL PHYSICS, 108(4):703–718, OCT 2002.
- [4] T HATSUDA and T KUNIHIRO. QCD PHENOMENOLOGY BASED ON A CHIRAL EFFECTIVE LAGRANGIAN. PHYSICS REPORTS-REVIEW SECTION OF PHYSICS LETTERS, 247(5-6):221–367, OCT 1994.
- [5] M Asakawa and T Hatsuda. What thermodynamics tells us about the QCD plasma. PHYSICAL REVIEW D, 55(7):4488–4491, APR 1 1997.

QCD 和則による有限温度クォーコニウムの MEM 解析

鈴木 溪¹、Philipp Gubler²、森田 健司³、岡 真^{1,4}

¹ 東京工業大学、² 理化学研究所 仁科加速器研究センター、

³ 京都大学 基礎物理学研究所、⁴ KEK 理論センター J-PARC 分室

1 導入

クォーク・グルーオン・プラズマ (QGP) 相における特徴的な物理現象の一つとして、 J/ψ や Υ などのクォーコニウムの消失現象が予想されている。この現象は、クォーコニウム抑制と呼ばれ、現象論的な解釈では、QGP 中を飛んでいるカラーチャージによるデバイ遮蔽効果により、クォーコニウムを構成する重いクォーク・反クォーク間に働く閉じ込めポテンシャルが消失し、裸のクォークへと分離するという描像で説明される [1]。重イオン衝突実験においては、 J/ψ や Υ などのクォーコニウムの収量抑制が実際に観測されており、最近では、 Υ の励起状態が基底状態と比べて大幅に抑制されるといった実験事実が報告されている。このような観測結果を理論的に説明するために、これまでに数多くの理論研究が為されており、格子 QCD やポテンシャル模型を用いた方法によって、クォーコニウムの消失温度が求められてきた。クォーコニウムの消失を理論的に記述するためには、スペクトル関数の温度依存性を解析すればよく、スペクトル関数を導出するために本研究で用いた方法が QCD 和則である。

QCD 和則 [2] は QCD の非摂動領域の性質を第一原理的に解析する方法の一つであり、クォーク凝縮やグルーオン凝縮などの真空の性質とハドロンのスペクトル関数を結びつける関係式から、ハドロン質量や崩壊幅といった物理的な値を引き出す強力な手段である。さらに、クォーク凝縮やグルーオン凝縮は、その温度依存性を計算することができるため、これらの値を用いることで、QCD 和則を有限温度におけるハドロンの性質を解析する方法として適用することができる。QCD 和則の従来方法では、「一粒子状態 + 連続状態」という現象論的な仮定を導入することで、スペクトル関数に付随する物理量が導出されてきたが、近年、QCD 和則に最大エントロピー法 (MEM) を適用することで、これらの仮定を導入せずにスペクトル関数を直接導出することが可能となった [3]。

本研究では、QCD 和則に MEM を適用し、クォーコニウムのスペクトル関数の温度依存性を解析することで、チャーモニウム [4]、及びボトモニウム [5] に対応するスペクトル関数のピークが消失する温度を求めた。チャーモニウムとボトモニウムの解析はほとんど同様の方法を用いて行われるが、双方のスペクトル関数の温度に対する振る舞いは大きく異なり、「温度応答性」及び「励起状態の存在」という 2 点について特徴的な性質を示す。チャーモニウムの場合、スペクトル関数のピークはある一定の温度において突然消失するが、ボトモニウムの場合、広い温度領域に渡り徐々に消失していく。また、チャーモニウムのスペクトル関数のピークは、基底状態の情報のみを含む結果であるが、ボトモニウムのピークには基底状態だけでなく、それより高エネルギーの励起状態の情報も混合している。本研究の方法 (QCD 和則 + ボレル変換 + MEM) を用いる限り、これら複数の状態を別々のピークとして分離することは不可能だが、本研究では、有限温度における励起状態の振る舞いを調べるために、ピークの residue (積分値) の温度依存性を解析し、励起状態が基底状態より低温で消失するという描像を示唆する結果を得た。基底状態と比較して励起状態が大幅に抑制されることは、重イオン衝突実験においても観測されている実験事実であり、本研究の結果はこの現象と矛盾の無いものである。

2 手法

QCD 和則では、ハドロン相関関数の演算子積展開 (OPE) と被積分関数としてスペクトル関数を含むエネルギー積分が分散関係によって関係づけられる。ポレル変換後の QCD 和則は

$$\mathcal{M}^J(\nu) = 4m_b^2 \int_0^\infty ds e^{-s\nu} \rho^J(s) \quad (1)$$

となる。左辺の OPE は摂動論的なクォークonium相関関数と非摂動論的な凝縮項から構成される。質量次元 4 までの展開において、凝縮項はグルーオン凝縮 (スカラーグルーオン凝縮 $G_0(T) = \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle_T$ 及びツイスト-2 グルーオン凝縮 $\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^{\alpha\mu\sigma} G_{\sigma}^{\alpha\nu} \rangle_T = (u^\mu u^\nu - \frac{1}{4}g^{\mu\nu})G_2(T)$) のみを考えれば良い。グルーオン凝縮はエネルギー運動量テンソルと対応づけられ [6]、温度に依存する熱力学量 (エネルギー密度 $\epsilon(T)$ 、圧力 $p(T)$ 、強い相互作用の結合定数 $\alpha_s(T)$) を用いて、

$$G_0(T) = G_0^{vac} - \frac{8}{11}[\epsilon(T) - 3p(T)], \quad G_2(T) = -\frac{\alpha_s(T)}{\pi}[\epsilon(T) + p(T)] \quad (2)$$

