

非平衡 Thermo Field Dynamics における 正準量子化に基づいた Dirac 場の構築

水谷友一, 稲垣知宏
広島大学情報メディア教育研究センター

1 はじめに

現在, さまざまな分野において非平衡現象の解明に向けた取り組みが行われている. このような非平衡現象を量子論の枠組みで扱うには, 熱的な状態と実時間の自由度を共に扱う事の出来る, 実時間形式の熱場の量子論が必要となる. その中でも特に, 粒子の生成や消滅を伴うような高エネルギー物理現象に関わる非平衡現象の解明には, 相対論的な場によって記述された理論が必要となる.

我々の研究グループは, 実時間形式の熱場の量子論のひとつである Thermo Field Dynamics (TFD) を相対論的な場を用いて記述することにより緩和過程などの熱非平衡系の性質を明らかにするための研究に取り組んできた.

TFD を非平衡系へ適応するには, 熱平衡系での理論を拡張した非平衡 TFD と呼ばれる理論が用いられる. これまでに相対論的な場に対する非平衡 TFD の方法は, 相対論的中性スカラー場に対して正準量子化に基づいた扱い方が提唱されていた [1]. しかし, 相対論的な複素スカラー場や Dirac 場, Gauge 場に関してはまだ扱い方が十分に理解されていなかった. 特に文献 [2] では, 非平衡 TFD における相対論的 Dirac 場は, 相対論的な場を構成する正振動項と負振動項がそれぞれ異なるエネルギー固有値を持つため, 場の時間発展と無矛盾なラグランジアン構築は困難であると指摘されていた.

そこで我々は, このような問題を解決することにより非平衡 TFD の方法を相対論的複素スカラー場や Dirac 場に対して拡張する事を目的とした研究を行った. 本稿は, 文献 [3] のレビューである. また, 本研究で扱っている非平衡系は一様等方な系を仮定している. 非平衡 TFD において, 相対論的複素スカラー場や Dirac 場などの電荷を持つ場は, 結果的に同様の方法で拡張を行う事ができるため, 以下では相対論的 Dirac 場に対して議論を行う.

2 Thermo Field Dynamics

先ず始めに, TFD の枠組みについてごく簡単に説明する [4]. TFD は, 通常場の量子論で扱われる a 演算子に加えて, この a 演算子と独立な交換関係を満たすチルダ演算子, \tilde{a} によって理論が記述される. $[a_p, a_k^\dagger] = [\tilde{a}_p, \tilde{a}_k^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$, $[a_p, \tilde{a}_k^\dagger] = [a_p, \tilde{a}_k] = 0$. また, 場の時間発展は, a 演算子のみで構成されたハミルトニアン, H , と \tilde{a} 演算子のみで構成されたハミルトニアン, \tilde{H} , を用いて定義されたハットハミルトニアン, $\hat{H} = H - \tilde{H}$, により定義される. ここで, \hat{H} は, ハミルトニアン, H とチルダ共役則と呼ばれる関係により互いに結びついている. さらに熱的 Bogoliubov 変換, $\xi_p^\alpha(t) = B(n_p)^{\alpha\beta} a_p^\beta(t)$, $\tilde{\xi}_p^\alpha(t) = \tilde{a}_p^\beta(t) B^{-1}(n_p)^{\beta\alpha}$, と呼ばれる変換の下で新たな演算子, ξ , $\tilde{\xi}$ を導入し, この演算子に対する真空状態, $\xi|\theta\rangle = 0$ を熱的真空状態として定義する. さらに TFD では, 力学的演算子, A の熱的な期待値は, 熱的真空状態による期待値, $\langle\theta|A|\theta\rangle$ により与えられる. ここで, 変換に現れた演算子の表記, $a^\alpha, \tilde{a}^\alpha$ は, 演算子とチルダ演算子を 2 成分のベクトル表示で表した熱的二重項表現, $a_p^\alpha(t) = (a_p(t) \ \tilde{a}_p^\dagger(t))$, $\tilde{a}_p^\alpha(t) = (a_p^\dagger(t) \ -\tilde{a}_p(t))^T$ を意味し, また, $B(n(p))$ 及び $B^{-1}(n(p))$ は熱的 Bogoliubov 行列と呼ばれる熱的二重項表現にかかる行列を表す. このとき, 熱的 Bogoliubov 変換に現れた変換パラメータ, $n(p)$ も熱的な粒子数分布として与えられるため, TFD では力学的観測の熱的な期待値のみではなく, 熱的 Bogoliubov 変換自身も熱的な状態と関係している.

