有限温度摂動論

日高 義将 (理研)

概 要

本講演の中から特に非相対論的な系での南部-Goldstone の定理について議論する．非相対論的な系で自発的対称性の破れが起きた時，南部-Goldstone ボソンがいくつ現れるかという問題は 2012 年まで未解決の問題だった．本稿では森の射影演算子法を用いて非相対論的な系での南部-Goldstone の数え方のルールを導出する．

1 導入

対称性とその自発的破れは，多体系の物理の重要で基本的な概念である．連続対称性が自発的に破れた場合には，南部-Goldstone (NG) モードと呼ばれるゼロモードが現れることが知られている [1, 2, 3]．例えば，ハドロン物理における π 中間子，強磁性体におけるスピン波，格子結晶中のフォノンがそれにあたる．しかしながら自発的対称性が破れた場合にいくつ NG モードが現れるかという問いは Lorentz 対称性がない場合には最近まで未解決問題だった [4]．Lorentz 対称性が存在する場合は 60 年代に破れた対称性の数が NG モードの数に一致し，その分散関係は線形となることが示された [1, 2, 3]．一方，Lorentz 対称性がない場合は，NG モードの数は必ずしも破れた対称性の数に一致せず，分散関係は非線形になっても良い．70 年代に Nielsen と Chadha (NC)[5] はエネルギーが運動量の奇数べきのものを type-I NG モード，偶数べきのものを type-II NG モードと分類した．また，彼らは type-I NG モードの数の 2 倍と type-II NG モードの数を足したものは，破れた対称性の数以上になるという不等式を導いた．強磁性体や Kon 凝縮相のように type-II NG モードが現れる知られている例ではすべて等号が成り立っている [6, 7]．90 年代に入ると電荷密度 Q_a が期待値を持つ場合に type-II の分散関係を持つ NG モードが現れることが有効理論を用いて Leutwyler によって明らかになり [8]，さらに 2000 年代に入り Schafer 等によって電荷密度の期待値そのものより $[Q_a, Q_b]$ の期待値が重要な役割を担い，$[Q_a, Q_b]$ の期待値が消える場合には NG mode の数は破れた対称性の数に等しいことが示された [7]．2011 年にこの定理は，渡辺-Brauner によって以下の不等式に拡張された [9, 10]:

$$N_{\mathrm{BS}} - N_{\mathrm{NG}} \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{rank}\langle [Q_a, Q_b]\rangle. \tag{1}$$

また，彼らはこの不等式は常に等式が成り立つことを予想した．

本稿では，(1) 式の等号が成り立つ事を示す．また Nielsen-Chadha とは異なる type-I と type-II NG の定義を $\langle [Q_a, Q_b]\rangle$ を用いて与える．Type-II NG モードの数は $\mathrm{rank}\langle [Q_a, Q_b]\rangle/2$ に等しく NC 不等式の等式が成り立つことも示す [11]．ゼロ温度の場合には低エネルギーの有効理論を用いた方法でも同じ結果が得られている [12]．

この目的のために，我々は森の射影演算子法 [13] を非相対論的な系に適用する．この方法で NG モードについての Hamilton(有限温度の場合は Lagevin) 方程式が導出される．ハミルトニアン形式の NG モードについては模型を用いて [14] で議論されている．我々は同様の議論を模型によらず非摂動的な方法で行なう．

以下では，並進対称性が自発的に破れていない場合を考える．また自発的に破れた対称性の保存電荷密度が

$$n_a(t, \boldsymbol{x}) = e^{-iP\cdot x} n_a(0, \boldsymbol{0}) e^{iP\cdot x} \tag{2}$$

と書ける場合に問題を限る．ここで P_μ は時空間の並進の演算子を表す．

2　森の射影演算子法

ここで森の射影演算子法を簡単に紹介する [13]．この方法は低エネルギー励起を議論する上で強力でかつ，非相対論的な場合の南部-Goldstone の定理を証明するのに重要な役割を担う．詳細な導出は [15, 16, 17, 18] を参照せよ．