と表せる。これらの熱力学量はクエンチ近似による格子 QCD によって計算された数値を用いる。

3 結果

各チャンネル (ベクトル ($J/\psi, \Upsilon$), 擬スカラー (η_c, η_b), スカラー (χ_{c0}, χ_{b0}), 軸性ベクトル (χ_{c1}, χ_{b1})) に対して得られたスペクトル関数を図 1・2 に示す。ゼロ温度のスペクトル関数に現れたピークの位置を表 1 にまとめる。これらの結果を見ると、ゼロ温度におけるチャーモニウムのピークの位置 (すなわち、質量) は、実験値に対しておよそ 50MeV の精度で一致しており、チャーモニウムの基底状態に対応する妥当なエネルギー領域にピークが現れていることが確認できる。一方、ボトモニウムのピークの位置は、実験値と比べてやや高い値が得られている。これは、得られたピークの中に、基底状態だけでなく励起状態の寄与も混合しているためであり、励起状態の混合によってピークの位置が高エネルギー側へシフトした結果、基底状態の質量を見かけ上重く見せている。

	$m_{J/\psi}$	m_{η_c}	$m_{\chi_{c0}}$	$m_{\chi_{c1}}$	m_{Υ}	m_{η_b}	$m_{\chi_{b0}}$	$m_{\chi_{b1}}$
理論値 [GeV]	3.06	3.02	3.36	3.50	9.56	9.51	10.15	10.42
実験値 [GeV]	3.097	2.980	3.414	3.510	9.460	9.389	9.859	9.893

表 1 ゼロ温度におけるクォークoniumスペクトル関数のピーク位置と、それに対応する基底状態の実験値。

次に、有限温度におけるスペクトル関数の振る舞いについて議論する。図 1・2 を見ると、チャーモニウムの全てのチャンネルにおいて、非閉じ込め相転移温度 T_c より少し高い温度で、突然ピークが消失する。一方で、ボトモニウムの場合には、 $1.0T_c$ から $3.0T_c$ という広い温度領域に渡って、徐々にピークが減少していく。また、チャーモニウム・ボトモニウムの両方で、S 波チャンネルは P 波チャンネルより高温まで生き残る。QCD 和則の観点から見ると、このようなスペクトル関数の温度変化は、OPE に含まれるグルーオン凝縮の温度依存性に由来し、ボトモニウムがチャーモニウムより高温まで生き残る理由は、グルーオン凝縮項の係数がクォーク質量の 4 乗に反比例するため、結果的にグルーオン凝縮からの温度効果が弱まるためである。

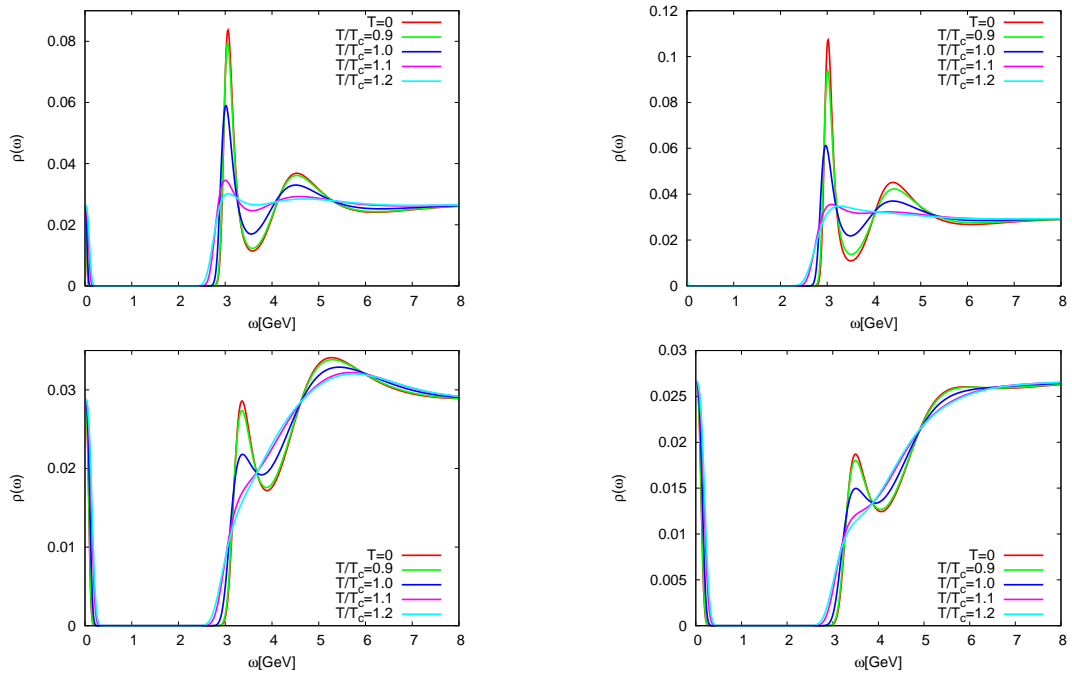


図1 MEMで得られたチャーモニウムのスペクトル関数。左上図：ベクトル (J/ψ)、右上図：擬スカラー (η_c)、左下図：スカラー (χ_{c0})、右下図：軸性ベクトル (χ_{c1})。

