

非加法的式による 3K 黒体放射スペクトルの解析

溝口卓哉（鳥羽高専） 美谷島寛（信大理（非））

NASA が 1996 年以降に発表した 3 K 黒体放射のスペクトルの full data を non-extensive (Tsallis ともいう) parameter $(q - 1)$ を含むいくつかの Planck 分布で解析した。また、黒体放射のスペクトルに含まれる無次元化学ポテンシャル μ の効果を考慮して、Tsallis parameter の効果を見積もる解析方法を検討した。

Introduction: Non-extensive 統計力学は Tsallis により提唱され、Tsallis 達は、次のように表される non-extensive な Planck 公式を計算した [1]。

$$U^{(\text{NETD I})}(T, \nu, q) = U_{\text{Planck}}(T, \nu) [1 - e^{-x}]^{(q-1)} \left\{ 1 + (1 - q)x \left[\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{x}{2} \frac{1 + 3e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right] \right\} \\ \approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{q-1}{e^x - 1} \left[\ln(1 - e^{-x}) - x \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} + \frac{x^2}{2} \frac{1 + 3e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \right] \quad (1)$$

ここで、 $U_{\text{Planck}}(T, \nu) = 8\pi h\nu^3/c^3(e^x - 1)$; ($x = h\nu/kT$) はプランク分布で、 $|q - 1| (\ll 1)$ は non-extensive parameter と呼ばれる。また、彼らは (1) 式の検証のため、1994 年に発表された NASA COBE の CMB 黒体放射の monopole spectrum から Planck 分布 (理論、及び dust 等の効果) を引いた residual spectrum [2] に適用した。また、この解析に、

$$U_{\text{Planck}}(T + \delta T, \nu) \approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{\partial U_{\text{Planck}}}{\partial T} \delta T = U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{e^x x}{(e^x - 1)^2} \frac{\delta T}{T} \quad (2)$$

で定義される温度揺らぎと呼ばれる量 δT も用いた。表 1 には、彼らの結果と minimum- χ^2 で求めた parameter とその 95 % CL (平均 $\pm 2\sigma$) での上限値を示す。

表 1: 式 (1) と (2) を用いた COBE CMB の residual spectrum (1994 年) の解析

analyses	$(q - 1)$	δT (K)	χ^2/NDF
C. Tsallis	3.6×10^{-5}	-1.0×10^{-4}	39.3/32
et al., (1995)	(fixed)	(fixed)	
minimum- χ^2	$(0.3 \pm 1.4) \times 10^{-5}$	$(-0.9 \pm 5.1) \times 10^{-5}$	32.2/32
	$ q - 1 < 3.0 \times 10^{-5}$	$ \delta T < 1.1 \times 10^{-4}$	(95 % CL)

また、式 (1) とは別に、dilute gas 近似で求められた別の non-extensive な Planck 分布が提唱された [3]¹。

$$U^{(\text{NETD II})}(T, \nu, q) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{[1 + (q - 1)x]^{1/(q-1)} - 1} \\ \approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{e^x x^2}{(e^x - 1)^2} \frac{q - 1}{2} \quad (3)$$

本研究では、“Non-extensive” な効果の検証を、NASA が 1996 年以降に発表した CMB の full data [4, 5] 用いて行う。また、宇宙論の研究では、CMB スペクトルには無次元化学ポテンシャル μ の効果が含まれていると見做されている [6]。そのため、Bose-Einstein (BE) 分布を用いる。

$$U_{\text{Planck}} \rightarrow U_{\text{BE}}(T, \nu, \mu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{x+\mu} - 1} \approx U_{\text{Planck}}(T, \nu) + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{-\mu e^x}{(e^x - 1)^2}, \quad (4)$$

¹Planck 分布で $e^{h\nu/kT}$ を T の逆数で Γ 変換すると同じ式が得られる。

この「化学ポテンシャルの効果とどう折り合いを付けて，non-extensive parameter ($q-1$) の効果を見積もるか」を目的にして様々な計算を実行した。

