

# 情報、熱力学、そして統計力学\*

丸山 耕司  
大阪市立大学大学院理学研究科

## I. 悪魔のパラドックス

物理と情報の結びつきに関する議論の歴史は長い。20世紀半ばに Shannon により情報理論が数学的厳密さを伴って生まれる以前にも、陰に陽に情報は物理の中に顔を出してきた。本稿でレビューする Maxwell の悪魔のパラドックスをめぐる論争でも、早い段階から観測（という情報取得）行為の物理的効果についての認識があったし、量子力学の基礎に関連した Einstein-Podolsky-Rosen(EPR) パラドックスのように、情報が超光速で伝達されて物理的状态に影響を与えることの是非が議論されることもあった。しかし、「情報」という言葉のもつ漠としたイメージや、「悪魔」のような比喩が先行した印象もあり、物理と情報の関わりという話題については様々な誤解も多い。それどころか、専門を同じくする研究者間でもニュアンスの食い違いにより不毛な議論に陥ることさえある。本稿では、そういった誤解のタネをできるだけつづしながら、Maxwell の悪魔のパラドックスとその解決への道筋を中心として情報と物理、特に熱力学、そして統計力学との関わりあいを紹介したい。

まず、情報の基本的な定量化法を復習しておこう。ごく単純に言って、情報とはそれを知ることの意味や価値のあること、驚きのあること、である。そして、その価値や驚きが大きい（出現確率が低い）ほど、情報の量も大きいと考える。すると、情報量は、その情報が現れる確率の単調減少（連続）関数と見てよさそうだ。さらに、情報量は加法的、つまり、 $A, B$  というふたつの独立な（相関のない）情報をもたらされたときの全情報量は、それぞれの情報量の和であるはずだ。情報量を  $I$  で表せば、 $I(A, B) = I(A) + I(B)$  となる。一方、独立な事象の確率は、 $p(A, B) = p(A)p(B)$  であるので、 $I$  の関数形としてふさわしいものとして  $\log$  があることがすぐに分かる（実際、これが上の要請下の唯一の関数形である）。そこで、確率  $p$  で現れる情報のもつ情報量は、 $I = -\log_2 p$  と定義する。対数の底の 2 は、定数係数分の不定性をなくしつつ、もっとも基本的な二値情報を基準とするためである。

さて、ある確率変数  $X$  をひとつずつ独立に生成する情報源  $\mathcal{X}$  を考える。確率変数  $X$  が有限個の  $x_i (i \in \{1, 2, \dots, N\})$  からなり、各々の  $x_i$  が現れる確率が常に  $p_i$  で表されるとき、各  $x_i$  がもつ情報量  $-\log p_i$  の平均

$$H(X) := -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \quad (1)$$

を、この情報源のもつ (Shannon) エントロピーとよぶことにする。単位はビットである。これを  $H(p_i)$  とか  $H(\{p_i\})$  などと表記することもある。ここで、ある  $j$  について  $p_j = 0$  となる場合は、 $0 \log 0$  が現れるが、これは極限の値を採用

してゼロと定義する。二値情報の場合、どちらかの確率が 1 でもう片方が 0 の場合は  $H = 0$ 、どちらの現れる確率も  $1/2$  の場合は  $H = 1$  となって最大値をとる。エントロピー  $H$  が大きいほど、次に現れる情報についての不確定さが大きく、その情報を得たときの価値が高いことになる。そして、Shannon エントロピーは、確率  $\{p_i\}$  だけで特徴づけられる量である。

さて、話を物理に戻し、Maxwell の悪魔のパラドックス [1] を吟味していこう。情報が論じられる物理の話題の中でも、このパラドックスはその解決に定量的な意味での情報の概念が必要だったという意味で、情報の果たす役割の明確さが際立つものである。19 世紀半ば、J. C. Maxwell は、もし個々の気体分子の状態を観測できる存在（悪魔）がいれば、温度一定の気体を高温部と低温部に分離することができ、熱力学第 2 法則が破られる可能性を示した。何らかの（人為的）操作が許されるなら、第 2 法則は破られてもよいのだろうか。

この有名なパラドックスを、初めて情報（量）と関連づけてとらえて解決を試みたのは、20 世紀初めの Szilard (“シラード”が近い発音らしい) である。彼は、図 1 のような、分子がひとつだけからなる“気体”の入った体積  $V$  の箱を考えた。初め、図で (a) の状態では分子が箱の中のどこをどう運動しているかは分からない。ここで、薄い壁をさつと挿入し、箱の体積を二等分する。観測者 (= 悪魔) は、分子の運動状態を変えることなく、分子が壁の右側にあるか左側にあるかだけを測定する (図 1(b))。ここでは右側にあったとしよう。観測者は挿入した壁の右側におもりを結びつけ、箱を温度  $T$  の熱浴に接触させ、この一分子気体を体積  $V$  まで等温膨張させる。この膨張過程 (図 1(b)  $\rightarrow$  (c)  $\rightarrow$  (d)) で、気体は熱浴から熱量  $Q$  を受け取り、おもりに対し、