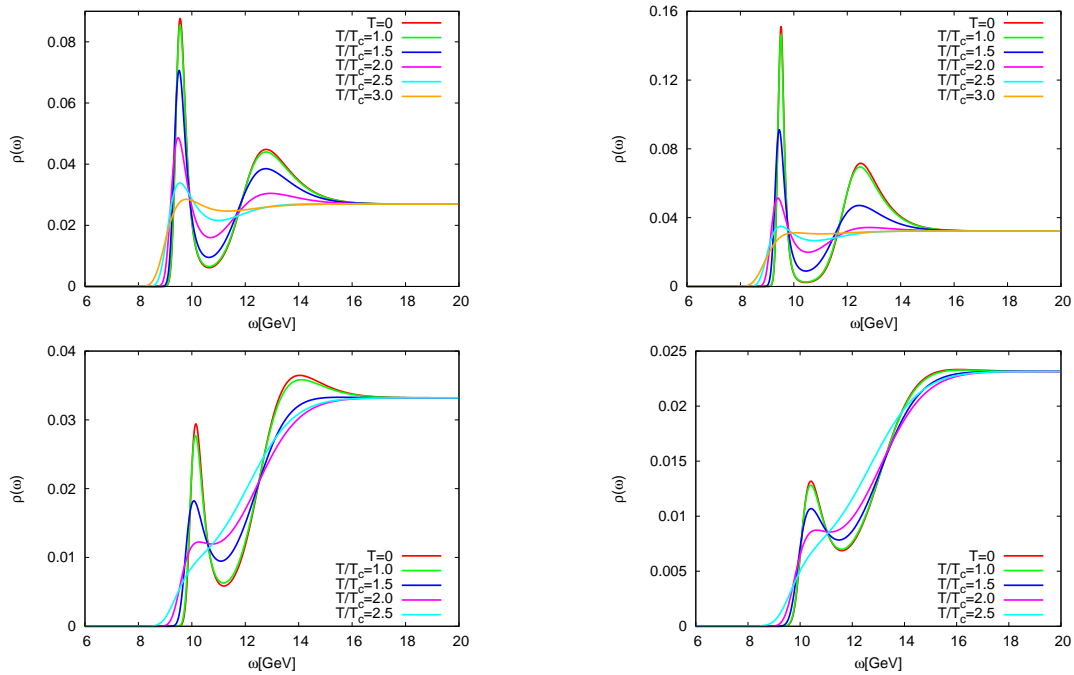


図2 MEMで得られたボトモニウムのスペクトル関数。左上図：ベクトル (Υ)、右上図：擬スカラー (η_b)、左下図：スカラー (χ_{b0})、右下図：軸性ベクトル (χ_{b1})。

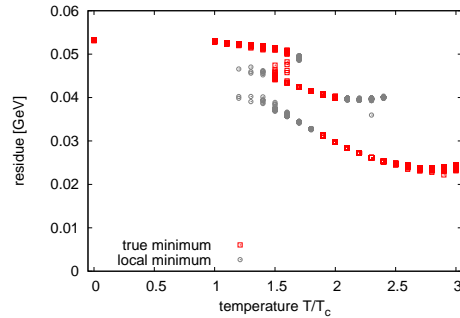


図3 MEM で得られたボトモニウムのベクトル (Υ) チャンネルのピークについての residue の温度依存性。

次に、 Υ のスペクトル関数の励起状態について議論する。温度に対する励起状態の振る舞いを調べるために、スペクトル関数のピークの residue (積分値) の温度変化を解析する。一般に、ピークの residue を求めるためには、エネルギー領域を単純に積分するだけでよい。しかし、今回得られた結果は、高温においてピーク領域に連続状態が侵入しているため、スペクトル関数を「Breit-Wigner + 連続状態」の関数としてフィットすることで、連続状態の寄与を差し引いた residue を求めることにする。各温度における Υ のスペクトル関数についてのフィットの結果を、図3に示す。この図を見ると、温度上昇に伴い residue は減少し、 $2.5T_c$ 付近では、ゼロ温度のときの半分程度の residue が生き残ることが分かる。励起状態が基底状態より低温で消失することは実験事実であるから、そのような消失の順序さえ仮定すれば、この振る舞いは $2.0 - 2.5T_c$ までに励起状態 $\Upsilon(2S, 3S)$ が消失し、それより高温で基底状態 $\Upsilon(1S)$ のみが生き残るという描像を示唆している。