まず，遅いモードに対応した演算子の組み $\{A_n(t,\boldsymbol{x})\}$ を考えよう．これは後で NG 場と破れた保存電荷密度に取る．ある演算子 $\mathcal{O}$ の熱平均を $\langle\mathcal{O}\rangle \equiv \mathrm{tr}\,\rho_{\mathrm{eq}}\mathcal{O}$ と定義する．ここで ρ_{eq} はカノニカルアンサンブルの密度演算子で

$$\rho_{\mathrm{eq}} \equiv \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{tr}\,e^{-\beta H}} \tag{3}$$

である．H はハミルトニアン，$\beta = 1/T$ は逆温度である．グランドカノニカルアンサンブルを考えたい場合は，化学ポテンシャル μ 及び保存電荷 N を導入し，H を $H - \mu N$ に置き換えればよい．

次に内積を導入しよう．ある演算子 $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ に対し，

$$(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) \equiv \frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau \langle e^{\tau H}\mathcal{O}_1 e^{-\tau H}\mathcal{O}_2^\dagger\rangle \tag{4}$$

と定義する．これは内積の性質，正定値性 $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_1) \geq 0$ と Hermite 対称性 $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2) = (\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_1)^*$ を満たす．この内積を使って以下の計量を定義しよう:

$$g_{nm}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \equiv (A_n(0,\boldsymbol{x}), A_m(0,\boldsymbol{y})). \tag{5}$$

また $g_{nm}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ の逆 $g^{ml}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})$ を

$$\int d^3y g_{nm}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) g^{ml}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}) = \delta_n^l \delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{6}$$

を満たすように定義する．ここで同じ添字が上付きと下付きに現れた場合に和を取る規則を用いた．上付きの演算子を

$$A^n(t,\boldsymbol{x}) \equiv \int d^3y g^{nm}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) A_m(t,\boldsymbol{y}) \tag{7}$$

と定義する．$g_{nm}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は A_n の 2 点関数の形で表されており，また $g^{ml}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は有効作用 $\beta\mathit{\Gamma}(A_n)$ の A_n に関する 2 階汎関数微分になる:

$$g^{ml}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{\delta^2 \beta\mathit{\Gamma}(A_n)}{\delta A_l(\boldsymbol{y})\delta A_m^\dagger(\boldsymbol{x})}. \tag{8}$$

ここで有効作用は生成母関数 $W(J^n)$ の Legendre 変換で与えられる:

$$\mathit{\Gamma}(A_n) = W(J^n) - \int d^3x J^m(\boldsymbol{x}) \frac{\delta W(J^n)}{\delta J^m(\boldsymbol{x})}, \tag{9}$$

及び,

$$e^{-\beta W(J^n)} = \mathrm{tr}\exp\left[-\beta H + \int d^3x A_n(0,\boldsymbol{x}) J^n(\boldsymbol{x})\right]. \tag{10}$$

ここで自由度を遅い変数とその他に分解するために，射影演算子 P を導入する．これは演算子 B に作用すると

$$PB(t,\boldsymbol{x}) \equiv \int d^3y A_n(0,\boldsymbol{x})(B(t,\boldsymbol{y}), A^n(0,\boldsymbol{x})) \tag{11}$$

となるように定義する．便利のため $Q \equiv 1 - P$ も定義しておく．これらは射影演算子の性質 $P^2 = P$，$Q^2 = Q$，及び $QP = PQ = 0$ を満たす．

紙面の都合上導出は参考文献 [13, 15, 16, 17, 18] にゆずり，森の射影演算子法による遅い変数に対する拡張された Langevin 方程式を以下に与える [13]:

$$\begin{aligned}\partial_t A_n(t, \boldsymbol{x}) = &\int d^3y i\Omega_n{}^m(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})A_m(t,\boldsymbol{y}) \\ &- \int_0^\infty ds \int d^3y K_n{}^m(t-s, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})A_m(s,\boldsymbol{y}) + R_n(t,\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{12}$$