$$W = kT \int_{\frac{V}{2}}^V V^{-1} dV = kT \ln 2 \quad (2)$$

だけの仕事を行う ( $k$  は Boltzmann 定数)。等温過程であるから、 $W = Q$  である。気体は再び体積  $V$  を占める状態になるわけだから、もとの状態 (図 1(a)) に戻った、つまり熱機関としてサイクルが閉じたことになる。ところが、この熱機関は熱浴からの熱量  $Q$  を力学的仕事  $W$  に 100% の効率で変換しており、明らかに熱力学第 2 法則を破っている。(熱力学的な) エントロピー収支で見れば、エンジンは完全に元の状態に戻るから変化なし、熱浴は熱  $Q$  をエンジンに与えているので  $Q/T = k \ln 2$  だけ下がっている。これが Szilard エンジンによる Maxwell の悪魔の表現である。

第 2 法則が破られないために必要であろう仕事  $W$  の消費理由 (エントロピー  $k \ln 2$  の増加理由) について、Szilard は図 1(b) での情報取得 (観測) にあると考えた。そして、 $k \ln 2$  というエントロピー変化量をこの情報取得に関連した基本的量であるとした [2]。定数係数は別として、これはまさに先に導入した 1 ビットの情報量に対応する量であ

\* 「数理科学」Vol.50-3, pp.28-34, サイエンス社, 2012. に掲載の記事に大幅に加筆・修正したもの。

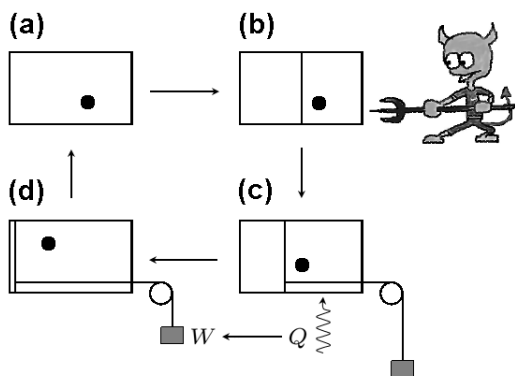


FIG. 1: Szilard が考案した一分子気体エンジンによる思考実験. 分子の位置情報を得ることにより, 熱力学第 2 法則を破る (ようにみえる).

る. その意味づけの正確さはともかく, Shannon による情報理論確立の 20 余年も前の, 物理の中での情報の役割がはっきりと認識された最初の例だろう. 意味付けの点で注意すべきは, Shannon エントロピーが確率のみで定義されたのに対し, 熱力学で現れるエントロピーには確率の概念が直接関わらないことである. (統計力学では当然事情は異なる.)

悪魔のパラドックスの解決に関しては, この後もしばらくは観測がエントロピーを増やす主犯だと信じられたようだ. その大きな拠り所となったのは, Brillouin が Szilard のアイデアをベースに試みた, 観測によって生じるエントロピー変化量の計算である. 具体的には, 分子運動の観測に光を用いた場合を考え, 分子による光の散乱によって生じる系のエントロピー変化を計算し, これがパラドックス中のエントロピー減少を補うのに十分な量であることを示したのだ [3]. ところが, これでもまだ悪魔はしたたかに生きていた. 観測に伴うエントロピー増加は原理的にいくらでも小さくできることが, 後に示されることになる.

## II. LANDAUER の原理

IBM の Landauer は, 「計算」を実行する上での究極のエネルギー効率を研究する中で, 情報処理の物理的側面を真っ向からとらえた. キーとなる事実は, すべての情報は何らかの物理的実体を媒体として保持・伝達され, すべての情報処理はそれらに直接 (物理的に) 働きかけることで実行される, ということである. であれば, すべての情報処理は媒体に物理的に働きかけて状態を変化させる, 物理的な過程に対応しているはずである.

ある情報処理を, 入力  $x$  に対して  $y = f(x)$  を出力する写像  $f$  として表そう. この写像  $f$  が単射である場合, つまり入力  $x$  と出力  $y$  が 1 対 1 に対応する場合 (例えば, NOT ゲート=ビット反転処理) は, 逆写像  $f^{-1}$  によって出力  $y$  から元の入力  $x = f^{-1}(y)$  を一意に得ることができ. 言い換えれば, ある情報処理が単射写像であるときは, その処理は “可逆” である. 上で述べた対応関係を考えると, 可逆な情報処理は可逆な物理的過程で実行可能であることになり, 原理的にはエントロピー増加, 散逸のない過程で遂

行可能となる.