4 今後の展望

本研究では、QCD 和則に MEM を適用し、クォークoniumのスペクトル関数の温度依存性を解析することで、QGP 相におけるクォークoniumの消失温度を求めることに成功した。これらの結果を踏まえた今後の展望として、OPE の高次補正の効果を考える。QCD 和則による解析では、演算子積展開と呼ばれる展開によって高次項を落としているため、無視された高次項が QCD 和則の精度にどの程度影響するかを検証することは極めて重要な課題である。特に、カイラル凝縮の効かないクォークoniumの OPE に対して、最も支配的な α_s 補正の高次項は、クォークoniumの性質に対してある程度の寄与を及ぼすことが予想される。今後は、このような高次補正が消失温度にどの程度影響するかについて調べていく予定である [7]。

参考文献

- [1] T. Matsui and H. Satz, Phys. Lett. B **178**, 416 (1986).
- [2] M. A. Shifman, A. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B147**, 385 (1979).
- [3] P. Gubler and M. Oka, Prog. Theor. Phys. **124**, 995 (2010).
- [4] P. Gubler, K. Morita, and M. Oka, Phys. Rev. Lett. **107**, 092003 (2011).
- [5] K. Suzuki, P. Gubler, K. Morita, and M. Oka, arXiv:1204.1173 [hep-ph], to be published in NPA .
- [6] K. Morita and S. H. Lee, Phys. Rev. Lett. **100**, 022301 (2008).
- [7] P. Gubler, K. Suzuki, K. Morita, and M. Oka, in preparation .

強結合格子格子 QCD に基づいた QCD 相図

市原 輝一^A, 中野 嵩士^{A,B}, 大西 明^B
京大理^A, 京都大学基礎物理学研究所^B

概要

強結合格子 QCD に基づいて、平均場近似を越えた手法を開発する。強結合極限における定式化を行い、系のサイズが 4×4^3 の時の結果を示す。また、有限結合効果の Next-Leading-Order の定式化も行う。

1 はじめに

初期宇宙や中性子星の物理とも関連する QCD(量子色力学) 相図を得る事は重要な課題である。しかし、第一原理計算である格子 QCD は、符号問題により高密度領域においては大きな成功を収めていない。そのため、高密度領域を理論的に研究する手法として、QCD の対称性を尊重した有効模型や、強結合格子 QCD(格子 QCD の強結合展開、つまり格子 QCD における作用を $1/g^2$ のべきで展開する手法)[2, 3, 4, 5] 等による研究が行われてきた。得に近年、この有効模型や強結合格子 QCD において、平均場近似を越えた解析が行われるようになってきた。そこで、本研究では強結合格子 QCD に基づいて、平均場近似を越えた議論を行う。現在、強結合格子 QCD の強結合極限 ($1/g^2 = 0$) において、平均場近似を越えた研究は W. Unger ら [1] によりすでに行われている。しかし、強結合展開の有限結合効果を取り入れるには、彼らの手法はそのまま適用できない。そこで今回の研究では、有限結合効果を考慮する事が直接的な手法を採用する。まずは強結合極限で今回の手法を確立し、有限結合効果への適用を睨む。その際、今回の定式化に現れる "符号問題" についても考察をする。

2 平均場近似を越えた強結合格子 QCD の作用

Staggered fermion の作用を用い、まずは強結合展開の強結合極限を考える ($1/g^2 = 0$)。温度を連続的に変化させる為、非等方格子を導入する [4]。つまり、時間方向の格子間隔 a_τ は、空間方向の格子間隔 a とは $a_\tau = a/\gamma$ との関係にある。但し、以下では格子間隔 a は顕わに書かない。この時作用は、(反)クォーク場 $(\bar{\chi})\chi$ 、リンク変数の第 0 成分 U_0 、化学ポテンシャル μ 、裸の質量 m_0 、カラー $N_c = 3$ 、メソン場 $M_x = \bar{\chi}_x \chi_x$ とすると

$$Z = \int \mathcal{D}[\chi, \bar{\chi}, U_0] e^{-S_{\text{eff}}}, \quad (2.1)$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sum_x [V_x^+(\mu) - V_x^-(\mu)] - \frac{1}{4N_c \gamma^2} \sum_{x,y} M_x V_{x,y} M_y + \frac{m_0}{\gamma} \sum_x M_x, \quad (2.2)$$

与えられる [2, 3, 4, 5]。 S_{eff} の初項は運動項、第 2 項はメソンホッピング項、第 3 項は質量項を表す。ここで、 $V_x^+(\mu) = e^{\mu/\gamma^2} \bar{\chi}_x U_0 \chi_{x+\hat{0}}$ 、 $V_x^-(\mu) = -e^{-\mu/\gamma^2} \bar{\chi}_{x+\hat{0}} U_0^\dagger \chi_x$ 、 $V_{x,y} = \frac{1}{2} \sum_j (\delta_{x+\hat{j},y} + \delta_{x-\hat{j},y})$ と定義した。式 (2.2) 第 2 項のメソンの 2 体場を 1 体場に帰着させる為に補助場を導入する。空間方向のフーリエ変換 $M_x = \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{M}_{\mathbf{k},\tau}$ をして、この第 2 項における $V_{x,y}$ の正固有値と負固有値の 2 つの項に分ける。この 2