次に TFD を非平衡系へ拡張した理論である非平衡 TFD は, 熱平衡系では時間に依存しない熱的 Bogoliubov 変換のパラメータ, $n(p)$ を実時間に依存するパラメータ, $n(t;p)$ へ拡張する事により与えられる [5]. この

とき、正準量子化に基づいて定義された演算子、 $a_p^\alpha(t), \bar{a}_p^\alpha(t)$ のエネルギー固有値には、時間に依存する熱的 Bogoliubov 変換の影響により熱的 Bogoliubov 変換パラメータ、 $n(t; p)$ からの寄与が現れ、さらに生成・消滅演算子は、共に等しいエネルギー固有値を持つ事が知られている [6].

ここで、生成・消滅演算子が互いに等しいエネルギー固有値に従う事に着目すると、これらの演算子を組み合わせて記述された場、 $\phi(x)$ の時間微分方程式は、 $\dot{\phi}(x) = C(\nabla_x)\pi(x)$ のような形で、エネルギー固有値に依る係数、 $C(\nabla_x)$ を共役場、 $\pi(x)$ の外側へくりだせるため、場の時間発展方程式とハイゼンベルグ方程式との関係より非平衡系のハミルトニアンを簡単に導出することが出来る。演算子のこのような性質を利用して、相対論的中性スカラー場は、以下のように熱平衡系の表式に含まれる演算子、 $a_p^\alpha(t), \bar{a}_p^\alpha(t)$ を非平衡系の演算子へ置き換えた形で導入される [3].

$$\phi^\alpha(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \{a_p^\alpha(t_x)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + (\tau_3\bar{a}_p^\alpha(t_x))^T e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\}. \quad (1)$$

このとき、相対論的中性スカラー場が従う自由ハミルトニアン、

$$\hat{H}_Q = \hat{H}_0 - \hat{Q}, \quad (2)$$

は、熱平衡系で現れる自由ハミルトニアン、 \hat{H}_0 に加えて、演算子、 $a_p^\alpha(t), \bar{a}_p^\alpha(t)$ のエネルギー固有値に熱的 Bogoliubov 変換のパラメータ、 $n(t; p)$ からの寄与を含むため、新たに熱的カウンター項と呼ばれる変換パラメータの時間微分項を含む項、 $\hat{Q} \propto \dot{n}(t; p)$ が現れる。

3 非平衡 Thermo Field Dynamics における相対論的 Dirac 場

次に本研究で対象とする相対論的 Dirac 場について述べる。Dirac 場は、粒子に対する演算子、 $a_p^\alpha(t), \bar{a}_p^\alpha(t)$ と反粒子に対する演算子、 $b_p^\alpha(t), \bar{b}_p^\alpha(t)$ の 2 種類の演算子によって記述される。非平衡 TFD では、これら粒子、及び反粒子の演算子は、それぞれ異なる時間に依存した熱的 Bogoliubov 変換パラメータによる変換を受ける。ここでは、粒子演算子に対する変換パラメータを $n_+(t; p)$ 、反粒子演算子に対する変換パラメータを $n_-(t; p)$ と記述する。すると、これらの演算子のエネルギー固有値には、中性スカラー場のときと同様に時間に依存する変換パラメータからの寄与が現れるようになるが、Dirac 場の場合は、粒子、反粒子演算子が、それぞれ異なる変換パラメータ、 $n_\pm(t; p)$ による寄与を受けるため、互いに異なるエネルギー固有値を持つようになる。

これらの演算子を用いて、非平衡系における相対論的 Dirac 場、

$$\psi^\alpha(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_s \{a_p^{s,\alpha}(t_x)u^s(p)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + (\tau_3\bar{b}_p^s(t_x))^T v^s(p)e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\}, \quad (3)$$

を導入すると、この場に含まれる正振動項、 ψ_+ と負振動項、 ψ_- のエネルギー固有値が互いに異なるため、時間発展方程式は、 $\dot{\psi}(x) = C_+(\nabla_x)\psi_+(x) + C_-(\nabla_x)\psi_-(x)$ 、のように、場の正振動項と負振動項が異なる係数、 $C_\pm(\nabla_x)$ により分かれた形となる。そのため、時間発展方程式とハイゼンベルグ方程式との関係が自明ではなくなり、Dirac 場が従うハミルトニアンを簡単に導出することができなくなる。このような相対論的 Dirac 場の正振動項と負振動項が異なるエネルギー固有値を持つ事による問題点は、文献 [2] でも指摘されており、このことから非平衡 TFD で、Dirac 場を扱うことは困難であるとされてきた。しかし、この正振動項と負振動項にみられるエネルギー固有値の不一致は、熱的 Bogoliubov 変換パラメータ、 $n_\pm(t; p)$ の違いが原因であるため、理論の中にこの変換パラメータの違いを記述する項をうまく導入することにより、場の時間発展と無矛盾なハミルトニアンを構築できるのではないかと考える事が出来る。

ここで、もう一度非平衡 TFD のハミルトニアンを見てみると、先に述べたように、自由ハミルトニアン (2) は、熱平衡系に現れる自由ハミルトニアン、 \hat{H}_0 に加えて、時間に依存する変換パラメータ、 $n(t; p)$ に

よる寄与を受けて熱的カウンター項, \hat{Q} を含んでいる. ここで, 中性スカラー場に対する熱的カウンター項を熱的 Bogoliubov 変換を受けた演算子, $\xi_p, \tilde{\xi}_p$ で展開すると以下のように表される.

$$\hat{Q} \propto \dot{n}(t;p) \xi_p^\dagger \tilde{\xi}_p^\dagger, \quad (4)$$

中性スカラー場の場合は 1 種類の熱的 Bogoliubov 変換パラメータのみで理論が記述されるため, 上記の熱的カウンター項によりハミルトニアンを構築することが出来ていた.