では, 入力と出力が 1 対 1 に対応しない情報処理を考えよう. 2 ビットの入力から 1 ビットの出力を得る処理 (AND や OR など) はすべてこれに相当するが, 1 ビット処理でも, 0 か 1 にかかわらず出力を 0 にしてしまうような処理は 2 対 1 の対応であり, 単射ではない. これを情報の消去とよぶ. 情報処理を担う物理系 (レジスタ, あるいはメモリー) について考えると, 消去によって許される自由度が減り, エントロピーが減少, その結果, 自由エネルギーが増大する. これは, 正のエネルギーの消費が必要であること, その分は環境に散逸してしまうことを意味する. 1 ビットの情報消去の場合は, エネルギー散逸量は  $kT \ln 2$  (エントロピー  $k \ln 2$ ) となる. Landauer はこれを一般化し, 不可逆な情報処理はすべて物理的には散逸を伴うと主張した (Landauer の消去原理 [4]). 逆に, 可逆な処理だけで全体の情報処理を構成することができれば, (理想的には) 散逸ゼロで計算が実行できる. 図 2 に一分子気体でメモリーをモデル化したときの具体的な消去プロセスの例を示す. “0” と “1” を分ける壁を引き抜いたときに気体のエントロピーが増大し (非可逆過程), これが標準状態 “0” への等温圧縮の際に熱浴へと散逸する.

Landauer の原理に対しては反論も根強くある. たとえば, 情報を消去するのに, メモリーがすでに標準状態 (例えば図 2 の “0”) にあることが分かっていたらそのまま何もせず, “1” の状態にあれば該当する体積  $V/2$  をゆっくり左側 (“0” 側) ヘスライドさせればいいではないか, というものなどだ [5]. 体積一定の領域をスライドさせるのに仕事は必要ない. しかし, この方法だとメモリー状態の観測結果に依存した操作の履歴が外部に残ってしまう. 正味の結果として, 情報が消去されたことにならないのだ. したがって, メモリー状態によらず, 図 2 のように, 常に同じ手順で標準状態 “0” へ戻さなければならない. また, 図 2 のような消去過程は, 逆にたどることで元のエントロピーをもつ状態に戻すことができる, したがって非可逆な情報処理が可逆な物理過程で実現されたことになる, という批判もある [6]. だが, 物理系が保持していた元の情報

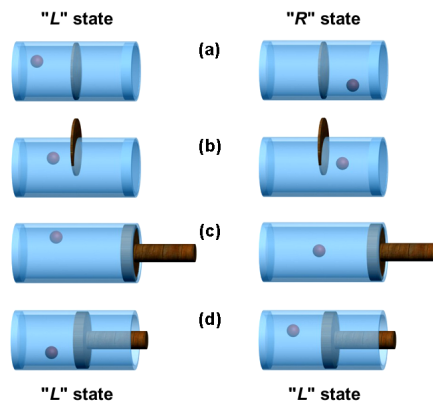


FIG. 2: 情報消去の熱力学的過程. 一分子気体でメモリーをモデル化し, 分子の位置 (左 “0” か右 “1” か) で記録された二値情報を消去するには, まず中央の壁を取り払い, 右側から気体を等温圧縮して体積を半分にし, 標準状態 “0” にする.

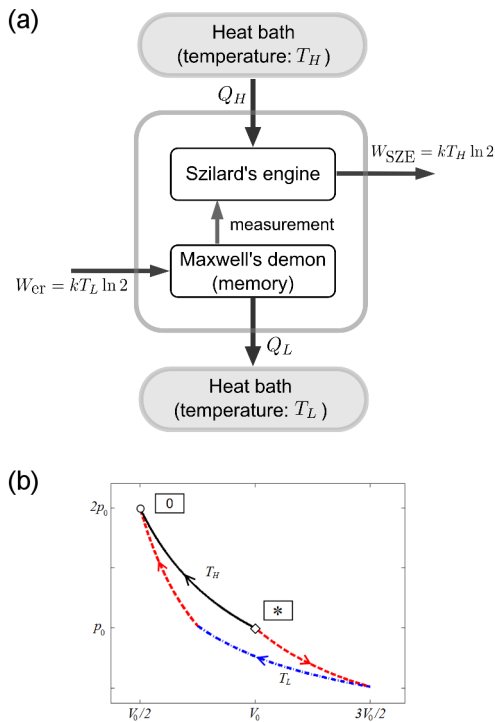


FIG. 3: 温度の異なるふたつの熱浴を用いた場合の Szilard エンジンとメモリー (悪魔). (a) はエネルギーの出入りを示した概念図. Szilard エンジンは  $W_{SZE} = kT_H \ln 2$  の仕事を外界に対して行い, 情報消去には  $W_{er} = kT_L \ln 2$  の仕事が外界からなされる必要がある. Szilard エンジンとメモリーを合成した系 (灰色の線で囲んだ部分) は, 実質的に Carnot エンジンとして機能する. (b) はメモリーの  $p$ - $V$  ダイアグラム. ‘0’ 印で示した点は中央の壁を取り払った状態 (図 2(c) に対応), ‘0’ が標準状態. 黒の実線がエンジンと同じ温度の熱浴を用いたときの消去過程, 赤 (断熱過程) と青 (等温過程) の曲線からなる過程が温度  $T_L (< T_H)$  の熱浴を用いた情報消去のうちもっとエントロピー上昇の小さい (=ゼロ) もの.