項それぞれに対し、拡張された Hubbard-Stratnovich(EHS) 変換 [2] を適用し、それぞれの項に対応した 2 種類の補助場を導入する。最終的な有効作用は、連続理論の γ_5 に対応する $\epsilon_x = (-1)^{\tau+x_1+\dots+x_d}$ を用い、フェルミオン積分 $\cdot U_0$ 積分 [3] を行うと、

$$Z = \int \mathcal{D}[\Sigma, \Pi] e^{-S_{\text{eff}}}, \quad (2.3)$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{4N_c\gamma^2} \sum_{x,j} \left[\Sigma_x \Sigma_{x+\hat{j}} + \Pi_x \Pi_{x+\hat{j}} \right] - \sum_x \log [X_N(\mathbf{x})^3 - 2X_N + 2 \cosh(3\mu/T)], \quad (2.4)$$

$$I_x = \frac{1}{4N_c\gamma^2} \sum_j \left[\left(\Sigma_{x+\hat{j}} + i\epsilon_x \Pi_{x+\hat{j}} \right) + \left(\Sigma_{x-\hat{j}} + i\epsilon_x \Pi_{x-\hat{j}} \right) \right] + \frac{m_0}{\gamma}, \quad (2.5)$$

となる。ただし、 $X_{N_\tau} = B_{N_\tau} + B_{N_\tau-2}, B_{N_\tau} = I_{N_\tau} B_{N_\tau-1} + B_{N_\tau-2}, B_1 = I_1, B_2 = I_1 I_2 - 1$ である。ここで導入された Σ, Π 場について、鞍点で評価すれば、平均場近似を施した事になる。今回はこの Σ, Π 場をモンテカルロ計算する事で、補助場 (メソン場) の揺らぎを取りこみ、平均場近似を越える。なお、ここで導入した補助場は、平均場近似の場合 $\sigma_x = -\langle M_x \rangle, \pi_x = -\langle i\epsilon_x M_x \rangle$ と導入した事に対応する。また、配位を (ω, k) 空間ではなく、 (τ, k) 空間で発生させる定式化となっており、数値計算の効率化が実現している。

次に、強結合展開の $1/g^2$ の Next-Leading-Order(NLO) の定式化をする。NLO の有効作用 [2, 3, 4] から、強結合極限と同様に EHS 変換をし、有限結合効果の NLO まで取り込む事が可能である。今までと同様に、導入される補助場 (NLO の場合は、以下のように空間方向に対して ς, ϖ 場、時間方向に対して \mathbb{E}, \mathbb{E} 場) を鞍点で評価せず、モンテカルロ計算を行い、補助場の揺らぎを取り込む。空間次元 $d, \beta_s = d(d-1)/8N_c^4 g^2, \beta_\tau = d/N_c^2 g^2$ として、NLO の強結合極限に対する補正項を、空間方向は $\Delta S^{(s)}$ 、時間方向は $\Delta S^{(\tau)}$ とすると、補正項は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta S^{(s)} = & \frac{2\beta_s}{d(d-1)\gamma^5} \sum_{x,j \neq k} \left[\varsigma_x \varsigma_{x+\hat{k}} + M_x M_{x+\hat{j}} (\varsigma_{x+\hat{k}} + \varsigma_{x-\hat{k}}) \right. \\ & \left. + \varpi_x \varpi_{x+\hat{k}} + i\epsilon_x M_x M_{x+\hat{j}} (\varpi_{x+\hat{k}} + \varpi_{x-\hat{k}}) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta S^{(\tau)} = & 2 \frac{\beta_\tau}{4d\gamma} \sum_{x,j > 0} \left[\mathbb{E}_x \mathbb{E}_{x+\hat{j}} + \frac{i}{2} V_x^+(\mu) (\mathbb{E}_{x+\hat{j}}^* + \mathbb{E}_{x-\hat{j}}^*) + \frac{i}{2} V_x^-(\mu) (\mathbb{E}_{x+\hat{j}} + \mathbb{E}_{x-\hat{j}}) \right. \\ & \left. + \mathbb{E}_x \mathbb{E}_{x+\hat{j}} + \frac{\epsilon_x}{2} V_x^+(\mu) (\mathbb{E}_{x+\hat{j}}^* + \mathbb{E}_{x-\hat{j}}^*) + \frac{\epsilon_x}{2} V_x^-(\mu) (\mathbb{E}_{x+\hat{j}} + \mathbb{E}_{x-\hat{j}}) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

3 結果

まず、今回発生する " 符号問題 " は、格子 QCD のモンテカルロ計算における符号問題とは違い、補助場を導入する際に発生する [2]。特に式 (2.4) から分かる事は、化学ポテンシャルが大きい程、今回の " 符号問題 " が弱くなり、通常の格子 QCD とは逆の傾向を示している。強結合極限では、式 (2.5) から Π 場の高運動量成分から " 符号問題 " が発生する。平均場の場合、 Π 場の寄与が ϵ_x の項により、隣接サイト同士で打ち消しあうからである。また、有限結合効果の NLO まで考慮した場合、空間方向においては、強結合極限の時と同様に、補助場 ϖ の高運動量成分から発生する事がわかる。しかし、時間方向に関しては、補助場 \mathbb{E} の全ての運動量成分から " 符号問題 " が発生する事がわかる。この結果は、平均場において時間方向の補助場が、斥力であるベクトル結合の第 0 成分として導入される事とコンシステントである [2]。