ここで $i\Omega_n{}^m(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は可逆な項，$K_n{}^m(t-s, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ は記憶関数，$R_n(t,\boldsymbol{x})$ はノイズ項を表し，以下のように定義される:

$$i\Omega_n{}^m(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \equiv (i\mathcal{L}A_n(0,\boldsymbol{x}), A^m(0,\boldsymbol{y})) = -\frac{i}{\beta}\langle[A_n(0,\boldsymbol{x}), A^{m\dagger}(0,\boldsymbol{y})]\rangle, \tag{13}$$

$$K_n{}^m(t-s, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \equiv -\theta(t-s)(i\mathcal{L}R_n(t,\boldsymbol{x}), A^m(s,\boldsymbol{y})), \tag{14}$$

$$R_n(t,\boldsymbol{x}) \equiv e^{itQ\mathcal{L}}Qi\mathcal{L}A_n(0,\boldsymbol{x}). \tag{15}$$

ここで $\mathcal{L}$ は Liouville 演算子 $\mathcal{L}\mathcal{O} \equiv [H, \mathcal{O}]$，$\theta(t)$ は階段関数である．この方程式は演算子に関する恒等式である．つまり (12) 式は Liouville 方程式 $\partial_t A_n = i\mathcal{L}A_n$ に等価である．また，ノイズ項は $A_m(0,\boldsymbol{x})$ に $(A_m(0,\boldsymbol{x}), R_n(t,\boldsymbol{y})) = 0$ となるように構成されている．この性質は $(A_n(t,\boldsymbol{x}), A_m(0,\boldsymbol{y}))$ のような 2 点関数を考える場合には，ノイズの項を落として良いことを意味する．従って A_n の分散関係を求める際には，$i\Omega_n{}^m(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ と $K_n{}^m(t, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ の性質が分かれば良い．運動量空間でこの方程式は，行列の記法を用いて

$$\partial_t A(t,\boldsymbol{k}) = i\Omega(\boldsymbol{k})A(t,\boldsymbol{k}) - \int dsK(t-s,\boldsymbol{k})A(s,\boldsymbol{k}) + R(t,\boldsymbol{k}) \tag{16}$$

と書くことができる．この方程式が我々の解析の出発点となる．

3 南部-Goldstone の定理

有効作用に対する南部-Goldstone の定理から始めよう [3]．まず保存電荷

$$Q_a = \int d^3x n_a(t,\boldsymbol{x}) \tag{17}$$

の組みを考える．これらはハミルトニアンと可換である: $[Q_a, H] = 0$．対称性が自発的に破れた時，

$$-i\langle[Q_a, \phi_i(t,\boldsymbol{x})]\rangle \equiv [M_{n\phi}]_{ai} \tag{18}$$

でかつ $\det M_{n\phi} \neq 0$ を満たすある行列 $M_{n\phi}$ が存在する．ここで i と a は 1 から破れた対称性の数 N_{BS} まで走るものとする．また，この節では $\phi_i(x)$ は保存電荷密度ではないと仮定する．また一般性を失うことなく ϕ_i を実に取るものとする．

ここで，$A_n = (\Phi_i, N_a)$ として有効ポテンシャル $\mathcal{V}(\Phi_i, N_a) \equiv \Gamma(A_n)/V$ を考よう．ここで V は空間の次元，Φ_i は NG 場を含む場の組み，N_a は破れた保存電荷を含む組みとする．NG 場を ϕ_i，その他を φ_j として $\Phi = (\phi_i, \varphi_j)$ と書く．同様に，自発的に破れた保存電荷密度を n_a，その他を n'_b として $N = (n_a, n'_b)$ と書く．

有効作用は，以下の無限小変換に対して不変である:

$$\delta\Phi_i = -i\epsilon^a\langle[Q_a,\Phi_i]\rangle \equiv \epsilon^a[M_{N\Phi}]_{ai}, \tag{19}$$
$$\delta N_b = -i\epsilon^a\langle[Q_a,N_b]\rangle \equiv \epsilon^a[M_{NN}]_{ab}. \tag{20}$$

つまり，

$$[M_{N\Phi}]_{ai}\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta\Phi_i} + [M_{NN}]_{ac}\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta N_c} = 0 \tag{21}$$