Residual spectrum の解析: 1996 年に発表された COBE CMB の full data の residual spectrum [4] は 1994 年に発表された data と大きく異なっていた。式 (1), (2) および (3) を用いて解析し直した結果を表 1 と図 1 に示す。1994 年の data 解析と比べて， $|q-1|$ の上限値は 1/3 程度， $|\delta T|$ の上限値は 1/2 程度である。また，monopole spectrum (2005 年) [5] を parameters T , ($q-1$) で解析した結果 (図 1 の右側) は， $|q-1| < 1.23 \times 10^{-5}$ (95 % CL) で，residual spectrum の結果とほぼ等しい値である。

表 2: 式 (1), (2) および (3) を用いた COBE CMB residual spectrum (1996 年) [4] の解析。 $T = 2.7250$ K とした。

analyses	$q-1$	δT (K)	χ^2/NDF
(1) + (2)	$(-0.2 \pm 5.9) \times 10^{-6}$	$(0.1 \pm 2.1) \times 10^{-5}$	45.0/41
	$ q-1 < 1.2 \times 10^{-5}$ $ \delta T < 4.3 \times 10^{-5}$ (95 % CL)		
(3) + (2)	$(-0.3 \pm 5.0) \times 10^{-6}$	$(0.2 \pm 3.0) \times 10^{-5}$	45.0/41
	$ q-1 < 1.0 \times 10^{-5}$ $ \delta T < 6.2 \times 10^{-5}$ (95 % CL)		

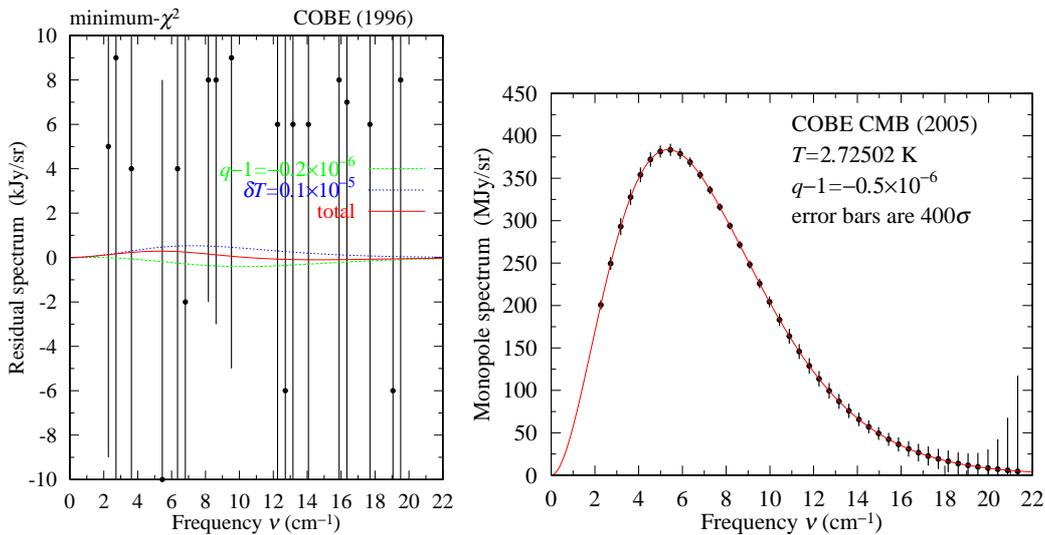


図 1: 式 (1), (2) を用いた COBE CMB residual spectrum (1996 年) [4] の解析 (左図) と monopole spectrum の解析 (右図)。

化学ポテンシャル μ の効果と ($q-1$): 2005 年に NASA の Web Site に公開された COBE/FILAS monopole spectrum [5] を式 (1) および (4) を用いて解析した (表 3)。 $(q-1)$ と μ の項を含んだ式を用いた解析では， $|q-1|$ の上限値は， $(q-1)$ のみの式を用いた解析より大きくなる。

ここで，CMB スペクトルの空間成分の歪みを調べるために，歪み効果 ε を含んだ Planck 分布の式

$$U_{\text{Planck}}(T, \nu, \varepsilon) = \frac{\pi^{d/2}(d-1)dh\nu^d}{\Gamma(d/2+1)c^d(e^x-1)}, \quad d = 3 + \varepsilon \quad (5)$$

