

# Baryon number probability distribution in the presence of the chiral phase transition

森田健司<sup>1</sup>, V. Skokov<sup>2</sup>, B. Friman<sup>3</sup>, K. Redlich<sup>4</sup>,  
京大基研<sup>1</sup>, BNL<sup>2</sup>, GSI<sup>3</sup>, University of Wroclaw<sup>4</sup>

## 概要

保存チャージのゆらぎを確率分布の観点から議論する。特に、カイラル相転移がある場合の分布の形に着目し、確率分布関数が熱力学ポテンシャルの特異性と結びついていることを示す。

## 1 カイラル相転移とバリオン数ゆらぎ

RHIC や LHC における高エネルギー重イオン衝突において、バリオン数や荷電粒子数のゆらぎから相転移の兆候を探る試みがなされている。とくに、RHIC の衝突エネルギー走査実験では、有限バリオン数化学ポテンシャルにおける QCD 臨界点の発見が期待されているが、その測定量として高次のキュムラントが提案されており、高次に行けば行くほど、系の臨界性に敏感であることが期待されている [1, 2]。このような保存量の揺らぎは、格子 QCD や、NJL 模型などのカイラル有効模型では、

$$c_n(T, \mu) \equiv \frac{\partial^n [p(T, \mu)/T^4]}{\partial (\mu/T)^n}, \quad (1)$$

のように、圧力を化学ポテンシャルで複数回微分することで求められ、具体的な振る舞いが調べられている。とりわけ興味深いのは、物理的クォーク質量におけるクロスオーバー転移であっても、2 フレーバーのカイラル極限における 2 次相転移の振る舞いの名残がみられることであり、 $O(4)$  対称性に基づく議論が可能になる。もし粒子数揺らぎが、フリーズアウト時点での温度と化学ポテンシャルにおける熱力学で決定されるとすれば、フリーズアウト温度と(擬)相転移温度が非常に近いことから、揺らぎから QCD 相転移を検証できる可能性がある [3, 4]。

実験で測定されるのは、その母関数となる確率分布関数  $P(N)$  であり、上記のキュムラントは、そのモーメントから求めることができる。2010 年に STAR グループによって正味の陽子数のゆらぎデータが報告されているが [5]、ハドロングスの結果 (Skellam 分布) から有意なずれがみられている [6]。本研究の目的は、この確率分布関数に対する相転移の影響を調べることである。

## 2 確率分布関数と相構造

大分配関数を  $\mathcal{Z}$ 、正準分配関数を  $Z$  で表すと、大正準集団における粒子数の確率分布は、

$$P(N; T, \mu, V) = \frac{Z(T, V, N)\lambda^N}{\mathcal{Z}(T, V, \mu)}, \quad (2)$$

で与えられる。右辺で粒子数について和をとると 1 になることからわかるとおり、 $\mathcal{Z}$  は規格化の役割を果たしており、確率分布の振る舞いを決めるのは正準分配関数  $Z$  である。相対論的な系の場合、対称性から  $Z(N)$  は  $N$  の偶関数であるが、化学ポテンシャルが有限の値をもつときの振る舞いは、フガシティー因子  $\lambda^N = e^{\beta\mu N}$  で支配され、粒子数が大きい部分の分布を増幅し、分布関数  $P(N)$  に  $N$  非対称性を与える。大分配関数が与えられている場合、正準分配関数はそのローラン展開の展開係数で与えられ、

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\lambda \frac{\mathcal{Z}(T, V, \lambda)}{\lambda^{N+1}}, \quad (3)$$