が成り立つ．これは有効作用の恒等式である．もし Φ_i と N_a が Lie 群の線形表現に属しているならこれらは $[M_{N\Phi}]_{ai} = -i[T_a\Phi]_i$ 及び $[M_{NN}]_{ac} = f_{ab}{}^cN_c$ となる．ここで，T_a と $f_{ab}{}^c$ はそれぞれ生成子と構造定数である．(21) 式を Φ_i または N_a に関して汎関数微分すると

$$\frac{\delta[M_{N\Phi}]_{ai}}{\delta\Phi_j}\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta\Phi_i} + [M_{N\Phi}]_{ai}\frac{\delta^2\mathcal{V}}{\delta\Phi_i\delta\Phi_j} + [M_{NN}]_{ac}\frac{\delta^2\mathcal{V}}{\delta N_c\delta\Phi_j} = 0, \tag{22}$$
$$\frac{\delta[M_{NN}]_{ac}}{\delta N_b}\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta N_c} + [M_{N\Phi}]_{ai}\frac{\delta^2\mathcal{V}}{\delta\Phi_i\delta N_b} + [M_{NN}]_{ac}\frac{\delta^2\mathcal{V}}{\delta N_c\delta N_b} = 0 \tag{23}$$

が得られる．停留点で (22) と (23) 式の第一項は落ちて NG 場と破れた保存電荷に関する項のみが残る．この時 (22) と (23) 式は行列表記を用いて

$$M_{n\phi}\mathcal{V}^{\phi\phi} + M_{nn}\mathcal{V}^{n\phi} = 0, \tag{24}$$
$$M_{n\phi}\mathcal{V}^{\phi n} + M_{nn}\mathcal{V}^{nn} = 0 \tag{25}$$

となる．ここで $\alpha,\beta = (\phi_i, n_a)$ として $\mathcal{V}^{\alpha\beta} \equiv \delta^2\mathcal{V}/(\delta\alpha\delta\beta)$ という表記を用いた．従って $(\phi_i^{(b)}, n_a^{(b)}) = ([M_{\phi n}]_{ib}, [M_{nn}]_{ab})$ は $\mathcal{V}^{\alpha\beta}$ のゼロ固有値を持つ固有ベクトルと見ることができる．この独立な固有ベクトルの数は破れた対称性の数に等しい．Lorentz 対称性がある場合は，Lorentz スカラーでない M_{nn} は消え，$k_\mu = 0$ での伝播関数の逆 $\mathcal{V}^{\phi\phi}$ は (24) 式より消える．これは $k^2 = 0$ に極を持つことを意味する．この NG モードの数は独立な固有ベクトルの数，つまり破れた対称性の数に等しい．また分散関係は Lorentz 対称性から線形 $\omega = |\boldsymbol{k}|$ となる．これが Lorentz 不変性がある場合の NG モードの定理である．しかしながら Lorentz 不変でない場合は，NG モードの数と破れた対称性の数は必ずしも一致しない．NG モードの数え方の一般的なルールを導出するために，一般化された Lagevin 方程式 [(12) 式] の演算子を $A_n(x) = \big(\tilde{\phi}_i(x), \tilde{n}_a(x)\big)$ に選ぼう．ここで $\tilde{\phi}_i(x) \equiv \phi_i(x) - \langle\phi_i(x)\rangle$ および $\tilde{n}_a(x) \equiv n_a(x) - \langle n_a(x)\rangle$ である．ここで系に他のゼロモードは存在しないものとする．もしそうでない場合は，そのモードに対応した演算子を遅い変数として A_n に加える必要がある．

さて，ここで記憶関数のラプラス変換 $K(z,\boldsymbol{k})$ を考えよう．今低エネルギー励起に興味があるので，$z \to 0$ と $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}$ の極限を考える．保存則から $\mathcal{L}\tilde{n}^a(z,\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}^a(z,\boldsymbol{k})$ なので $K_{nn}(z,\boldsymbol{k}) \sim \boldsymbol{k}^2$, $K_{n\phi}(z,\boldsymbol{k}) \sim \boldsymbol{k}$ となり $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ で消える．ここで，$\boldsymbol{j}^a(z,\boldsymbol{k})$ は流れの演算子である．唯一，$K_{\phi\phi}(z,\boldsymbol{k})$ が $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ で生き残る可能性がある．$K_{\phi\phi}(z,\boldsymbol{0})$ はテーラー展開可能であると仮定して

$$\beta K_{\phi\phi}(z,\boldsymbol{0}) = \delta M_{\phi\phi} + L_{\phi\phi} + z\delta Z_{\phi\phi} + \mathcal{O}(z^2) \tag{26}$$

