カシミア効果の繰り込み群アプローチと
物質中の電磁場の幾何学的取り扱い

静岡県立大学食品栄養科学部、一ノ瀬　祥一

1997年頃からString理論、D-brane理論で始まったホログラフィー(AdS/CFT)のアイデアは今では円熟し、さまざまな物質科学に応用されている。物質科学に"高次元"の時空幾何学(一般相対論)が浸透し始めている。ここでは物質中の電磁場を考えてみる。

物質中の電磁場$\mathbf{E},\mathbf{B}$は誘電率ε ($\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$)と透磁率$\mu$ ($\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$)を用いたMaxwell方程式で記述される。εとμの二つのパラメータを使い物質を特徴付けている。物質中のミクロな相互作用を仮定すれば、εおよびμの具体的関数形は求められている。例えばDrude formula。ここではその特徴付けを時間・空間の幾何に基づいて行う。いくつかのモデルが提案されている。

詳しくは文献[1]にあるので、アイデアのみ述べる。物質中の電磁場の全エネルギーを

$$\int d^3x\int d\omega\ \mathcal{E}=\int d^3x\int d\omega\frac{1}{2}(\varepsilon^{ij}E_iE_j+{\mu^{-1}}_{ij}B^iB^j)\qquad(i,j=1,2,3)\quad .\ (1)$$

と表す。ここで、3次元空間の計量$\varepsilon^{ij}(\propto g^{ij})$, $\mu_{ij}(\propto g_{ij})$は誘電率と透磁率の幾何学的拡張である。以下(4)で定義する。

モデル化　STEP 1　　時間t、空間X^iの4次元空間はエネルギーω、運動量K^iで表せる。4次元運動量空間(ω,K^i)の計量として、例えばMinkowski metric

$$ds^2=-d\omega^2+\sum_{i=1}^{3}dK^{i^2}\quad . \qquad (2)$$

を取る。（文献[1]ではdS4およびAdS4の場合も記されている。）

モデル化　STEP 2　　この4次元運動量空間に3次元超曲面

$$\text{Dispersion relation}\quad :\quad (k^i)^2\ =\ p(\omega)^2\quad , \qquad (3)$$

を考える。ここで3次元運動量空間の等方性(isotropy)を使った。$p(\omega)$は超曲面を指定する。この曲面上での計量(induced metric)は

$$g_{ij}(\omega)=\delta_{ij}-\frac{k^ik^j}{(p\dot{p})^2}\quad ,\quad \dot{p}=\frac{dp}{d\omega}\quad . \qquad (4)$$

で与えられる。

モデル化　STEP 3　物質はミクロ構造での相互作用による「ゆらぎ」がある。その効果を統計分布としてとらえ、以下のように幾何学的に定義する。物質の全エネルギーは

$$E(T) = \frac{1}{N}\int_0^\infty d\rho \int_{\substack{p(0)=\rho \\ p(T)=\rho}} \prod_{\omega,i} \mathcal{D}k^i(\omega) \ \times$$
$$\bar{\mathcal{E}}[\bar{\mathbf{A}}(\omega,\mathbf{k})] \exp\left[-\frac{1}{2\alpha'}\int_0^T \sqrt{\dot{p}^2+1}\ p^2 d\omega\right] \quad ,$$
$$\text{where} \quad \bar{\mathcal{E}}[\bar{\mathbf{A}}(\omega,\mathbf{k})] = \frac{1}{2}\Big\{\varepsilon^{ij}(\omega,\mathbf{k})\bar{E}_i(\omega,\mathbf{k})\bar{E}_j(\omega,\mathbf{k}) + \mu^{-1}(\omega,\mathbf{k})_{ij}\bar{B}^i(\omega,\mathbf{k})\bar{B}^j(\omega,\mathbf{k})\Big\}. \tag{5}$$

で与えられる。α' は string tension で、[長さ]$^{-3}$ の次元をもつ新たなモデルパラメータである。境界条件 (p(0)=p(T)=ρ) を満たす、すべての超曲面にわたり面積 A

$$A[p(\omega)] = \int \sqrt{\det g_{ij}} d^3k = \int_0^T \sqrt{\dot{p}^2+1}\ p^2 d\omega \quad . \tag{6}$$

をハミルトニアンとして経路積分している。$T^{-1}=0$ の場合がカシミアエネルギーである。上記の $E(T)$ は $\log\Lambda$ の発散のみ現れる。それは温度パラメータ T^{-1} に繰り込まれる。

References

参考文献

[1] S. Ichinose, ”Renormalization Group Approach to Casimir Effect and the Attractive and Repulsive Forces in Substance”, Talk at Int. Tribology Conf. Hiroshima 2011 (Oct.30-Nov.3, 2011, Hiroshima, Japan), arXiv:1203.2708(cond-mat)