は復元できないので, 情報処理という文脈でこれを可逆な物理過程とよぶのは無理がある.

ところで, ときどき受ける質問に, 上記のシナリオでは Szilard エンジンも Maxwell 悪魔のメモリーも同じ温度の熱浴を使っているが, これを異なるものにしたらどうなるか, というものがある. この質問の背後には, メモリーの情報消去を低い温度で行えば, その分必要な仕事も減るのでは? というもっともな動機がある (と思う). Szilard エンジン用の熱浴とメモリー用の熱浴の温度をそれぞれ  $T_H, T_L$  とすると, Szilard エンジンから得られる仕事は  $kT_H \ln 2$ , メモリーの情報消去到に費やす仕事は  $kT_L \ln 2$  となって, 正味の (外への) 仕事量は  $k \ln 2 (T_H - T_L) > 0$  となる (図 3). 観測結果を利用して正の仕事を取り出すという悪魔の目的は達せられるかに見えるが, ふたつの熱浴でのエントロピー変化量は打ち消し合って, (最小で) ゼロになり, 実際何もおかしいことは起こっていない. 図 3 で明らかのように, Szilard エンジンとメモリーの間には観測以外の直接の相互作用はないが, 両者を合わせた系の機能は効率

$\eta = 1 - T_L/T_H$  のカルノーエンジンと等価になる.

さて, 同じく IBM の Bennett は Landauer の考察からもう一步踏み込んで, 観測による情報取得は原理的には可逆な物理過程で実現可能であることを示した [7]. これにより, Szilard エンジンで記述した Maxwell の悪魔のパラドックスにおいて, 本質的に散逸を伴うのは悪魔による観測行為ではなく, 悪魔の頭の中の記憶を消去する過程であることが確定することになる. サイクルを閉じて初期状態に戻さなければならないものの中には, 物理的実体である悪魔の頭 (メモリー) も含まれるからだ. そして, 消去に必要なエネルギー消費がエンジンから得られるエネルギーを相殺するので, パラドックスは解決する.

ところで, ここに述べた論理展開だけだと, 単射でない情報処理に物理的散逸が伴う理由は熱力学第 2 法則そのものであり, その帰結として第 2 法則が破られないのは当然である. しかし, 1 ビットの情報消去には少なくとも  $k \ln 2$  のエントロピー増加が必要なこと自体は, 第 2 法則を用いなくても導くことができる. 興味ある読者は文献 [8] やレビュー論文 [9] 等を参照されたい.

### III. 一般の確率分布の場合

ここまで, ‘0’ と ‘1’ の確率が共に  $1/2$  の場合の情報消去についてみてきた. より一般に, それぞれの確率が  $p$  と  $1-p$  の場合のエントロピー散逸量はどうか.  $p = 1/2$  の場合が  $k \ln 2$  で,  $p = 0$  (or  $1$ ) の場合が  $0$  になるわけだし, 情報量と熱力学的エントロピーの生成量が等しくなる (だろう) というのが Landauer の原理のココロであったから, ナイプに考えてこれは  $k \ln 2 \cdot H(p)$  になるであろうと予想がつく. 実際, これは正しいのだが, 悪魔のパラドックス解決のときと同様, 第 2 法則を使ってこれを示すのは (情報と熱力学のエントロピーの等価性を示すという動機のもとでは) よろしくない. そもそも, 「第 2 法則が破られるのでは?」「破られないためにはどこで余計なエントロピーが発生するのか?」というパラドックスであるから, その解決に第 2 法則を用いてしまっただけでは本末転倒である. したがって,  $k \ln 2 \cdot H(p)$  が下限だと主張するには若干の注意を要する.

図 4 のように, メモリー用シリンダーの左側 (‘0’ 側) に  $pN$  個, 右側 (‘1’ 側) に  $(1-p)N$  個の分子が入った状態からスタートし, すべての粒子が左側に押し込まれた状態へ到達するとき, 外部からなすべき仕事の最小値は  $kT \ln 2 \cdot H(p)$  となる. この値は, 図 4(a) の状態の自由エネルギーと最後の (c) から (d) への圧縮に要する仕事量の差し引きで得られる. ところで, 系が外部に対してなすことのできる仕事が (準静的) 等温変化のとき最大値をとり, これを (Helmholtz の) 自由エネルギーと定義するのであった [10]. そして, 等温変化のときに最大値をとる理由は, 実質的に第 2 法則にあった. つまり, 図 4 の過程や自由エネルギーの計算をもって,  $H(p)$  ビットの情報を消去するのに必要なエネルギーは  $kT \ln 2 \cdot H(p)$  以上であると言うには第 2 法則が必要である.