と展開できる[1]．右辺の第一項 $\delta M_{\phi\phi}$ は $M_{\phi\phi}$ の補正を与える項である．第 2 項 $L_{\phi\phi}$ は散逸を記述する項で Onsager 係数または輸送係数と呼ばれる量である．これらは

[1]臨界点，A_n 以外にゼロモードが存在する場合や低次元系ではテーラー展開できない事がある．

実で，$\delta M^T_{\phi\phi} = -\delta M_{\phi\phi}$ 及び $L^T_{\phi\phi} = L^T_{\phi\phi}$ を満たす．$L_{\phi\phi}$ はスペクトル関数のゼロ運動量での値に関係しゼロ温度では通常消える量である．$M_{\phi\phi}(\boldsymbol{k})$ と $K_{\phi\phi}(z,\boldsymbol{k})$ は $M_{\phi\phi}(\boldsymbol{k}) - K_{\phi\phi}(z,\boldsymbol{k})$ の形で方程式に現れるので，$\delta M_{\phi\phi}$ は $M_{\phi\phi} \to M_{\phi\phi} - \delta M_{\phi\phi}$ として繰り込むことによって $K_{\phi\phi}(z,\boldsymbol{k})$ から消去することができる．第三項目 $\delta Z_{\phi\phi}$ は波動関数の補正を表す．以下では，$\delta Z_{\phi\phi}$ を落として計算する．これは後で正当化する．また，$L_{\phi\phi} = 0$ となるゼロ温度の場合を考える．この時，運動方程式は

$$\partial_0 \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k}) \\ \tilde{n}(t,\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\Omega_\phi{}^\phi(\boldsymbol{k}) & i\Omega_\phi{}^n(\boldsymbol{k}) \\ i\Omega_n{}^\phi(\boldsymbol{k}) & i\Omega_n{}^n(\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}(t,\boldsymbol{k}) \\ \tilde{n}(t,\boldsymbol{k}) \end{pmatrix} \tag{27}$$

となる．ここで，

$$i\Omega_\phi{}^\phi(\boldsymbol{k}) \equiv M_{\phi\phi}(\boldsymbol{k})\Gamma^{\phi\phi}(\boldsymbol{k}) + M_{\phi n}(\boldsymbol{k})\Gamma^{n\phi}(\boldsymbol{k}), \tag{28}$$

$$i\Omega_\phi{}^n(\boldsymbol{k}) \equiv M_{\phi\phi}(\boldsymbol{k})\Gamma^{\phi n}(\boldsymbol{k}) + M_{\phi n}(\boldsymbol{k})\Gamma^{nn}(\boldsymbol{k}), \tag{29}$$

$$i\Omega_n{}^\phi(\boldsymbol{k}) \equiv M_{n\phi}(\boldsymbol{k})\Gamma^{\phi\phi}(\boldsymbol{k}) + M_{nn}(\boldsymbol{k})\Gamma^{n\phi}(\boldsymbol{k}), \tag{30}$$

$$i\Omega_n{}^n(\boldsymbol{k}) \equiv M_{n\phi}(\boldsymbol{k})\Gamma^{\phi n}(\boldsymbol{k}) + M_{nn}(\boldsymbol{k})\Gamma^{nn}(\boldsymbol{k}) \tag{31}$$

とした．$M_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})$ と $\Gamma^{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})$ は $-i\langle[\alpha(0,\boldsymbol{x}),\beta(0,\boldsymbol{0})]\rangle$ と $\delta^2\Gamma/(\delta\alpha(\boldsymbol{x})\delta\beta(\boldsymbol{0}))$ の Fourier 変換したもので，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$ でそれぞれ $M_{\alpha\beta}$ と $\mathcal{V}^{\alpha\beta}$ に一致する．(27) 式は Hamilton 方程式の形をしており，$M_{\alpha\beta}$ は α と β の Poisson 括弧，Γ の場の 2 次の項はハミルトニアンとみなすことができる．$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$ で，$i\Omega_n{}^\phi(\boldsymbol{0})$ と $i\Omega_n{}^n(\boldsymbol{0})$ は (24) と (25) 式から消える．これは電荷保存則 $dQ_a/dt = 0$ と等価である．また，(24) と (25) 式より