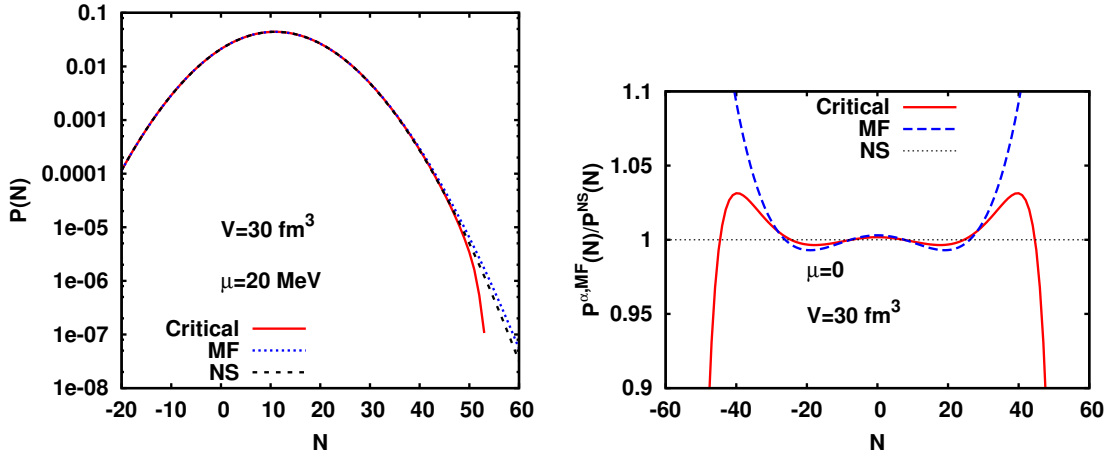


図 1: 左:  $\mu = 20 \text{ MeV}$  での確率分布の比較。右: 非特異 (NS) な場合との比

となるが、 $Z$  が特異性を持つ場合は、積分路  $C$  のとり方に気をつける必要がある。しかし、複素  $\lambda$  平面の単位円上  $|\lambda| = 1$  に特異点がない場合は、

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\theta N} Z(T, V, \theta). \quad (4)$$

と虚数化学ポテンシャル  $\theta = \mu_I/T$  に関する 1 周期の積分に帰着し、この表式は格子計算で用いられている。ここでは、揺らぎの相転移での特異性との関連をみるために、大分配関数を  $Z = e^{-\beta\Omega}$  とし、熱力学ポテンシャル  $\Omega$  が特異性を持つ模型で正準分配関数を計算する。

熱力学ポテンシャルを与えるモデルとして、以下のような秩序変数の 4 次までとったランダウ有効ポテンシャルを考える。

$$U(T, \mu; \sigma) = U_{\text{bg}} + \frac{1}{2}a(T, \mu)\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^4. \quad (5)$$

$U_{\text{bg}}$  は非特異的な部分であり、虚数化学ポテンシャルについて周期的になるように  $U_{\text{bg}} = 2d \cosh(\mu/T)$  と取る。この有効ポテンシャルの極小値は  $\sigma^2 = 0$  と  $\sigma^2 = -a(T, \mu)$  であり、 $a(T, \mu) = 0$  が臨界線を与える。この結果を (5) に代入すれば、熱力学ポテンシャルは  $\Omega = -VT^4(U_{\text{bg}} - \frac{1}{4}a^2)$  となる。この表式は平均場近似に対応し、適当なスケール関数  $a(T, \mu)$  をとると、3 次以上の高次揺らぎは転移点では不連続となる。しかし、臨界揺らぎによって、熱力学ポテンシャルは  $|a| \rightarrow 0$  では  $\Omega \sim |a|^{2-\alpha}$  という振る舞いを持つことが知られており、比熱の臨界指数  $\alpha$  は 3 次元  $O(4)$  モデルでは  $-0.21$  程度である。そこで、ここでは臨界指数を手で導入し、

$$\Omega_0 \equiv \Omega(T > T_c(\mu), \mu) = -VT^4 U_{\text{bg}}, \quad (6)$$

$$\Omega_1 \equiv \Omega(T \leq T_c(\mu), \mu) = -VT^4 \left[ U_{\text{bg}} - \frac{1}{4}|a(T, \mu)|^{2-\alpha} \right]. \quad (7)$$

と取ることとする。このようにとると、3 次以上のキュムラントは有限化学ポテンシャル臨界線上で負の発散を持つ<sup>1</sup>。最後にスケール関数は、同様に周期性を満たすように  $a(T, \mu) = -\left[3 - \frac{T}{T_c} - 2 \cosh(\mu/T)\right]$  ととるが、 $\mu \ll T$  ではよく用いられる形  $a(T, \mu) = A(T - T_c) + B\mu^2$  ( $A, B > 0$ ) に帰着し、キュムラントの振る舞いも変わらない。

詳細は論文 [7] に譲るが、この熱力学ポテンシャルを式 (4) に代入し、得られた確率分布関数の結果を図 2 に示す。温度は  $\mu = 0$  での相転移温度  $T_c = 150 \text{ MeV}$  (フリーパラメータ) よりわずかに低めの  $T/T_c = 0.98$  とした。“NS” は  $\Omega_0$  を代入した場合、“MF” は  $\alpha = 0$  とした場合、“Critical” は  $\alpha = -0.21$  とした場合に対応する。“NS” と “MF” は解析的に求めることができ、“Critical” は数値積分によって求めた。図 2 の左では、 $N$  が大きい部分での違いが明確になるように  $\mu = 20 \text{ MeV}$  としているが、確率が急激に減少していることが見て取