また数値計算結果を以下に記す。条件はカイラル極限 $m_0 = 0$ 、格子サイズ 4×4^3 の強結合極限 $1/g^2 = 0$ である。図 1 は average cosine factor $\langle \cos \theta \rangle$ を表している。横軸は温度 T を表しており、単位はともに lattice unit a である。この average cosine factor は、1 に近い程符号問題がない事を表している。図 1 から

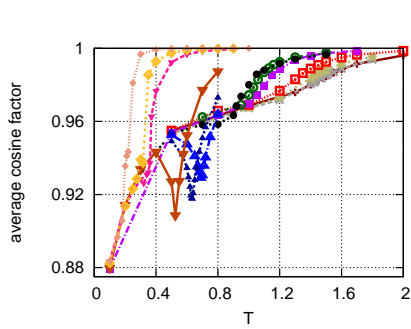


図1 average cosine factor

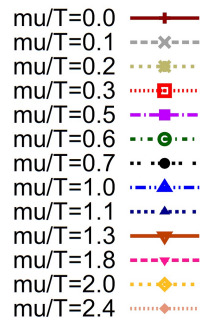


図2 図1における各線の定義

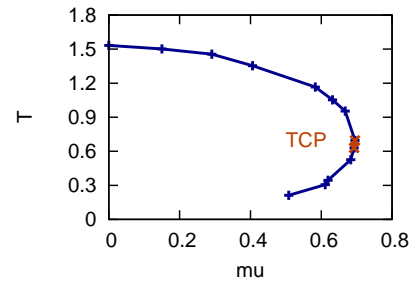


図3 今回得られた QCD 相図

$\langle \cos \theta \rangle \simeq 0.88 \sim 1$ なので、 4×4^3 サイズで得られる値は信頼できると考えられる。また、カイラル感受率とクォーク数密度も同様に得られるので、これら 2 つの物理量から強結合極限における QCD 相図が得られる (図 2)。2 次相転移線は感受率のピーク位置、1 次相転移線はクォーク数密度の飛びの位置で定義した。また、2 次相転移と 1 次相転移との境界である TCP (tricritical point) の位置は、クォーク数密度の飛びで定義した。図 2 の大きい \times 印の間 (茶色の線上) に、今回の定義による TCP がある。これは、W. Unger らによる結果 [1] とほぼコンシステントである。

4 まとめと展望

今回は、平均場近似を越えた強結合格子 QCD における相図研究に関する進展について報告した。特に、フーリエ変換を空間方向のみに抑える事で数値計算の効率化が実現した。これにより、より大きな体積の系に適用出来る事となった。また、強結合極限において、 4×4^3 の格子サイズにおいては、“符号問題” が厳しくない事が分かった。今回の定式化を用いると、有限結合効果を直接的に取り込む事ができる事もみだ。

これからの課題として、一般的に符号問題は大きな格子サイズ程厳しくなるので、大きな格子サイズでの今回の手法の妥当性を検証する必要がある。その次に、有限結合効果を取り入れた場合の考察から、時間方向の補助場から厳しい“符号問題”が出る可能性が示唆されたので、この項の取扱いを繊細に行う必要があると予想される。

参考文献

- [1] W. Unger and P. de Forcrand, J.Phys. G 38, 124190 (2011).
- [2] K. Miura, T. Z. Nakano, A. Ohnishi, and N. Kawamoto, Phys. Rev. D80 , 074034(2009).
- [3] G. Falt and B. Peterson, Nucl. Phys. B265, 197 (1986).
- [4] N. Billic, F. Karsch, and K. Redlich, Phys. Rev. D 45, 3228 (1992).
- [5] Y. Nishida, Phys. Rev. D69, 094501 (2004).

カイラル有効理論に基づく 媒質中での η' の質量変化と η' -N 相互作用

酒井俊太郎^A, 慈道大介^B

京大理^A, 京大基研^B

1 導入

カイラル極限における QCD Lagrangian には古典的作用のレベルで $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ の対称性を持つが、これは量子論のレベルでは Axial anomaly があり、あらわに破れている。このため、カイラル対称性の自発的破れの際には、pseudoscalar-isosinget 中間子である η' は零質量になる必然性がないため、他の擬スカラー中間子である π や K , η に比べ大きな質量を持つ。しかし、この η' の大きな質量はカイラル対称性の破れを伴ったときにのみ現れるということが分かっている [1,2]。このことは以下のように見ることができる。カイラル対称性が破れていない相で、かつカイラル極限の時には $SU(3)_L \times SU(3)_R$ の対称性が存在する。このとき、スカラー、擬スカラー中間子場 $\bar{q}\Gamma q$ (Γ はディラック、フレーバー行列) の表現は、 $\bar{\mathbf{3}}_L \otimes \mathbf{3}_R$ と $\bar{\mathbf{3}}_R \otimes \mathbf{3}_L$ なので規約分解によって $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ となる。これらの表現において、 $\mathbf{8}$ 表現に π, K, η の flavor octet の粒子が対応し、 $\mathbf{1}$ 表現に η' が対応する。scalar 中間子についても同様に $\mathbf{8}$ に a_0, κ, f_0 と、 σ がそれぞれ $\mathbf{8}, \mathbf{1}$ に対応するので、これら 18 個の中間子はカイラル変換により移り変わることができる。よって、カイラル対称性の回復した相においては pseudoscalar nonet の縮退する。よって、カイラル対称性の回復によって η' の質量が大きく変化することが期待される。有限密度中ではカイラル凝縮の値が減少することが [3,4] により示されているので、有限密度効果により η' の質量は密度効果によって減少することが期待される。この質量減少により η' の質量が真空中の値 $m_{\eta'}$ から $m_{\eta'}^*$ になったとすると、 $m_{\eta'}^* = m_{\eta'} + \delta m$ として