$$i\Omega_\phi{}^n(\boldsymbol{0}) = F^{-1} \equiv (M_{\phi n} - M_{\phi\phi}(M_{n\phi})^{-1}M_{nn})\mathcal{V}^{nn}, \tag{32}$$

$$i\Omega_\phi{}^\phi(\boldsymbol{0}) = -F^{-1}G \tag{33}$$

を得る．ここで $G = M_{nn}M_{\phi n}{}^{-1}$，$F$ は場のくりこみ定数を除いて NG モードの崩壊定数 (行列) とみなせる．最終的に運動方程式は $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$ で，

$$\partial_0\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{0}) = -F^{-1}G\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{0}) + F^{-1}\tilde{n}(t,\boldsymbol{0}), \tag{34}$$

$$\partial_0\tilde{n}(t,\boldsymbol{0}) = 0 \tag{35}$$

となる．(34) 式に ∂_0 を作用させることで

$$\partial_0^2\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{0}) = -F^{-1}G\partial_0\tilde{\phi}(t,\boldsymbol{0}) \tag{36}$$

を得る．もし $\det F^{-1} = 0$ なら，保存電荷 (34) 式と結合しない NG 場が存在することになる．そのようなモードは偶発的で NG モードとみなすことはできない．従って $\det F^{-1} = 0$ の場合は以下では考えない事とする．$F^{-1}G$ の固有値は M_{nn} の反対称性から純虚数のペア $\pm i\lambda_n$ (λ_n は実) を持つ．このペアの数 $\mathrm{rank}(F^{-1}G)/2 = \mathrm{rank}(M_{nn})/2$ は，質量が有限のモードの数に等しく，他のモードは質量ゼロモードとなる．従って，

$$N_{\mathrm{BS}} - N_{\mathrm{NG}} = \frac{1}{2}\mathrm{rank}(M_{nn}) \tag{37}$$

を満たす．(37) 式は渡辺-Brauner 予想に他ならない．

次に，NG モードを分類しよう．$G\tilde{\phi}_{\mathrm{I}} = 0$ を満たすものを type-I NG 場と定義し，$\tilde{\phi}_{\mathrm{I}}$ に独立な場を type-II NG 場 $\tilde{\phi}_{\mathrm{II}}$ とする．明らかに type-I NG 場の数 $N_{\text{type-I}}$ は，$N_{\mathrm{BS}} - \mathrm{rank}(M_{nn})$ に等しい．これは，$\partial_0^2\tilde{\phi}_{\mathrm{I}} = 0$ に従うのでゼロモードである．一方 type-II NG モードは $\mathrm{rank}(M_{nn})/2 \equiv N_{\text{type-II}}$ に等しい．$N_{\mathrm{NG}} = N_{\text{type-I}} + N_{\text{type-II}}$ と (37) 式より，

$$N_{\mathrm{BS}} = N_{\text{type-I}} + 2N_{\text{type-II}} \tag{38}$$

が従う．これは NC 不等式の等号に対応する [5]．

ここで波動関数の補正項 $\delta Z_{\phi\phi}$ の効果について考察し NG モードの数え方のルールには影響が無いことを確認しておこう．$\delta Z_{\phi\phi}$ による補正は ∂_0^2 に $(1+\delta Z_{\phi\phi}G^T\mathcal{V}^{nn}G)\partial_0^2$ として与えられる．type-I NG については，この補正は $G\tilde{\phi}_{\mathrm{I}}=0$ のため効かない．一方 type-II NG モードについては，2 階微分は高次の寄与になる．従って波動関数の補正項は NG モードの数え方のルールを変更しないことがわかる．