ここでは, ふたつのエントロピーの等価性をもとの悪魔のパラドックス解決の精神から主張したい. そこで熱力学第 2 法則を陽に使わずに, Szilard エンジンで得られる仕事とメモリーの情報消去到に必要な仕事 (最適な場合に) 打ち消しあうことを示したい. そのためには, 問題を 1 ビットの

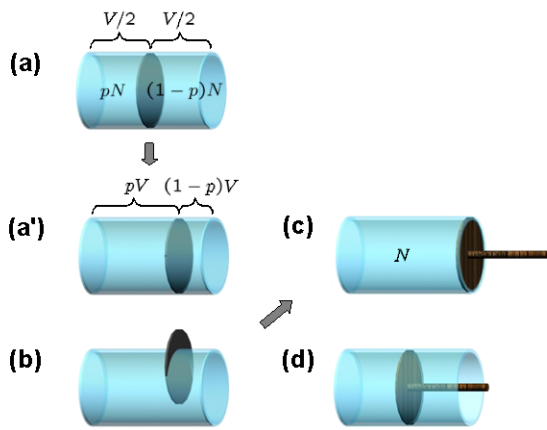
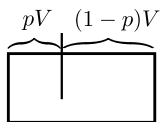


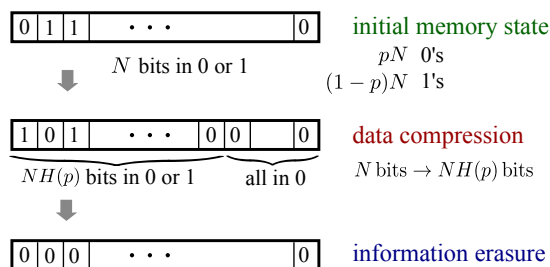
FIG. 4:  $p \neq 1/2$  のときの準静的等温操作による情報消去. (a) から (a') への等温膨張により外部に対して気体に仕事をさせ、消去に必要な全仕事量を最小化する.

#### Szilard's engine



$$W_{\text{size}} = kT \ln 2H(p) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

#### Demon's memory



$$W_{\text{erasure}} = kT \ln 2H(p) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

FIG. 5: データ圧縮を用いた情報消去.  $N$  ビット長のデータ列 ( $p \neq 1/2$ ) を  $NH(p)$  ビット長の 0 と 1 の数が等しいデータ列に変換、それを消去する.

情報消去に情報論的に帰着させればよい.  $p = 1/2$  の確率分布 ( $H(p) = 1$ ) の情報消去に必要な仕事についてはこれまでの議論の結果を認め、 $kT \ln 2$  であるとする. 1 ビットのシナリオに情報論的に帰着するには、Shannon によるエラーのない場合の符号化定理の結果であるデータ圧縮を用いる. こうすることで、情報論的 (Shannon) エントロピーを熱力学を通して操作論的に定義することが可能になり、より物理的な見通しがよくなるメリットもある [11].

図 5 に消去作業の概観を示した.  $\{p, 1-p\}$  の確率分布は、Szilard エンジンで壁を入れる位置を中央ではなく、体積を  $p$  対  $1-p$  に分けるところに挿入すれば得られる. 壁を入れたあとに分子位置を観測して (熱浴から) 取り出せる仕

事は、 $-kT \ln 2(p \ln p + (1-p) \ln(1-p)) = kT \ln 2 \cdot H(p)$  である. メモリーに記録されたデータの消去は以下のように行う. 十分に大きい  $N$  を考え、 $N$  個の二値データからなるデータ列をとる. ここに含まれる情報量は  $NH(p)$  ビットであるから、これは 0 と 1 がそれぞれ  $p = 1/2$  で現れる  $NH(p)$  個からなるデータ列がもつ情報量と同じだ. Shannon の符号化定理は、そのようなデータ列の圧縮が可能であり、( $N \rightarrow \infty$  で) 最適な圧縮率が  $H(p)$  で与えられることを保証するものである [12].

$NH(p)$  個のビット列へ圧縮したあと情報消去を行えば、トータルで  $NkT \ln 2 \cdot H(p)$  の仕事が少なくとも必要となる (残りの  $N(1-H(p))$  個のビットには圧縮後は情報を持たせないで、その部分には消去は必要ない). データ圧縮自体は与えられたビット列から別のビット列への一意の変換であるので、メモリー内の各ビットの状態空間体積に変化はなく、熱力学的な散逸もない. したがって、もとのデータ列の 1 ビット (1 レジスター) あたりの必要仕事量は、(期待通り)  $kT \ln 2 \cdot H(p)$  となって、Szilard エンジンから得られる仕事と釣り合う. 第 2 法則に依拠した自由エネルギーの最適性を用いる代わりに、Shannon の符号化定理によって数学的にその最適性が保証されたデータ圧縮を通して、ふたつのエントロピーの等価性をより一般的に裏付けることができる.