<sup>1</sup> ゼロ化学ポテンシャルでは 6 次以降に発散が現れる

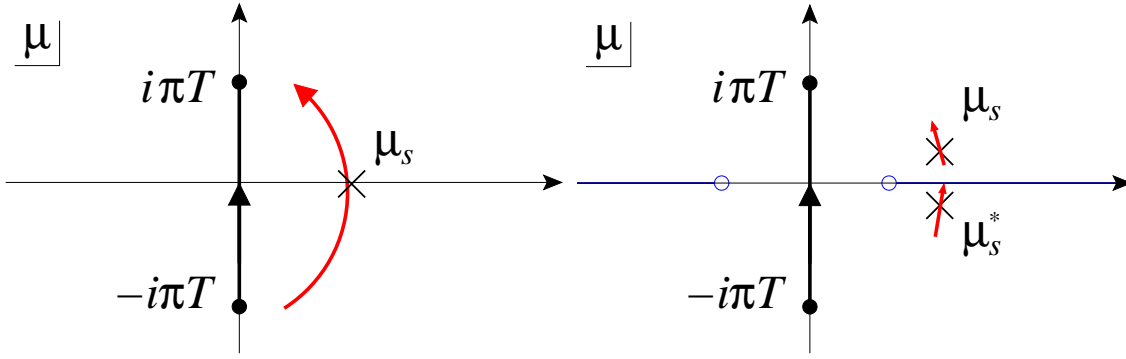


図 2: 複素  $\mu$  平面における熱力学ポテンシャルの分岐点 (青丸) と鞍点  $\mu_s$  ( $\times$  印)。左: NS および MF。右: Critical かつ  $N > N_c$  の場合。黒の実線は元の積分路 [式 (4)] を示し、赤で書かれた矢印は鞍点法における最速降下曲線を示す。

れる。さらに、図 2 右では非特異な場合のとの比を取っているが、分布のピーク  $N = 0$  付近での定性的傾向は平均場近似と臨界揺らぎがある場合であまり差がないのに対して、 $N = 30$  付近から傾向の違いが明白になる。

このような分布関数の変化を引き起こしているものを同定するために、解析的なアプローチを考えよう。体積  $V$  が大きい極限で式 (3) に鞍点法を適用する。ここで注意が必要なのは、 $\alpha$  が  $-0.21$  という値を持つことに寄って、複素  $\lambda$  平面に分岐点とそこからのびる分枝が存在する。このような構造はカイラル模型一般に見られる [8]。鞍点は

$$f(\mu) = 2d \cosh(\mu/T) + \frac{1}{4} |a(T, \mu)|^{2-\alpha} - \frac{N\mu}{VT^4}. \quad (8)$$

とした場合、 $f'(\mu_s) = 0$  で定義される。 $\lambda$  平面から  $\mu$  平面に書きなおした場合、分枝の位置と鞍点の位置の関係は図 2 に示したとおりになる。まず、“NS” の場合と“MF” では分岐点が存在せず<sup>2</sup>、鞍点は実軸上に存在する。しかし、分岐点が存在する場合、鞍点は分枝のすぐ上と、その複素共役の 2 つになり、積分はその和で与えられるので、

$$Z(T, V, N) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi VT^5 |f''(\mu_s)|}} e^{VT^3 \text{Re}[f(\mu_s)]} \cos(VT^3 \text{Im}[f(\mu_s)]). \quad (9)$$

と  $\cos$  項が現れる。この項は図 2 で見られるような振る舞いを与えるが、最速降下曲線は分枝に向かっているため、積分の寄与は鞍点だけでは書けない可能性があり、実際 (9) の結果は数値積分の結果とは定量的に一致しない。しかし、定性的傾向は、この鞍点の存在から説明できる。実際、数値計算の結果、確率分布が負になる領域が現れ、これは熱力学極限を取った熱力学ポテンシャルを出発点にしていることによる artifact であるが、この振る舞いも上記漸近形で説明できる。

### 3 確率分布関数から求めたキュムラント

確率分布関数が与えられれば、モーメント  $\langle N^n \rangle = \sum_N N^n P(N)$  と中心モーメント  $\delta N = N - \langle N \rangle$  を用いて、4 次までのキュムラントを以下のように表すことができる。

$$c_2(T, \mu) = \frac{1}{VT^3} \langle (\delta N)^2 \rangle \quad (10)$$

$$c_3(T, \mu) = \frac{1}{VT^3} \langle (\delta N)^3 \rangle \quad (11)$$

$$c_4(T, \mu) = \frac{1}{VT^3} [\langle (\delta N)^4 \rangle - 3\langle (\delta N)^2 \rangle^2] \quad (12)$$