4　陽な対称性の破れと質量公式

ここで陽な対称性の破れがあるときの NG モードの質量について考察しておこう．ここでは陽な対称性の破れの項が $\delta V=\Phi_i h^i$ の形を持つ特別な場合に問題を限る．この場合陽な破れの効果は，(22) 式から以下のように与えられる:

$$[i{\Omega_n}^{\phi}(\mathbf{0})]_{ai}=\frac{\delta[M_{n\Phi}]_{aj}}{\delta\Phi_i}h^j. \tag{39}$$

ここで $\delta\mathcal{V}/\delta\Phi_i=-h^i$ を用いた．従って運動方程式は

$$\partial_0^2\tilde{\phi}(t,\mathbf{0})=-F^{-1}G\partial_0\tilde{\phi}(t,\mathbf{0})+F^{-1}i{\Omega_n}^{\phi}(\mathbf{0})\tilde{\phi}(t,\mathbf{0}) \tag{40}$$

となる．一般の陽な破れの項に対してはこの方程式の解は複雑である．ここでは簡単な場合を考えてみよう．陽な対称性の破れの項は， type-I と type-II 場を混ぜないような場合を考える．つまり， $F^{-1}i{\Omega_n}^{\phi}(\mathbf{0})=[F^{-1}i{\Omega_n}^{\phi}]_{\text{type-I}}\oplus[F^{-1}i{\Omega_n}^{\phi}]_{\text{type-II}}$ となる場合を考える．この時 $\tilde{\phi}_{\mathrm{I}}$ の運動方程式は,

$$\partial_0^2\tilde{\phi}_{\mathrm{I}}(t,\mathbf{0})=[F^{-1}i{\Omega_n}^{\phi}]_{\text{type-I}}\tilde{\phi}_{\mathrm{I}}(t,\mathbf{0}) \tag{41}$$

となる．従って，type-I NG modes についての質量行列は

$$m^2_{\text{type-I}}=-[F^{-1}i{\Omega_n}^{\phi}]_{\text{type-I}}=\mathcal{O}(h) \tag{42}$$

となる．これは一般化された Gell-mann–Oakes–Renner 関係式 [19, 20] に他ならない．一方，$\tilde{\phi}_{\mathrm{II}}$ についての運動方程式は,

$$F^{-1}G\partial_0\tilde{\phi}_{\mathrm{II}}(t,\mathbf{0})=i[F^{-1}i{\Omega_n}^{\phi}]_{\text{type-II}}\tilde{\phi}_{\mathrm{II}}(t,\mathbf{0}) \tag{43}$$

となる．ここで h の高次項になる $\partial_0^2\tilde{\phi}_{\mathrm{II}}(t,\mathbf{0})$ の項を落とした．(43) 式の中で $\partial_0\sim h$ なので，質量行列は

$$m^2_{\text{type-II}}=\mathcal{O}(h^2) \tag{44}$$

となる．従って type-I と type-II の NG モードは異なる h のオーダーを持つことがわかる．Type-I 及び type-II NG モードの質量の 2 乗がそれぞれ h 及び h^2 となる．また type-I 及び type-II NG モードの質量行列のオーダーはモード間の相互作用がある場合にも変わらない．有限運動量依存性は $h\sim\boldsymbol{k}^2$ に対応し，これは type-I NG モードの分散関係が $\omega\sim|\boldsymbol{k}|$，type-II NG モードの分散関係が $\omega\sim\boldsymbol{k}^2$ となることに対応する．この場合 type-I と type-II の分類は Nielsen-Chadha のものと同じとなる．

5 まとめ

ここでは非相対論的な場合の NG モードの数え方のルール [(37) , (38) 式] を導いた．この方法は模型によらず一般的に成り立つ．模型の詳細は期待値や場の交換関係及び有効作用の 2 階汎関数微分に反映する．ここでは $\det\langle[Q_a, \phi_i]\rangle \neq 0$ と ϕ_i は保存電荷密度ではないと仮定した．もし，保存電荷で $\langle[Q'_a, Q'_b]\rangle \neq 0$ を満たし，すべての ϕ_i と Q_b $(\neq Q'_a)$ に対して $\langle[Q'_a, \phi_i]\rangle = \langle[Q'_a, Q_b]\rangle = 0$ となる Q'_a が存在する時，Q'_a も type-II NG 場になる[2]． これは本稿の議論をそのまま拡張する事で導くことができる．これらのモードの数は，$\mathrm{rank}[Q'_a, Q'_b]/2$ に等しく，(37) と (38) 式は変更を受けない．

本稿ではゼロ温度の場合について議論したが，有限温度の場合には $M_{\phi\phi}$ を $M_{\phi\phi} + L_{\phi\phi}$ に置き換える事によって同様に NG モードの数え方のルールを構成される．

参考文献

[1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1.,” *Phys.Rev.* **122** (1961) 345–358.