$$m_{\eta'}^{*2} = m_{\eta'}^2 + m_{\eta'} \delta m + \mathcal{O}(\delta m^2) \quad (1)$$

右辺第 2 項は密度効果による自己エネルギーとなるため η' と媒質の相互作用と関係していて、さらに密度変化を線形密度近似し、 $\delta m \propto V_0 \frac{\rho}{\rho_0}$ とすると真空中での η' -N 相互作用 V_0 が得られる。これにより媒質中での η' の質量変化と真空中での η' -N 相互作用が関係していることが分かる。さらに、前の議論より η' の質量は密度効果によって減少することが期待されるので $V_0 < 0$ 、つまり真空中での η' -N 相互作用は引力であることが期待される。しかし、理論と実験の両面に関して η' -N の相互作用に関する情報はほとんどないのが現状である。そこで今回カイラル有効模型を用いて有限密度中での η' の質量変化、および真空中での η' -N 間相互作用を議論する。さらに、求めた η' -N 相互作用をもとにして η' -N 束縛、または共鳴状態の存在の可能性を議論できる。 η' -N 束縛状態については、同様に中間子と核子の束縛状態である $\Lambda(1405)$ への chiral unitary approach をもとにした議論 [5] に則り解析を行った。

2 使用した模型

今回の計算においては以下に示すバリオン自由度を含み、 $U_A(1)$ 対称性を破る項を持つ線形 σ 模型 Lagrangian をもとに計算を行った [6]。線形 σ 模型は QCD のもつ $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ global 対称性をも

とに構成されており、自発的対称性の破れの機構を持つ模型である。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\text{tr}\partial_\mu M\partial^\mu M^\dagger - \frac{\mu^2}{2}\text{tr}(MM^\dagger) - \frac{\lambda}{4}\text{tr}[(MM^\dagger)^2] - \frac{\lambda'}{4}[\text{tr}(MM^\dagger)]^2 \\ &\quad - A\text{tr}(\chi M^\dagger + \chi^\dagger M) + \sqrt{3}B(\det M + \det M^\dagger) \\ &\quad + \text{tr}\bar{\psi}i\not{\partial}\psi + g\det\bar{\psi}M\psi + h.c. \\ M &= \sum_{a=0}^8 \frac{\lambda^a \sigma^a}{\sqrt{2}} + i \sum_{a=0}^8 \frac{\lambda^a \pi^a}{\sqrt{2}}, \psi = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda^a \psi^a}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

ここに M は中間子場であり、 ψ はバリオン場である。

第5項目にあるように有限クォーク質量による $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ があらわに破れている効果に加え、第6項目の determinant 型相互作用によって $U_A(1)$ 対称性が Axial Anomaly によって破れる効果も取り込まれている。この determinant 型相互作用は [7, 8] でよ指摘され、対称性や QCD の instanton liquid model によるクォークの6点相互作用をもとに構成されている。模型のパラメータの決定においては、中間子の部分については中間子の崩壊定数と質量、カレントクォーク質量をもとに決定することができる。一方バリオンの部分についてはバリオンと中間子の相互作用にかかわるパラメータ g が未定となっているがこれは、通常核密度でカイラル凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ が 35% 程度回復することが π 中間子原子の観測とその解析をもとに分かっている [4] ので、これをもとにパラメータ g を決定した。このようにパラメータ g を決定するためには模型に核子密度の効果を取り込まなければならないが、これは Lagrangian に含まれているバリオン場を平均場近似することによって導入することができる。このように決定されたパラメータをもとに、媒質中における η' の質量変化、 η' -N の相互作用の強さ、 η' -N 束縛状態の束縛エネルギーの計算を行った。

3 結果

η' の質量については導入で述べたように媒質効果でカイラル対称性が部分的に回復した際に減少することが期待される。このことを線形 σ 模型を用いて表現した。SU(3) 対称性がある場合は η' と η の質量差は $m_{\eta'}^2 - m_\eta^2 = 6B \langle \sigma_0 \rangle$ とあたえられ、 $\langle \sigma_0 \rangle$ は線形 σ 模型におけるカイラル対称性の秩序変数となっており QCD における $\langle \bar{q}q \rangle$ に関係している。よってカイラル対称性の回復によって η' と η の質量差が減少することが分かる。実際には strange クォーク質量による SU(3) 対称性の破れの効果がある。以下に有限密度中でのカイラル凝縮と中間子質量の具体的に計算した結果を示す。カイラル凝縮の密度中での変化については、 $\langle \bar{q}q \rangle$ が通常核密度で 35% 程度回復することから決定しているので今回は input となっている。