特に、3 次・4 次のキュムラントは  $\alpha < 0$  の場合 2 次相転移点では発散する。前節で求めた確率分布関数からキュムラントを計算し、式 (1) から計算したキュムラントと比較したものが図 3 である。ここで、式 (4) の振

<sup>2</sup>一般には平均場近似のもとでも分岐点と分枝は存在しうる

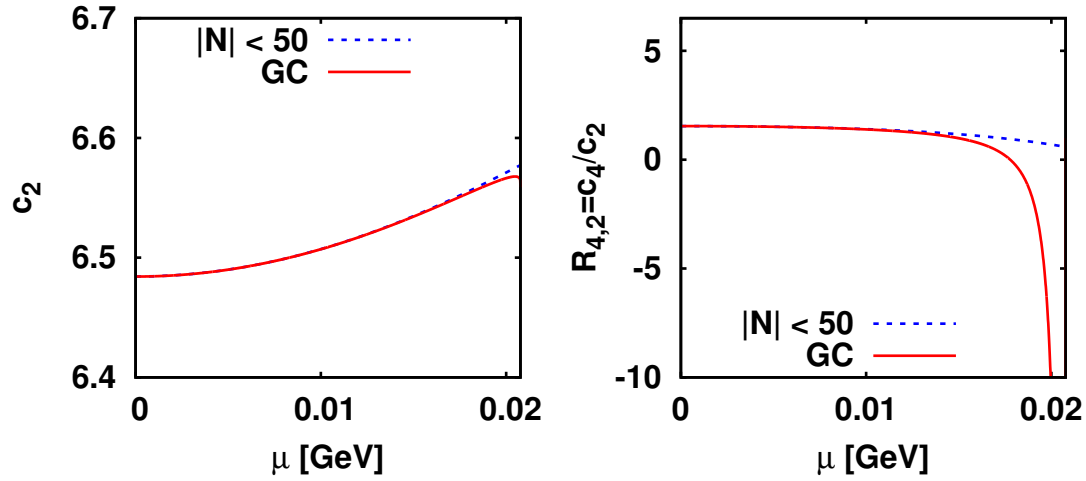


図 3: 2 次のキュムラント (左) と 4 次と 2 次の比 (右)。赤 (実線) は式 (1) から計算した熱力学極限、青 (点線) は確率分布関数から構成したもの

動積分は  $V = 30\text{fm}^3$  では  $|N| > 60$  で収束が得られなかったため、キュムラントの計算には数値的に確定した部分だけを用いている。図に見られるように、2 次のキュムラントはほぼ両者の一致が見られるが、4 次と 2 次の比では、臨界線上での発散する振る舞いは再現できておらず、より大きな体積の極限と、同時により大きな  $N$  での確率分布関数が必要であることを示唆している。

本研究では、ランダウ理論をベースに熱力学ポテンシャルから得られる保存チャージの確率分布関数を議論し、正準分配関数と解析性の関係に焦点を当てた。より現実に即した解析を行うには、臨界指数  $\alpha$  を与えられるような枠組みでの計算が必須であり、また体積の変化に対する系統的な解析を通じて、確率分布関数から得られるキュムラントの振る舞いを調べてなくてはならない。現在クォークメソン模型と汎関数繰り込み群による解析を進めている。

本研究は京都大学クォーク・ハドロン科学国際共同研究プログラム (YIPQS) の補助を受けています。

## 参考文献

- [1] M. Stephanov, K. Rajagopal, E. Shuryak, Phys. Rev. D **60** (1999) 114028.
- [2] M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **102** (2009) 032301.
- [3] F. Karsch, K. Redlich, Phys. Lett. B **695** (2011) 136.
- [4] B. Friman, F. Karsch, K. Redlich, V. Skokov, Eur. Phys. J. C **71** (2011) 1694.
- [5] M. M. Aggarwal, et al., Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 022302.
- [6] P. Braun-Munzinger, B. Friman, F. Karsch, K. Redlich, V. Skokov, Nucl. Phys. **A880** (2012) 48.
- [7] K. Morita, V. Skokov, B. Friman, K. Redlich, in preparation.
- [8] V. Skokov, K. Morita, B. Friman, Phys. Rev. D **83** (2011) 071502(R).