[2] J. Goldstone, “Field Theories with Superconductor Solutions,” *Nuovo Cim.* **19** (1961) 154–164.

[3] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, “Broken Symmetries,” *Phys. Rev.* **127** (1962) 965–970.

[4] T. Brauner, “Spontaneous Symmetry Breaking and Nambu-Goldstone Bosons in Quantum Many-Body Systems,” *Symmetry* **2** (2010) 609–657, `arXiv:1001.5212 [hep-th]`.

[5] H. B. Nielsen and S. Chadha, “On How to Count Goldstone Bosons,” *Nucl.Phys.* **B105** (1976) 445.

[6] V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, “Spontaneous symmetry breaking with abnormal number of Nambu-Goldstone bosons and kaon condensate,” *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 111601, `arXiv:hep-ph/0108178`.

[7] T. Schafer, D. T. Son, M. A. Stephanov, D. Toublan, and J. J. M. Verbaarschot, “Kaon condensation and Goldstone’s theorem,” *Phys. Lett.* **B522** (2001) 67–75, `arXiv:hep-ph/0108210`.

[8] H. Leutwyler, “Nonrelativistic effective Lagrangians,” *Phys.Rev.* **D49** (1994) 3033–3043, `arXiv:hep-ph/9311264 [hep-ph]`.

[9] H. Watanabe and T. Brauner, “On the number of Nambu-Goldstone bosons and its relation to charge densities,” *Phys. Rev.* **D84** (2011) 125013, `arXiv:1109.6327 [hep-ph]`.

[10] H. Watanabe and T. Brauner, “Spontaneous breaking of continuous translational invariance,” *Phys.Rev.* **D85** (2012) 085010, `arXiv:1112.3890 [cond-mat.stat-mech]`.

[11] Y. Hidaka, “Counting rule for Nambu-Goldstone modes in nonrelativistic systems,” `arXiv:1203.1494 [hep-th]`.

[2] よく知られた例は，Heisenberg 模型である．そこではスピンの場は保存電荷に対応し，保存電荷でない NG 場は存在しない

[12] H. Watanabe and H. Murayama, "Unified Description of Nambu-Goldstone Bosons without Lorentz Invariance," *Phys.Rev.Lett.* **108** (2012) 251602, `arXiv:1203.0609 [hep-th]`.

[13] H. Mori, "Transport, collective motion, and brownian motion," *Prog. Theor. Phys.* **33** no. 3, (1965) 423–455.

[14] Y. Nambu, "Spontaneous breaking of lie and current algebras," *J. Stat. Phys.* **115** (2004) 7–17.

[15] S. Nordholm and R. Zwanzig, "A systematic derivation of exact generalized brownian motion theory," *Journal of Statistical Physics* **13** (1975) 347–371.

[16] R. Zwanzig, *Nonequilibrium Stastisical Mechanics*. Oxford University Press, 2001.

[17] J. Rau and B. Muller, "From reversible quantum microdynamics to irreversible quantum transport," *Phys.Rept.* **272** (1996) 1–59, `arXiv:nucl-th/9505009 [nucl-th]`.

[18] U. Balucani, M. H. Lee, and V. Tognetti, "Dynamical correlations," *Physics Reports* **373** no. 6, (2003) 409 – 492.

[19] D. Son and M. A. Stephanov, "Pion propagation near the QCD chiral phase transition," *Phys.Rev.Lett.* **88** (2002) 202302, `arXiv:hep-ph/0111100 [hep-ph]`.

[20] D. Son and M. A. Stephanov, "Real time pion propagation in finite temperature QCD," *Phys.Rev.* **D66** (2002) 076011, `arXiv:hep-ph/0204226 [hep-ph]`.