また、中間子の質量については π, η の NG boson は質量変化が小さいのに比べ η' のみ大きな質量変化が見られる。真空と通常核密度で比較すると 82MeV の質量減少が起こることが分かった。

η' -N 相互作用強度に関しては、今用いている線形 σ 模型において、 $U_A(1)$ 対称性をあらわに破る項 (Lagrangian の6項目) により与えられることが分かる。さらにこの η' -N 相互作用は scalar 中間子 σ の交換によって得られるが、この中間状態の中間子の質量に比べ十分小さいエネルギー領域を考えると相互作用の強さは -0.0534MeV^{-1} と計算できる。これは $\Lambda(1405)$ の束縛状態を持つ \bar{K} -N 系の相互作用の強さ -0.087MeV^{-1} に比べると小さな値となっている。

η' -N 束縛状態は T 行列の pole の位置によって調べることができる。今回は T 行列の評価に際し、on-shell factorization[9] を用いて T 行列を計算し、T 行列内の loop 関数の発散の繰り込みに Natural Renormalization scheme[10] を用いた。 η' -N 相互作用に対して低エネルギー領域を考慮することで運動量依存性のない接触相互作用となるため loop 関数は発散する。そのためその繰り込みをしななければならないので、束縛エネルギー

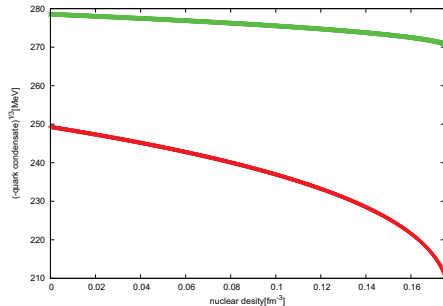


図1 密度中のカイラル凝縮

赤線は $(-\langle \bar{q}q \rangle)^{1/3}$, 緑線は $(-\langle \bar{s}s \rangle)^{1/3}$

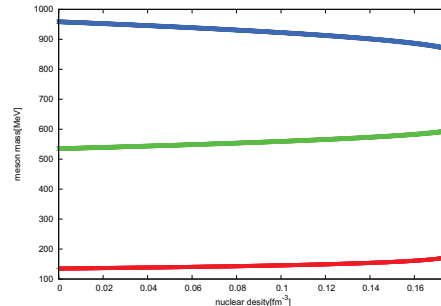


図2 密度中の中間子質量

赤線は π 質量, 緑線は η 質量, 青線は η' 質量

ギーは繰り込みの手法に強く依存する。今回の結果はこの Natural Renormalization Scheme をとった時というとても制限された状態での結果となる。しかし、これらは前にも述べた \bar{K} -N 系において $\Lambda(1405)$ を解析する際に用いられている手法と同じである。今述べたような手法で η' -N の T 行列を評価すると束縛エネルギーは 6.2MeV、散乱長は-2.69fm ということが分かった。

4 まとめ & 展望

今回の計算によって、線形 σ 模型によって密度中での η' と η の質量差の変化と η' -N の相互作用強度と η' -N 束縛状態の存在を検証した。 η' の質量変化は真空中と通常核密度と比較すると 80MeV 程度減少することが分かった。束縛エネルギーは 6.2MeV と小さいが、 η' -N 束縛状態を作りうるほど強い引力が働くことを示した。

しかし、今回の結果は繰り込み scheme に強く依存するので scheme に依存しない形で束縛エネルギーを評価したい。また、 η' -N 相互作用においては η 等の他の粒子に遷移し虚部を持つのでこれを考慮し η' -N 束縛エネルギーの幅を計算する必要がある。より定量的な評価のためには diagram の loop 計算が必要だが、線形 σ 模型においては摂動展開の方法は明らかでないので非線形 σ 模型等への模型の変更が必要となる。

Reference

- [1] S. H. Lee, T. Hatsuda, Phys. Rev. D54(1996)54.
- [2] D. Jido, H. Nagahiro, S. Hirenzaki, Phys. Rev. C85(2012)032201(R).
- [3] E. G. Durkarev, E. M. Levin, Prog. Part. Nucl. Phys. 27(1991)77.
- [4] K. Suzuki, et al., Phys. Rev. Lett. 92(2004)72302.
- [5] T. Hyodo, D. Jido, Prog. Part. Nucl. Phys. 67(2012)55.
- [6] J. T. Lenaghan, et al. Phys. Rev.D62(2000)085008.
- [7] M. Kobayashi, H. Maskawa, PTP44(1970)1422.
- [8] G. t'Hooft, Phys. Rev. D14(1976)3423.
- [9] E. Oset, A. Ramos, Nucl. Phys. A635(1998)99.
- [10] T. Hyodo, D. Jido, A. Hosaka, Phys. Rev. C78(2008)025203.