#### IV. 実験的検証について

Landauer の原理は、 $kT \ln 2$  の値の小ささ ( $T = 300\text{K}$  で約  $2.87 \times 10^{-21} \text{J}$ ) もあって、長らく実験的な検証は困難であった. ある値以下のエネルギー消費での処理は実行できないという命題は、逆の命題よりも実証しづらいこともあっただろう. しかし、実験技術の進歩により、ようやく 1 ビットの物理が検証できるようになってきた. まず、全体に傾斜のついた正弦波型のポテンシャルに束縛された微粒子を観測して、得られた位置情報を自由エネルギーに変換する操作 (Szilard エンジンに対応する) が日本のグループによって達成された [13]. そして、今年 (2012 年)、ついに 1 ビット情報を消去する際に散逸する熱量を測定、Landauer の原理を直接確認したという論文が発表された [14] ので、ここに簡単に内容を紹介したい.

二値情報を記録するメモリーとしては、光ピンセット (optical tweezer) を用いて実効的に二重井戸構造の束縛ポテンシャル  $U(x)$  を作り、そこにシリカの微小ビーズをトラップすることで実現させた. 光ピンセットとは、レンズで極小領域に強く集光したレーザーの強度分布により微小物体を捕捉する技術である [23].

当初、ふたつのポテンシャル井戸間の障壁の高さは十分高く、ビーズの位置により、バイナリー情報 ('0' か '1' か) を記録する. この情報を消去するには、レーザー光による束縛ポテンシャルを変化させて障壁の高さを低くし、全体に傾斜をつけて片方 (例えば '0' 側) だけがビーズを束縛できるようにする. 再び元の二重井戸ポテンシャルに戻せば、ビーズの初期位置によらず '0' にリセットされた状態となり、情報消去が完了する.

Bérut らは、ポテンシャル全体に傾斜をつける時間  $\tau$  を変化させて、上記プロセス終了時の消去の成功確率と、散逸される熱量との関連を調べた. 熱量は、高速カメラで観

測したビーズの位置  $x(t)$  を用いて,

$$Q = - \int_0^{\tau_{\text{cycle}}} dt \dot{x}(t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}$$

で求めた. ここで  $\tau_{\text{cycle}}$  は一連の消去プロセスに要する時間である. その結果,  $\tau$  を長くするほど  $Q$  の平均  $\langle Q \rangle$  は Landauer 限界である  $kT \ln 2$  に漸近していくことが確認された.  $\tau$  が長いほど最終的なビーズの位置が '0' 側に落ち着く確率が高くなることも観測しており, 情報消去作業が成功するときの熱の散逸量の下限が  $kT \ln 2$  であることの有力な (状況) 証拠となる.

## V. 量子系に記録された情報

今度は量子系を (古典) 情報の記録・処理媒体として考えよう. 量子系に情報を記録する (エンコードする) とは, 情報 (アルファベット)  $\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$  を, 量子状態  $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$  にそれぞれ対応させることである. 各  $\rho_n$  は量子状態を記述する密度演算子である. 各々の情報  $i_n$  が現れる確率を  $p_n$  とし, 量子状態  $\rho_n$  が確率  $p_n$  で現れる系を,  $\{p_n, \rho_n\}$  と表記しよう. 情報の受け手にとっては, 観測する前には受け取った量子状態がどの情報に対応するかわからないから, どれも  $\rho_n$  を "平均" した量子状態

$$\rho = \sum_{i=1}^N p_i \rho_i \quad (3)$$

にあると考えることができる.

状態  $\{p_n, \rho_n\}$  に載せられた情報を消去するには, どれだけのエントロピー増加が必要であろうか. 分子の位置で情報を記録した場合と異なり, この場合は壁を抜いて自然に非可逆な過程を起こさせるようなことができない上, 等温圧縮のような熱力学的過程をそのまま考えることも無理がある. そこで,  $\rho_i$  を, ある温度  $T$  の熱浴との接触により, (温度  $T$  で) 熱平衡状態  $\omega = e^{-\beta H}/Z$  にしてしまうときの全系のエントロピー変化を計算する.  $H$  は熱浴とメモリーの各構成粒子を記述するハミルトニアン,  $\beta = (kT)^{-1}$ ,  $Z$  は分配関数である. まず結果だけを示すと, エントロピー変化は, 次式

$$S(\rho) := -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho) \quad (4)$$

で定義された **von Neumann エントロピー** を用いて

$$k \ln 2 \left( S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i) \right) \quad (5)$$

と表される. 式 (5) を  $k \ln 2$  の後のカッコ内の量はしばしば  $\chi(\rho)$  と表記される. 各  $\rho_i$  が互いに直交, つまり  $i \neq j$  に対して  $\text{Tr}[\rho_i \rho_j] = 0$  となるときは,  $\chi(\rho) = H(p_i)$  となる [24]. 互いに直交する  $\rho_i$  はすべて確率 1 で区別可能であるから, これは上述の古典的な状況に対応し, 消去によるエントロピー増加は Shannon エントロピー  $H(p_i)$  に  $k \ln 2$  をかけたものになる.