しかし, Dirac 場の場合には, $n_\pm(t;p)$ の 2 種類の変換パラメータが現れるため, 変換パラメータの時間依存性を記述する熱的カウンター項も 2 つ必要となる. このような Dirac 場に対する熱的カウンター項は熱的 Bogoliubov 変換を受けた粒子・反粒子演算子, ξ_p, η_p の独立性を利用して以下のように導入される.

$$\hat{Q}_n \propto (n_+(t;p) + n_-(t;p)) (\xi_p^\dagger \tilde{\xi}_p^\dagger + \eta_p^\dagger \tilde{\eta}_p^\dagger), \quad (5)$$

$$\hat{Q}_c \propto (n_+(t;p) - n_-(t;p)) (\xi_p^\dagger \tilde{\xi}_p^\dagger - \eta_p^\dagger \tilde{\eta}_p^\dagger). \quad (6)$$

このように導入された熱的カウンター項, $\hat{Q} = \hat{Q}_n + \hat{Q}_c$, によって, Dirac 場の時間発展に現れる変換パラメータの時間依存性を記述する事が出来き, Dirac 場のハミルトニアンは, 熱平衡系に現れるハミルトニアン, \hat{H}_0 を用いて (2) 式のように表される.

非平衡 TFD では, 相互作用を含んだ系の時間発展を記述するハミルトニアンは, 熱平衡系で与えられるハミルトニアンにより定義される. 熱平衡系における自由ハミルトニアン, \hat{H}_0 , と相互作用ハミルトニアン, \hat{H}_{int} , から成るハミルトニアンを非平衡 TFD で得られる自由ハミルトニアン, \hat{H}_Q によって展開すると,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} = \hat{H}_Q + \hat{H}_{int} + \hat{Q}, \quad (7)$$

となるため, 非平衡 TFD における相互作用ハミルトニアンにも熱的カウンター項による寄与を受けて, $\hat{H}_I = \hat{H}_{int} + \hat{Q}$, となる.

紙面の都合で詳しい説明は省くが, 非平衡 TFD では Chu-Umezawa のくりこみ条件, $\langle \theta | \xi_{full}(t) \tilde{\xi}_{full}(t) | \theta \rangle = 0$, $\langle \theta | \eta_{full}(t) \tilde{\eta}_{full}(t) | \theta \rangle = 0$, と呼ばれる条件の下で, 時間に依存するパラメータ, $n_\pm(t;p)$ がそれぞれ観測される粒子・反粒子数分布に一致する事が知られている [7]. ここで, 添え字の "full" は, 摂動の寄与を含んだ演算子を表している. さらに, これらのくりこみ条件を摂動伝播関数に課した結果として, 粒子・反粒子数分布の時間発展方程式をそれぞれ得られる. また, 文献 [3] では具体的な例として, 湯川型相互作用モデルから得られる最低次の摂動として 1-loop 量子補正の寄与を考慮した議論を行った. その結果, Chu-Umezawa のくりこみ条件により得られた粒子・反粒子数分布の時間発展方程式は, 1 体のボーズ粒子と 2 体のフェルミ粒子の散乱による量子ボルツマン方程式と一致することが確かめられた.

今後は, この正準量子化に基づいた非平衡 TFD の手法をゲージ場に対して応用すると共に, より高次の摂動の寄与から期待されるボルツマン方程式との違いについて調べてゆく予定である.

参考文献

- [1] Y. Mizutani, T. Inagaki, Y. Nakamura and Y. Yamanaka, *Prog. Theor. Phys.* **126** (2011), 681.
- [2] I. Shirai, M. Jimbo and T. Kon, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58**, 2597 (1989).
- [3] Y. Mizutani, T. Inagaki, *Int. J. Mod. Phys. A* **27** (2012), 1250078.
- [4] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro, and Thermal Physics* (American Institute of Physics, New York, 1993).
- [5] T. Arimitsu, H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Int. J. Math. Phys.* **28**, 2741 (1987).
- [6] H. Umezawa and Y. Yamanaka, *Advances in Physics* **37** (1988), 531.
- [7] H. Chu and H. Umezawa, *Int. J. Mod. Phys. A* **10** (1995), 1693.