で monopole spectrum を解析した： $|\varepsilon| < 5.1 \times 10^{-5}$ (95 % CL)。

さらに，化学ポテンシャルの効果をおののように引いた data を用いて歪み ε を調べた。

$$[\text{subtracted monopole spectrum}] = [\text{monopole spectrum}] - \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{-\mu e^x}{(e^x-1)^2} \quad (\mu = -1.1 \times 10^{-5})$$

表 3: 式 (1) と (4) を用いた monopole spectrum (2005 年) の解析。

analyses	T (K)	$(q - 1)$	μ	χ^2/NDF
(4)	$2.7250 \pm 2 \times 10^{-5}$	—	$(-1.1 \pm 3.2) \times 10^{-5}$ $ \mu < 7.5 \times 10^{-5}$	45.097/41 (95 % CL)
(1) + (4)	$2.7250 \pm 1 \times 10^{-4}$	$(0.3 \pm 1.0) \times 10^{-5}$ $ q - 1 < 2.3 \times 10^{-5}$	$(-2.5 \pm 5.6) \times 10^{-5}$ $ \mu < 1.4 \times 10^{-4}$	44.89/40 (95 % CL)

差し引きしない元の data では, $|\varepsilon| < 5.1 \times 10^{-5}$ (95 % CL) に対し, 化学ポテンシャルの効果を差し引いた monopole data では $|\varepsilon| < 7.6 \times 10^{-6}$ (95 % CL) と 1 桁値が小さくなった。

式 (5) を用いた解析を踏まえて, 化学ポテンシャルの効果を差し引いた monopole data を式 (1) を用いて解析した結果を表 4 に示す。Data から化学ポテンシャルの効果を引くと, $|q - 1|$ の上限値は元の data の解析で得た値の 1/2 程度になった。

表 4: 式 (1) を用いた化学ポテンシャルの効果を差し引いた monopole spectrum の解析。

T (K)	$(q - 1)$	χ^2/NDF
2.7250 K (fixed)	$(2.2 \pm 2.1) \times 10^{-6}$	45.4/42
	$ q - 1 < 6.4 \times 10^{-6}$	(95 % CL)

Concluding Remarks: Residual spectrum の解析は, $|q - 1| < (1 \sim 1.2) \times 10^{-5}$ (95% CL), $|\delta T| < (4.2 \sim 6.2) \times 10^{-5}$ (95% CL) で, 1994 年の data 解析の上限値 (95% CL) と比べて 1/3 及び 1/2 程度となった。Raw data から化学ポテンシャルの効果を差し引いた data 解析では, $|q - 1| < 6.4 \times 10^{-6}$ (95% CL) で, 元の $|q - 1|$ の上限値 (95% CL) の 1/2 程度となった。 μ の項を含んだ式では, $(|q - 1| < 2.3 \times 10^{-5}) < (|\mu| < 1.4 \times 10^{-4})$ (95% CL) となった。

$|q - 1|$ の値は, data に含まれる化学ポテンシャルの効果によって, 大きく変化するので, この効果を差し引いた data から $|q - 1|$ を求めるべきである。

参考文献

- [1] C. Tsallis, F. C. Sa Barreto and E. D. Loh, Phys. Rev. **E52**, 1447 (1995).
- [2] J. C. Mather, et al., Astrophys. J. **420**, 439 (1994).
- [3] A. R. Plastino, A. Plastino and H. Vucetich, Phys. Lett. **A 207**, 42 (1995); U. Tirnakli, F. Buyukkilic and D. Dermirhan, Phys. Lett. **A 245**, 62 (1998).
- [4] D. J. Fixsen, et al., Astrophys. J. **473**, 576 (1996).
- [5] COBE/FIRAS CMB monopole spectrum, May 2005,
http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/firas_monopole_get.cfm
- [6] 杉山直, “張宇宙とビッグバンの物理” (岩波書店 2001); Y. B. Zeldovich and R. A. Sunyaev, Astrophys. Space Sci. **4**, 301 (1969); R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich, Astrophys. Space Sci. **7**, 20 (1970).