量子状態  $\{p_i, \rho_i\}$  にエンコードされた情報を消去する方が, 同じ確率分布を持つ古典的状态にエンコードされた情

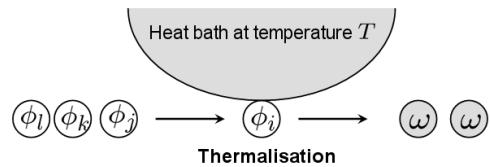


FIG. 6: 熱浴との相互作用による情報の消去.

報を消去するよりも, エントロピー増加が小さい. つまり,  $\rho$  には  $H(p_i)$  ビットよりも小さい情報量しか持たせられない. これは, 異なる  $i$  と  $j$  に対して  $\rho_i$  と  $\rho_j$  が直交しない場合, それらを観測によって完全には区別できないという重要な事実による. 区別できない  $\rightarrow$  観測しても得られる情報が少ない  $\rightarrow$  エントロピーが小さい, となるわけである.

では, Lubkin の流儀 [15] にしたがって式 (5) を導いてみよう. 上述したように, 量子 '気体' を操る代わりに, 温度  $T$  の十分に大きい熱浴と情報を保持したメモリー系を相互作用させ, メモリーの状態を熱浴の状態と同じにしてしまうことで情報を消去する (図 6). このままでは最終的なメモリー状態が混合状態  $\omega$  となり, Landauer 流に消去を定義したときのような, きれいにリセットされた (純粋) 状態にならない. しかし, 温度  $T$  を十分に低くすれば,  $\omega = e^{-E_0/kT}|0\rangle\langle 0| + e^{-E_1/kT}|1\rangle\langle 1| + \dots$  のうちのもっともエネルギーの低い基底状態  $|0\rangle\langle 0|$  の項が他と比べて圧倒的に大きくなり, 純粋状態とみなせる.

全系のエントロピー変化は, メモリーと熱浴のエントロピー変化の和  $\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{memory}} + \Delta S_{\text{bath}}$  である. メモリーのエントロピーは, 初めの状態が  $\rho_i$  とすれば,

$$\Delta S_{\text{memory}}^{(i)} = k \ln 2 (S(\omega) - S(\rho_i)) \quad (6)$$

だけ変化する. 熱浴のエントロピー変化は, 熱浴とメモリーとの間でやりとりするエネルギーを温度で割ればよい:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{bath}} &= \frac{\Delta Q_{\text{bath}}}{T} = -\frac{\Delta Q_{\text{memory}}}{T} \\ &= -\frac{\text{Tr}(\omega H) - \text{Tr}(\rho_i H)}{T} \\ &= k \text{Tr}[(\omega - \rho_i) \ln(Z\omega)] \\ &= -k \ln 2 [S(\omega) + \text{Tr}(\rho_i \log_2 \omega)]. \end{aligned} \quad (7)$$

2 行目から 3 行目への変形では,  $H = -kT \ln(Z\omega)$  を使った. 式 (6) と式 (7) より, (von Neumann エントロピーと熱力学的エントロピーの間の変換係数  $k \ln 2$  は 1 として)

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{total}} &= \sum_i p_i \Delta S_{\text{memory}}^{(i)} + \Delta S_{\text{bath}} \\ &= -\sum_i p_i S(\rho_i) - \text{Tr}[\rho \log_2 \omega] \\ &\geq S(\rho) - \sum_i p_i S(\rho_i) \end{aligned} \quad (8)$$

最後の不等号は (量子) 相対エントロピーの非負性  $S(\rho|\omega) = -S(\rho) - \text{Tr}[\rho \log_2 \omega] \geq 0$  による.

ところで、von Neumann エントロピーの表式 (4) は、Shannon による情報理論的エントロピーの式 (1) によく似ているが、(4) の定義の動機は熱力学であって、情報理論ではない。Von Neumann は、直交する量子状態をもつ気体分子を異なる種類の分子とみなしたときの、混合気体のもつエントロピーが熱力学的エントロピーと等しくなるように量子系のエントロピー (4) を定義した。Shannon に式 (1) を「エントロピー」とよぶよう提案したのは von Neumann だったそうである。

## VI. 最後に

Maxwell の悪魔のパラドックスは、情報と物理が密接に関係していることを示してくれた。Landauer の原理、情報消去過程を通して、情報論的エントロピーと熱力学エントロピーの同一視が正当化される。その結果、様々な物理現象を情報の視点から眺めたり、また逆のこともできるようになる。量子状態を情報キャリアとしたときの、(量子) データ圧縮の圧縮率や、系にエンコードできる (古典) 情報量の限界 (accessible information, あるいは Holevo 限界) なども、情報の消去の視点でとらえると定量的な正当化が簡潔に得られる [9]。

ここでは Shannon の符号化定理に基づいたデータ圧縮を用いて、ふたつのエントロピーの同一性をより強固にする議論も紹介した。こうして、確率分布のみで抽象的に定義された Shannon エントロピーも、熱力学を通して操作論的に理解することができる。また、さらに一歩進んで、統

計力学の中での情報 (情報論的な意味での) 位置づけにも踏み込む試みもある。最大エントロピー原理 [16] によれば、情報エントロピーから Boltzmann 分布を求めることは可能なものの、情報理論的および物理的エントロピーの間の普遍的な関連ははっきりしていなかった。そこで、情報消去の物理を頭を含むモデルを考えることで、たとえば Boltzmann 分布の表式を操作的に得られるようになることなどが分かっている [17]。

さらに、本稿では触れなかったが、熱力学の幅広い適用可能性も非常に興味深い。一見、熱力学とは関係のない領域においても、背後には熱力学 (第 2 法則) の見えざる手が及んでいるのが見えることがある。たとえば、孤立系のエントロピーが自然に減少することはないという要請から、量子力学における時間発展のユニタリー性を「導く」ことができる [18] [25]。また、ブラックホールの表面積とそのエントロピーとの同一視 [19, 20] などから、ブラックホール熱力学が構成される。熱力学ではエントロピーを体積やエネルギーの関数として表すことで状態方程式が得られる。そこで、causal horizon の面積とエントロピーの等価性を前提とし、そこから重力場に関する Einstein 方程式を (状態方程式として) 導出する研究もある [21]。関連して、Bekenstein のもとのアイデアのように情報欠損と時空のエントロピーの関係を直接調べ、時空の熱力学の定式化を目指す試みも最近報告されている [22]。

量子情報理論と量子力学基礎論での情報の根源的役割も、その研究は緒についたばかりだ。今後、情報と物理の織り成す鮮やかな世界がますます明らかになっていくことだろう。

- 
- [1] H. S. Leff and A. F. Rex, *Maxwell's Demon 2* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2003).
  - [2] L. Szilard, *Z. Phys.* **53**, 840 (1929). 文献 [1] に英訳が収録されている。
  - [3] L. Brillouin, *J. Appl. Phys.* **22**, 334 (1951). 文献 [1] に収録。
  - [4] R. Landauer, *IBM J. Res. Dev.* **5**, 183 (1961). 文献 [1] に収録。
  - [5] J. D. Norton, *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **36**, 375 (2005).
  - [6] O. J. E. Maroney, *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **36**, 355 (2005).
  - [7] C. H. Bennett, *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 905 (1982); *IBM J. Res. Dev.* **32**, 16 (1988). 共に文献 [1] に収録。
  - [8] K. Shizume, *Phys. Rev. E* **52**, 3495 (1995); B. Piechocinska, *Phys. Rev. A* **61**, 062314 (2000).
  - [9] K. Maruyama, F. Nori, and V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1 (2009).
  - [10] 田崎清明, 熱力学—現代的な視点から, 培風館 (2000) .
  - [11] A. Hosoya, K. Maruyama, and Y. Shikano, *Phys. Rev. E* **84**, 061117 (2011).
  - [12] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1991.
  - [13] S. Toyabe, T. Sagawa, M. Ueda, E. Muneyuki, and M. Sano, *Nature Phys.* **6**, 988 (2010).
  - [14] A. Bérut, A. Arakelyan, A. Petrosyan, S. Ciliberto, R. Dillenschneider, and E. Lutz, *Nature* **483**, 187 (2012).
  - [15] E. Lubkin, *Int. J. Theor. Phys.* **26**, 523 (1987).
  - [16] E. T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106**, 620 (1957).
  - [17] A. Hosoya, K. Maruyama, and Y. Shikano, in preparation.
  - [18] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
  - [19] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973); *ibid* **9**, 3292 (1974).
  - [20] S. W. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974).
  - [21] T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1260 (1995).
  - [22] Y. Yokokura, e-print arXiv: 1106.3149, to appear in *Int. J. Mod. Phys.*, and also through private communication.
  - [23] 古典的には、微小物体中表面を通過する際に光が屈折し、その反作用として微小物体が力を受ける、と説明される。光の強度分布があることにより、物体をビーム中心へ束縛するような力が働く。
  - [24] 証明は、たとえば、文献 M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000). 中の Theorem 11.8.
  - [25] 「導く」というのは言い過ぎで、謙虚に「時間発展がユニタリーだとすれば第 2 法則と矛盾しない」という程度が適当だろう。第 2 法則だけで、量子状態 (密度演算子) が Hilbert 空間上の正定値エルミート演算子であることなどが得られるわけでは到底ない。